Corrigé : Examen janvier 2009 Math 202 SPI

Exercice I. (5 points)

1. Donner la définition de la différentiabilité en $(0,0)$ d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3 + xy - y^3}{|x| + 2|y|} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0); \quad \text{et } f(0,0) = 0.$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.
   (c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
   (d) La fonction f est-elle de classe C^1 dans un voisinage de $(0,0)$? Justifier votre réponse.

Corrigé.

1. Une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est différentiable en un point a de $\mathbb{R}^n$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ telle que $g(a+h) = g(a) + L(h) + ||h||\epsilon(h)$, où $\epsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$.
2. (a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|x| + 2|y| \neq 0$, f est continue en (x,y).

   Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|f(x,y)| \leq \frac{|x|^3+|xy|+|y|^3}{|x|+2|y|} \leq |x|^2 + |y| + \frac{1}{2}|y|^2 \to 0$. Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, f est continue en $(0,0)$.

   (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = \lim |x| = 0$,

   $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{2|y|} = \lim -\frac{|y|}{2} = 0$.

   (c) Soit $\epsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3+xy-y^3}{(|x|+2|y|)\sqrt{x^2+y^2}}$. f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \epsilon(x,y) = 0$. Or $\epsilon(x,x) = \frac{x^2}{3\sqrt{2}x^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \not\to 0$. Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

   (d) f non différentiable en $(0,0)$, donc n'est pas de classe C^1 dans un voisinage de $(0,0)$.

Exercice II. (5 points) Soit $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | v > 0\}$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \to V$ définie par $\phi(x,y) = (xe^y, e^y)$.

1. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur V.
2. On cherche les solutions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = -e^y. \qquad (E)$$

   On pose $f = g \circ \phi$, c'est à dire que $f(x,y) = g(u,v)$ où $(u,v) = (xe^y, e^y)$.

   (a) Trouver l'équation aux dérivées partielles (E') que vérifie g, quand f est solution de l'équation (E).
   (b) Résoudre l'équation (E'), et en déduire les solutions f de l'équation (E) .

Corrigé.

1. $\forall (u,v) \in V$ $(v > 0)$, $\phi(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow u = xe^y, v = e^y \Leftrightarrow y = \ln v$ car $v > 0$, $x = u/v$. (x,y) existe et est unique. Donc ϕ est bijectif de $\mathbb{R}^2$ sur V.

   ϕ est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Et $\det J_\phi(x,y) = \begin{vmatrix} e^y & xe^y \\ 0 & e^y \end{vmatrix} = e^{2y} \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur V.

   (On peut aussi dire que $\phi : \mathbb{R}^2 \to V$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et $\phi^{-1} : V \to \mathbb{R}^2, (u,v) \to (u/v, \ln v)$ est de classe C^1 sur V.)

2. (a) On a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = e^y \frac{\partial g}{\partial u}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = xe^y \frac{\partial g}{\partial u} + e^y \frac{\partial g}{\partial v}$

   Donc f est solution de l'équation (E) SSI $-e^y \frac{\partial g}{\partial v} = -e^y \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial v} = 1$.

   (b) Si g est une fonction de classe C^1 sur V solution de l'équation $\frac{\partial g}{\partial v} = 1$, alors $g(u, v) = v + h(u)$, où h est une fonction quelconque de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   D'où $f(x, y) = e^y + h(xe^y)$.

Exercice III. (3 points) Calculer $\displaystyle\iint_D x^2 y dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

Corrigé. Première méthode : D est simple par rapport à x, avec $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$.
Donc $\iint_D x^2 y dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x^2 y dy = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2(2x - x^2)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5)\Big|_0^2 = \frac{4}{5}$.

Deuxième méthode : On utilise les coordonnées polaires. Avec $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, on a $(x, y) \in D$ SSI : $r^2 \leq 2r\cos\theta \Rightarrow 0 \leq r \leq 2\cos\theta$; $y \geq 0$ (*i.e.* $\sin\theta \geq 0$) et $\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Donc $(x, y) \in D$ SSI $(r, \theta) \in \Delta = \{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], 0 \leq r \leq 2\cos\theta\}$. On obtient alors

$$\iint_D x^2 y dxdy = \iint_\Delta r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta \cdot rdrd\theta = \iint_\Delta r^4\cos^2\theta\sin\theta drd\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^4\cos^2\theta\sin\theta dr = \frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\sin\theta d\theta = -\frac{32}{5}\frac{1}{8}\cos^8\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Exercice IV. (7 points) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 3,\ y \geq x^2\}$. Le bord orienté Γ^+ de D est composé de deux parties que l'on note par Γ_1^+ la partie sur la courbe $y = x^2$ et Γ_2^+ la partie sur la courbe $x^2 + (y-1)^2 = 3$.

1. (a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points d'intersection des deux courbes $y = x^2$ et $x^2 + (y-1)^2 = 3$. Faire un dessin représentant D, Γ_1^+ et Γ_2^+ (pour le dessin on pourra utiliser les valeurs approchées : $\sqrt{2} \approx 1,4$ et $\sqrt{3} \approx 1,7$).

   (b) Calculer $\displaystyle\iint_D (y-1)dxdy$.

2. Soit $\omega = ydx + xydy$ une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$.

   (a) Est-ce que ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.

   (b) Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_1^+} \omega$.

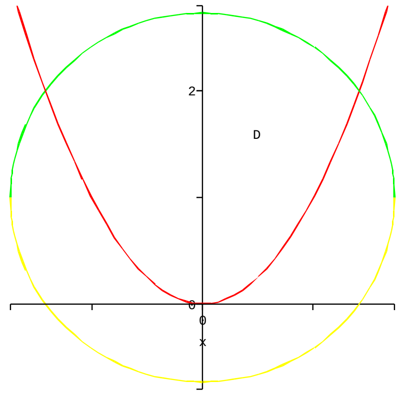
3. (a) Justifier une relation entre les trois intégrales $\displaystyle\iint_D (y-1)dxdy$, $\displaystyle\int_{\Gamma_1^+} \omega$ et $\displaystyle\int_{\Gamma_2^+} \omega$.

   (b) En déduire $\displaystyle\int_{\Gamma_2^+} \omega$.

Corrigé.

1. (a) On résout le système de deux équations :

   $y = x^2$ et $x^2 + (y-1)^2 = 3 \Leftrightarrow y = x^2$ et $y + (y-1)^2 = 3 \Leftrightarrow y = x^2$ et $y^2 - y - 2 = 0$ $\Leftrightarrow y = x^2 \geq 0$, et $y = 2$ ou $y = -1$ (impossible) $\Leftrightarrow x^2 = 2$ et $y = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ et $y = 2$.
   On obtient deux points d'intersection : $(\pm\sqrt{2}, 2)$.



(b) D est simple par rapport à x, avec $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, $x^2 \leq y \leq 1 + \sqrt{3 - x^2}$. Donc

$\iint_D (y-1)dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{1+\sqrt{3-x^2}} (y-1)dy = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [3 - x^2 - (x^2-1)^2]dx$

$= \frac{1}{2}[2x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5]\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{28}{15}\sqrt{2}.$

2. (a) $\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y \neq \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$, ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) On paramétre $\Gamma_1^+ : x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to (x, x^2)$. D'où

   $\int_{\Gamma_1^+} \omega = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^2 + xx^2 2x)dx = [\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5]\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{68}{15}\sqrt{2}.$

3. (a) D'après Green-Riemann, $\int_{\Gamma^+} \omega = \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y)]dxdy = \iint_D (y-1)dxdy$.
   Or $\int_{\Gamma}^{+} \omega = \int_{\Gamma_1^+} \omega + \int_{\Gamma_2^+} \omega$, donc $\iint_D (y-1)dxdy = \int_{\Gamma_1^+} \omega + \int_{\Gamma_2^+} \omega$.

   (b) On en déduit que $\int_{\Gamma_2^+} \omega = \iint_D (y-1)dxdy - \int_{\Gamma_1^+} \omega = \frac{28}{15}\sqrt{2} - \frac{68}{15}\sqrt{2} = -\frac{8}{3}\sqrt{2}$.