Corrigé examen janvier 2008, M202 SPI

Exercice I. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{y^4 - x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0); \quad \text{et } f(0,0) = 0.$$

(a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
(b) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et préciser sa différentielle $df(0,0)$.

Corrigé.

(a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|f(x,y)| \leq \frac{y^4+|x^3|+|xy^2|}{x^2+y^2} \leq y^2 + 2|x| \to 0$. D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Donc f est continue en $(0,0)$.

(b) On calcule d'abord les dérivées partielles de f en $(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0} -1 = -1$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$,

D'après des résultats du cours, f est différentiable en $(0,0)$ SSI $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \epsilon(x,y) = 0$, où $\epsilon(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Or $\epsilon(x,y) = \frac{\frac{y^4-x^3-xy^2}{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ et

$\epsilon(x,y) \leq |y| \to 0$, donc f est différentiable en $(0,0)$.

La différentielle de f en $(0,0)$ est $df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = -dx$.

Exercice II. 1. Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\omega = (e^y y \cos(xy))\, dx + e^y \left[1 + x\cos(xy) + \sin(xy)\right] dy.$$

(a) Montrer que ω est exacte sur $\mathbf{R}^2$.

(b) Déterminer les fonctions F telles que $\omega = dF$.

(c) Donner la valeur de $\displaystyle\int_{\mathcal{C}^+} \omega$ où $\mathcal{C}^+$ est le demi-cercle unité supérieur de $\mathbf{R}^2$ orienté dans le sens trigonométrique.

2. (a) Enoncer le théorème de Green-Riemann.

(b) Utiliser le théorème de Green-Riemann pour calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_{\mathcal{C}^+} y\cos x dx + (x + \sin x)dy$$

où $\mathcal{C}^+$ est le cercle $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ orienté dans le sens trigonométrique.

Corrigé.

1.(a) $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y y\cos(xy) + e^y \cos(xy) - e^y xy\sin(xy)$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^y\left[\cos(xy) - xy\sin(xy) + y\cos(xy)\right] = \frac{\partial P}{\partial y}$, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Donc ω est fermée sur $\mathbf{R}^2$.

Or $\mathbf{R}^2$ est convexe donc ω est exacte sur $\mathbf{R}^2$.

(b) $\omega = dF$ SSI $\frac{\partial F}{\partial x} = e^y y\cos(xy)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = e^y\left[1 + x\cos(xy) + \sin(xy)\right]$. On en déduit que

$F(x,y) = e^y \sin(xy) + g(y)$ où $g(y)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

En dérivant par rapport à y, on obtient $g'(y) = e^y$, d'où

$F(x,y) = e^y\sin(xy) + e^y + C$, où C est une constante.

(c) Comme ω est exacte, on a $\int_{\mathcal{C}^+} \omega = F(-1,0) - F(1,0) = e^{-1}$.

2.(a) Quastion de cours.

(b) D'après le théorème de Green-Riemann,

$\int_{\mathcal{C}^+} y\cos x dx + (x + \sin x)dy = \iint_D dxdy = 4\pi$, où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Exercice III. 1. Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$.

2. On pose pour $a > 0$, $D_a = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Calculer $\displaystyle\iint_{D_a} x^2y^2dxdy$.

3. Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Calculer $\displaystyle\iiint_D x^2y^2z^2dxdydz$

   a) En utilisant le théorème de Fubini pour D simple par rapport à z;

   b) En utilisant les coordonnées sphériques.

Corrigés.

1. On a $\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1 - \cos(4\theta))$. Donc
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{8}(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(4\theta)d\theta = \frac{\pi}{4}$.

2. On utilise les coordonnées polaires $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Alors $(x, y) \in D_a$ ssi $0 \leq r \leq a, -\pi \leq \theta \leq \pi$. Donc
$\iint_{D_a} = \int_0^a dr \int_{-\pi}^{\pi} r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta r d\theta = \frac{1}{6}a^6\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{24}a^6\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta = \frac{1}{24}a^6\pi$.

3. a) D est simple par rapport à z :
$z \in [-1, 1], (x, y) \in \Delta_z = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\} = D_a$ où $a = \sqrt{1 - z^2}$. Donc
$\iiint_D = \int_{-1}^1 dz \iint_{D_{\sqrt{1-z^2}}} x^2y^2z^2dxdy = \int_{-1}^1 z^2\frac{1}{24}(1 - z^2)^3\pi dz$
$= \frac{\pi}{24}\int_{-1}^1(z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8)dz = \frac{\pi}{24}(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} + \frac{6}{7} - \frac{2}{9}) = \frac{4\pi}{7\times9\times15}$

b) On utilise les coordonnées sphériques : $x = r\cos\theta\sin\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\phi$.
On a alors $(x, y, z) \in D$ ssi $(r, \theta, \phi) \in \Delta = \{(r, \theta, \phi)|0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$. D'où
$\iiint_D = \iiint_\Delta(r^2\cos^2\theta\sin^2\phi r^2\sin^2\theta\sin^2\phi r^2\cos^2\phi)(r^2\sin\phi)drd\theta d\phi$
$= \int_0^1 r^8dr\int_0^\pi \sin^5\phi\cos^2\phi d\phi\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{9}\frac{\pi}{4}\int_0^\pi(1 - \cos^2\phi)^2\cos^2\phi\sin\phi d\phi$
$= \frac{1}{9}\frac{\pi}{4}\int_0^\pi(\cos^2\phi - 2\cos^4\phi + \cos^6\phi)\sin\phi d\phi = \frac{1}{9}\frac{\pi}{4}(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7}) = \frac{\pi}{9}\frac{4}{15\times7}$

Exercice IV. Soient $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2|x > y\}$ et $V\{(u, v) \in \mathbf{R}^2|2v^2 + u > 0\}$ deux ouverts de $\mathbf{R}^2$, et l'application $\phi : U \to V$ définie par $\phi(x, y) = (x^2 - y^2 - 2xy, y) = (u, v)$.

1. (a) Montrer que ϕ est une bijection de U sur V (on explicitera $\phi^{-1}(u, v)$).

   (b) Justifier le fait que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur V.

2. Soit $F : V \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1, on pose $f = F \circ \varphi$, autrement dit, pour $(x, y) \in U$, $f(x, y) = F(u, v)$.

   (a) Exprimer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$.

   (b) Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(x + y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Corrigés.

1. (a) On montre que pour tour $(u, v) \in V$, il existe un unique $(x, y) \in U$ tel que $\phi(x, y) = (u, v)$.
$\phi(x, y) = (u, v)$ SSI $x^2 - y^2 - 2xy = u, y = v \Leftrightarrow x = v \pm \sqrt{2v^2 + u}, y = v$. Or $x > y$ donc
$x = v + \sqrt{2v^2 + u}, y = v$.
Donc ϕ est une bijection de U sur V. On a $\phi^{-1}(u, v) = (v + \sqrt{2v^2 + u}, v)$.

(b) Comme ϕ est C^1 sur U et ϕ^{-1} est C^1 sur V (car $2v^2 + u > 0$), ϕ est un C^1-diffeomorphisme de U sur V.

2. (a) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = (2x-2y)\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = (-2y-2x)\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v}$

(b) En utilisant (a), on a
$(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial y} = (x+y)(2x-2y)\frac{\partial F}{\partial u} + (x-y)(-2y-2x)\frac{\partial F}{\partial u} + (x-y)\frac{\partial F}{\partial v} = (x-y)\frac{\partial F}{\partial v} = 0$,
donc $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ car $x - y > 0$. D'où $F(u, v) = k(u)$ sur V, où $k(u)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. On en déduit que $f(x, y) = k(x^2 - y^2 - 2xy)$ sur U.