Construction de Volodin pour les algèbres de Lie

Notes d'exposé du groupe de travail
Topologie Algébrique

(Nantes)

Salim RIVIERE

Février 2012

On fixe un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique nulle, toutes les algèbres et algèbres de Lie sont supposées être des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels.

1 Construction de Volodin associée à une famille de sous-algèbres de Lie

1.1 Rappel sur l'hyperhomologie

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur exact à droite entre deux catégories abéliennes. Si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, il est possible de définir les foncteurs dérivés de F, notés L^nF, en posant

$$L^nF(M) := H_n(FP_*)$$

où M est un objet de $\mathcal{A}$ et $P_* \to M$ est une résolution projective de M. Cette définition peut être étendue à tout complexe M_* d'objets de $\mathcal{A}$ (borné inférieurement) pour définir un foncteur **hyperdérivé** de F, noté $\mathbb{L}^nF$ via

$$\mathbb{L}^nF(M_*) := H_n(\mathrm{Tot}_*(P_{*\,*}))$$

où $P_{*\,*}$ est une résolution de Cartan-Eilenberg de M_* c'est-à-dire un bicomplexe d'objets projectifs muni d'augmentations $\varepsilon : P_{p\,*} \to M_p$ tel que

- ε induise une résolution projective entre l'homologie horizontale de $P_{*\,*}$ et l'homologie de M_* (degré par degré) i.e. $H_p^h(\varepsilon) : H_p^h(P_{*\,*}) \to H_p(M_*)$ est une résolution projective
- Même condition sur les espaces de bords i.e. $Z_p^h(P_{*,*}) \to Z_p(M_*)$ est une résolution projective.

Il est possible de démontrer que les deux conditions précédentes impliquent que les colonnes de $P_{p\,*}$ sont nécessairement des résolutions projectives de chaque M_p est que le complexe $\mathrm{Tot}_*(P_{*\,*})$ est une résolution projective de M_* dans la catégorie des complexes de chaînes d'objets de $\mathcal{A}$. Comme le foncteur hyperdérivé $\mathbb{L}^nF$ se calcule à l'aide du complexe total d'un bicomplexe, il est l'aboutissement d'une suite spectrale :

Proposition 1.1.1. *Il existe une suite spectrale dite* ***d'hyperhomologie***

$$E^2_{p\,q} = L^pF(H_q(M_*)) \Rightarrow \mathbb{L}^{p+q}F(M_*)$$

1.2 Construction de Volodin

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}$ une famille de sous algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$. On note $P_*(\mathfrak{g}_i) := U\mathfrak{g}_i \otimes \Lambda^*\mathfrak{g}_i$ la résolution de Chevalley-Eilenberg de chaque $\mathfrak{g}_i$ ($U\mathfrak{g}_i$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_i$) et $C_*(\mathfrak{g}_i) := \Lambda^*\mathfrak{g}_i$ son complexe d'homologie à coefficients triviaux.

Définition 1.2.1. *Le* ***complexe de Volodin*** *associé à $(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$, noté $v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$, est le sous-complexe de $U\mathfrak{g}$-modules libres de $P_*(\mathfrak{g})$ défini par*

$$v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}) := \sum_{i\in I} U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_i} P_*(\mathfrak{g}_i) \subset P_*(\mathfrak{g})$$

Remarque 1.2.2. *Chaque* $v_n(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$ *est un* $U\mathfrak{g}$*-module libre car* $\sum_{i\in I} \Lambda^n \mathfrak{g}_i$ *est libre sur* $\mathbb{F}$ *et*

$$v_n(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}) \cong U\mathfrak{g} \otimes \left(\sum_{i\in I} \Lambda^n \mathfrak{g}_i\right)$$

L'homologie de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans un $U\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{m}$ est l'homologie du complexe $\tilde{P}_*(\mathfrak{g}) \otimes_{U\mathfrak{g}} \mathfrak{m}$ où $\tilde{P}_*(\mathfrak{g}) := \Lambda^*\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ est la résolution projective de Chevalley-Eilenberg à droite du $U\mathfrak{g}$-module à droite $\mathbb{F}$, ce qui montre qu'elle correspond au foncteur dérivé du foncteur $F := \mathbb{F} \otimes_{U\mathfrak{g}} -$. En d'autres termes

$$H_*(\mathfrak{g}; \mathfrak{m}) = L^*F(\mathfrak{m})$$

L'hyperhomologie de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans un $U\mathfrak{g}$-module différentiel gradué $\mathfrak{m}_*$ peut donc être définie en posant

$$\mathbb{H}_*(\mathfrak{g}; \mathfrak{m}_*) := \mathbb{L}^*F(\mathfrak{m}_*)$$

En appliquant l'existence de la suite spectrale d'hyperhomologie au cas où $\mathfrak{m}_* = v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$ il vient

Proposition 1.2.3. *Il existe une suite spectrale*

$$E^2_{p\,q} = H_p\left(\mathfrak{g}; H_q(v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}))\right) \Rightarrow \mathbb{H}_{p+q}\left(\mathfrak{g}; v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})\right) = H_{p+q}\left(\sum_{i\in I} C_*(\mathfrak{g}_i)\right) \tag{1}$$

Démonstration. La suite exacte d'hyperhomologie a déjà été introduite. Il reste à voir que son aboutissement est bien $H_*\left(\sum_{i\in I} C_*(\mathfrak{g}_i)\right)$. Or, comme les composantes homogènes de $v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$ sont $U\mathfrak{g}$-libres, en calculant le (bi)foncteur hyperdérivé du produit tensoriel par rapport à sa variable de droite (car le produit tensoriel $- \otimes_{U\mathfrak{g}} -$ est "well-balanced" au sens de Cartan-Eilenberg et donc $L^*F(\mathbb{F}) = L^*G(M)$ pour tout $\mathfrak{g}$-module M, où $G := \mathbb{F} \otimes_{U\mathfrak{g}} -$), on peut choisir $v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$ comme résolution de lui-même ce qui conduit à

$$\mathbb{H}_*\left(\mathfrak{g}; v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})\right) = H_*(\mathbb{F} \otimes_{U\mathfrak{g}} v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})) \cong H_*\left(\sum_{i\in I} C_*(\mathfrak{g}_i)\right)$$

□

Le complexe de Volodin est fonctoriel dans le sens de la proposition suivante :

Proposition 1.2.4. *Si* $(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$ *est une paire (algèbre de Lie, famille de sous-algèbres),* $(\mathfrak{g}', \{\mathfrak{g}'_j\}_{j\in J})$ *une autre paire, et* $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *est un morphisme d'algèbre de Lie tel que*

$$\forall i \in I,\ \exists j \in J,\ f(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}'_j$$

alors f *induit un morphisme de complexes de chaînes entre les constructions de Volodin*

$$v_*(f) : v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}) \to v_*(\mathfrak{g}', \{\mathfrak{g}'_j\}_{j\in J})$$

qui induit lui-même un morphisme entre les suites spectrales (1) correspondantes.

1.3 Résolution simpliciale de $v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$

Soit M un espace vectoriel et $\{M_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de M. On peut alors associer à la paire $(M, \{M_i\}_{i\in I})$ un espace vectoriel simplicial $S_\bullet(M, \{M_i\}_{i\in I})$ dont les n-simplexes sont donnés par

$$S_n(M, \{M_i\}_{i\in I}) := \bigoplus_{(i_0,\cdots i_n)\in I^{n+1}} M_{i_0\cdots i_n}$$

où $M_{i_0\cdots i_n}$ désigne le sous-espace $M_{i_0} \cap M_{i_1} \cap \cdots \cap M_{i_n}$. L'opérateur face ∂_k est donné par l'inclusion du facteur direct $M_{i_0\cdots i_n} \subset S_n(M, \{M_i\}_{i\in I})$ dans le facteur direct $M_{i_0\cdots \hat{i_k}\cdots i_n} \subset S_{n-1}(M, \{M_i\}_{i\in I})$. La dégénérescence s_k est sur ce même facteur $M_{i_0\cdots i_n}$ l'application l'identité $M_{i_0\cdots i_n} \to M_{i_0\cdots i_k\, i_k\cdots i_n}$. De plus, $S_\bullet(M, \{M_i\}_{i\in I})$ est muni d'une augmentation

$$S_0(M, \{M_i\}_{i\in I}) = \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \sum_{i\in I} M_i \subset M$$

Définition 1.3.1. *La famille $\{M_i\}_{i\in I}$ est dite* ***bien configurée*** *lorsqu'il existe une* ***bonne base*** *$\{e_s\}_{s\in S}$ de M, c'est à dire telle que chaque M_i soit engendré par une partie de cette base (i.e. il existe pour chaque i, $S_i \subset S$, tel que $\{e_s\}_{s\in S_i}$ est une base de M_i).*

Proposition 1.3.2. *Si la famille $\{M_i\}_{i\in I}$ est bien configurée, alors l'espace vectoriel simplicial augmenté $S_\bullet(M,\{M_i\}_{i\in I}) \to \sum_{i\in I} M_i$ est acyclique.*

Démonstration. Soit $\{e_s\}_{s\in S}$ une bonne base. Alors $S_\bullet(M,\{M_i\}_{i\in I}) = \mathbb{F}S_\bullet$, où $S_\bullet$ est l'ensemble simplicial engendré par la famille $\{S_i\}_{i\in I}$ de sous-ensemble de S dont le n-simplexes sont donnés par

$$S_n := \{(i_0,\cdots,i_n,s), i_k \in I, s \in S_{i_0}\cap\cdots\cap S_{i_n}\}$$

L'augmentation $S_0(M,\{M_i\}_{i\in I}) =\!\!\longrightarrow \sum_{i\in I} M_i$ correspond alors à la projection

$$S_0 = \coprod_{i\in I} S_i \to \bigcup_{i\in I} S_i \subset S$$

Or, pour chaque s dans $\cup_{i\in I} S_i$, la composante connexe de $S_\bullet$ au dessus de s est exactement l'ensemble simplicial $P_\bullet(I_s)$ dont les n-simplexes sont donnés par

$$P_n(I_s) := I_s^{\times(n+1)}$$

où $I_s := \{i \in I, s \in S_i\}$. Or il est bien connu que pour tout ensemble X, $P_\bullet(X)$ est contractile. Il s'ensuit que $S_\bullet(M,\{M_i\}_{i\in I}) \to \sum_{i\in I} M_i$ est acyclique puisque l'homologie de $S_\bullet(M,\{M_i\}_{i\in I})$ est concentrée en degré 0 et contient exactement autant de copies de $\mathbb{F}$ que l'ensemble $\cup_{i\in I} S_i$. □

En appliquant la proposition précédente degré par degré, il apparaît que le complexe de Volodin associé à une famille de sous-algèbres de Lie $\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ bien configurée est lui-même bien configuré et admet donc une résolution simpliciale par des complexes de chaînes de la forme

$$\bigoplus_{i\in I} U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_i} P_*(\mathfrak{g}_i) \leftleftarrows \bigoplus_{(i_0,i_1)} U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_{i_0 i_1}} P_*(\mathfrak{g}_{i_0 i_1}) \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longleftarrow}} \cdots$$

où $\mathfrak{g}_{i_0\cdots i_n} := \mathfrak{g}_{i_0}\cap\cdots\cap\mathfrak{g}_{i_n}$.

Comme $U\mathfrak{g}$ est un $U\mathfrak{g}_{i_0\cdots i_n}$-module libre (cela peut se voir en choisissant une base de PBW adaptée)

$$H_q(U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_{i_0\cdots i_n}} P_*(\mathfrak{g}_{i_0\cdots i_n})) = \begin{cases} U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_{i_0\cdots i_n}} \mathbb{F} & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $v_*(\mathfrak{g},\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$ est quasi-isomorphe au $U\mathfrak{g}$-module simplicial

$$\bigoplus_{i\in I} U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_i} \mathbb{F} \leftleftarrows \bigoplus_{(i_0,i_1)} U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_{i_0 i_1}} \mathbb{F} \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longleftarrow}} \cdots \qquad (2)$$

Cette résolution du complexe de Volodin permet de démontrer le théorème d'isomorphisme suivant :

Théorème 1.3.3. [Suslin-Wodzicki [SW92] Proposition 4.8] *Soient $\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-algèbres de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\{\mathfrak{g}'_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-algèbres de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$, et $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un morphisme d'algèbres de Lie tel que pour tout i dans I, $f(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}'_i$. Si les deux familles sont bien configurées et si de plus les morphismes*

$$\mathfrak{g}_{i_0\cdots i_n} \to \mathfrak{g}'_{i_0\cdots i_n}$$

induits par f sont des isomorphismes, alors l'application induite par f entre les complexes de Volodin

$$v_*(f) : v_*(\mathfrak{g},\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}) \to v_*(\mathfrak{g}',\{\mathfrak{g}'_i\}_{i\in I})$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. L'existence du morphisme $v_*(f)$ a déjà été évoquée à la proposition 1.2.4. D'après les considérations précédentes (voir (2)), $v_*(\mathfrak{g},\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$ et $v_*(\mathfrak{g}',\{\mathfrak{g}'_i\}_{i\in I})$ sont respectivement quasi-isomorphes aux modules simpliciaux

$$\bigoplus_{i\in I} U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_i} \mathbb{F} \leftleftarrows \bigoplus_{(i_0,i_1)} U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_{i_0 i_1}} \mathbb{F} \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longleftarrow}} \cdots$$

et

$$\bigoplus_{i\in I} U\mathfrak{g}'\otimes_{U\mathfrak{g}'_i}\mathbb{F} \leftleftarrows \bigoplus_{(i_0,i_1)} U\mathfrak{g}'\otimes_{U\mathfrak{g}'_{i_0 i_1}}\mathbb{F} \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longleftarrow}} \cdots$$

Il suffit donc de montrer que f induit des isomorphismes

$$U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{g}_{i_0\cdots i_n}}\mathbb{F}\longrightarrow U\mathfrak{g}'\otimes_{U\mathfrak{g}'_{i_0\cdots i_n}}\mathbb{F} \tag{3}$$

Or étant donné une bonne base $\{e_s\}_{s\in S}$ ordonnée de $\mathfrak{g}$ telle que $\{\bar{e}_s\}_{s\in S-S_{i_0\cdots i_n}}$ soit une base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{i_0\cdots i_n}$, les classes des images par f des e_s lorsque s parcourt $S-S_{i_0\cdots i_n}$ forment une base de $\mathfrak{g}'/\mathfrak{g}'_{i_0\cdots i_n}$. Ainsi, les monômes ordonnés en les e_s, lorsque s parcourt $S-S_{i_0\cdots i_n}$, forment une base de $U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{g}_{i_0\cdots i_n}}\mathbb{F}$, et leur images par f une base de $U\mathfrak{g}'\otimes_{U\mathfrak{g}'_{i_0\cdots i_n}}\mathbb{F}$. Ceci établir le caractère bijectif de (3). □

Corollaire 1.3.4. *Si $(\mathfrak{g},\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})$ est bien configurée et si $\mathfrak{m}$ est un $\mathfrak{g}$-module, alors la paire de projection/inclusion canoniques*

$$\mathfrak{g}\leftrightarrows\mathfrak{g}\ltimes\mathfrak{m}$$

induit des quasi-isomorphismes

$$v_*(\mathfrak{g},\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I})\leftrightarrows v_*(\mathfrak{g}\ltimes\mathfrak{m},\{\mathfrak{g}_i\ltimes\mathfrak{m}\}_{i\in I})$$

quasi-inverses l'un de l'autre.

2 Application aux algèbres de Lie de matrices

Soit A une $\mathbb{F}$-algèbre éventuellement non unitaire. Introduisons les algèbres de Lie de matrices suivantes.

Définition 2.0.5.
- *$\mathfrak{gl}_n(A)$ désigne l'algèbre de Lie des matrices $n\times n$ à coefficients dans A (crochet donné par le commutateur).*
- *$\mathfrak{sl}_n(A)$ est la sous algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(A)$ constituée des matrices dont la trace est dans $[A,A]$ (une somme de commutateurs d'éléments de A)*
- *$\mathfrak{e}_n(A)$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_n(A)$ **engendrée** par les matrices élémentaires de la forme $e_{ij}(a)$, $a\in A$, $1\leqslant i\neq j\leqslant n$, où $e_{ij}(a)$ est la matrice ayant des zéros partout à l'exception d'un a à la position située i-ème ligne et la j-ème colonne.*
- *Chacune des algèbres de Lie précédentes admet une version stable notée $\mathfrak{gl}(A):=\bigcup_n\mathfrak{gl}_n(A)$, $\mathfrak{sl}(A)$, et $\mathfrak{e}(A)$.*
- *Si σ est un ordre partiel sur $\{1,\cdots,n\}$, notons $\mathfrak{t}_n^\sigma(A)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(A)$ constituée des matrices (a_{ij}) telle que $a_{ij}=0$ si $i\overset{\sigma}{\not<}j$.*

Remarquons que $\mathfrak{t}_n^\sigma(A)$ est engendrée par les matrices $e_{ij}(a)$ lorsque a parcourt A et $i\overset{\sigma}{<}j$ ce qui permet de faire la famille $\{\mathfrak{t}_n^\sigma(A)\}_{\sigma\in\Pi_n}$ (resp. $\{\mathfrak{t}_n^\sigma(A)\}_{n\in\mathbb{N},\sigma\in\Pi_n}$) une famille bien configurée de sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{e}_n(A)$ (resp. $\mathfrak{e}(A)$). Ici Π_n désigne l'ensemble des ordres partiels sur $\{1,\cdots,n\}$.

Toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}_n(A)$ agit sur le module des vecteurs colonnes de taille n à coefficients dans A, noté $M_{n1}(A)$, ce qui permet former son produit semi-direct avec $M_{n1}(A)$:

$$\tilde{\mathfrak{g}}:=\mathfrak{g}\ltimes M_{n1}(A)=\{\begin{pmatrix}\alpha & v\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{gl}_{n+1}(A),\alpha\in\mathfrak{g},v\in M_{n1}(A)\}$$

de même que les versions stables associées (qui peuvent être obtenues comme produit semi-direct avec le module des colonnes infinies presque nulles).

Finalement, nous disposons de versions instables et stables des complexes de Volodin associés aux paires $(\mathfrak{e}_n(A),\{\mathfrak{t}_n^\sigma(A)\}_{\sigma\in\Pi_n})$:

$$v_*^n(A):=v_*(\mathfrak{e}_n(A),\{\mathfrak{t}_n^\sigma(A)\}_{\sigma\in\Pi_n}),$$

et

$$v_*(A):=\lim_{\overrightarrow{n}}v_*^n(\mathfrak{e}_n(A),\{\mathfrak{t}_n^\sigma(A)\}_{\sigma\in\Pi_n})=v_*(\mathfrak{e}(A),\{\mathfrak{t}_n^\sigma(A)\}_{n\in\mathbb{N},\sigma\in\Pi_n}),$$

ainsi que leurs versions tordues

$$\tilde{v}_*^n(A):=v_*(\tilde{\mathfrak{e}}_n(A),\{\tilde{\mathfrak{t}}_n^\sigma(A)\}_{\sigma\in\Pi_n}),$$

et

$$\tilde{v}_*(A) := \lim_{\overrightarrow{n}} \tilde{v}_*^n(\mathfrak{e}_n(A), \{\mathfrak{t}_n^\sigma(A)\}_{\sigma\in\Pi_n}) = v_*(\tilde{\mathfrak{e}}(A), \{\tilde{\mathfrak{t}}_n^\sigma(A)\}_{n\in\mathbb{N},\sigma\in\Pi_n}).$$

Le corollaire 1.3.4 a pour conséquence la proposition suivante :

Proposition 2.0.6. *Les projections et inclusions canoniques*

$$\mathfrak{e}_n(A) \leftrightarrows \tilde{\mathfrak{e}}_n(A) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{e}(A) \leftrightarrows \tilde{\mathfrak{e}}(A)$$

induisent des paires de quasi-isomorphismes quasi-inverses l'un de l'autre

$$v_*^n(A) \leftrightarrows \tilde{v}_*^n(A) \qquad \text{et} \qquad v_*(A) \leftrightarrows \tilde{v}_*(A)$$

Afin de démontrer le théorème final, il nous faut établir la trivialité de certaines actions afin de pouvoir appliquer le théorème de comparaison des suites spectrale de Zeeman. La démonstration du lemme suivant est analogue au cas des groupes et a été traitée dans l'exposé précédent de V. Franjou. Elle ne sera donc pas détaillée.

Lemme 2.0.7. *Supposons que $A = A^2$. Alors*

1. *Les actions de $\mathfrak{e}(A)$ sur $H_*(v_*(A))$ et de $\tilde{\mathfrak{e}}(A)$ sur $H_*(\tilde{v}_*(A))$ sont triviales.*
2. *Les actions de $\mathfrak{gl}(A)$ sur $H_*(\mathfrak{e}(A))$ et de $\tilde{\mathfrak{gl}}(A)$ sur $H_*(\tilde{\mathfrak{e}}(A))$ sont triviales.*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le thérème principal de la section 4 de [Suslin-Wodzicki [SW92]] :

Théorème 2.0.8. [thm 4.16 Suslin-Wodzicki [SW92]] *Supposons que $A = A^2$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $H_*(\mathfrak{gl}(A)) = H_*(\tilde{\mathfrak{gl}}(A))$,

(b) $H_*(\mathfrak{e}(A)) = H_*(\tilde{\mathfrak{e}}(A))$,

(c) $H_*(\sum_{n,\sigma} C_*(\mathfrak{t}_n^\sigma(A))) = H_*(\sum_{n,\sigma} C_*(\tilde{\mathfrak{t}}_n^\sigma(A)))$

Démonstration.

– $(a) \Leftrightarrow (b)$: Considérons le morphisme d'extensions d'algèbres de Lie

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{e}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{gl}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{gl}(A)/\mathfrak{e}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{\mathfrak{e}}(A) \arrow[r] & \tilde{\mathfrak{gl}}(A) \arrow[r] & \widetilde{\mathfrak{gl}(A)/\mathfrak{e}(A)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Elle donne lieu à un morphisme entre les suites spectrales de Hochschild-Serre associées

$$\begin{tikzcd}
E^2_{p\,q} = H_p\big(\mathfrak{gl}(A)/\mathfrak{e}(A); H_q(\mathfrak{e}(A))\big) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & H_{p+q}(\mathfrak{gl}(A)) \arrow[d] \\
E^2_{p\,q} = H_p\big(\tilde{\mathfrak{gl}}(A)/\tilde{\mathfrak{e}}(A); H_q(\tilde{\mathfrak{e}}(A))\big) \arrow[r, Rightarrow] & H_{p+q}(\tilde{\mathfrak{gl}}(A))
\end{tikzcd}$$

Le lemme 2.0.7 permet alors d'appliquer le théorème de comparaison des suites spectrales de Zeeman montrant l'équivalence des assertions (a) et (b).

– $(b) \Leftrightarrow (c)$: L'inclusion $\mathfrak{e}(A) \subset \tilde{\mathfrak{e}}(A)$ induit, d'après la proposition 1.2.4, un morphsime entre les suites spectrales d'hyperhomologie

$$\begin{tikzcd}
E^2_{p\,q} = H_p\big(\mathfrak{e}(A); H_q(v_*(A))\big) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & H_{p+q}\big(\sum_{n,\sigma} C_*(\mathfrak{t}_n^\sigma(A))\big) \arrow[d] \\
E^2_{p\,q} = H_p\big(\tilde{\mathfrak{e}}(A); H_q(\tilde{v}_*(A))\big) \arrow[r, Rightarrow] & H_{p+q}\big(\sum_{n,\sigma} C_*(\tilde{\mathfrak{t}}_n^\sigma(A))\big)
\end{tikzcd}$$

De plus, les coefficients $H_q(v_*(A))$ et $H_q(\tilde{v}_*(A))$ de chaque deuxième page sont les mêmes d'après la proposition 2.0.6. Le lemme 2.0.7 permet alors d'appliquer le théorème de comparaison des suites spectrales de Zeeman pour en déduire l'équivalence des assertions (c) et (b).

□

3 Conclusion

Soit A une algèbre H-unitaire sur $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. En particulier $A = A^2$ donc le théorème 2.0.8 s'applique. Il a été démontré dans les exposés sur l'excision en homologie cyclique

$$H_*(\tilde{\mathfrak{gl}}(A)) = H_*(\mathfrak{gl}(A_1))$$

et que (voir théorème 1.11 de [Wod89])

$$HC_*(A_1) = HC_*(A)$$

pour un certain produit semi direct H-unitaire $A_1 := A \ltimes M$. En appliquant le théorème de Loday-Quillen-Tsygan-Hanlon démontré par A. Djament dans l'un de ses exposés, il vient

$$H_*(\mathfrak{gl}(A)) \cong \Lambda^* HC_*(A)[1] \cong H_*(\tilde{\mathfrak{gl}}(A))$$

Le théorème 2.0.8 implique donc que

$$H_*(\sum_{n,\sigma} C_*(\mathfrak{t}_n^\sigma(A))) = H_*(\sum_{n,\sigma} C_*(\tilde{\mathfrak{t}}_n^\sigma(A))) \tag{4}$$

Comme les $\mathfrak{t}_n^\sigma(A)$ sont nilpotentes et que leurs groupes exponentiels sont les groupes $T_n^\sigma(A)$ de matrices triangulaires supérieures pour l'ordre σ, le corollaire 5.11 de [Suslin-Wodzicki [SW92]] démontré dans l'exposé de J-C Thomas permet d'en déduire des isomorphismes

$$H_*(BT_n^\sigma(A)) \cong H_*(C_*(\mathfrak{t}_n^\sigma(A))) \qquad , \quad n \in \mathbb{N},\ \sigma \in \Pi_n$$

et

$$H_*(B\tilde{T}_n^\sigma(A)) \cong H_*(C_*(\tilde{\mathfrak{t}}_n^\sigma(A))) \qquad , \quad n \in \mathbb{N},\ \sigma \in \Pi_n$$

qui, à l'aide d'un emploi répété de suite de Mayer-Vietoris, et en conjonction avec (4), impliquent les isomorphismes du corollaire 5.14 :

$$H_*(\bigcup_{n,\sigma} BT_n^\sigma(A)) \cong H_*(\sum_{n,\sigma} C_*(\mathfrak{t}_n^\sigma(A)))$$

et

$$H_*(\bigcup_{n,\sigma} B\tilde{T}_n^\sigma(A)) \cong H_*(\sum_{n,\sigma} C_*(\tilde{\mathfrak{t}}_n^\sigma(A)))$$

Ainsi

$$H_*(\bigcup_{n,\sigma} BT_n^\sigma(A)) \cong H_*(\bigcup_{n,\sigma} B\tilde{T}_n^\sigma(A))$$

Le théorème 2.10, qui est l'analogue pour les groupes du théorème 4.16, et dont les principaux éléments de la démonstration (qui repose sur l'existence de suites spectrales fonctorielles pour la construction de Volodin associée au familles de sous-groupes et sur le théorème de comparaison de Zeeman) ont été détaillés dans l'exposé de V. Franjou permet alors d'en déduire l'isomorphisme

$$H_*(GL(A)) \cong H_*(\widetilde{GL}(A))$$

qui, comme cela a été expliqué par Aurélien dans son exposé introductif, est équivalent au fait que A soit excisive en K-théorie algébrique rationnelle. Nous avons ainsi résumé la démonstration d'une des implications du théorème B de [Suslin-Wodzicki [SW92]] :

A est une $\mathbb{Q}$-algèbre H-unitaire $\Rightarrow$ A est excisive en K-théorie algébrique rationnelle.

Références

[SW92] Andrei A Suslin and Mariusz Wodzicki. Excision in algebraic k-theory. *Annals of mathematics*, pages 51–122, 1992.

[Wod89] Mariusz Wodzicki. Excision in cyclic homology and in rational algebraic k-theory. *Ann. of Math*, 129(591-640) :296, 1989.