Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Parcours SPI – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 22 B

Corrigé du Devoir Surveillé 1
6 Novembre 2010 à 10h30. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Questions de Cours.

(1) Par exemple, on peut prendre $f(x,y) = \ln((x-1)^2+y^2)$ pour $(x,y) \neq (1,0)$ et $f(1,0)=0$. (**0.75pt** si la fonction n'est pas définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, **1pt** si elle l'est)

(2) (**1.5pt**) On écrit $g=(g_1,g_2)$. On a

$$(f\circ g)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \times g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \times g_2'(t).$$

(3) (**1.5pt**) On écrit $f=(f_1,f_2,f_3)$. On a

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

(1) On a $|f(x,y)| = \left|\frac{xy^2-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right| \leq \frac{\max(|x|,|y|)^3+\max(|x|,|y|)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$. En utilisant que $\max(|x|,|y|) \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, on trouve que $|f(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \leq (x^2+y^2) + (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. On pose $\theta(r)=r^2+r$. On a alors

$$\lim_{r\to 0}\theta(r) = 0 \text{ et } |f(x,y)| \leq \theta(\|(x,y)\|)$$

pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. D'après le lemme des gendarmes, f tend vers 0 en 0. (**1.5pt**)

(2) On a $|f(x,y)| = |xy||\ln(x^2+y^2)| \leq \max(|x|,|y|)^2|\ln(x^2+y^2)|$. En utilisant que $\max(|x|,|y|) \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, on trouve que $|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|$ pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. On pose $\theta(r) = r^2|\ln r^2|$. On a alors

$$\lim_{r\to 0}\theta(r) = 0 \text{ et } |f(x,y)| \leq \theta(\|(x,y)\|)$$

pour (x, y) dans $\mathbb{R}^2$. D'après le lemme des gendarmes, f tend vers 0 en 0. (**1.5pt**)

(3) Pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, on a $f(t,t) = \frac{\sin t}{2t^2} \geq \frac{1}{\pi t}$. Ainsi, f tend vers l'infini le long de l'arc en 0 défini par $t \mapsto (t, t)$. D'après le cours, on en déduit que f n'a pas de limite en 0. (**1pt**)

Exercice 2

On définit

$$f(x, y) := \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2}.$$

(1) f est bien définie si $x^2 + y^2 \neq 0$ et $x^2 \neq 0$. Puisque la seconde condition implique la première, on en déduit que $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. (**0.5pt**)

(2) (**1.5pt**) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y}{x^3}.$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2}.$$

(3) Le long de l'arc $t \mapsto (t, 1)$ au point $(0, 1)$, la fonction f vaut $\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{1}{t^2}$ et cette fonction tend vers l'infini quand t tend vers 0. D'après le cours, on sait alors que f n'a pas de limite en $(1, 0)$.
Si f se prolongeait en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, alors, d'après le cours, elle se prolongerait en une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, elle aurait une limite en $(1, 0)$ (ce qui n'est pas le cas). La fonction f n'a pas de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. (**2pt**)

Exercice 3

On définit :

$$f(x, y, z) = x^{yz}.$$

(1) On a $f(x, y, z) = \exp(yz \ln x)$. La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et la fonction exp sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que $D =]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (**0.5pt**)

(2) f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$. (**0.5pt**)
On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{x} \exp(yz \ln x) = \frac{yz}{x} x^{yz} (\mathbf{0.5pt}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z \ln x \exp(yz \ln x) = z(\ln x) x^{yz} (\mathbf{0.5pt}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \ln x \exp(yz \ln x) = y(\ln x) x^{yz} (\mathbf{0.5pt}).$$

(3) (**1.5pt**) On pose $h(t) = (t, t, t)$. Les applications f et h étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a, d'après le théorème de composition des dérivées partielles,

$$g'(t) = (f \circ h)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(h(t)) \times 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(h(t)) \times 1 + \frac{\partial f}{\partial z}(h(t)) \times 1.$$

On en déduit que

$$g'(t) = t^{t^2}\,(t + t\ln t + t\ln t) = (1 + 2\ln t)t^{t^2+1}.$$

Exercice 4

On considère sur $\mathbb{R}^3$ l'EDP suivante :

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} + 3\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

On se donne f une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de cette EDP sur $\mathbb{R}^3$. On pose

$$\varphi(u, v, w) = (u, v + 2u, w + 3u).$$

(1) (**1.5pt**) On pose $g(u, v, w) = f \circ \varphi(u, v, w)$. D'après le théorème de composition pour les dérivées partielles appliqué à f et φ (qui sont de classe $\mathcal{C}^1$), on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v, w)) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v, w)) \times 2 + \frac{\partial f}{\partial z}(g(u, v, w)) \times 3.$$

Comme f est solution de l'EDP donné dans l'énoncé, on en déduit que g vérifie l'EDP :

$$\frac{\partial}{\partial u}(u + g) = 1 + \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

(2) (**1.5pt**) Soit g une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'EDP précédente. De la question 1, on déduit qu'il existe h de classe $\mathcal{C}^1$ ne dépendant que de v et w telle que $g(u, v, w) = h(v, w) - u$.

(3) (**1pt**) Si f est solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'EDP de l'énoncé, alors, d'après les questions précédentes, $g(u, v, w) = f \circ \varphi(u, v, w) = h(v, w) - u$, avec h de classe $\mathcal{C}^1$. On en déduit que $f(x, y, z) = g \circ \varphi^{-1}(x, y, z) = h(y - 2x, z - 3x) - x$, avec h de classe $\mathcal{C}^1$.