Examen, le 11 janvier 2007 à 8h, **Durée : 3h**
Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1. (a) Donner la définition de la différentiabilité en $(0,0)$ d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Soit n un entier positif ou nul. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3y^n}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
ii) Pour quelles valeurs de n la fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
iii) Pour quelles valeurs de n la fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
iv) On suppose que $n = 1$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$, calculer l'intégrale triple

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz.$$

Exercice 3. Soit $\omega = (z+y)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ une forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que ω est exacte sur $\mathbb{R}^3$.

(b) On note $\Gamma = (I, \gamma)$ l'arc paramétré de $\mathbb{R}^3$ défini par : $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Calculer $\int_\Gamma \omega$ de deux manières :

(i) En utilisant la définition d'une intégrale curviligne.

(ii) En cherchant une primitive de ω sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 < y\}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (xy, x+y)$ et $V = \varphi(U)$.

a) Montrer que φ est un changement de variables (difféomorphisme) de classe C^1 de U sur

$$V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0\}.$$

Donner l'expression de l'application réciproque $\varphi^{-1}(u,v)$.

b) On cherche les solutions f de classe C^1 sur U de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y-x).$$

On pose $f(x,y) = F(u,v)$ où $u = xy, v = x+y$.

(i) Trouver l'équation aux dérivées partielles que vérifie F.
(ii) Résoudre l'équation pour F et en déduire les solutions pour f.

c) Soit $D = \{(x,y) \in U \mid 0 \leq x+y \leq 1, \ -\pi \leq xy \leq -\frac{\pi}{2}\}$. En utilisant le changement de variables $(x,y) = \varphi^{-1}(u,v)$, calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D (x+y)(y-x)\cos(xy)dxdy$.