Exposé au Groupe de travail Angers-Nantes 2012-2013
. 02/2013

Homologie du groupe exponentiel d'une algèbre de Lie nilpotente. Partie I

Jean-Claude Thomas

Introduction. L'objet de cet exposé est :

1. d'expliciter un modèle simplicial du fibré principal universel $EG \to BG$ lorsque G est un groupe discret (§1),
2. de définir le groupe exponentiel d'une algèbre de Lie , ainsi que l'algèbre de Lie logarithmique d'un groupe discret (§2,3,4),

ceci afin de permettre dans un second exposé, de présenter une démonstration du théorème 5.11 de l'article [19] énoncé ci-dessous.

Théorème. *Si L est une algèbre de Lie pro-nilpotente alors existe un homomorphisme de chaînes*

$$C_*(B_\bullet \exp L; \Bbbk) \to \mathcal{C}_*(L)\,, \tag{1}$$

où

1. *$C_*(X_\bullet; \Bbbk)$ = le complexe des chaînes singullères de l'espace simplicial $X_\bullet$*
2. *$\mathcal{C}_*(L) = (\wedge sL, d)$ = le complexe de Cartan-Eilenberg des chaînes sur L,*

qui est naturel en L et qui induit un isomorphisme entre l'homologie rationnelle du groupe $\exp L$ et l'homologie de l'algèbre de Lie L,

$$H_*^{gr}(\exp L; \mathbb{Q}) \cong H_*^{Lie}(L)\,. \tag{2}$$

Outre les définitions, une partie des techniques introduites dans ce premier exposé sera utilisée dans le second exposé lors de la démonstration du théorème.

Contents

1 Le fibré simplicial universel $P_\bullet G \to B_\bullet G$.

Soient X un ensemble et $P_\bullet X$ l'ensemble simplicial défini par :

$$P_n X := X^{\times(n+1)} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \partial_i(x_0, \dots x_n) := (x_0, \dots x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots x_n) \\ s_i(x_0, \dots x_n) := (x_0, \dots x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1} \dots x_n) \end{array} \right. .$$

L'ensemble simplicial $P_\bullet X$ est contractible. En effet, fixons $* \in X$ et considérons les applications $h_i : P_n X \to P_{n+1} X$

définies par $h_i(x_0,\cdots,x_n) = (*,x_0,\cdots,x_n)$ afin de définir l'homotopie simpliciale $h : \Delta[1]\times RX \to RX$ entre id et l'application constante sur $*$.

Soit G groupe discret et notons $x\mapsto gx$ une action à gauche de G sur l'ensemble X. Si cette action est libre alors G opère librement sur chaque R_nX via

$$g(x_0,\ldots,x_n) := (gx_0,\ldots,gx_n)$$

et nous obtenons l'ensemble simplicial quotient $B_\bullet X := P_\bullet X/G$ ainsi que l'application simpliciale

$$p_X : P_\bullet X \to B_\bullet X\,.$$

Considérons le cas où $X = G$ et notons $G_\bullet$ le groupe simplicial constant défini par

$$G_n = G\,, \partial_i = \mathrm{id}_G \text{ et } s_i = \mathrm{id}_G\,,$$

Le groupe simplicial $G_\bullet$ vérifie la condition de Kan [12, Theorem 17.1] et sa réalisation topologique $|G_\bullet|$ est le groupe discret group G ([12, Theorems 14.1 et 14.3].) Alors, l'application

$$p_G : P_\bullet G \to B_\bullet G \tag{3}$$

est un $G_\bullet$-fibré principal au sens de [12, Definition 18.1] et aussi un fibré simplicial [12, Corrollary 20.5.]

Notons $EG := |P_\bullet G|$ (respectively $BG := |B_\bullet G|$) ces réalisations topologiques.

L'espace EG est un CW complexe pointé par la 0-cellU(L)e correspondant au 0-simplex (e_G) et BG un CW complex pointé par la 0-cellule correspondant au 0-simplex $[\,] = G(e_G)$. L'espace EG est contractible et l'action simpliciale de $G_\bullet$ sur $P_\bullet G$ se réalise en une action libre G sur E_G. La réalisation géométrique de

$$q_G : EG \to BG\,,$$

est un G-fibré principal [**?**]. Voir aussi, [**?**, Exercise 8.2.4, 8.3.8-Example 8.3.3].

Notation "bar". $[g_1|\ldots|g_n]$ désigne le n simplex $G(1,g_1,g_1g_2,\ldots g_1g_2\ldots g_n)$ de $B_\bullet G$. Alors,

$$d_i[g_1|\cdots|g_n] = \begin{cases} [g_2|\cdots|g_n]\,, & i=0\\ [g_1|\cdots|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n]\,, & 1\le i<n\\ [g_1|\cdots|g_{n-1}]\,, & i=n \end{cases}$$

et

$$s_j[g_1|\cdots|g_n] = \begin{cases} [e_G|g_1;\cdots|g_n]\,, & j=0\\ [g_1|\cdots|g_{j-1}|e_G|g_j,\cdots|g_n]\,, & 0<j<n\\ [g_1|\cdots|g_n|e_G]\,, & j=n \end{cases}$$

Exemple 1.1 Le groupe de Heisenberg. Soit Γ (resp. G) sous-groupe de $GL_3(\mathbb{Z})$ (resp. $GL_3(\mathbb{R})$) dont les éléments sont les matrices triangulaires supérieures avec uniquement des 1 sur la diagonale. La série centrale de Γ (resp. de G) vérifie $\Gamma^i = \{I\}$ (resp. $G^i = \{I\}$) pour $i\ge 3$. Les groupes Γ et G sont donc deux groupes nilpotents infinis.

Le groupe de Lie G est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$. Par suite $B\Gamma = G/\Gamma$.

Au groupe discret Γ associons, via un argument topologique, une algèbre Lie qui se trouvera être l'algèbre de Lie logarithmique de γ comme définie dans la section §4.

L'extension de groupes

$$[\Gamma, \Gamma] \hookrightarrow \Gamma \xrightarrow{\rho} \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$$

fournit le fibré

$$S^1 \to B\Gamma \xrightarrow{B\rho} S^1 \times S^1$$

L'action du π_1 de la base sur la cohomologie de la fibre étant triviales, d'après [7, Theorem 20.3] un modèle de Sullivan $B\Gamma$ est :

$$(\wedge(x, y, z), d)\,, dx = 0 = dy\,, dz = \lambda xy$$

avec $\lambda \in \Bbbk$. Puisque $H^1(B\Gamma, \Bbbk) = \Gamma/[\Gamma; \Gamma] \otimes \Bbbk \cong \mathbb{Q} \otimes \Bbbk \neq H^*(S^1)^{\otimes 3}$ nécessairement $\lambda \neq 0$ et nous pouvons poser $dz = xy$. Ainsi ce modèle apparaît comme le complexe de cochaînes d'Eilenberg-MacLane d'une algèbre de Lie L i.e.

$$(\wedge(x, y, z), d) = \mathcal{C}^*(L)\,.$$

où

$$L = \alpha\Bbbk \oplus \beta\Bbbk \oplus \gamma\Bbbk\,,\ \text{avec } [\alpha, \beta] = \gamma\,,\ \text{et } \gamma \text{ un élément central }\,.$$

Par suite, L est isomorphe à la sous-algèbre de Lie $gl_3(\Bbbk)$ dont les éléments sont les matrices triangulaires supérieures dont les termes diagonaux sont nuls

Un théorème attribué à Sullivan[1] et démontré par Cenkl et Porter [5] entraîne que L est l'algèbre de Lie Logarithmique de $\Gamma = \pi_1(BG)$ ou que $\exp L$= le sous-groupe de $GL_3(\Bbbk))$ dont les éléments sont les matrices triangulaires supérieures dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

Finalement, notons $C_*(X_\bullet; \Bbbk)$ le complexe des chaînes d'un ensemble simplicial $X_\bullet$ à coefficients dans un anneau $\Bbbk$. Alors

1. $C_*(B_\bullet G) = T(\mathbb{Z}[G])$ la *bar construction* de G [4, §I-5].

2. $C_*(P_\bullet G)$ est la *resolution standard* de $\mathrm{Coker}\,(d : C_1(P_\bullet G) \to C_0(P_\bullet G)) \cong \mathbb{Z}$ [4, §I-5]. Par suite, pour tout $\mathbb{Z}[G]$-modU(L)e M

$$\begin{aligned} H_n(G; M) &:= \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathbb{Z}) = H_n\left(C_*(\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_*(\mathbb{Z}[G])\right) \\ H^n(G; M) &:= \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(C_*(\mathbb{Z}[G]), M\right)) \end{aligned}$$

   si $n \geq 0$.

3. Lorsque $\Bbbk$ est considéré comme un $\Bbbk[G]$-modU(L)e via l'augmentation canonique, nous obtenons

$$H_n(G; \Bbbk) = H_n(BG; \Bbbk) \text{ and } H^n(G; \Bbbk) = H^n(BG; \Bbbk)\,, \qquad n \geq 0\,.$$

2 Complétion I-adique d'une algèbre.

Soient $\Bbbk$ un corps de caractérisque $\neq 2, 3$ et A une $\Bbbk$-algèbre (associative avec ou sans unité) munie d'une augmentation $\varepsilon : A \to \Bbbk$.

[1] souvent cité à tort comme tel

Notons $I := \ker \varepsilon$ l'idéal d'augmentation et $I^n = I\, I^{n-1}$, $n \geq 1$. Nous obtenons la filtration descendante

$$A := I^0 \supset I \supset I^2 \supset \cdots \supset I^n \supset \cdots \tag{4}$$

Les I^n considérés comme une base de voisinage de 0 définissent une topologie sur l'ensemble sous-jacent à A dont les ouverts sont les réunions quelconques d'intersections finies des ensembles de la formes $a + I^p$, $a \in A$, $p \geq 0$ [1, Chap.3§1 et §2].

Proposition 2.1 [2, Chap.36§2-6] *Le groupe abélien sous-jacent à A est un groupe topologique.*

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes*
   - *(i) A est séparé (Hausdorff).*
   - *(ii) Un point de A est fermé.*
   - *(iii) $\bigcap_i A_i = \{0\}$.*
2. *Les conditions suivantes sont équivalentes*
   - *(i) A est un groupe (abélien) complet.*
   - *(ii) Le groupe séparé $A' := A/\bigcap_i A_i$ est complet.*
   - *(iii) Toute famille d'éléments de A' indexée par un ensemble Λ qui converge vers zéro suivant le filtre des complémentaire des parties finies de Λ est sommable dans A'.*

Les applications canoniques

$$p_n : A \to I^n \text{ et } q_n : A/I^n \to A/I^{n-1} \tag{5}$$

définissent une application canonique continue

$$p_A : A \to \lim_n A/I^n \,, a \mapsto (p_k(a))_k \tag{6}$$

lorsque chaque A/I^n est muni de la topologie discrète et $\lim_n A/I^n$ est muni de la topologie de la limite inductive.

Définition 2.2 A est une *algèbre complète* si $p : A \to \lim_n A/I^n$ est une bijection.

Remarquons que dans ce cas :

1. p_A est un homéomorphisme
2. $\lim_n A/I^n$ hérite d'une structure naturelle de $\Bbbk$-algèbre telle que $A \to \lim_n A/I^n$ est un homomorphisme d'algèbres

Définition 2.3 Pour toute $\Bbbk$-algèbre A, l'application canonique

$$p_A : A \to \hat{A} := \varprojlim_n A/I^n \qquad a \mapsto (p_n(a))_n$$

est appelée la *complétion I-adique* de A.

Notons $\hat{A}^k$ le noyau de la projection canonique

$$\hat{A} := \varprojlim_n A/I^n \to A/I^k \,, \qquad (p_n(a_n))_n \to p_k(a_k)\,.$$

La filtration décroissante

$$\hat{A}^0 = \hat{A} \supset \hat{A}^1 \supset \cdots \supset \hat{A}^n \supset \cdots$$

définit une topologie sur $\hat{A}$ qui coïncide avec la topologie de la limite inductive et $\hat{A}/\hat{A}^n = A/I^n$.

Ceci définit le foncteur complétion I-adique

$$\Bbbk\text{-}\mathrm{ALG.AUG.} \xrightarrow{\widehat{\ }} \Bbbk\text{-}\widehat{\mathrm{ALG.AUG}}.$$

de la catégorie des algèbres augmentées vers sa sous-catégorie des algèbres augmentées complètes. L'augmentation $\varepsilon_{\hat{A}} : \hat{A} \to \Bbbk$ est définie par $\varepsilon_{\hat{A}}(p_k(a_k))_k) = \varepsilon_A(a_0)$.

Exemple 2.4 *Complétion de l'algèbre tensorielle.* Soient V un $\Bbbk$-espace vectoriel et

$$T(V) = \Bbbk \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots$$

l'algèbre tensorielle munie du produit du produit

$$v_1 \cdots v_n \otimes v_{n+1} \cdots \ v_{n+p} \mapsto v_1 \cdots v_{n+p}\,.$$

avec la convention $v_1 \cdots v_k = 1$ if $k = 0$. Ceci définit un foncteur

$$\Bbbk\text{-Esp.Vect.} \xrightarrow{T} \Bbbk\text{-Alg.}$$

de la catégorie des espaces vectoriels sur $\Bbbk$ vers la catégorie des $\Bbbk$-algèbres. C'est un adjoint à gauche du *foncteur sous-espace vectoriel sous-jacent* $A \mapsto A^\circ$ i.e.

$$\Bbbk\text{-Alg.}(T(V), A) \cong \Bbbk\text{-Esp.Vect.}(V; A^\circ)\,.$$

L'application $v \mapsto 0$ induit l'augmentation $\varepsilon : T(V) \to \Bbbk$ dont l'idéal d'augmentation est $T^+V := V^{\otimes \geq 1}$. Nous obtenons alors le système inverse

$$\to TV/T^{\geq n+1}V \to TV/T^{\geq n}V \to \cdots \to TV/T^{\geq 2}V \cong V$$

Si $(x_\alpha)_\alpha$ désigne une base de V alors les monômes non commutatifs $x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_m}$ constituent une base de $T(V)$ et nous avons un isomorphisme d'algèbres entre $T(V)$ et la $\Bbbk$-algèbre, $\Bbbk\langle x_{\alpha_i}\rangle$ des polynômes non commutatifs en les variables x_{α_i}. La complétion I-adique de $T(V)$ est isomorphe à l'algèbre des séries formelles non commutatives $\Bbbk\langle\langle x_{\alpha_i}\rangle\rangle$.

3 Groupe exponentiel et algèbre de Lie logarithmique.

Dans cette section $\Bbbk$ désigne un corps de caractérisque nulle.

Soient G un groupe (discret) et L une $\Bbbk$-algèbre de Lie et considérons les deux $\Bbbk$-algèbres $\Bbbk[G]$ et $U(L)$ appelées respectivement, *l'anneau du groupe* G et *l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie* L. Ceci nous permet de définir deux foncteurs

$$\mathrm{GRP.} \xrightarrow{\Bbbk[-]} \Bbbk\text{-}\mathrm{ALG.} \xleftarrow{U(-)} \Bbbk\text{-}\mathrm{ALG.LIE}\ .$$

Le foncteur $\Bbbk[-]$ admet pour adjoint à droite le *foncteur des unités* $A \mapsto A^*$ et le foncteur U admet pour adjoint à droite le *foncteur algèbre de Lie sous-jacente* $A \mapsto A_\ell$ i.e.

$$\Bbbk\text{-}\mathrm{ALG.}(\Bbbk[G], A) \cong \mathrm{GRP.}(G, A^*) \text{ et } \Bbbk\text{-}\mathrm{ALG.}(U(L), A) \cong \Bbbk\text{-}\mathrm{ALG.LIE}(L, A_\ell)\,.$$

En particulier les applications $g \mapsto 1$ et $x \mapsto 0$ induisent les augmentations

$$\varepsilon_G : \Bbbk[G] \to \Bbbk \text{ et } \varepsilon_L : U(L) \to \Bbbk\,. \tag{7}$$

Notons I_G le noyau de ε_G et I_L le noyau de ε_L et

$$p_G : \Bbbk[G] \to \widehat{\Bbbk[G]} \text{ et } p_L : U(L) \to \widehat{U(L)} \tag{8}$$

les complétions I-adiques associées.

Il résulte aussi des propriétés d'adjonction que les applications diagonales $g \to (g,g)$ et $x \to (x,0)+(0,x)$ induisent les homomorphismes d'algèbres

$$\Delta_G : \Bbbk[G] \to \Bbbk[G]\otimes\Bbbk[G] \text{ et } \Delta_L : U(L) \to U(L\oplus L) = U(L)\otimes U(L)\,.$$

On vérifie alors que Δ_G sont Δ_L sont co-associatives, co-commutatives et admettent une co-unité. Autrement dit, $\Bbbk[G]$ et $U(L)$ sont des algèbres de Hopf co-commutatives. Ces structures d'algèbres de Hopf cocommutatives s'étendent naturellement à $\widehat{\Bbbk[G]}$ et $\widehat{U(L)}$ avec les coproduits

$$\hat{\Delta}_G : \widehat{\Bbbk[G]} \to \Bbbk\widehat{[G\times G]} =: \widehat{\Bbbk[G]}\hat{\otimes}\widehat{\Bbbk[G]} \text{ et } \hat{\Delta}_L : \widehat{U(L)} \to \Bbbk\widehat{[L\times L]} =: \widehat{U(L)}\hat{\otimes}\widehat{U(L)}\,.$$

Définition 3.1 Une *algèbre de Hopf complète* est une algèbre augmentée complète qui est aussi une algèbre de Hopf dont la co-unité est l'augmentation de l'algèbre.

Soient A une algèbre de Hopf et $\hat{A}$ sa complétion I-adique dont l'idéal d'augmentation est noté $\hat{I}$. Alors $\hat{A}\otimes\hat{A}$ est une algèbre Hopf augmentée dont l'idéal d'augmentation est de la forme $\hat{I}\otimes\hat{A}+\hat{A}\otimes\hat{I}$. Notons

$$p : \hat{A}\otimes\hat{A} \to \hat{A}\hat{\otimes}\hat{A} := \widehat{\hat{A}\otimes\hat{A}}\,, \qquad a\otimes b \mapsto a\hat{\otimes}b\,.$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\hat{A}) &:= \{a \in \hat{I} \,|\, \hat{\Delta}_A(a) = a\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}a\} \\ \mathcal{G}(\hat{A}) &:= \{a \in \hat{I} \,|\, \hat{\Delta}_A(a) = a\hat{\otimes}a\} \end{aligned}$$

Clairement $\mathcal{P}(\hat{A})$ est une sous-algèbre de Lie de $(\hat{I})_\ell$ et la multiplication de $\hat{A}$ munit $\mathcal{G}(\hat{A})$ d'une structure de groupe.

Nous avons donc défini les foncteurs

$$\begin{tikzcd} \textsc{Grp.} \arrow[r, shift left, "\widehat{\Bbbk[\,]}"] & \Bbbk\text{-}\widehat{\textsc{Alg.Hopf}} \arrow[l, shift left, "\mathcal{G}"] \arrow[r, shift left, "\mathcal{P}"] & \Bbbk\text{-}\textsc{Alg.Lie} \arrow[l, shift left, "\widehat{U()}"] \end{tikzcd}\,.$$

où $\Bbbk$-Alg.HopfComp désigne la sous-catégorie de $\Bbbk$-Alg. des algèbre de Hopf complètes et où, [16, Appendix A-Proposision 2.5],

1. $\widehat{\Bbbk[\,]}$ est un adjoint à gauche de $\mathcal{G}$.
2. $\widehat{U()}$ est un adjoint à gauche de $\mathcal{P}$.

En particulier nous avons les morphismes d'adjonction

$$G \xrightarrow{\iota_G} \mathcal{G}(\widehat{\Bbbk[G]}) \text{ et } L \xrightarrow{\iota_L} \mathcal{P}(\widehat{U(L)})\,, \tag{9}$$

Considérons les séries formelles,

$$exp(X) = \sum_{n\geq 0}\frac{X^n}{n!} \in \Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle \text{ et } \log(1+X) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}X^n \in \Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$$

alors la topologie I-adique sur $\hat{A}$ permet de définir $\exp_A(a) \in \hat{A}$ et $\log_A(1+a) \in \hat{A}$ pour pour tout $a \in \hat{A}$.

Lemme 3.2 [16, Appendix A-Proposision 2.6] [17] *Soit A une algèbre de Hopf. Si $\hat{I}$ désigne l'idéal d'augmentation de la complétion I-adique $\hat{A}$ alors les séries entières* $\exp(\,)$ *et* $\log(1+\,)$ *(qui convergent sur $\hat{I}$) induisent les bijections réciproques*

$$\begin{array}{ccccc} \hat{I} & \xrightarrow{exp_A} & 1+\hat{I} & \xrightarrow{\log_A} & \hat{I} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{P}(\hat{A}) & \xrightarrow{exp_A} & \mathcal{G}(\hat{A}) & \xrightarrow{\log_A} & \mathcal{P}(\hat{A}) \end{array} .$$

Définition 3.3

1. Si L est une algèbre de Lie alors $\exp L := \mathcal{G}(\widehat{U(L)})$ est appelé le *groupe exponentiel* de L

2. Si G est un groupe (discret) alors $\log G := \mathcal{G}(\widehat{U(L)})$ est appelé *le groupe exponentiel de L* .

$$L \xrightarrow{\iota_L} \mathcal{P}(\widehat{U(L)}) \overset{\exp_{U(L)}}{\longleftrightarrow} \mathcal{G}(\widehat{U(L)}) = \exp L \,.$$

$$G \xrightarrow{\iota_L} \mathcal{G}(\widehat{\Bbbk[G]}) \overset{\log_{\Bbbk[G]}}{\longleftrightarrow} \mathcal{P}(\widehat{\Bbbk[G]}) = \log G \,.$$

4 Cas des groupes nilpotents et des algèbres de Lie pro-nilpotentes.

Notons

$$G^{(1)} := G \supset G^{(2)} \supset \cdots \supset G^{(n)} \supset \cdots$$
$$L^{(1)} := L \supset L^{(2)} \supset \cdots \supset L^{(n)} \supset \cdots$$

les suites centrales descendantes du groupe G et de l'algèbre de Lie L telles que

$$G^{(n+1)} = \left[G, G^{(n)}\right] \text{ et } L^{(n+1)} = \left[L, L^{(n)}\right]. \tag{10}$$

Définition 4.1 (Voir [14] ou [17])

a) Le groupe G (resp. l'algèbre de Lie L) est nilpotent (resp. nilpotente) si $G^{(n)} = \{1\}$ (resp. $L^{(n)} = \{0\}$) à partir d'un certain rang.

b) Le groupe G (resp. l'algèbre de Lie L) est pro-nilpotent (resp. pro-nilpotente) si les homomorphismes canoniques

$$G \to \varprojlim_n G/G^{(n)} \text{ (resp. } L \to \varprojlim_n L/L^{(n)} \text{)}$$

sont des isomorphismes.

Proposition 4.2 *1. Si G est un groupe nilpotent alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $G \xrightarrow{\iota_G} \mathcal{G}(\widehat{\Bbbk[G]})$ est un isomorphisme de groupes.

(b) G est uniquement divisible i.e. $g \mapsto g^n$ est bijective pour $n \neq 0$.

(2) L est une algèbre de Lie pro-nilpotente alors l'application naturelle

$$\iota_L : L \longrightarrow P(\widehat{U(L)})$$

en particulier, L est en bijection avec le groupe $\exp L = \mathcal{G}(\widehat{U(L)})$.

Il résulte de cette proposition que :

a) Si G est un groupe (discret) nilpotent uniquement divisible alors $G \cong \mathcal{G}(\widehat{\Bbbk[G]})$ est en bijection avec l'algèbre de Lie $\log G = \mathcal{P}(\widehat{\Bbbk[G]})$

b) L est une algèbre de Lie pro-nilpotente alors $L \cong \mathcal{P}(\widehat{U(L)})$ est en bijection avec le groupe $\exp L = \mathcal{G}(\widehat{U(L)})$.

Définition 4.3 *Si G est un groupe (discret) nilpotent alors l'application canonique $G \to \exp\log G$ est appelée le $\Bbbk$-complété de Malcev de G*

Comparer avec [11], [10] et [8].

Pour la démonstration de la partie 1) voir [16, Appendix A- Corollary 3.7].

La démonstration de 2) ne se trouve pas la littérature. Celle fournie ci-dessous nécessite trois lemmes techniques préliminaires.

Rappelons que $i_L : L \to U(L)$ désigne l'inclusion canonique d'une algèbre de Lie dans son algèbre enveloppante et que I_L désigne l'idéal d'augmentation de $U(L)$. Pour alléger les notations nous L avec son image dans $U(L)$.

Le premier lemme relie la filtration I-adique de $U(L)$ et la filtration de L par la suite centrale descendante définie en (11).

Lemme 4.4 *Pour toute algèbre de Lie L et tout entier $n \geq 1$,*

$$L^{(n)} = L \cap I_L^n .$$

DÉMONSTRATION. Clairement l'égalité est vérifiée pour $n = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $L^{(n)} \subset L \cap I_L^n$. Pour établir l'inclusion inverse, fixons un $n \geq 2$, posons

$$L^{(k)} = W^k \oplus L^{(k+1)} , \quad k < n ,$$

et choisissons une base $(x_\alpha)_\alpha$ de L compatible avec la décomposition en sommes directes,

$$L = \bigoplus_{i=1}^{n-1} W^i \;\oplus\; L^{(n)} ,$$

et bien ordonnée. D'après le Théorème de Poincaré-Birkoff-Witt, les *monômes admissibles*

$$x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_k} , \qquad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_k$$

contituent une base de $U(L)$. Définissons, à l'aide de ces momômes admissibles, l'application linéaire

$$\pi : U(L) \to L , \qquad x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_r} \mapsto \big[x_{\alpha_1}, \big[x_{\alpha_2} \ldots , \big[x_{\alpha_{r-1}}, x_{\alpha_r}\big] \ldots\big]\big] .$$

Afin d'obtenir l'inclusion $L^{(n)} \supset L \cap I_L^n$ il nous suffit donc d'établir

$$\pi(I_L^n) \subset L^{(n)} . \tag{11}$$

(En effet, si $x \in I_L^{(n)} \cap L$ alors $x = \pi x \in \pi(I_L^{(n)}) \subset L^{(n)}$.)

Munissons chaque élément x_α de cette base d'un degré en posant :

$$\deg x_\alpha = \begin{cases} k & \text{si } x_\alpha \in W_k \\ n & \text{si } x_\alpha \in L^{(n)} \end{cases} \tag{12}$$

et démontrons par récurrence sur $r \geq 1$ que pour tout monôme $\omega = x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_r}$ (non nécessairement admissible) tel que $\sum_{i=1}^{r} \deg x_{\alpha_i} > n$ vérifie $\pi(\omega) \in L^{(n)}$. Cette condition est clairement vérifiée pour $r = 1$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour tout entier s tel que $1 \leq s \leq r-1$.

Posons $\omega^\sigma = x_{\beta_{\sigma(1)}} \ldots x_{\beta_{\sigma(r)}}$ lorsque σ désigne une permutation de $\{1, 2, \cdots, r\}$.

Remarquons que chaque crochet $\left[x_{\beta_i}, x_{\beta_j}\right]$ est une combinaison linéaire de x_α tel que $\deg x_\alpha \geq \deg x_{\beta_i} + \deg x_{\beta_j}$. Si τ désigne la transposition $(i, i+1)$ alors

$$\omega - \omega^\tau = x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_{i-1}} \left[x_{\beta_i}, x_{\beta_{i+1}}\right] \ldots x_{\beta_r} \,.$$

Puisque $\sum \deg x_{\beta_i} = \sum \deg x_i \geq n$ notre hypothèse de récurrence entraîne que $\pi(\omega - \omega^\tau) \in L^{(n)}$. Par suite,

$$\pi(\omega - \omega^\sigma) \in L^{(n)} \text{ pour tout } \sigma \,. \tag{13}$$

Supposons que $\beta_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq \beta_{\sigma(r)}$. Par définition de π, si $\deg x_{\beta_{\sigma(i)}} = k_i$, alors

$$\pi(\omega^\sigma) = \left[x_{\beta_{\sigma(1)}}\left[\cdots, \left[x_{\beta_{\sigma(r-1)}}, x_{\beta_{\sigma(r)}}\right] \cdots\right]\right] \in \left[L^{(k_1)}\left[\cdots, \left[L^{(k_{r-1})}, L^{(k_r)}\right] \cdots\right]\right]$$

Or

$$\left[L^{(k_1)}\left[\cdots, \left[L^{(k_{r-1})}, L^{(k_r)}\right] \cdots\right]\right] \subset L^{(k_1 + \cdots + k_{r-1} + k_r)} \subset L^{(n)}$$

puisque $(k_1 + \cdots + k_r) = \sum \deg x_i \geq n$. Il en résulte que :

$$\pi(\omega^\sigma) \in L^{(n)} \,. \tag{14}$$

Clairement (14) et (15) impliquent que $\pi(\omega \in L^{(n)})$. $\square$

Lemme 4.5 *Pour toute algèbre de Lie L et tout entier $n \geq 1$, considérons les sous-espaces $Y^k \subset I_L^k$ vérifiant :*

$$Y^k \oplus I_L^{k+1} = I_L^k \,, \qquad k < n \text{ et } Y^n = I_L^{(n)} \,.$$

Si $I_{L\oplus L}$ désigne l'idéal d'augmentation de $U(L \oplus L) \cong U(L) \otimes U(L)$ alors

$$I_{L\oplus L}^n = \left(\oplus_{k=1}^n Y^k \otimes I_L^{n-k}\right) \oplus \left(1 \otimes I_L^{(n)}\right) \,.$$

Démonstration. Soit $\rho_k : U(L) \to U(L)/I_L^{k+1}$ la projection canonique. On peut considérer $\rho_k \otimes id$ comme une application linéaire

$$\rho_k \otimes id : I_{L\oplus L}^n \to \oplus_{i=1}^k Y^i \otimes I_L^{n-i},$$

puisque $I_{L\oplus L}^n = \sum_{i+j=n} I_L^i \otimes I_L^j$.

Si $\Omega \in (I_L^k \otimes I_L) \cap I_{L\oplus L}^n$ alors $\rho_k \otimes id(\Omega) \in Y^k \otimes I_L^{n-k} \subset I_{L\oplus L}^n$. Autrement dit,

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \,, \qquad \text{avec } \Omega_1 \in Y^k \oplus I_L^{n-k} \text{ et } \Omega_2 \in (I^{k+1} \otimes I) \cap I_{L\oplus L}^n \,.$$

$\square$

Soit L une algèbre de Lie quelconque et n un entier ≥ 1. Considérons une base $(x_\alpha)_\alpha$ de L et la fonction deg comme dans la démonstration du lemme 4.4, formules (12) et (13). Les monômes admissibles $x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_r}$ tels que $r \geq 1$ constituent une base de I_L.

Lemme 4.6 *Les monômes $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_r}$ vérifiant $\sum \deg x_{\alpha_i} < n$ constituent une base de $U(L)/I_L^{(n)}$.*

Démonstration. Soit $\rho_n : U(L) \to U(L)/I_L^{n+1}$ la projection canonique. Alors, d'après le Lemme 4.4, $\rho_n(x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_r}) = 0$ si $\sum \deg x_{\alpha_i} \geq n+1$. Il en suit que ρ_n se restreint au sous-espace vectoriel engendré par $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_r}$ vérifiant $\sum \deg w_{\alpha_i} t < n$ en une application surjective sur $U(L)/I_L^{(n)}$. Il suffit donc de montrer que $U(L)/I_L^{(n)}$ que ces $\rho_n(x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_r})$ sont linéairement indépendants dans $U(L)/I_L^{(n)}$.

La diagonale $\Delta : L \to L \oplus L$ induit

$$\Delta : U(L) \to U(L) \otimes U(L) \text{ et } \Delta_n : U(L)/I_L^{(n)} \to (U(L)\otimes U(L))/I^n_{L\oplus L}.$$

Choisissons les $z_i = x_{\alpha_i}$ de telle sorte que

$$k = \deg z_1 = \cdots = \deg z_q < \deg z_{q+1} \leq \cdots \leq \deg z_r$$

et notons $f = f(z_1, \cdots, z_r)$ la combinaison linéaire des monômes de la forme $z_1^{\ell_1}\cdots z_r^{\ell_r}$ avec $\sum \ell_i \deg z_i < n$ avec $\ell_1 \neq 0$. Montrons que

$$f \notin I_L^{(n)}.$$

Pour cela écrivons,

$$f = \sum_{i=1}^{n} z_1^i\, p_i(z_2, \ldots, z_r) + p_0(z_2, \ldots, z_r)$$

où les polynômes p_i, $1 \leq i \leq n$ possèdent éventuellement un terme constant. Alors

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{q} z_j \otimes q_j(z_1, \ldots, z_r) + I_L^{k+1} \otimes U(L)\,, \tag{15}$$

avec $q_1(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{i=1}^n z_1^{i-1} p_i(z_2, \ldots, z_r)$.

Comme vu dans la démonstration du lemme 4.4, l'inclusion $L \to U(L)$ induit les injections

$$W^k \to U(L)/I_L^{k+1}\,,$$

par suite, les $\rho_n z_1, \ldots, \rho_n z_q$ sont linéairement indépendants dans $U(L)/I_L^{k+1}$.

Supposons que $f \in I_L^{(n)}$. D'après le Lemme 4.5, chaque $q_j \in I_L^{n-k}$. Mais la formule (16) entraîne que q_1 est une combinaison linéaire de monômes $z_1^{\zeta_1} \ldots z_r^{\zeta_r}$ avec $\sum \zeta_i \deg z_i < n - k$. Une récurrence sur $n-k$ établit alors que $q_1 = 0$ ce qui nous fournit une contradiction puisqu'il est clair d'après ce qui précède que $q_1 \neq 0$.

□

Fin de la démonstration de la Proposition 4.2 Notons $\rho_n : U(L) \to U(L)/I_L^{n+1}$ la projection canonique et $\iota_L : L \to \mathcal{P}(\widehat{U(L)})$.

Soit $u \in \mathcal{P}(\widehat{U(L)}) \subset \widehat{U(L)}$. Alors u est une suite d'éléments $u_n \in U(L)/I^n$ telle que $u_{n+1} \mapsto u_n$ via les applications canoniques $U(L)/I^{n+1} \to U(L)/I^n$ et

$$\Delta_n u_n - (u_n \otimes 1 + 1 \otimes u_n) \in I^n_{L\oplus L}\,.$$

Remarquons que la diagonale $\hat{\Delta}$ induite sur $\widehat{U(L)}$ peut être considérée comme une suite d'applications

$$U(L)/I_L^n \to (U(L) \otimes U(L))\,/I^n_{L\oplus L}\,.$$

D'après le Lemme 4.6 les éléments $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_r}$ vérifiant

$$\deg(x_{\alpha_1}) \leq \cdots \leq \deg(x_{\alpha_r}) \quad \text{et} \quad \sum |x_{\alpha_i}| < n$$

constitue une base de $U(L)/I^n$.

Le même argument que celui employé précédemment montre que $f(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_r})$ est un polynôme sans termes contants alors $(\rho_n\otimes\rho_n)\circ(\Delta)(f)$ possède une composante non triviale dans $\rho_n(I)\otimes\rho_n(I)$, bien que $\Delta(\rho_n y) = \rho_n y\otimes 1 + 1\otimes\rho_n y$ pour tout $y\in L$.

Il en suit que $u_n = \rho_n y_n$ pour un $y_n\in L$. Ainsi nous avons

$$\rho_{n+1}y_{n+1} = u_{n+1} \mapsto u_n = \rho_n y_n\,.$$

Alors $y_{n+1}-y_n \in I_L^{n+1}$. D'après le Lemme 4.4, $y_{n+1}-y_n\in L^{n+1}$, donc la suite (y_n) est un élément de $\lim\limits_{\leftarrow} L/L^{(n)}$. Puisque L est supposée pro-nilpotente, il existe $y\in L$, tel que les projections $L\to L/L^{(n)}$ envoient y sur y_n. Par suite, l'application $L\to U(L)\to\widehat{U(L)}$ envoie y sur u; i.e., l'application $L\to\mathcal{P}(\widehat{U(L)})$ is surjective.

Finalement, d'après le Lemme 4.4, $\lim\limits_{\leftarrow} L/L^{(n)}\to\widehat{U(L)}$ est injective. Il en est donc de même de $L\xrightarrow{\cong}\lim\limits_{\leftarrow} L/L^{(n)}\to\mathcal{P}(\widehat{U(L)})$.

$\square$

References

[1] N. Bourbaki, *Topologie Générale* Chapitres 1 à 4. Masson 1981.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative* Chapitres 1 à 4. Masson 1985.

[3] A.K. Bousfield, W.K.A.M. Gugenheim, *On PL de Rham theory and rational holotopy types*, Memoirs of the Amer; Math. Soc. **179** 1976.

[4] K. Brown, *Cohomology of groups* Graduate Texts in Mathematics. **87** Springer-Verlag New-York ed. 1982.

[5] B. Cenkl and R. Porter, *Malcev's completion of a group and differential forms*, J. Differential Geometry **15** (1980). 531-542.

[6] Y. Félix, S. Halperin, J-C Thomas, *Rational Homotopy Theory* Graduate Texts in Mathematics. **205** Springer-Verlag New-York ed. 2001.

[7] S. Halperin, *Lectures on minimimal models* Mémoire de la Société Mathématique de France **9/10** Tome 111 (3)

[8] P. Hilton, G. Mislin and J. Roitberg, *Localization of nilpotent groups and spaces*, North-Holland 1975.

[9] Jensen, *Les foncteurs dérivés de lim et leurs applications en théorie des modU(L)es*, Lecture Notes in Math. **254** Springer-Verlag 1972.

[10] M. Lazard, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie*, Ann. Ec. Norm. Sup. **71** (1954)101-190.

[11] A.L. Malcev, *Nilpotent groups without torsion*, Jzv. Akad. Nauk. SSSR, Math. **13** (1949) 201-212.

[12] J.P. May, *Simplicial Object in Algebraic Topology* Van Nostrand Mathematical studies **11** 1967.

[13] P. May (1075). *Classifying spaces and fibrations* Memoirs of the American Mathematical Society **155** American Mathematical Society-Providence. Rhode Island USA.

[14] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, (1966). *Combinatorial Group theory*, Interscience Publisher New York.

[15] P.F. Pickel *Rational cohomology of nilpotent groups and Lie algebras* Communications in Algebra **6** (1978) 409-419.

[16] D. Quillen, *Rational homotopy theory.* Ann. of Math. **90** (1969) 205- 295.

[17] J.P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Mathematic Lecture note series. Benjamin, Inc 1965.

[18] D. Sulllivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. IHES **47** (1977) 269–331.

[19] A.A Suslin and M. Wodzicki, *Exision in Algebraic K-theory*, Annals of Mathematics **136** (1992) 51-122.

[20] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics **38** Cambridge University Press 1994.