08/10/2018

G.T. 3ième pb de Hilbert
Théorème de Sydler

<u>Théorème</u> [Sydler 1965 ; Jessen 1968]
Deux polyèdres de l'espace euclidien sont équivalents par décomposition si, et seulement si, ils ont même volume et même invariant de Dehn.

<u>Cadre</u> : $\mathbb{R}^3$ espace affine euclidien

- polyèdre : réunion finie de simplexes dans $\mathbb{R}^3$
- simplexe de dimension d : $[s_0, s_1, \dots, s_d] = \left\{ \underbrace{\sum_{i=0}^{d} c_i s_i}_{\text{barycentre}} ; c_i \geq 0, \sum_{i=0}^{d} c_i = 1 \right\}$
(ou d-simplexe)
$\underbrace{}_{\text{points de } \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \{\vec{s_0s_1}, \vec{s_0s_2}, \dots, \vec{s_0s_d}\} \text{ soit libre}}$ = enveloppe convexe de $(d+1)$ points $s_0, s_1, \dots, s_d$

ex : 0-simplexe = point
1-simplexe = intervalle
2-simplexe = triangle
3-simplexe = tétraèdre

<u>Def</u> :
- Un polyèdre est dit <u>dégénéré</u> si tous ses simplexes sont de dimension < 3.
- Un polyèdre P est dit <u>décomposé</u> par les polyèdres $P_1, \dots, P_n$ si $\begin{cases} P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n \\ i \neq j \Rightarrow P_i \cap P_j \text{ dégénéré} \end{cases}$
- Deux polyèdres P et P' sont <u>équivalents par décomposition</u> s'ils admettent des décompositions $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ et $P' = P'_1 \cup \dots \cup P'_n$ t.q. $\forall i$ P_i et P'_i sont isométriques (i.e. $\exists g_i$ déplacement de $\mathbb{R}^3$ t.q. $P'_i = g_i(P_i)$)

<u>Exemple</u>
Un prisme peut se décomposer en un pavé (droit)

- Le volume d'un 3-simplexe $[s_0, s_1, s_2, s_3]$ est égal à $\frac{1}{3!} |\det(\vec{s_0s_1}, \vec{s_0s_2}, \vec{s_0s_3})|$;
les volumes des d-simplexes pour $d < 3$ sont nuls. On montre que la notion de volume s'étend aux polyèdres et vérifient les conditions suivantes

a. $V(P \cap P') + V(P \cup P') = V(P) + V(P')$
b. P dégénéré $\Rightarrow V(P) = 0$
c. si g est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ alors $V(g(P)) = V(P)$

(cf. exposé 1)
<u>Prisme</u> : solide géométrique délimités par deux polygones (bases) images l'un de l'autre par une translation ; les bases sont reliées entre elles par les parallélogrammes.

<u>Notation</u> :
$\mathcal{P}$ <u>groupe abélien</u>
- engendré par les polyèdres P
- et avec relations
  - $[P] = 0$ si P dégénéré
  - $[P \cup P'] = [P] + [P']$ si $[P \cap P'] = 0$
  - $[g(P)] = [P]$ si g déplacement

Def Un <u>invariant de découpage</u> I est une application $I : \{\text{Polyèdres de } \mathbb{R}^3\} \longrightarrow A$ qui vérifie les 3 mêmes conditions a, b, c, les calculs se faisant dans un groupe abélien A (pour V, $A = (\mathbb{R}^*, +)$). Cela revient à demander que I induise un morphisme de groupes
$$\boxed{I : \mathcal{P} \to A}$$

<u>Définition</u> (Invariant de Dehn)
Si P est un polyèdre de $\mathbb{R}^3$ on pose $D(P) = \sum_{a \text{ arête de } P} |a| \otimes \delta_a \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi)$

où $|a|$ est la longueur de l'arête a et δ_a son angle dièdre :
si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont les vecteurs normaux unitaires des deux faces adjacentes à l'arête a <u>et</u> pointant vers l'extérieur du polyèdre alors $\delta_a = \arccos(-\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}) \in \mathbb{R}/\pi$

n_1
δ_a
n_2
vue dans l'axe de l'arête a.

II

$D(ABCD) = 6$ termes
$D(ABCI)+D(ABDI) = 12$ termes
- 2 avec $|AI| \otimes$ — donnent 0
- 2 — $|IB| \otimes$ —
- 2 termes $|CI|$ et $|ID|$ s'additionnent
- 2 termes avec $|AB|$ s'additionnent

<u>Proposition</u> : D est un invariant de découpage.

<u>Démonstration</u> : il suffit de vérifier l'additivité lorsque P et P' sont des tétraèdres ~~avec une face commune~~ qui décomposent un tétraèdre i.e. $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$ lorsque P est un tétraèdre décomposé par deux tétraèdres P_1 et P_2 d'intersection vide.

(cf. feuille jointe).

<u>Remarque</u> : D est un invariant de poids 1 car $D(\underset{\text{homothétique de } P \text{ par rapport } t}{t.P}) = |t| \otimes D(P)$ (les longueurs des arêtes sont multipliées par $|t|$)

<u>Exemples</u>.

- <u>C un cube unité</u> : 12 arêtes et angles dièdres droits

d'où $D(C) = 12 \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\pi}{2} = 6 \otimes_{\mathbb{Z}} \pi = 0 \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi$ (idem pour les pavés)

- <u>T tétraèdre régulier d'arête 1</u> : 6 arêtes et angles dièdres $\theta = \arccos(1/3)$

d'où $D(T) = 6 \otimes_{\mathbb{Z}} \theta \neq 0 \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi$

$\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel $\left\{ \begin{array}{l} \text{utiliser } \cos(q\theta) = T_q(\theta) \text{ (polynôme de Chebyshev)} \\ \text{donc} \\ \theta = \frac{p}{q}\pi \Rightarrow \pm 1 = T_q(\cos\theta) \end{array} \right.$
$= T_q(1/3)$
$= 2^{q-1}(1/3)^q + \dots$
absurde.

Ainsi T n'est pas équivalent par découpage au cube de même volume.

- Si P est un <u>prisme</u> alors $D(P) = 0$ (en se ramenant aux pavés)
- $T(a,b)$ = tétraèdre $ABCD$ dont les arêtes AB de longueur $\sqrt{\frac{1}{a} - 1} = \cotan(\alpha)$,

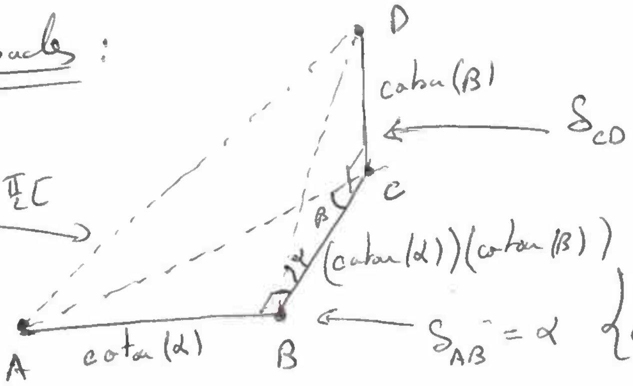
$a \in]0,1[\quad a = \sin^2(\alpha)$ avec $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$
$b \in]0,1[\quad b = \sin^2(\beta)$ — $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

CD de longueur $\sqrt{\frac{1}{b} - 1} = \cotan(\beta)$,

$\left((\cotan(\alpha))^2 = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1 - \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1}{a} - 1 \right)$

et BC de longueur $AB \times CD$

sont <u>orthogonales</u> :



$S_{CD} = \beta$ { triangle rectangle ABC

<u>Exercice</u> : $S_{AD} = \frac{\pi}{2} - \alpha * \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$
où
$\sin^2(\alpha * \beta) = ab$

$S_{AB} = \alpha$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{triangle rectangle } BCD \\ \cotan(S_{AB}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{opposé}} = \frac{BC}{CD} = \cotan(\alpha) \end{array} \right.$

Les invariants de $T(a,b)$ sont : $\left\{ \begin{array}{l} N(T(a,b)) = v(a) + v(b) - v(ab) \text{ avec } v(x) = \frac{x-1}{6x} \\ D(T(a,b)) = \cotan(\alpha) \otimes \alpha + \cotan(\beta) \otimes \beta - \cotan(\alpha * \beta) \otimes \underbrace{\alpha * \beta'}_{S_{AD}} \end{array} \right.$

$\frac{\pi}{2} - \alpha * \beta$

III Démonstration du th. de Sydler :

Il faut démontrer $V(P) = V(P')$ et $D(P) = D(P') \Rightarrow P \sim P'$

On admet que $[P] = [P'] \Rightarrow P \sim P'$ (Sydler 1943 ; généralisé en toute dimension par Zylev en 1968)

ce qui nous ramène à démontrer l'injectivité du morphisme $\mathcal{P} \xrightarrow{(V,D)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi$.

$$P \longmapsto (V(P), D(P))$$

1ère étape : "réduction du pb à un e.v"

en se ramenant aux cubes

On note Z le sous-groupe de $\mathcal{P}$ engendré par les prismes ; $D(Z) \overset{*}{=} 0$

donc D induit un morphisme de groupes $\overline{D} : \mathcal{P}/Z \longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi$.

Puisque $V_{|Z}$ ~~est~~ injective (décomposition d'un prisme en cube de même volume)

il reste donc à démontrer que $\overline{D}$ est injective.

Cette réduction du pb a un second intérêt :

Lemme A : L'action de $\mathbb{R}^{\times}$ sur $\mathcal{P}/Z$ via $t.[P] = \begin{cases} [tP] & \text{si } t > 0 \\ -[|t|P] & \text{si } t < 0 \end{cases}$

définit une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur $\mathcal{P}/Z$.

Démonstration :

- Z stable par l'action donc $\mathbb{R}$ agit sur $\mathcal{P}/Z$.
- $\forall t \in]0,1[$ on a $[P] = t.[P] + (1-t).[P]$ dans $\mathcal{P}/Z$

il suffit de le vérifier sur les tétraèdres : cf. découpage / feuille jointe.

- cela permet de démontrer la distributivité

$$(t_1 + t_2).[P] = t_1.[P] + t_2[P]$$

- la distributivité $t.([P] + [Q]) = t.[P] + t[Q]$ est immédiate. $\square$

Fin de l'exposé 1

2ième étape : $a, b, c \in]0,1[$. $X_{a,b,c} = T(a,b) + T(ab,c)$

"Le cocycle $T_{...}$ est un cobord"

et $Y_{a,b,c} = T(a,c) + T(ac,b)$

ont même volume et même invariant de Dehn ($\cot(\alpha)\otimes\alpha + \cot(\beta)\otimes\beta + \cot(\gamma)\otimes\gamma - \cot(\alpha*\beta*\gamma)\otimes(\alpha*\beta*\gamma)$)

Un argument géométrique (cf Jessen pp 248-249) permet de démontrer mieux : $X_{a,b,c} \sim Y_{a,b,c}$.