Examen

7 Janvier 2009 à 14h, **Durée : 2h**

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I. (5 points)

1. Donner la définition de la différentiabilité en $(0,0)$ d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = \frac{x^3 + xy - y^3}{|x| + 2|y|} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0); \quad \text{et } f(0,0) = 0.$$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.
   (c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
   (d) La fonction f est-elle de classe C^1 dans un voisinage de $(0,0)$? Justifier votre réponse.

Exercice II. (5 points) Soit $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | v > 0\}$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \to V$ définie par $\phi(x,y) = (xe^y, e^y)$.

1. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur V.
2. On cherche les solutions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation aux dérivées partielles
$$x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = -e^y. \qquad (E)$$
   On pose $f = g \circ \phi$, c'est à dire que $f(x,y) = g(u,v)$ où $(u,v) = (xe^y, e^y)$.
   (a) Trouver l'équation aux dérivées partielles (E') que vérifie g, quand f est solution de l'équation (E).
   (b) Résoudre l'équation (E'), et en déduire les solutions f de l'équation (E) .

Exercice III. (3 points) Calculer $\iint_D x^2y\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

Exercice IV. (7 points) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 3,\ y \geq x^2\}$. Le bord orienté Γ^+ de D est composé de deux parties que l'on note par Γ_1^+ la partie sur la courbe $y = x^2$ et Γ_2^+ la partie sur la courbe $x^2 + (y-1)^2 = 3$.

1. (a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points d'intersection des deux courbes $y = x^2$ et $x^2 + (y-1)^2 = 3$. Faire un dessin représentant D, Γ_1^+ et Γ_2^+ (pour le dessin on pourra utiliser les valeurs approchées : $\sqrt{2} \approx 1,4$ et $\sqrt{3} \approx 1,7$).
   (b) Calculer $\iint_D (y-1)dxdy$.
2. Soit $\omega = ydx + xydy$ une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Est-ce que ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.
   (b) Calculer $\int_{\Gamma_1^+} \omega$.
3. (a) Justifier une relation entre les trois intégrales $\iint_D (y-1)dxdy$, $\int_{\Gamma_1^+} \omega$ et $\int_{\Gamma_2^+} \omega$.
   (b) En déduire $\int_{\Gamma_2^+} \omega$.