Examen seconde session

le 1er septembre 2009, **Durée : 2h**

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I. (5 points)

1. Donner la définition de la différentiabilité en $(0,0)$ d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0); \quad \text{et } f(0,0) = 0.$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.
   (c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
   (d) La fonction f est-elle de classe C^1 dans un voisinage de $(0,0)$? Justifier votre réponse.

Exercice II. (6 points) Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Calculer $\iint_D (x-y)^2 dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2; 0 \leq y \leq x\}$ (On peut utiliser les coordonnées polaires).
2. Calculer $\int_\Gamma ydx + y^2dy$ où Γ est le cercle dans $\mathbb{R}^2$ de centre $(1,0)$ et de rayon 1.
3. Calculer $\int_C zdx + xdy + ydz$ où C est la courbe dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $\begin{cases} x + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$

Exercice III. (9 points) Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère la forme différentielle $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ avec

$$P(x,y) = y\left(1 + \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\right), \quad Q(x,y) = -x\left(1 + \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\right)$$

définie sur U, où f est une fonction de classe C^1 sur U.

1. Monter que ω est exacte sur U si et seulement si f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -2(x^2+y^2) \qquad (E)$$

2. Soit $\phi : U \to R^2$ définie par $\phi(x,y) = (\frac{y}{x}, x^2 + y^2)$.
   (a) Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur l'ouvert $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | v > 0\}$.
   (b) Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) en utilisant le changement de variables ϕ, c'est-à-dire que, en posant $f(x,y) = F(u,v)$ où $u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2$.
3. On choisit $f(x,y) = 1 + \frac{y^2}{x^2} - (x^2 + y^2)$. Trouver une primitive de ω.
4. Calculer $\int_{C_1} \omega$ où C_1 est le demi cercle supérieur de diamètre $[AB]$ de $A(1,2)$ vers $B(3,2)$.