Dualités de Koszul algébrique, opéradique et propéradique

Mémoire de M2

Clovis Chabertier

Sous la direction de Salim Rivière

2020

Dans les catégories abéliennes [Gro57] possédant assez de projectifs (resp. injectifs), une façon d'obtenir des invariants, dits homologiques, est de trouver un foncteur exact à droite (resp. gauche) et de regarder l'homologie du foncteur evalué sur une résolution projective (resp. injective), ce sont les foncteurs dérivés. Cependant, $As-alg$ n'est pas abélienne, mais elle possède une structure de modèle [Hin97], qui permet quand même d'obtenir des invariants homologiques. Ce sont les résolution cofibrantes dans les catégories de modèle qui jouent le rôle des résolutions projectives dans les catégories abéliennes, et les adjonctions de Quillen qui jouent celui des foncteurs exacts d'un coté.

Si on veut obtenir de façon systématique une résolution cofibrante $X_A \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A$, on peut chercher un endofoncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, muni d'une transformation naturelle $\eta_\bullet : \mathcal{F} \to Id_\mathcal{C}$ telle que les η_X soient des équivalences faibles cofibrantes. A nouveaux, une façon d'obtenir un endofoncteur et une transformation naturelle de celui-ci vers l'identité, est de chercher une paire de foncteurs adjoints L et R puis de considérer la counité de l'adjonction $\epsilon : L \circ R \to Id$.

C'est ce qu'on s'attachera à faire en détail dans la première partie (puis dans la seconde partie) en construisant une adjonction :

$$Aug - dga - alg \underset{B}{\overset{\Omega}{\leftrightarrows}} Conil - dga - coalg$$

Table des matières

Chapitre 1

Une adjonction cobar-bar pour les algèbres associatives

Ce chapitre est très largement inspiré de [LV12]. On fixe un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Dans ce qui suit, les espaces vectoriels seront sur $\mathbb{K}$ et les applications entre espaces vectoriels seront supposées linéaires (sauf mention du contraire). Les algèbres et coalgèbres seront toujours supposées (co-)associatives et (co-)augmentées et l'idéal d'augmentation sera surmonté d'une barre, sauf mention du contraire.

1.1 Rappels et conventions

On introduit ici les définitions et propriétés permettant d'atteindre rapidement l'adjonction voulue.

1.1.1 Algèbres

On rappelle la construction de l'algèbre libre (unitaire) sur un espace vectoriel V :

Construction 1.1. *Soit* $\bar{T}(V) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} V^{\otimes n}$ *le* $\mathbb{K}$*-module tensoriel et* $i_V := i_1 : V \hookrightarrow$

$T(\bar{V})$ *l'inclusion canonique.* $T(\bar{V})$ *muni du produit de concaténation* μ *:*

$$\forall x_1 \otimes ... \otimes x_n \forall x_{n+1} \otimes ... \otimes x_k : (x_1 \otimes ... \otimes x_n).(x_{n+1} \otimes ... \otimes x_k) := x_1 \otimes ... \otimes x_k$$

est une algèbre associative libre sur V*, notée* $\mathcal{F}_u(V)$*, ou juste* $\mathcal{F}(V)$ *si aucune confusion n'est possible. L'algèbre unitaire augmentée sur un espace vectoriel* V *doit quant à elle vérifier l'adjonction :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{uAs-alg}(\mathcal{F}(V), A) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \bar{A}) \\ f & \mapsto & f \circ i_V \end{array}$$

Soit $T(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ *le module tensoriel unitaire muni du produit de concaténation* μ *décrit précédemment et de l'inclusion canonique* $i_V : V \hookrightarrow T(V)$*. Alors ce triplet* $\mathcal{F}(V) := (T(V), \mu, i_V)$ *est une algèbre unitaire augmentée sur* V*.*

Lemme 1.1. *Soit* M *un* $T(V)$*-bimodule et* $Der(T(V), M)$ *l'espace des dérivations de* $T(V)$ *dans* M *([LV12] 1.1.6), alors*

$$\begin{array}{ccc} Der(T(V), M) & \to & Hom_{\mathbb{K}}(V, M) \\ d & \mapsto & d \circ i_V \end{array}$$

est un isomorphisme. Autrement dit toute application linéaire $f : V \to M$ *s'étend de façon unique en une dérivation* $d_f : T(V) \to M$ *:*

$$\forall v_1 \otimes ... \otimes v_n : d_f(v_1 \otimes ... \otimes v_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} v_1 \otimes ... \otimes f(v_i) \otimes ... \otimes v_n$$

1.1.2 Coalgèbres

Définition 1.1. On rappelle les notations de Sweedler :

$$\Delta(x) = \sum_i x_1^i \otimes x_2^i$$

et la coassociativité :
$\Delta^2(x) = \sum\limits_{i,k} x_1^i \otimes x_{2,1}^{i,k} \otimes x_{2,2}^{i,k} = \sum\limits_{i,j} x_{1,1}^{i,j} \otimes x_{1,2}^{i,j} \otimes x_2^i$, que l'on écrira : $\sum\limits_i x_1^i \otimes x_2^i \otimes x_3^i$.
$\Delta^n(x) = \sum\limits_i x_1^i \otimes ... \otimes x_{n+1}^i$.

Définition 1.2. Une coalgèbre coaugmentée (C, Δ) est dite *conilpotente* si

$$\forall x \in \bar{C}, \exists n, \forall m \geq n : \Delta^m(x) = 0$$

Un morphisme de coalgèbres conilpotentes est un morphisme de coalgèbres coaugmentées. La catégorie des coalgèbres conilpotentes est notée $Conil - Coalg$.

Une coalgèbre colibre conilpotente sur un espace vectoriel V dans la catégorie des coalgèbres conilpotentes est la donnée d'une coalgèbre conilpotente $\mathcal{F}^c(V)$ et d'une application linéaire $p_V : \mathcal{F}^c(V) \to V$ vérifiant la propriété que toute application linéaire du coidéal d'augmentation d'une coalgèbre conilpotente $\bar{C}$ dans V se relève en un morphisme de coalgèbres coaugmentées $C \to \mathcal{F}^c(V)$. Une construction est donnée par ce qui suit.

Construction 1.2. *Soit $T^c(V) := \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ le module tensoriel, $p_V := \pi_1 : T^c(V) \to V$ la première projection et le coproduit de déconcaténation*[1] *:*

$$\forall x_1 \otimes ... \otimes x_n \in T(V) : \Delta(x_1 \otimes ... \otimes x_n) := \sum_{0 \leq i \leq n} x_1 \otimes ... \otimes x_i \boxtimes x_{i+1} \otimes ... \otimes x_n \in T^c(V) \boxtimes T^c(V)$$

Alors $(T^c(V), p_V, \Delta)$ est une coalgèbre conilpotente colibre sur V, notée $\mathcal{F}^c(V)$. Ob-

1. $\boxtimes$ est le produit tensoriel au dessus de $\mathbb{K}$, noté différemment pour le discerner du produit tensoriel $\otimes$ interne à $T(V)$.

servons que le coproduit réduit est donné par :

$$\bar{\Delta}(x_1 \otimes ... \otimes x_n) := \sum_{1 \leq i \leq n-1} x_1 \otimes ... \otimes x_i \boxtimes x_{i+1} \otimes ... \otimes x_n \in T^c\bar{(V)} \boxtimes T^c\bar{(V)}$$

Définition 1.3. Soit (C, Δ) une coalgèbre conilpotente. Une *codérivation* de C est une application linéaire $d : C \to C$ vérifiant

$$\Delta \circ d = (d \otimes Id) \circ \Delta + (Id \otimes d) \circ \Delta$$

L'espace des dérivations de C est noté $Coder(C)$.

Lemme 1.2. *L'application linéaire suivante*

$$\begin{array}{ccc} Coder(T^c(V)) & \to & Hom_{\mathbb{K}}(T^c(V), V) \\ & & \\ d & \mapsto & p_V \circ d \end{array}$$

est un isomorphisme.
Si $f \in Hom_{\mathbb{K}}(T^c(V), V)$, alors la codérivation correspondante est donnée par

$$\forall x : d(x)^{(n)} = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_j x_1^j \otimes ... \otimes f(x_i^j) \otimes ... \otimes x_n^j$$

Où $d(x)^n$ est la composante dans $V^{\otimes n}$ de $d(x)$ et $\bar{\Delta}^{n-1}(x) = \sum_j x_1^j \otimes ... \otimes x_n^j$.

1.1.3 (Co)Algèbres différentielles graduées

Pour une introduction détaillée au cadre différentiel gradué, le chapitre 1 de [LV12] est suffisant.
Si $V = \{V_i\}$ et $W = \{W_j\}$ sont des espaces vectoriels gradués, alors $V \otimes W := \{(V \otimes W)_n\}$ où

$$(V \otimes W)_n := \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes W_j$$

Le cas $W = V$ induit par récurrence une graduation sur $V^{\otimes n}$ et donc sur $T(V)$.

Soit $\mathbb{K}s$ l'espace vectoriel gradué engendré par s, concentré en degré 1. La *suspension* de l'espace vectoriel gradué V est définie par : $sV := \mathbb{K}s \otimes V$, et sa *dé-suspension* $s^{-1}V$ par $\mathbb{K}s^{-1} \otimes V$, où $\mathbb{K}s^{-1}$ est concentré en degré -1.
L'espace des morphismes d'espaces gradués de degré r est noté $Hom(V, W)_r$. Le *bord* $\partial(f)$ d'un morphisme d'espaces gradués $f : V_\bullet \to W_{\bullet+r}$ de degré r entre complexes de chaînes est donné par :

$$\partial(f) := d_W \circ f - (-1)^r f \circ d_V$$

Ainsi f est un morphisme de complexes de chaînes si, et seulement si $\partial(f) = 0$.

Jusqu'à la fin, on utilisera les définitions de Koszul : pour V et W gradués, l'isomorphisme de symétrie τ est donné par :

$$\begin{array}{ccc} \tau_{V,W} : V \otimes W & \to & W \otimes V \\ v \otimes w & \mapsto & (-1)^{|v||w|} w \otimes v \end{array}$$

Pour $f : V \to V'$ et $g : W \to W'$ des applications linéaires de degré $| f |$ et $| g |$, leur produit tensoriel[2] est

$$\forall v \otimes w : (f \otimes g)(v \otimes w) := (-1)^{|g||v|} f(v) \otimes g(w)$$

Définition 1.4. Si (V, d_V) et (W, d_W) sont des complexes de chaînes, leur produit tensoriel est le complexe de chaîne $(V \otimes W, d_{V \otimes W})$ où

$$d_{V\otimes W} := d_V \otimes Id + Id \otimes d_W$$

Définition 1.5. Un complexe de chaînes *gradué par le poids M* est un complexe de chaînes M, muni d'une décomposition en somme directe de sous complexes de

2. La tensorisation $- \otimes -$ reste associative.

chaines $M^{(d)}$:

$$M = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} M^{(d)}$$

Une algèbre différentielle graduée par le poids A, ou *wdg-algèbre*, est la donnée d'une structure d'algèbre sur un complexe de chaînes gradué par le poids A, telle que le produit préserve le poids et le degré. On note $A_n^{(d)}$ la composante de poids d et degré n de A. Elle est de plus dite *connexe* si $A^{(0)} = \mathbb{K}.1_A$

1.1.4 Convolution

Définition 1.6. Soit (C, Δ, ϵ) une dg-coalgèbre et (A, μ, u) une dg-algèbre, on note $Hom(C, A) := \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} Hom(C, A)_r$.
La convolution :

$$\begin{array}{ccc} Hom(C,A) \otimes Hom(C,A) & \to & Hom(C,A) \\ & & \\ f \otimes g & \mapsto & f * g := \mu \circ f \otimes g \circ \Delta \end{array}$$

fait de $(Hom(C, A), *, \partial, u \circ \epsilon)$ une dg-algèbre unitaire.

Définition 1.7. Soient A une algèbre munie d'une dérivation $d_A : A \to A$ et M un A-module à droite. Une A-*dérivation* sur M est une application linéaire $d : M \to M$ telle que

$$\forall a, \forall m : d(m.a) = d(m).a \pm m.d_A(a)$$

Proposition 1.1. *Toute application linéaire $\alpha : C \to A$ d'une coalgèbre graduée vers une algèbre graduée, induit une application linéaire $d_\alpha : C \otimes A \to C \otimes A$ qui est une A-dérivation et C-codérivation, par :*

$$d^r_\alpha := (Id \otimes \mu) \circ (Id_C \otimes \alpha \otimes Id_A) \circ (\Delta \otimes Id_A)$$

Toute application linéaire $\alpha : C \to A$ induit une dérivation sur $C \otimes A$ par $d_\alpha := d_{C\otimes A} + d^r_\alpha$. On aura besoin du lemme suivant dans la section suivante.

Lemme 1.3.

$$d_\alpha^2 = d^r_{\partial(\alpha)+\alpha*\alpha}$$

1.2 Adjonction cobar-bar

On rappelle qu'on a les paires d'adjonctions suivantes (où les flèches opposées sont adjointes) :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K}-Mod \arrow[dl, shift left, "\bar{U}"] \arrow[dr, shift left, "T^c"] & \\
Aug-alg \arrow[ur, shift left, "T"] \arrow[rr, shift right, "T^c\circ\bar{U}"'] & & Conil-coalg \arrow[ul, shift left, "\bar{U}"] \arrow[ll, shift right, "T\circ\bar{U}"']
\end{tikzcd}$$

qui fournit une adjonction entre la catégorie des algèbres augmentées $Aug-alg$ et la catégorie des coalgèbres conilpotentes $Conil-coalg$, qui s'étend au cas gradué [3]. Cette adjonction, se factorisant par $\mathbb{K}$-Mod, oublie les structures d'algèbres et coalgèbres. Dans la section qui suit, on s'attache à construire une adjonction entre les catégories des algèbres différentielles graduées augmentées $dg-Aug-alg$ et des coalgèbres conilpotentes différentielles graduées $dg-conil-coalg$ qui n'oubliera ni les structures de (co-)algèbre ni les différentielles internes.

Soit C une dg-coalgèbre conilpotente. Un point technique intervenant dans la section suivante nous invite à plutôt considérer $\mathcal{F}(s^{-1}\bar{C})$ et non simplement $\mathcal{F}(\bar{C})$. On peut alors munir l'algèbre $\Omega C := \mathcal{F}(s^{-1}\bar{C})$ de deux dérivations d_{int} et d_{ext} :

— $d_{int} := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} d_{(s^{-1}\bar{C})^{\otimes n}}$, explicitement donnée pour tous $s^{-1}x_1\otimes ...\otimes s^{-1}x_n \in \Omega C$ par :

$$d_{int}(s^{-1}x_1\otimes...\otimes s^{-1}x_n) = \sum_{1\leq i\leq n}(-1)^{i+|x_1|+...+|x_{i-1}|}s^{-1}x_1\otimes...\otimes s^{-1}d_C(x_i)\otimes...\otimes s^{-1}x_n$$

— d_{ext}, obtenue en prolongeant (voir lemme 1.1) la composée $f := (id\otimes\tau\otimes id)\circ$

3. L'isomorphisme naturel en A et C : $\mathrm{Hom}_{g-Aug-alg}(T(s^{-1}\bar{C}), A) \simeq \mathrm{Hom}_{g\mathbb{K}}(\bar{C}, \bar{A})_{-1}$ est noté $\psi_{C,A}$

$\Delta_s \otimes \Delta_{\bar{C}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}s^{-1} \otimes \bar{C} \arrow[r, "\Delta_s \otimes \Delta_{\bar{C}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{K}s^{-1} \otimes \mathbb{K}s^{-1} \otimes \bar{C} \otimes \bar{C} \arrow[d, "\simeq"', "id\otimes\tau\otimes id"] \\ & (\mathbb{K}s^{-1} \otimes \bar{C})^{\otimes 2} \end{tikzcd}$$

en une dérivation sur $T(s^{-1}\bar{C})$.

Et Δ_s est le morphisme de degré -1,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}s^{-1} & \to & \mathbb{K}s^{-1} \otimes \mathbb{K}s^{-1} \\ & & \\ s^{-1} & \mapsto & s^{-1} \otimes s^{-1} \end{array}$$

Explicitement, f est donnée par la formule :

$$\forall s^{-1}x \in s^{-1}\bar{C} : f(s^{-1}x) = \sum_i (-1)^{|x_1^i|} s^{-1}x_1^i \otimes s^{-1}x_2^i$$

Lemme 1.4. — $d_{ext}^2 = 0$.

— $d_{ext} \circ d_{int} + d_{int} \circ d_{ext} = 0$

Esquisse de démonstration 1.1. *La coassociativité de Δ_C implique que $d_{ext}^2 = 0$. Quant à l'égalité $d_{ext} \circ d_{int} + d_{int} \circ d_{ext} = 0$, elle est conséquence du caractère morphisme de complexe de chaînes de Δ_C.*

ΩC munit de la différentielle $d_{\Omega C} := d_{int} + d_{ext}$:

$$(\Omega C, d_{\Omega C})$$

est appelée *construction*[4] *cobar* de C.

Ayant le foncteur d'oubli, fidèle

$$U : dg - Aug - alg \to g - Aug - alg$$

4. Qui est fonctorielle en C

on va caractériser l'image de la composée :

$$\mathrm{Hom}_{dg-Aug-alg}(\Omega C, A) \underset{U}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{g-Aug-alg}(\Omega C, A) \underset{\psi_{C,A}}{\rightarrow} \mathrm{Hom}_{g\mathbb{K}}(\bar{C}, \bar{A})_{-1}$$

Si $f : \Omega C \to A$ est un morphisme d'algèbres graduées augmentées, alors

$$f \in \mathrm{Hom}_{dg-Aug-alg}(\Omega C, A) \Leftrightarrow f \circ d_{\Omega C} = d_A \circ f$$

Or ΩC est quasi-libre et f est un morphisme d'algèbres, donc :

$$f \circ d_{\Omega C} = d_A \circ f \Leftrightarrow f \circ d_{\Omega C|s^{-1}\bar{C}} = d_A \circ f_{|s^{-1}\bar{C}}$$

ce qui peut se réécrire :

$$\begin{aligned}
& - f(sd_C(x)) + \sum_i (-1)^{|x_1^i|} f(s^{-1}x_1^i).f(s^{-1}x_2^i) = d_A(f(s^{-1}x)) \\
& \Leftrightarrow d_A \circ \alpha_f(x) + \alpha_f \circ d_C(x) + \sum (-1)^{|x_1^i|} \alpha_f(x_1^i).\alpha_f(x_2^i) = 0 \\
& \Leftrightarrow \partial(\alpha_f) + \alpha_f * \alpha_f = 0
\end{aligned}$$

Où $\alpha_f := \psi_{C,A}(f)$. L'équation

$$\partial(\alpha_f) + \alpha_f * \alpha_f = 0 \qquad \text{(M.C)}$$

est appelée *équation de Maurer-Cartan.*

Définition 1.8. une solution de l'équation de Maurer-Cartan $\alpha \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$, est appelée *morphisme tordant* si de plus elle vérifie :

— $\alpha(\bar{C}) \subset \bar{A}$

— $\alpha(\mathbb{K}) = 0$

L'espace des morphismes tordants [5] de C dans A est noté $Tw(C, A)$.

On vient donc de montrer :

5. qui est un sous-foncteur du foncteur $\mathrm{Hom}(-, -)$

Proposition 1.2. *L'isomorphisme naturel* $\mathrm{Hom}_{g-Aug-alg}(T(s^{-1}\bar{C}),A) \simeq \mathrm{Hom}_{g\mathbb{K}}(\bar{C},\bar{A})_{-1}$ *se restreint en un isomorphisme* ϕ*, donc naturel, faisant commuter le carré :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{g-Aug-alg}(T(s^{-1}\bar{C}),A) \arrow[r, "\psi_{C,A}"] & \mathrm{Hom}_{g\mathbb{K}}(\bar{C},\bar{A})_{-1} \\ \mathrm{Hom}_{dg-Aug-alg}(\Omega C,A) \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "\phi_{C,A}"] & Tw(C,A) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Si A est une dg-algèbre augmentée, la coalgèbre colibre $T^c(s\bar{A})$, munie de la différentielle $d_{BA} := d_{int} + d_{ext}$, où

— $d_{int} := \sum\limits_{1\leq i\leq n} Id^{\otimes i-1} \otimes d_{s\bar{A}} \otimes Id^{\otimes n-i}$.

— $d_{ext}(sx_1 \otimes ... \otimes sx_n) := \sum\limits_{1\leq i\leq n-1} (-1)^{i-1+|x_1|+...+|x_i|} sx_1 \otimes ... \otimes sx_i.x_{i+1} \otimes ... \otimes sx_n$.

est appelé *construction bar*[6] de A :

$$BA := (T^c(s\bar{A}), d_{BA})$$

En faisant le même travail que précédemment, on obtient le théorème suivant :

Théorème 1.5. *Pour toute dg-coalgèbre conilpotente* C *et toute dg-algèbre augmentée* A*, on a les bijections naturelles :*

$$\mathrm{Hom}_{dg-Aug-alg}(\Omega C,A) \simeq Tw(C,A) \simeq \mathrm{Hom}_{dg-conil-alg}(C,BA)$$

1.2.1 Résolution cobar-bar

Le lemme de Yoneda [Mac] indique que les transformations naturelles d'un foncteur, à valeurs dans la catégorie des ensembles Ens, représentable ($\simeq \mathrm{Hom}(X,-)$) vers un foncteur quelconque F, sont paramétrées par $F(X)$, plus précisemment, on

6. fonctorielle en A

a la bijection :

$$\begin{array}{ccc} Nat(\mathrm{Hom}(X,-),F) & \to & F(X) \\ \\ \eta & \mapsto & \eta_X(Id_X) \end{array}$$

La preuve de l'injectivité fournit une formule pour η, qui est la suivante : $\forall Y \in Ob(C)$,

$$\eta_Y(f) = F(f)(\eta_X(Id_X))$$

En particulier $Nat(\mathrm{Hom}(\Omega C,-), Tw(C,-)) \simeq Tw(C,\Omega C)$, dont la source est $dg-Aug-alg$. Soit $\Phi_{C,.} \in Nat(\mathrm{Hom}(\Omega C,-), Tw(C,-))$ l'isomorphisme naturel vu à la section précédente. Par le lemme de Yoneda, celui-ci est exactement déterminé par $\iota := \Phi_{\Omega C}(Id_{\Omega_C}) \in Tw(C,\Omega C)$, d'où :
$\forall f : \Omega C \to A, \Phi_A(f) = Tw(f)(\Psi_{\Omega C(Id_{\Omega C})}) = Tw(f)(\iota) = f \circ \iota \in Tw(C,\Omega C)$.
Autrement dit, la bijection $\mathrm{Hom}(\Omega C, A) \overset{\rightarrow}{\simeq} Tw(C,A)$ est donné par la précomposition par ι, qui est appelé *morphisme tordant universel*.
On a, de façon analogue, le *morphisme tordant universel* $\pi : BA \to A$.

Théorème 1.6. *Tout morphisme tordant $\alpha : C \to A$ se factorise d'une unique façon par π et ι :*

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega C \arrow[dr, dashed, "\exists! g_\alpha"] & \\
C \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\exists! f_\alpha"'] & & A \\
 & BA \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Où $g_\alpha = \Phi_A^{-1}(\alpha)$ et $f_\alpha = \Psi_C^{-1}(\alpha)$ [7]

Théorème 1.7. *Les complexes de chaînes $BA \otimes_\pi A$, $A \otimes_\pi BA$, $C \otimes_\iota \Omega C$ et $\Omega C \otimes_\iota C$ sont acycliques.*

7. L'isomorphisme $Hom(-,BA) \simeq Tw(-,A)$ est noté Ψ.

Démonstration 1.1. *Réorganisons la différentielle d_π sur $BA \otimes A$ en $d_\pi = d_{int} + d_{ext}$ où :*

- $d_{int}([sa_1 \mid ... \mid sa_n]a_{n+1}) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+|a_1|+...+|a_{i-1}|}[sa_1 \mid ... \mid sd(a_i) \mid ... \mid sa_n]a_{n+1} + (-1)^{n+|a_1|+...+|a_n|}[sa_1 \mid ... \mid sa_n]d(a_{n+1})$.
- $d_{ext}([sa_1 \mid ... \mid sa_n]a_{n+1}) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^{i-1+|a_1|+...+|a_i|}[sa_1 \mid ... \mid sa_i a_{i+1} \mid ... \mid sa_n]a_{n+1} + (-1)^{n-1+|a_1|+...+|a_{n-1}|}[sa_1 \mid ... \mid sa_{n-1}]a_n a_{n+1}$

Soit $\epsilon \otimes \epsilon : BA \otimes_\pi A \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}$ l'augmentation, et K son noyau. On définit l'application $h : K \to K$ par

$$h([sa_1 \mid ... \mid sa_n]a_{n+1}) := (-1)^{n+|a_1|+...+|a_n|}[sa_1 \mid ... \mid sa_n \mid s(a_{n+1} - \epsilon(a_{n+1}))]$$

On a alors

$$\begin{aligned}(h \circ d_{int} + d_{int} \circ h)([sa_1 \mid ... \mid sa_n]a_{n+1}) &= \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+n-1+|a_i|+...|a_n|}[sa_1 \mid ... \mid sd(a_i) \mid ... \\ &\mid sa_n \mid s(a_{n+1} - \epsilon(a_{n+1}))] \\ &+ [sa_1 \mid ... \mid sa_n \mid s(d(a_{n+1}) - \epsilon(d(a_{n+1})))] \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq n+1} (-1)^{i+n+|a_i|+...+|a_n|}[sa_1 \mid ... \\ &\mid sd(a_i) \mid ... \mid s(a_{n+1} - \epsilon(a_{n+1}))] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d_{ext} \circ h + h \circ d_{ext})([sa_1 \mid ... \mid sa_n]a_{n+1}) = & \sum_{1 \le i \le n} (-1)^{i-1+n+|a_{i+1}|+|a_n|}[sa_1 \mid ... \mid sa_i.a_{i+1} \mid ... \\ & \mid s(a_{n+1} - \epsilon(a_{n+1})] \\ & + [sa_1 \mid ... \mid sa_n](a_{n+1} - \epsilon(a_{n+1})) \\ & + \sum_{1 \le i \le n-1} (-1)^{i+n+|a_{i+1}|+|a_n|}[sa_1 \mid ... \mid sa_i.a_{i+1} \mid ... \\ & \mid s(a_{n+1} - \epsilon(a_{n+1})] + [sa_1 \mid ... \mid s(a_n.a_{n+1} - \epsilon(a_n.a_{n+1}))] \\ & = -[sa_1 \mid ... \mid sa_n a_{n+1} - \epsilon(a_{n+1})] \\ & + [sa_1 \mid ... \mid s(a_n a_{n+1} - \epsilon(a_n a_{n+1}))] \\ & + [sa_1 \mid ... \mid sa_n](a_{n+1} - \epsilon(a_{n+1})) \\ & = [sa_1 \mid ... \mid sa_n]a_{n+1}\end{aligned}$$

Ce qui donne $h \circ d_\pi + d_\pi \circ h = Id$ et donc $BA \otimes_\pi A \simeq (Ker(\epsilon \otimes \epsilon), d_|) \oplus (\mathbb{K}, 0)$ est acyclique.

Définition 1.9. Un morphisme tordant $\alpha : C \to A$ est dit de *Koszul*, noté $\alpha \in Kos(C, A)$, si et seulement si $C \otimes_\alpha A$ est acyclique.

Remarque 1.1. *Les morphismes universels π et ι sont donc de Koszul.*

Théorème 1.8. *Soit A une dg-algèbre connexe et C une dg-coalgèbre connexe. Pour tout morphisme tordant $\alpha : C \to A$, on a les équivalences :*

1. *$C \otimes_\alpha A$ est acyclique.*
2. *$A \otimes_\alpha C$ est acyclique.*
3. *$f_\alpha : C \to BA$ est un quasi-isomorphisme.*
4. *$g_\alpha : \Omega C \to A$ est un quasi-isomorphisme.*

Pour la démonstration, on utilisera la boite noire suivante :

Théorème 1.9. *Soient $g : A \to A'$ un morphisme de wdg-algèbres connexes ($A^{(0)} \simeq A'^{(0)} \simeq \mathbb{K}$) , $f : C \to C'$ un morphisme de wdg-coalgèbres connexes, $\alpha : C \to A$ et $\alpha' : C' \to A'$ des morphismes tordants tel que $\alpha' \circ f = g \circ \alpha$. Alors si deux parmi les* *trois morphismes f, g et $f \otimes g : C \otimes_\alpha A \to C' \otimes_{\alpha'} A'$ sont des quasi-isomorphismes, le troisième l'est aussi.*

La preuve fait appel aux suites spectrales.
Prouvons maintenant le théorème.

Démonstration 1.2. *On ne va montrer l'équivalence qu'entre les propositions 1. et 4., les autres étant similaires, et on fait l'hypothèse que A et C sont gradués par le poids et connexes, cependant le théorème est vrai sans ces hypothèses [HMS74].*
La construction bar de A (resp. cobar de C) est une wdg-coalgèbre connexe (resp. dg-algèbre connexe), et le morphisme $g_\alpha : \Omega C \to A$ est un morphisme de wdg-algèbres. De plus $g_\alpha \circ \iota = \alpha \circ Id_C$, donc par le théorème précédent, comme Id_C est un quasi-isomorphisme, g_α est un quasi-isomorphisme si et seulement $Id_C \otimes g_\alpha$ est un quasi-isomorphisme. Or $C \otimes_\iota \Omega C$ est acyclique, donc g_α est un quasi-isomorphisme, si, et seulement si $C \otimes_\alpha A$ est acyclique.

Corollaire 1.10. *Soient A une dg-algèbre augmentée et C une dg-coalgèbre co-augmentée. L'unité $\epsilon : \Omega BA \twoheadrightarrow A$ et la co-unité $\nu : C \hookrightarrow B\Omega C$ sont des quasi-isomorphismes.*

Démonstration 1.3. *On suppose que A et C sont gradués par le poids et connexes afin de faciliter la démonstration.*
$f_\pi = \epsilon_A : \Omega BA \to A$, or $BA \otimes_\pi A$ est acyclique par le théorème 1.10, donc par le théorème précédent, ϵ_A est un quasi-isomophisme. La preuve pour ν est semblable.

Remarque 1.2. *La construction cobar de la construction bar d'une dg-algèbre augmentée A, fournit un quasi-isomorphisme surjectif d'une algèbre quasi-libre ΩBA vers A. Cependant $\Omega BA = T(s^{-1}\overline{T(s\bar{A})})$ contient deux types de tenseurs : les premiers ceux de la construction bar et les seconds, ceux de la construction cobar. Pour certaines algèbres usuelles, dites quadratiques, dont la différentielle interne est nulle : $T(V), S(V), \Lambda(V)$,... Il est possible de faire mieux, en remplaçant BA par $A^{¡}$ qui sera (lorsque A sera de Koszul) une sous-coalgèbre quasi-isomorphe à $H^0(B^\bullet A) \subset BA$.*

On aura de plus le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \Omega A^{¡} \arrow[r, hook] \arrow[dr, two heads] & \Omega BA \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ & A \end{tikzcd}$$

1.3 Une résolution plus économe

Définition 1.10. Soit V un espace vectoriel gradué et $R \subset V^{\otimes 2}$ un sous-espace vectoriel gradué.
Une algèbre graduée est dite *quadratique* si elle est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à

$$A(V, R) := T(V)/(R)$$

Une coalgèbre graduée est dite *quadratique*[8] si elle isomorphe en tant que coalgèbre graduée à la sous-coalgèbre de $T^c(V)$ donnée par

$$C(V, R) := \mathbb{K} \oplus V \oplus ... \oplus (\bigcap_{i+j+2=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}) \oplus ... \subset T^c(V)$$

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette section, V sera de dimension finie.

Définition 1.11. Pour $A = A(V, R)$, la *coalgèbre duale de Koszul* de A est définie par

$$A^{¡} := C(sV, s^2R)$$

On définit aussi *l'algèbre duale de Koszul*

$$A^! := A(V^*, R^\perp)$$

où $R^\perp \subset V^* \otimes V^* \simeq (V \otimes V)^*$ est l'orthogonal de R.

8. Une *donnée quadratique* est un couple $(V, R \subset V^{\otimes 2})$ et un morphisme de données quadratiques $(V, R) \to (V', R')$ est une application linéaire $f : V \to V'$ telle que $T(f)(R) \subset R'$. La collection des données quadratiques est ainsi organisée en une catégorie et $A(-,-)$, $C(-,-)$ sont des foncteurs.

Pour $C = C(V, R)$, *l'algèbre duale de Koszul* est donnée par

$$C^{¡} := A(s^{-1}V, s^{-2}R)$$

Lemme 1.11. $(A^{i})^{i} = A$, $(C^{i})^{i} = C$ *et* $(A^{!})^{!} = A$

Exemple 1.1. — *$T(V)$ est quadratique et $T(V)^{!} = \mathbb{K} \otimes V^{*}$, muni de la mutlipli-cation nulle (si $V \simeq \mathbb{K}$, $T(V) \simeq \mathbb{K}[X]/(X^2)$).*

— *$S(V) := T(V)/(R :=< x \otimes y - y \otimes x \mid x \otimes y \in V^{\otimes 2} >)$ est quadratique. V est de dimension finie, donc le morphisme naturel $V^{*} \otimes V^{*} \to (V \otimes V)^{*}$ est un isomorphisme, et*

$$\begin{aligned}
&f \otimes g \in R^{\perp} \\
&\Leftrightarrow \forall x \otimes y, f(y)g(x) = f(x)g(y) \\
&\Leftrightarrow 2.f \otimes g = f \otimes g + g \otimes f \in < l \otimes l, l \in V^{*} > \subset V^{* \otimes 2}
\end{aligned}$$

(par polarisation). i.e. $R^{\perp} =< l \otimes l, l \in V^{*} >$. Ainsi $S(V)^{!} = \Lambda(V^{*})$.

— *$S(V)^{i} = \Lambda^{c}(sV)$, où*
$\Lambda^{c}(sV) = \mathbb{K} \oplus sV \oplus ... \oplus < \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) sx_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes sx_{\sigma(n)} \mid x_1, ... x_n \in V > \oplus ... \subset T^{c}(sV)$

1.3.1 Complexe de Koszul associé à une algèbre quadratique

La machinerie des morphismes tordants et le théorème fondamental (théorème 1.11) sur les morphismes tordants va permettre de fabriquer un morphisme $\Omega A^{¡} \twoheadrightarrow A$. Soit $A = A(V, R)$ une algèbre quadratique, munie de la différentielle nulle. On définit le morphisme de complexes de chaînes[9] de degré -1 et poids 0 comme la composée :

$$\kappa : A^{¡} \to A := A^{¡} \twoheadrightarrow sV \simeq V \hookrightarrow A$$

Lemme 1.12. $\kappa * \kappa = 0$, *et donc* $\kappa \in Tw(A^{i}, A)$.

9. κ est en fait naturel en la donnée quadratique (V, R)

Définition 1.12. Le complexe de chaînes $(A^{¡} \otimes_\kappa A, d_\kappa)$ est appelé le *complexe de Koszul* de l'algèbre quadratique A.

Lemme 1.13. *Le complexe $(A^{¡} \otimes_\kappa A, d_\kappa)$ se scinde en*

$$A^{¡} \otimes_\kappa A = \bigoplus_n ((A^{¡} \otimes_\kappa A)^{(n)}, d_{\kappa|})$$

Où $((A^{¡} \otimes_\kappa A)^{(n)}, d_{\kappa|})$ est le complexe :

$$0 \to A^{¡(n)} \to A^{¡(n-1)} \otimes A^{(1)} \to ... \to A^{¡(1)} \otimes A^{(n-1)} \to A^{(n)} \to 0$$

Et $(A^{¡} \otimes_\kappa A)^{(n)} = \bigoplus_{i+j=n} A^{¡(j)} \otimes A^{(i)}$, et $A^{¡(d)}$ est le sous espace des éléments de poids d, induit par la graduation de V.

Démonstration 1.4. *d_A et $d_{A^{¡}}$ sont nulles donc $d_\kappa = d_\kappa^r$.*
De plus $d_\kappa(sx_1 \otimes ... \otimes sx_p \otimes x_{p+1}) = (-1)^{p-1+|x_1|+...+|x_{p-1}|} sx_1 \otimes ... \otimes sx_{p-1} \otimes [x_p \otimes x_{p+1}]$ donc $d_\kappa(A^{¡(p)} \otimes A^{(q)}) \subset A^{¡(p-1)} \otimes A^{(q+1)}$ et ainsi $d_\kappa((A^{¡} \otimes A)^{(n)}) \subset (A^{¡} \otimes A)^{(n)}$.

Théorème 1.14 (critère de Koszul)**.** *Soit A une algèbre quadratique. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le complexe de Koszul $A^{¡} \otimes_\kappa A$ est acyclique.*
2. *Le complexe de Koszul $A \otimes_\kappa A^{¡}$ est acyclique.*
3. *$f_\kappa : A^{¡} \hookrightarrow BA$ est un quasi-isomorphisme.*
4. *$g_\kappa : \Omega A^{¡} \twoheadrightarrow A$ est un quasi-isomorphisme.*

Définition 1.13. Si l'une de ces conditions est vérifiée, alors A est dite de *Koszul*

Proposition 1.3. *Une algèbre quadratique A est de Koszul si, et seulement si $A^!$ est de Koszul.*

Esquisse de démonstration 1.2. *Le dual linéaire de $(A^! \otimes_{\kappa_{A^!}} (A^!)^{¡}$ est $A^{¡} \otimes_\kappa A$ à une supsension près.*

Exemple 1.2. *$T(V)$ et $S(V)$ sont de Koszul [LV12].*

1.3.2 Construction de $A^{¡} \hookrightarrow B^0 A \subset BA$

Si A est quadratique, alors

$$\begin{aligned} BA &= \mathbb{K}1 \oplus s\bar{A} \oplus (s\bar{A})^{\otimes 2} \oplus (s\bar{A})^{\otimes 3} \oplus ... \\ &= \mathbb{K}1 \oplus sV \oplus (sV^{\otimes 2}/R \oplus sV^{\otimes 2}) \\ &\oplus (sV^{\otimes 3}/(VR + RV) \oplus sV \otimes sV^{\otimes 2}/R \oplus sV^{\otimes 2}/R \otimes sV \oplus sV^{\otimes 3}) \oplus ... \end{aligned}$$

La graduation par le poids sur BA est donnée par $\omega(sa_1 \otimes ... \otimes sa_n) := \omega(a_1) + ... + \omega(a_n)$, et le degré de syzygie est défini par

$$\widetilde{\omega}(sa_1 \otimes ... \otimes sa_n) := \omega(sa_1 \otimes ... \otimes sa_n) - n$$

La composante de syzygie de degré d est notée $B^d A$ et BA_n est la composante de poids n. A a une différentielle interne nulle, donc $d_{BA} = d_{ext}$ et :

— $\omega(d_{BA}(sa_1 \otimes ... \otimes sa_n)) = \omega(sa_1 \otimes ... \otimes sa_n)$

— $\tilde{\omega}(d_{BA}(sa_1 \otimes ... \otimes sa_n)) = \widetilde{\omega}(sa_1 \otimes ... \otimes sa_n) - 1$

Ainsi BA se scinde en $(BA,d) = \bigoplus\limits_n (BA_n, d_|)$ et $BA_n = \bigoplus\limits_d B^d A_n$. La table qui suit (on ôte les "s" des notations pour plus de lisibilité) décrit BA :

$$\begin{tikzcd}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & (4) \\
0 & V^{\otimes 3}/(VR+RV) \arrow[l] & (V^{\otimes 2}/R \otimes V) \oplus (V \otimes V^{\otimes 2}/R) \arrow[l, "d"'] & V^{\otimes 3} \arrow[l, "d"'] & (3) \\
 & 0 & V^{\otimes 2}/R \arrow[l, "d"'] & V^{\otimes 2} \arrow[l, "d"'] & (2) \\
 & & 0 & V \arrow[l, "d"'] & (1) \\
 & & & \mathbb{K} & (0) \\
3 & 2 & 1 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Où sont indiqués en ordonnée le poids et en abscisse le degré de syzygie. BA est la somme directe des cases du tableau et donc il y'a l'inclusion de coalgèbres :

$$A^{¡} = C(sV, s^2R) \overset{i}{\hookrightarrow} B^0 A \subset BA$$

Lemme 1.15. *$Ker(d_{|B^0A}) = A^{i}$, donc i induit un isomorphisme de coalgèbres graduées :*

$$i : A^{i} \xrightarrow{\simeq} H^0(B^\bullet A)$$

Le même travail avec une coalgèbre quadratique C, fournit un morphisme d'algèbres $p : \Omega C \twoheadrightarrow C^{¡}$ induisant un isomorphisme

$$p : H_0(\Omega_\bullet C) \to C^{¡}$$

L'inclusion $i : A^{¡} \hookrightarrow BA$ et la projection $p : \Omega A^{¡} \twoheadrightarrow A$ sont respectivement les applications f_κ et g_κ données au théorème 1.6, on en déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Omega A^{¡} \arrow[r, hook, "\Omega i"] \arrow[dr, two heads, "p"'] & \Omega BA \arrow[d, two heads, "\epsilon_A", "\sim"'] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Lorsque A est de Koszul, le fait que $i : A^{¡} \hookrightarrow BA$ soit un quasi-isomorphisme nous renseigne sur l'endroit où il y'a des groupes d'homologie non nulle dans $B^\bullet A$: $B^0 A$. A posteriori, si on veut un objet $X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A$ avec X quasi-libre, il n'est donc pas nécessaire de regarder ΩBA en entier, mais seulement $\Omega B^0 A$, voir mieux[10] :

$$\Omega H^0(B^\bullet A)$$

Intuitivement, $\Omega A^{¡}$ est comparable en taille à $T(T(V))$ alors que ΩBA est comparable à $T(T(T(V)))$.

10. PLus généralement, une wdga-algèbre connexe A est dite de Koszul si l'homologie de sa construction bar $H(B^\bullet A)$ est concentrée en degré 0.

Chapitre 2

Cobar-bar pour les opérades algébriques

La référence principale pour ce chapitre est [LV12], complétée par [Mil12].

2.1 Introduction aux opérades algébriques

2.1.1 $\mathbb{S}$-modules

Définition 2.1. Un $\mathbb{S}$-*module* est la donnée d'une collection d'espaces vectoriels $\mathcal{M} = \{M(n), n \in \mathbb{N}\}$ telle que pour tout n, $M(n)$ est muni d'une action à droite de $\mathbb{S}_n$ et ses éléments sont dit *d'arité* n. Un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{M}$ est de plus dit réduit si $M(0) = 0$. Un morphisme de $\mathbb{S}$-modules $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est une collection de morphismes de $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$-modules $f_n : M(n) \to N(n)$ pour tout n. La catégorie obtenue est notée $\mathbb{S}$-mod.

À tout $\mathbb{S}$-module $\mathcal{M}$, est associé un foncteur $\tilde{\mathcal{M}} : Vect \to Vect$, appelé *foncteur de Schur* associé à $\mathcal{M}$, défini sur les objets par :

$$\tilde{\mathcal{M}}(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M(n) \otimes_{\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]} V^{\otimes n}$$

où l'action à gauche de $\mathbb{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$ est donnée sur les $v_1 \otimes ... \otimes v_n$ par la permutation des indices. On obtient ainsi un foncteur de schurisation $\tilde{(.)} : \mathbb{S}$-mod $\to Vect^{Vect}$. Le lemme suivant permet d'induire des constructions sur la catégorie but $Vect^{Vect}$, par exemple les opérations : $\oplus$, $\otimes$, $\circ$, en des constructions sur la catégorie $\mathbb{S}$-mod.

Proposition 2.1. *Le foncteur de schurisation $\mathcal{M} \mapsto \tilde{\mathcal{M}}$ est pleinement fidèle.*

Démonstration 2.1. *On procède en deux temps en montrant d'abord qu'une transformation naturelle $\eta_\bullet : \tilde{\mathcal{M}} := \bigoplus_n M(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n} \to \tilde{\mathcal{N}} := \bigoplus_n N(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n}$ est, avec quelques hypothèses sur $\mathbb{K}$, nécessairement de la forme*

$$\eta_\bullet = \bigoplus_n (\eta_\bullet^n : M(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n} \to N(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n})$$

Puis on montrera que la composition $M(n) \hookrightarrow \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{M}}$ est pleinement fidèle. Commençons par montrer le premier point : pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on considère la k-ième inclusion $i_\bullet^k : M(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} (-)^{\otimes k} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{M}}$, la n-ième projection $p_\bullet^n : \tilde{\mathcal{N}} \twoheadrightarrow N(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n}$ et la composée $\eta_\bullet^{k,n} := p_\bullet^n \circ \eta_\bullet \circ i_\bullet^k : M(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} (-)^{\otimes k} \to N(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, en considérant λId_V, par naturalité, on obtient $\lambda^n \eta_V^{k,n} = \lambda^k \eta_V^{k,n}$. En particulier, si $\mathbb{K}^*$ n'est pas recouvert par les racines de l'unité et que $k \neq n$, nécessairement $\eta_\bullet^{k,n} = 0_\bullet$.
Pour montrer la fidélité, la structure additive de $Vect^{Vect}$ induite par celle de $Vect$ (celui du but), et l'additivité du foncteur de schurisation impliquent qu'il suffit de montrer que si $f : A \to B$ est un morphisme de $\mathbb{S}_n$-modules non nul alors $f_\bullet \neq 0_\bullet$. La suite exacte courte

$$0 \to ker(f) \hookrightarrow A \twoheadrightarrow Im(f) \to 0$$

induit la suite exacte courte :

$$0 \to ker(f) \otimes (\mathbb{K}^n)^{\otimes n} \hookrightarrow A \otimes (\mathbb{K}^n)^{\otimes n} \twoheadrightarrow Im(f) \otimes (\mathbb{K}^n)^{\otimes n} \to 0$$

Ainsi $Im(f \otimes Id) = Im(f) \otimes_{\mathbb{S}_n} (\mathbb{K}^n)^{\otimes n}$ et par le résultat rappelé en annexe, comme $Im(f) \neq 0$, on a bien $Im(f \otimes Id) = Im(f_{\mathbb{K}^\times}) \neq 0$ et donc $f_\bullet \neq 0$.
La surjectivité de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_n}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{Vect^{Vect}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ *est d'abord montrée dans le cas*

particulier où $B = \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ est la représentation régulière. En considérant l'application linéaire $\mathbb{K}^n \to V$ qui envoie e_i sur x_i, et en utilisant la naturalité de $\eta_\bullet : \tilde{A} \to \tilde{B}$, on remarque que $\eta_\bullet$ est déterminée par les $\eta_{\mathbb{K}^n}(a \otimes e_1 \otimes ... \otimes e_n)$, où a parcourt A. De plus $\eta(a \otimes e_1 \otimes ... \otimes e_n) = \sum\limits_{(i_1,...,i_n) \in [\![1,n]\!]^n} \lambda_{i_1,...i_n} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_n}$ avec $\lambda_{i_1,...i_n} \in \mathbb{K}$ et les projections de $\mathbb{K}^n$ qui envoient e_i sur $(1 - \delta_{i,k})e_i$, ainsi que la naturalité et la $\mathbb{K}$-indépendance des $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_n}$, nous apprennent que $\eta(a \otimes e_1 \otimes ... \otimes e_n)$ s'écrit sous la forme

$$\eta(a \otimes e_1 \otimes ... \otimes e_n) = (\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \lambda_\sigma.\sigma).e_1 \otimes ... \otimes e_n$$

L'application définie par $f(a) := \sum\limits_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \lambda_\sigma.\sigma$, vérifie $\tilde{f} = \eta_\bullet$.
Soit B quelconque : d'après les théorèmes rappelés en annexe, on peut écrire

$$B = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

$B_\lambda \in \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ et on a des morphismes $i_\lambda : B_\lambda \hookrightarrow \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ et $p_\lambda : \mathbb{K}[\mathbb{S}_n] \twoheadrightarrow B_\lambda$ tels que $p_\lambda \circ i_\lambda = Id_B$. D'après le cas particulier, pour une transformation naturelle $\eta_\bullet^\lambda : \tilde{A} \to \tilde{B}_\lambda$, il existe $f_\lambda : A \to \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ telle que $\tilde{f}_\lambda = \tilde{i_\lambda} \circ \eta_\bullet^\lambda$, et donc $\eta_\bullet^\lambda = \tilde{p_\lambda} \circ \tilde{f}_\lambda$. f définie par

$$f := \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$$

vérifie bien $\eta_\bullet = \tilde{f}$. En effet, $\eta_\bullet = \sum\limits_\lambda \eta_\bullet^\lambda$, ainsi $\eta_{\mathbb{K}^n}(a \otimes e_1 \otimes ... \otimes e_n) = (\sum\limits_\lambda f_\lambda(a)). \otimes e_1 \otimes ... \otimes e_n \in B \otimes_{\mathbb{S}_n} < e_1 \otimes ... \otimes e_n > \simeq B$, donc pour tout a, $\sum\limits_\lambda f_\lambda(a)$ est finie. La schursation commutant[1] avec la somme directe, on peut alors conclure.

Corollaire 2.1. *Les coefficients dans le développement en série formelle d'un foncteur de Schur sont donc unique à isomorphisme près.*

La catégorie des $\mathbb{S}$-modules est abélienne et toute suite exacte courte s'y scinde, le foncteur de schurisation est donc exact, et l'adjonction décrite dans l'exercice 5.11.19 [LV12] implique qu'il préserve les petites colimites.

1. La schurisation admet un adjoint à droite d'après l'exercice 5.11.19 [LV12]

Lemme 2.2. *L'image essentielle de $\mathcal{M} \mapsto \tilde{\mathcal{M}}$ est fermée sous $\bigoplus$, $\bigotimes$ et $\circ$. De plus, on a les formules suivantes :*

— $(\tilde{\mathcal{M}} \bigoplus \tilde{\mathcal{N}})(V) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (M(n) \bigoplus N(n)) \bigotimes_{\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]} V^{\otimes n}$

— $(\tilde{\mathcal{M}} \bigotimes \tilde{\mathcal{N}})(V) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\bigoplus_{i+j=n} Ind_{\mathbb{S}_i\times\mathbb{S}_j}^{\mathbb{S}_n} M(i) \otimes N(j)) \bigotimes_{\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]} V^{\otimes n}$

— $(\tilde{\mathcal{M}} \circ \tilde{\mathcal{N}})(V) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M(k) \bigotimes_{\mathbb{S}_k} (\bigoplus_{i_1+...+i_k=n} Ind_{\mathbb{S}_{i_1}\times...\times\mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} N(i_1)\otimes...\otimes N(i_k))) \bigotimes_{\mathbb{S}_n} V^{\otimes n}$

Où l'action de $\mathbb{S}_k$ *sur* $\bigoplus_{i_1+...+i_k=n} Ind_{\mathbb{S}_{i_1}\times...\times\mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} N(i_1)\otimes...\otimes N(i_k))$ *est induite*[2] *de l'action de* $\mathbb{S}_k$ *sur* $[\![i_1, ..., i_k]\!]$.

Les définitions de $\bigoplus$, $\bigotimes$ et $\circ$ sur $\mathbb{S}$-mod sont alors immédiates dès lors qu'on demande que :

$$\tilde{(.)} : (\mathbb{S}-\text{mod}, \oplus, \otimes, \circ) \to (Vect^{Vect}, \oplus, \otimes, \circ)$$

commute (aux isomorphismes naturels près) canoniquement avec ces bifoncteurs. La composition de foncteurs étant associative, on en déduit que $(\mathbb{S}-\text{mod}, \circ, I)$, où $I := (0, \mathbb{K}, 0, ...) \simeq \tilde{(.)}^{-1}(\mathbb{K})$ est monoïdale (à priori non strictement).

2.1.2 Opérades

Une *opérade symétrique*, dans la catégorie $Vect$, $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ est un monoïde associatif unitaire dans la catégorie monoïdale $(\mathbb{S}-\text{mod}, \circ, I)$: pour tout n, des applications linéaires

$$\gamma_n : \bigoplus_k P(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} (\bigoplus_{i_1+...+i_k=n} Ind_{\mathbb{S}_{i_1}\times...\times\mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} P(i_1) \otimes ... \otimes P(i_k)) \to P(n)$$

et une application linéaire

$$\eta : I \to \mathcal{P}$$

où $Id := \eta(1_{\mathbb{K}}) \in P(1)$, qui satisfont les relations d'unité et associativité. De façon équivalente, c'est un foncteur de Schur muni d'une structure de monade :

$\gamma_\bullet : \tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{P}} \to \tilde{\mathcal{P}}$

2. LA notation Ind_H^G est rappelée en annexe

$\eta_\bullet : Id \to \tilde{\mathcal{P}}$

Un morphisme d'opérades $f : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$ est, par définition, un morphisme de monoïdes unitaires : la donnée d'un morphisme de $\mathbb{S}$-modules $f : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$ tel que les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[r, "f \circ f"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"] & \mathcal{L} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ \mathcal{P} \arrow[rr, "f"] & & \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

commutent. La catégorie des opérades symétriques dans $Vect$, appelées opérades algébriques, ou juste opérades, est notée Op.

Afin de rendre plus compréhensible la notion de $\mathcal{P}$-algèbre, qui en sera un cas particulier, on introduit d'abord la notion de module (à gauche) sur un monoïde $\mathcal{P}$ qui n'est autre qu'une action de $\mathcal{P}$ sur un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{M}$, plus formellement :

Définition 2.2. Un *module à gauche* sur un monoïde $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{M}$ munit d'un morphisme de $\mathbb{S}$-modules $\mu : \mathcal{P} \circ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ associatif et unitaire.

Observons le cas particulier où $\mathcal{M} = (A, 0, 0, ...)$ est concentré en arité 0 : avec la vision monade, $\tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{M}}(V) = \tilde{\mathcal{P}}(A)$ est le foncteur constant, et les diagrammes qui suivent sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{P}}(A) \arrow[rr, dash, "="] \arrow[d, "\gamma(A)"'] & & \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\mathcal{P}}(A)) \arrow[d, "\tilde{\mathcal{P}}(\mu)"] \\ \tilde{\mathcal{P}}(A) \arrow[dr, "\mu"'] & & \tilde{\mathcal{P}}(A) \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta(A)"] \arrow[dr, "Id"'] & \tilde{\mathcal{P}}(A) \arrow[d, "\gamma(A)"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Réciproquement, la donnée d'un espace vectoriel A et d'une application linéaire $\mu = \gamma_A : \tilde{\mathcal{P}}(A) \to A$ faisant commuter ces diagrammes définissent un $\mathcal{P}$-module, concentré en arité 0, appelé $\mathcal{P}$-algèbre.

Définition 2.3. Une structure de $\mathcal{P}$*-algèbre* sur un espace vectoriel A est une application linéaire $\gamma_A : \tilde{\mathcal{P}}(A) \to A$ telle que les deux diagrammes précédent commutent.

Un morphisme entre $\mathcal{P}$-algèbres A et A' est une application linéaire $f : A \to A'$ telle que $f \circ \gamma_A = \gamma_{A'} \circ \mathcal{P}(f)$, et la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres est notée $\mathcal{P} - \text{alg}$.

Pour V un espace vectoriel, $\tilde{\mathcal{P}}(V)$ est canoniquement muni d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre, par $\gamma_{\tilde{\mathcal{P}}(V)} := \gamma(\tilde{\mathcal{P}}(V)) : \tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{P}}(V) \to \tilde{\mathcal{P}}(V)$, en effet, l'associativité de $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} :\to \mathcal{P}$ implique celle de l'action $\gamma_{\tilde{\mathcal{P}}(V)}$.

Exemple 2.1. *Les $\mathbb{S}$-modules $Ass := (0, \mathbb{K}, \mathbb{K}[\mathbb{S}_2], ..., \mathbb{K}[\mathbb{S}_n], ...)$ et $As := (\mathbb{K}, \mathbb{K}, ..., \mathbb{K}[\mathbb{S}_n], ...)$ sont munis d'une structure d'opérade induite par les inclusions $\mathbb{S}_{i_1} \times ... \times \mathbb{S}_{i_k} \hookrightarrow \mathbb{S}_n$, $i_1 + ... + i_k = n$. Une Ass-algèbre (resp. As-algèbre) est alors une algèbre associative (resp. unitaire) au sens classique.*

Pour toute opérade $\mathcal{P}$ il y a un foncteur d'oubli $U : \mathcal{P}-\text{alg} \to Vect$, qui à une $\mathcal{P}$-algèbre lui associe l'espace vectoriel sous-jacent. Il admet un adjoint à gauche, noté $\mathcal{F}$, qualifié de libre et dont on explicite la construction :

Construction 2.1. *Pour $\mathcal{F}$, prenons $\tilde{\mathcal{P}}$, et pour unité de l'adjonction ν, prenons $\eta : Id \to \tilde{\mathcal{P}}$. On vérifie alors que le diagramme suivant commute, ce qui donne l'existence et l'unicité de $\tilde{f}$ (nécessairement, $\tilde{f} = \gamma_A \circ \tilde{\mathcal{P}}(f)$).*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_V"'] & A \arrow[loop right, "Id"] \arrow[d, "\eta_A"'] \\
\tilde{\mathcal{P}}(V) \arrow[r, "\tilde{\mathcal{P}}(f)"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\eta_{\tilde{\mathcal{P}}(V)}"'] & \tilde{\mathcal{P}}(A) \arrow[u, bend right, "\gamma_A"'] \arrow[loop right, "Id"] \arrow[d, "\eta_{\tilde{\mathcal{P}}(A)}"'] \\
\tilde{\mathcal{P}}^2(V) \arrow[r, "\tilde{\mathcal{P}}^2(f)"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{f})"] & \tilde{\mathcal{P}}^2(A) \arrow[u, bend right, "\gamma_{\tilde{\mathcal{P}}(A)}"']
\end{tikzcd}$$

Où $\tilde{\mathcal{P}}(A)$ muni de $\gamma(\tilde{\mathcal{P}}(A))$ est vue comme une $\mathcal{P}$-algèbre[3]

Théorème 2.3. *Cette construction définie une adjonction $\mathcal{P}-\text{alg} \underset{U}{\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrows}} Vect$.*

Définition 2.4. Soit A un espace vectoriel, on définit l'opérade End_A comme étant le $\mathbb{S}$-module $End_A(n) := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, A)$ muni de la structure d'opérade induite par la composition des applications linéaires.

3. Par définition, $\gamma_A : \tilde{\mathcal{P}}(A) \to A$ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres

Proposition 2.2. *Se donner une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur l'espace vectoriel A est équivalent à se donner un morphisme d'opérade $\mathcal{P} \to End_A$.*

Esquisse de démonstration 2.1. *C'est une conséquence de l'isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_n}(P(n), \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)) \simeq \mathrm{Hom}(P(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} A^{\otimes n}, A)$$

2.1.3 Algèbre universelle

Pour une opérade $\mathcal{P} = \{P(n), n \in \mathbb{N}\}$ quelconque, les éléments de $P(n)$ sont abstraits mais il est possible de les comprendre comme des opérations n-aires : si A est une $\mathcal{P}$-algèbre, on considère la structure canonique de End_A-algèbre sur A, dont le morphisme structurel est noté $\pi_A : End_A(A) \to A$. Se donner une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur A est équivalent à se donner un morphisme d'opérades $\mathcal{P} \to End_A$ par la proposition 2.2. Ce qui peut se reformuler de la façon suivante. π_A est universelle parmi les structures de $\mathcal{P}$-algèbre γ_A sur A : il existe un unique morphisme d'opérades $\psi : \mathcal{P} \to End_A$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & End_A(A) \arrow[d, twoheadrightarrow, "\pi_A"] \\ \mathcal{P}(A) \arrow[ur, dashed, "\psi(A)"] \arrow[r, "\gamma_A"'] & A \end{tikzcd}$$

En ce sens, les éléments des $P(n)$, via $\psi(A)$, sont bien des opérations n-aires sur A.

2.1.4 Définition d'une opérade par compositions partielles

Pour $(\mathcal{P}, \gamma)$ une opérade, les compostions partielles $\circ_i$ sont définies par :

$$\begin{array}{rcl} - \circ_i - : \mathcal{P}(m) \otimes \mathcal{P}(n) & \to & \mathcal{P}(m+n-1) \\ \mu \otimes \nu & \mapsto & \mu \circ_i \nu := \gamma(\mu \otimes id \otimes ... \otimes id \otimes \nu \otimes id ... \otimes id) \end{array}$$

Où l'identité apparait i fois avant ν. On a alors les relations suivantes :

— $(\lambda \circ_i \mu) \circ_{i-1+j} \nu = \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu)$, pour $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq m$

— $(\lambda \circ_i \mu) \circ_{k-1+m} \nu = (\lambda \circ_k \nu) \circ_i \mu$, pour $1 \leq i \leq k \leq l$

Où $\lambda \in \mathcal{P}(l), \mu \in \mathcal{P}(m), \nu \in \mathcal{P}(n)$. Réciproquement, des compositions partielles $- \circ_i -$ sur un $\mathbb{S}$-module vérifiant les deux relations induisent une unique structure d'opérade sur ce $\mathbb{S}$-module.

2.1.5 Opérade libre

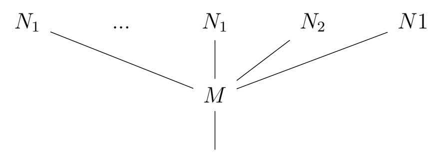
Dans une catégorie monoïdale $(C, \otimes, I)$ possédant les sommes directes indéxées par $\mathbb{N}$ et telle que $- \otimes -$ commute des deux cotés avec celles-ci, alors en copiant la construction de l'algèbre libre sur un espace vectoriel, on obient la notion de monoïde libre sur un objet de C. Les foncteurs de Schur ne commutant, en général, pas avec les sommes directes, on ne peut pas appliquer ces constructions pour la catégorie monoïdale $(\mathbb{S}-\mathrm{mod}, \circ, I)$. On renvoit à [LV12] pour une construction "à la main" de l'opérade libre $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ sur le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{M}$ ou à [Val09] pour une construction catégorique, permettant en plus d'expliquer la propérade libre du chapitre 3.

2.2 Constructions d'algèbre homologique pour les opérades

Afin que cette partie soit relativement concise, on omet volontairement les détails et renvoie à [LV12] pour un exposé précis.

2.2.1 Linéarisation

Définition 2.5. Soient M, N_1, N_2 trois $\mathbb{S}$-modules, le $\mathbb{S}$-module $M \circ (N_1; N_2)$ est par définition le sous $\mathbb{S}$-module de $M \circ (N_1 \oplus N_2)$ tel que $M \circ (N_1 \oplus N_2)(n)$ est le sous-$\mathbb{S}_n$-module de $M(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (N_1 \oplus N_2)^{\otimes n}$ où N_2 n'apparait qu'une seule fois dans chaque facteur direct. les éléments :



engendrent $M \circ (N_1; N_2)$. Cette définition est fonctorielle en M et N_2. Le cas particulier où $N_1 = I$ est appelée *composition infinitésimale* de M et N :

$$M \circ_{(1)} N := M \circ (I; N)$$

dont les éléments typiques sont notés $(\mu; id, id..., id, \nu, id...)$ et pour $f : M \to N, g : M' \to N'$ des morphismes de $\mathbb{S}$-modules, $f \circ_{(1)} g \in \mathrm{Hom}(M \circ_{(1)} N, M' \circ_{(1)} N')$ est définie par :

$$f \circ_{(1)} g(\mu; id, ..., \nu, id, ...) := (f(\mu), id, ..., g(\nu), id, ...)$$

Lemme 2.4. *Pour des $\mathbb{S}$-modules M, M', N, N', on a :*

$$\begin{aligned}
&(M \oplus M') \circ_{(1)} N = M \circ_{(1)} N \oplus M' \circ_{(1)} N \\
&M \circ_{(1)} (N \oplus N') = M \circ_{(1)} N \oplus M \circ_{(1)} N' \\
&I \circ_{(1)} N = N \\
&M \circ_{(1)} I = M
\end{aligned}$$

La compostion des $\mathbb{S}$-modules est alors linéarisée, celle des morphismes aussi. On présente maintenant une linéarisation des mophismes, sans changer la composition des $\mathbb{S}$-modules.

Définition 2.6. Soient $f, g : M_i \to N_i$ deux morphismes de $\mathbb{S}$-modules, la *composition infinitésimale* de f et g, $f \circ' g \in \mathrm{Hom}(M_1 \circ N_1, M_2 \circ (N_1; N_2))$ est définie par

$$f \circ' g := \sum_i f \otimes (Id_{N_1} \otimes ... \otimes Id_{N_1} \otimes g \otimes Id_{N_1} \otimes ... \otimes Id_{N_1})$$

Où g apparraît en i-ème position. Si de plus $N_1 = N_2 = N$ alors la composée $M_2 \circ (N; N) \hookrightarrow M_2 \circ (N \oplus N) \overset{Id\circ(Id\oplus Id)}{\twoheadrightarrow} M \circ N$ est encore notée $f \circ' g$.

Lemme 2.5. *La composition infinitésimale est linéaire à droite :*

$$f \circ' (g + h) = f \circ' g + f \circ' h$$

Lorsque $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ est une opérade, le produit de compostion infinitésimale $\gamma_{(1)}$: $\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est définie par la composée :

$$\gamma_{(1)} : \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (I; \mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{P} \circ (I \oplus \mathcal{P}) \xrightarrow[Id_{\mathcal{P}} \circ (\eta + Id_{\mathcal{P}})]{} \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$$

De même, pour une coopérade $(\mathcal{C}, \Delta, \eta)$, il y'a la décomposition infinitésimale $\Delta_{(1)}$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C}$.

2.2.2 Extension au cadre différentiel gradué

Définition 2.7. Un $\mathbb{S}$-*module différentiel gradué*, abrégé dg-$\mathbb{S}$-module, est une collection $\mathcal{M} = \{M(n), n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{S}_n$-modules différentiels gradués. Un morphisme de dg-$\mathbb{S}$-modules $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ est un morphisme de $\mathbb{S}$-modules gradués, de degré 0, qui commute avec les différentielles. La catégories des dg-$\mathbb{S}$-modules et ses morphismes est notée dg-$\mathbb{S}$-Mod.

Le $\mathbb{S}$-module I est considéré comme un $\mathbb{S}$-module gradué, concentré en degré 0. Soit $\mathbb{K}s := (\mathbb{K}s, 0, 0, ...)$ le $\mathbb{S}$-module concentré en degré 1. La *suspension* d'un $\mathbb{S}$-module gradué M est définie par $sM := \mathbb{K}s \otimes M$. De façon analogue, $\mathbb{K}s^{-1}$ est le même $\mathbb{S}$-module, concentré en degré -1, et la *désuspension* est donnée par $s^{-1}M := \mathbb{K}s^{-1} \otimes M$.

Définition 2.8. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux dg-$\mathbb{S}$-modules, leur *composition* $M \circ N$ est un $\mathbb{S}$-module gradué, qui est équippé de la différentielle

$$d_{M \circ N} := d_M \circ Id_N + Id_M \circ' d_N$$

Proposition 2.3. *La catégorie* $(\mathrm{dg}-\mathbb{S}-\mathrm{Mod}, \circ, I)$ *est monoïdale.*

Définition 2.9. Une opérade différentielle graduée est un monoïde dans la catégorie $(\mathrm{dg}-\mathbb{S}-\mathrm{Mod}, \circ, I)$ tel que le produit de compostion et l'unité soient de degré 0.

Définition 2.10. Une *dérivation* $d : \mathcal{T}(E) \to \mathcal{T}(E)$ sur l'opérade libre sur le $\mathbb{S}$-module gradué E est une application linéaire telle que :

$$\gamma.(d \circ Id + Id \circ' d) = d.\gamma$$

Où $\gamma : \mathcal{T}(E) \circ \mathcal{T}(E) \to \mathcal{T}(E)$ est le produit.

Proposition 2.4. *Soit E un $\mathbb{S}$-module gradué. Une dérivation $d : \mathcal{T}(E) \to \mathcal{T}(E)$ est exactement déterminée par sa restriction ($\mathbb{S} -$ linéaire) au sous-$\mathbb{S}$-module E.*

2.3 Adjonction cobar-bar opéradique

2.3.1 Morphismes tordants

Définition 2.11. Soit $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ une coopérade et $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ une opérade, la collection $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) := \{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C(n), P(n)), n \in \mathbb{N}\}$ est munie d'une structure de $\mathbb{S}$-module :

$$(f.\sigma)(x) := f(x.\sigma^{-1}).\sigma$$

Proposition 2.5. *Le $\mathbb{S}$-module $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ est une opérade, appelée opérade de convolution. Si de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ sont différentiels gradués, alors pour tout $\mathbb{S}$-morphisme$f$: $\mathcal{C} \to \mathcal{P}$ de degré $\mid f \mid$, la dérivation*

$$\partial(f) := d_{\mathcal{P}} \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_{\mathcal{C}}$$

fait de $(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P}), \partial)$ une dg opérade.

Définition 2.12. Pour $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$, leur *produit de convolution* $f * g \in$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ est défini par :

$$f * g := \mathcal{C} \xrightarrow{\Delta_{(1)}} \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C} \xrightarrow{f \circ_{(1)} g} \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} \xrightarrow{\gamma_{(1)}} \mathcal{P}$$

L'équation de Maurer-Cartan (M.C) dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ est :

$$\partial(f) + f * f = 0$$

Une solution de (M.C) de degré -1 est appelée *morphisme tordant opéradique*. Si de plus $\mathcal{C}$ est coaugmentée par c et $\mathcal{P}$ est augmentée par u, il faut que $u \circ f = 0$ et $f \circ c = 0$.

Lemme 2.6. *Tout morphisme de dg-$\mathbb{S}$-modules de degré -1, $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ induit une dérivation $d^r_\alpha : \mathcal{C} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{C} \circ \mathcal{P}$, de carré nul si et seulement si α est un morphisme tordant.*

Dans ce cas, le complexe obtenu en tordant la différentielle $d_{\mathcal{C} \circ \mathcal{P}}$ est noté

$$\mathcal{C} \circ_\alpha \mathcal{P} := (\mathcal{C} \circ \mathcal{P}, d_\alpha := d_{\mathcal{C} \circ \mathcal{P}} + d^r_\alpha)$$

et appelé *produit de composition tordu à droite* de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

2.3.2 Constructions cobar et bar

Pour une dg-opérade augmentée $(\mathcal{P}, \gamma, \eta, \epsilon)$, la construction bar [4] de $\mathcal{P}$ est la coopérade $\mathcal{T}^c(s\bar{\mathcal{P}})$, munie de la somme de la différentielle d_{ext} induite par le produit de compostion infinitésimal $\gamma_{(1)}$ et de celle induite par la différentielle $d_{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$, notée d_{int}. Elle est notée

$$\mathrm{B}\mathcal{P} := (\mathcal{T}^c(s\bar{\mathcal{P}}), d := d_{ext} + d_{int})$$

De même, pour toute dg-coopérade conilpotent $\mathcal{C}$, la construction cobar de $\mathcal{C}$ est donnée par l'opérade

$$\Omega\mathcal{C} := (\mathcal{T}(s^{-1}\bar{\mathcal{C}}), d := d_{ext} + d_{int})$$

4. Qui est fonctorielle en $\mathcal{P}$

Théorème 2.7. *Pour toute dg-opérade augmentée $\mathcal{P}$ et toute dg-coopérade conilpotente $\mathcal{C}$, on a les isomorphismes naturels*

$$\mathrm{Hom}_{dg-Op}(\Omega\mathcal{C},\mathcal{P}) \simeq \mathrm{Tw}(\mathcal{C},\mathcal{P}) \simeq \mathrm{Hom}_{dg-conil-Op}(\mathcal{C},\mathrm{B}\mathcal{P})$$

2.4 Opérades quadratiques et dualité de Koszul

Une *donnée quadratique opéradique* est un couple (E,R) où E est un $\mathbb{S}$-module gradué et $R \subset \mathcal{T}(E)^{(2)}$ un sous $\mathbb{S}$-module gradué des éléments de poids 2 de $\mathcal{T}(E)$. Les éléments de R sont appelés les *relations*. Un *morphisme de données quadratiques* est la donnée d'un morphisme de $\mathbb{S}$-modules $f : E \to E'$ tel que $\mathcal{T}(f)(R) \subset R'$. On peut alors, généraliser les constructions faites au premier chapitre pour obtenir l'opérade quadratique $\mathcal{P}(E,R) := \mathcal{T}(E)/(R)$ associée à la donnée quadratique (E,R), qui est universelle parmi les opérades quotient $\mathcal{T}(E) \twoheadrightarrow \mathcal{P}$ telles que la composée $R \hookrightarrow \mathcal{T}(E) \twoheadrightarrow \mathcal{P}$ soit nulle, ainsi que la coopérade quadratique $\mathcal{C}(E,R) \subset \mathcal{T}^c(E)$, vérifiant la propriété universelle :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[d, dashed, "\exists !"'] & \mathcal{T}^c(E) \arrow[r, two heads] & \mathcal{T}^c(E)/R \\
\mathcal{C}(E,R) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Définition 2.13. Pour une opérade quadratique $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E,R)$, la *coopérade duale de Koszul* de $\mathcal{P}$ est définie par :

$$\mathcal{P}^{\text{¡}} := \mathcal{C}(sE, s^2R)$$

et *l'opérade duale de Koszul* :

$$\mathcal{P}^! := (\mathcal{S}^c \underset{H}{\otimes} \mathcal{P}^{\text{¡}})^*$$

Où $\underset{H}{\otimes}$ est le produit d'hadamard de coopérades et * est la dualité graduée arité par arité et $\mathcal{S}^c$ est la coopérade $\mathrm{End}^c_{s\mathbb{K}}$ [LV12] .

Proposition 2.6. *Si $\mathcal{P}$ est quadratique, engendrée par un $\mathbb{S}$-module réduit de dimension finie en chaque arité, alors on a*

$$\mathcal{P}^! = \mathcal{P}(s^{-1}\mathcal{S}^{-1} \underset{H}{\otimes} E^*, R^\perp)$$

et

$$(\mathcal{P}^!)^! \simeq \mathcal{P}$$

Où $R^\perp$ sera décrit dans la section sur les propérades.

Pour une donnée quadratique (E, R), on a $\mathcal{P}(E,R)^{(1)} = E$ et $\mathcal{C}(E,R)^{(1)} = E$, on définit alors le morphisme tordant $\kappa : \mathcal{P}^{¡} \to \mathcal{P}$ comme la composée :

$$\kappa : \mathcal{C}(sE, s^2R) \twoheadrightarrow sE \overset{s^{-1}}{\to} E \hookrightarrow \mathcal{P}(E,R)$$

Le complexe

$$\mathcal{P}^{¡} \circ_\kappa \mathcal{P} := (\mathcal{P}^{¡} \circ \mathcal{P}, d_\kappa)$$

est appelé *complexe de Koszul* de l'opérade $\mathcal{P}$. Une opérade quadratique est dite de *Koszul* si son complexe de Koszul associé est acyclique.

Théorème 2.8. *les énoncés suivants sont équivalents :*

- *Le complexe de Koszul droite $\mathcal{P}^i \circ_\kappa \mathcal{P}$ est acyclique.*
- *Le complexe de Koszul gauche $\mathcal{P} \circ_\kappa \mathcal{P}^i$ est acyclique.*
- *L'inclusion $\iota : \mathcal{P}^i \hookrightarrow B\mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme.*
- *La projection $\pi : \Omega\mathcal{P}^i \twoheadrightarrow \mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme.*

Chapitre 3

Propérades

3.1 Introduction

Définition 3.1. Un $\mathbb{S}$-*bimodule* $\mathcal{P}$ est une collection $\{\mathcal{P}(m,n),(m,n)\in\mathbb{N}^2\}$ de $\mathbb{K}[\mathbb{S}_m]\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[\mathbb{S}_n^{op}]$-modules à gauche. Un morphisme de $\mathbb{S}$-bimodules $f:\mathcal{P}\to\mathcal{Q}$ est une collection de morphismes $f_{m,n}:\mathcal{P}(m,n)\to\mathcal{Q}(m,n)$ de $\mathbb{S}_m\otimes\mathbb{S}_n^{op}$-modules. La catégorie des $\mathbb{S}$-bimodules et leurs morphismes est notée $\mathbb{S}-\mathrm{BiMod}$.

Exemple 3.1. — *A tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel V est associé le $\mathbb{S}$-bimodule*

$$End_V := \{Hom_{\mathbb{K}}(V^{\otimes n},V^{\otimes m}),(m,n)\in\mathbb{N}^2\}$$

Où les actions des groupes symétriques sont données par permutation des entrées et sorties.

— *Un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{M}=(M(n))_{n\in\mathbb{N}}$ peut-être considéré comme un $\mathbb{S}$-bimodule concentré en arités $(1,n),n\in\mathbb{N}$. Ce qui fait de $\mathbb{S}-\mathrm{Mod}$ une sous-catégorie pleine de $\mathbb{S}-\mathrm{BiMod}$.*

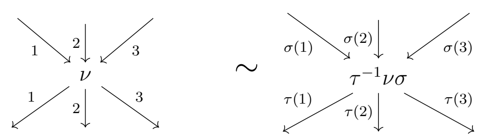
Définition 3.2. Un graphe orienté est un graphe non planaire où les orientations des arrêtes sont données par un flot descendant et tel que les entrées et sorties de chaque sommet soient numérotées par les entiers. On suppose aussi que les entrées et sorties globales du graphe sont numérotées par les entiers. L'ensemble des graphes orientés est noté $\mathcal{G}$. Si de plus les sommets d'un graphe g peuvent être répartis en deux niveaux $\mathcal{N}_i, i \in \{1,2\}$, g est qualifié de graphe à deux niveaux, et l'ensemble des graphes à deux niveaux est noté $\mathcal{G}^2$.

La composition $- \circ -$ des $\mathbb{S}$-modules s'étend en une composition des $\mathbb{S}$-bimodules $- \boxtimes_c -$:

Définition 3.3. Pour deux $\mathbb{S}$-bimodules $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, leur produit de composition connexe [1] $\mathcal{Q} \boxtimes_c \mathcal{P}$ est donné par

$$\mathcal{Q} \boxtimes_c \mathcal{P} := \Big(\bigoplus_{g \in \mathcal{G}_c^2} \bigotimes_{\nu \in \mathcal{N}_2} \mathcal{Q}(|\ Out(\nu)\ |, |\ In(\nu)\ |) \otimes_{\mathbb{K}} \bigotimes_{\nu \in \mathcal{N}_1} \mathcal{P}(|\ Out(\nu)\ |, |\ In(\nu)\ |)\Big) / \sim$$

Où $\mathcal{G}_c^2$ est l'ensemble des graphes orientés à deux niveaux connexes, $Out(\nu)$ et $In(\nu)$ sont les sorties et entrées d'un sommet ν, et $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par :



Autrement dit, les actions des groupes symétriques sur les sommets des graphes sont données par permutations de ses entrés et sorties.

Proposition 3.1. *Soit $\mathcal{I} = \mathbb{K}$ le $\mathbb{S}$-bimodule concentré en arité $(1,1)$, la catégorie* $(\mathbb{S}\text{−BiMod}, \boxtimes_c, I)$ *est monoïdale.*

Démonstration 3.1. *L'associativité du produit $\boxtimes_c$ provient de celle du produit tensoriel $\otimes$ dans $\mathbb{K}$-Mod. Pour montrer la relation d'unité $\mathcal{P} \boxtimes_c \mathcal{I} \simeq \mathcal{P}$, il suffit de remarquer que la somme est en fait prise sur les graphes connexes à deux niveaux dont le premier niveaux n'est composé que de sommets à une entrée et une sortie. L'hypothèse de connexité assure que toutes les sorties sont reliées sur le même sommet au niveau 2 et la relation d'équivalence assure qu'il n'y ait qu'une seule copie de $\mathcal{P}(m,n)$ dans $\mathcal{P} \boxtimes_c \mathcal{I}$. Ainsi $\mathcal{P} \boxtimes_c \mathcal{I} \simeq \bigoplus_{(m,n)} \mathcal{P}(m,n) = \mathcal{P}$. L'isomorphisme $\mathcal{I} \boxtimes_c \mathcal{P} \simeq \mathcal{P}$ se traite de la même façon.*

1. Pour une formule algébrique, on renvoit à [Val07].

Corollaire 3.1. *les inclusions de catégories monoïdales suivantes sont pleines :*

$$(\mathrm{Vect}, \otimes, \mathbb{K}) \hookrightarrow (\mathbb{S}\mathrm{-Mod}, \circ, I) \hookrightarrow (\mathbb{S}\mathrm{-BiMod}, \boxtimes_c, \mathcal{I})$$

Contrairement aux $\mathbb{S}$-modules, il est possible de composer horizontalement les $\mathbb{S}$-bimodules : pour $f \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V^{\otimes m})$ et $g \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes k}, V^{\otimes l})$, la concaténation de f et g est donnée par leur produit tensoriel $f \otimes g \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes n+k}, V^{\otimes m+l})$, et la définition dans le cas général est :

Définition 3.4. Pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux $\mathbb{S}$-bimodules, leur *produit de concaténation* $\mathcal{Q} \otimes \mathcal{P}$ est donné par

$$\mathcal{Q} \otimes \mathcal{P}(m,n) := \bigoplus_{\substack{m'+m''=m \\ n'+n''=n}} \mathbb{K}[\mathbb{S}_m] \otimes_{\mathbb{S}_{m'} \times \mathbb{S}_{m''}} \mathcal{Q}(m', n') \otimes \mathcal{P}(m'', n'') \otimes_{\mathbb{S}_{n'} \times \mathbb{S}_{n''}} \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$$

Le $\mathbb{S}$-bimodule $\mathbb{K}$ concentré en arité $(0,0)$ induit une structure monoïdale symétrique sur la catégorie des $\mathbb{S}$-bimodules munie du produit de concaténation.

Définition 3.5. Une *Propérade* est un monoïde dans la catégorie monoïdale $(\mathbb{S}\mathrm{-BiMod}, \boxtimes_c, I)$ et un morphisme de propérades est un morphisme de monoïdes. La catégorie des propérades est notée Properads. De même, une *copropérade* est un comonoïde dans $(\mathbb{S}\mathrm{-BiMod}, \boxtimes_c, I)$.

Définition 3.6. Soient $(\mathcal{P}, \mu)$ et $(\mathcal{Q}, \nu)$ deux propérades, leur *produit de Hadamard* $\mathcal{P} \bigotimes_H \mathcal{Q}$ est la propérade définie par

$$(\{\mathcal{P} \bigotimes_H \mathcal{Q}(m,n) := \mathcal{P}(m,n) \otimes \mathcal{Q}(m,n)\}, \mu \otimes \nu)$$

Remarquons que $\mu \otimes \nu$ est un abus d'écriture qui utilise l'identification

$$(\mathcal{P} \bigotimes_H \mathcal{Q} \boxtimes_c \mathcal{P} \bigotimes_H \mathcal{Q})(m,n) \simeq (\mathcal{P} \boxtimes_c \mathcal{P})(m,n) \otimes (\mathcal{Q} \boxtimes_c \mathcal{Q})(m,n)$$

Dans le cas gradué, les conventions de Koszul doivent être prises en compte.

Exemple 3.2. *End_V est une propérade. Le cas particulier où $V = \mathbb{K}$ est concentré en degré 1 est noté s et appelé propérade signature, ou propérade suspension [Gan02]. le cas où $\mathbb{K}$ est concentré en degré -1 est noté s^{-1}. Les collections $\Lambda := \{\Lambda(m,n) := s(m,n)[2-2m]\}$ et $\Lambda^{-1} := \{\Lambda^{-1}(m,n) := s^{-1}(m,n)[2m-2]\}$ sont aussi des propérades.*

Un autre exemple est donné par ce qui suit : le foncteur d'oubli U : Properads $\to$ $\mathbb{S}-$BiMod admet un adjoint à gauche $\mathcal{F}$ et pour un $\mathbb{S}$-bimodule V, $(\mathcal{F}(V), i_V : V \to \mathcal{F}(V))$ est appelé propérade libre sur V.

Construction 3.1. *Soit V un $\mathbb{S}$-bimodule, la propérade libre sur V est donnée par la somme sur les graphes connexes $\mathcal{G}_c$:*

$$\mathcal{F}(V) := (\bigoplus_{g \in \mathcal{G}_c} \bigotimes_{\nu \in \mathcal{N}} V(\mid Out(\nu) \mid, \mid In(\nu) \mid))/ \sim$$

La composition μ est induite de la composition des graphes orientés, et le morphisme $V \to \mathcal{F}(V)$ est induit par l'inclusion $\mathcal{G}_{c,(1)} \hookrightarrow \mathcal{G}_c$.

L'application qui à un graphe lui associe son nombre de sommet(s) induit une partition de l'ensemble des graphes orientés connexes : $\mathcal{G}_c = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{c,(n)}$, et ainsi une décomposition $\mathcal{F}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{(n)}(V)$.

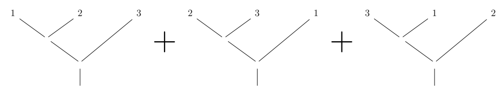
Remarque 3.1. *Pour la définition de copropérade colibre conilpotente (le coproduit itéré suffisamment de fois de tout élément est nul) sur un $\mathbb{S}$-bimodule V on renvoit à [Val07].*

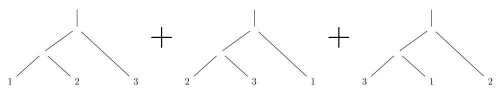
Définition 3.7. Une *donnée quadratique* (V, R) dans la catégorie $\mathbb{S}$-biMod est la donnée d'un $\mathbb{S}$-bimodule V et d'un sous-$\mathbb{S}$-bimodule R de $\mathcal{F}_{(2)}(V)$. A une telle donnée quadratique est associée une propérade, qualifiée de quadratique :

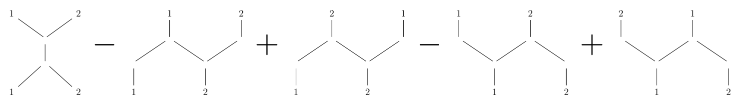
$$\mathcal{F}(V, R) := \mathcal{F}(V)/(R)$$

Par extension, une propérade est dite *quadratique* si elle est isomorphe à une certaine propérade $\mathcal{F}(V, R)$, et *binaire quadratique* si V est concentré en arité $(1,2)$ et $(2,1)$.

Exemple 3.3. *La propérade BiLie encodant les bialgèbres de Lie est quadratique binaire, engendrée par le $\mathbb{S}$-bimodule $V \oplus W$, avec $V = V(1,2) = m.\mathbb{K}$ où le produit m est anticommutatif et $W = W(2,1) = \Delta.\mathbb{K}$ où le coproduit Δ est anticommutatif. Et pour espace des relations R, l'espace engendré par*

— $R :=$ 

— $S :=$ 

— $D :=$ 

3.2 Calculs de duaux

Dans toute cette section, les $\mathbb{S}$-bimodules sont de dimensions finies en chaque arité. Pour un $\mathbb{S}$-bimodule $\mathcal{P}$, son dual de Czech $\mathcal{P}^\vee$ est défini par

$$\mathcal{P}^\vee(m,n) := sgn_{\mathbb{S}_m} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(m,n)^* \otimes_{\mathbb{K}} sgn_{\mathbb{S}_n}$$

Et sa suspension $s\mathcal{P}$ est définie par

$$s \otimes \mathcal{P}$$

où s est le $\mathbb{S}$-bimodule concentré en arité $(0,0)$ et degré 1 : $s(0,0) := \mathbb{K}$.

Définition 3.8. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E,R)$ une propérade quadratique, sa copropérade duale est définie par

$$\mathcal{P}^{\mathsf{i}} := \mathcal{F}^c(sE, s^2R)$$

et sa propérade duale est définie par

$$\mathcal{P}^! := \Lambda^{-1} \bigotimes_H (\mathcal{P}^{\mathsf{i}})^*$$

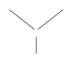
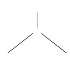
Proposition 3.2. *Soit E un $\mathbb{S}$-bimodule (concentré en les arités $(1,2)$ et $(2,1)$).*

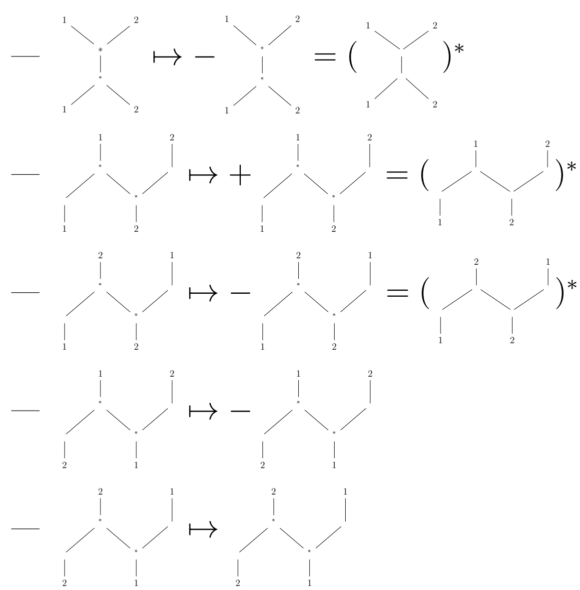
L'inclusion $E^\vee = \Lambda^{-1}sE^* \hookrightarrow \Lambda^{-1}(\mathcal{F}^c(sE))^*$ *induit un unique isomorphisme de propérades au dessus de* $E^\vee$ *:*

$$\Phi : \mathcal{F}(E^\vee) \to \Lambda^{-1}(\mathcal{F}^c(sE))^* \overset{[GK94]}{=} \mathcal{F}(E)^\vee$$

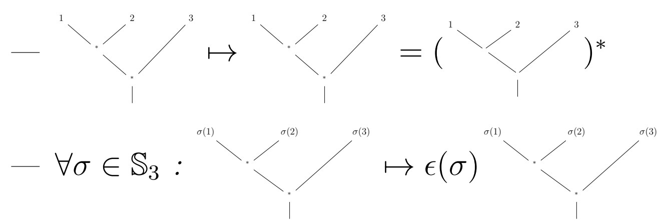
qui induit un isomorphisme encore noté Φ *:*

$$\Phi : \mathcal{F}(E^\vee)/(\Phi^{-1}(\Lambda^{-1}s^2R^\perp)) \to \mathcal{P}^!$$

Exemple 3.4. *Soit* $E = V \oplus W$ *un* $\mathbb{S}$*-bimodule, où* V *est concentré en arité* $(1,2)$ *et engendré par des produits*  *, et* W *est concentré en arité* $(2,1)$*, engendré par des coproduits*  *. L'isomorphisme* Φ *est alors donné sur le sous-module de poids 2 en arité* $(2,2)$*,* $\mathcal{F}_{(2)}(E^\vee)(2,2)$*, par :*



Et en arité $(1,3)$ *par :*



Pour V et W deux $\mathbb{S}$-bimodules, on notera $(I;W)\boxtimes_c(I;V)$ le sous-$\mathbb{S}$-bimodule de $(I\oplus W)\boxtimes_c(I\oplus V)$ composé des graphes ayant exactement un sommet indexé par une opération de V au niveau 1 et un sommet indéxé par une opération de W au niveau 2.

Définition 3.9. Soient V et W deux $\mathbb{S}$-bimodules, une *règle de réécriture* λ est un morphisme de $\mathbb{S}$-bimodules :

$$\lambda : (I;W)\boxtimes_c(I;V) \to (I;V)\boxtimes_c(I;W)$$

telle que si on note $D_\lambda := Im((Id,-\lambda))$ et si $\mathcal{P} := \mathcal{F}(V\oplus W)/(R\oplus D_\lambda\oplus S)$ est une propérade avec $R\subset\mathcal{F}_{(2)}(V)$, $S\subset\mathcal{F}_{(2)}(W)$, l'application

$$\mathcal{F}(V)/(R)\boxtimes_c\mathcal{F}(W)/(S)\to\mathcal{P}$$

est injective.

Lemme 3.2. *Soit $\lambda : (I;W)\boxtimes_c(I;V) \to (I;V)\boxtimes_c(I;W)$ une règle de réécriture et D_λ le graphe de $-\lambda$. La règle de réécriture dans $\mathcal{F}(E^\vee)$:*

$$\tilde{\lambda} := \Phi_{|}^{-1}\circ -(\Lambda^{-1}\,(s^2\lambda)^*)\circ\Phi_{|} : (I;V^\vee)\boxtimes_c(I;W^\vee)\to(I;W^\vee)\boxtimes_c(I;V^\vee)$$

vérifie :

$$D_{\tilde{\lambda}} = \Phi^{-1}(D^{\perp}_{\Lambda^{-1}s^2\lambda})$$

Démonstration 3.2. *On commence par rappeler les deux faits classiques suivants :*

— *Si $f : A\to A$ est une application et $\phi : A\xrightarrow{\sim} B$ est une bijection , alors*

$$\phi_*(Gr(f)) = Gr(\phi\circ f\circ\phi^{-1})$$

— *Si $f : A\to B$ est une application linéaire, en notant $f^* : B^*\to A^*$ l'application transposée, on a*

$$Gr(f)^\perp = Gr(-f^*)$$

où $A\oplus B$ et $B\oplus A$ sont identifiés canoniquement et $Gr(f)$ est le graphe de f.

On en déduit alors

$$\begin{aligned} D_{\tilde{\lambda}} &= \Phi^{-1}(D_{-\Lambda^{-1}(s^2\lambda)^*}) \\ &= \Phi^{-1}(\Lambda^{-1}D^{\perp}_{s^2\lambda}) \\ &= \Phi^{-1}(D^{\perp}_{\Lambda^{-1}s^2\lambda}) \end{aligned}$$

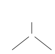
Notons que la dernière égalite est obtenue par finitude des dimensions et exactitude de $\Lambda^{-1}\otimes -$.

Théorème 3.3 (proposition 8.2 [Val07])**.** *Soit* $\mathcal{P}$ *une propérade de la forme* $F(V\bigoplus W)/(R\bigoplus D_\lambda\bigoplus S)$, $R\in\mathcal{F}_{(2)}(V), S\in\mathcal{F}_{(2)}(W)$ *et* $D_\lambda\subset(\mathcal{I}\oplus W)\boxtimes_c(\mathcal{I}\oplus V)\bigoplus(\mathcal{I}\oplus V)\boxtimes_c(\mathcal{I}\oplus W)$ *, définie par une règle de réécriture* λ*, telle que la somme des dimensions de* $V\bigoplus W$ *soit finie. Alors la propérade duale de* $\mathcal{P}$ *est donnée par*

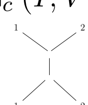
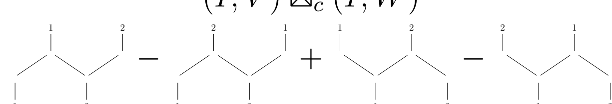
$$\mathcal{P}^! \simeq \mathcal{F}(W^\vee\oplus V^\vee)/(\tilde{S}\oplus D_{\tilde{\lambda}}\oplus\tilde{R})$$

avec pour règle de réécriture $\tilde{\lambda}$ *définie au lemme 3.2 et* $\tilde{S}:=\Phi^{-1}(\Lambda^{-1}s^2S^\perp)$, $\tilde{R}:=\Phi^{-1}(\Lambda^{-1}s^2R^\perp)$.

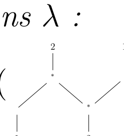
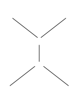
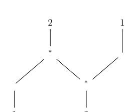
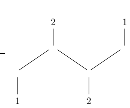
Esquisse de démonstration 3.1. *Il reste à vérifier que* $\tilde{D}_\lambda = D_{\tilde{\lambda}}$*, c'est exactement l'objet du lemme 3.2.*

Exemple 3.5. *La règle de réécriture pour la propérade BiLie* $=\mathcal{F}(V\oplus W)/(R\oplus D\oplus S)$*, avec* $V=<\mu>_{\mathbb{K}}=$  $.\mathbb{K}$ *et* $W=<\Delta>_{\mathbb{K}}=$  $.\mathbb{K}$ *munis des actions par signature, est donnée par*

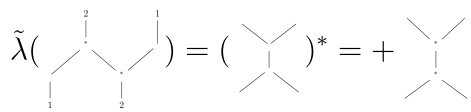
$$\lambda : (I;W)\boxtimes_c(I;V) = W\otimes_{\mathbb{K}} V \;\to\; (I;V)\boxtimes_c(I;W)$$

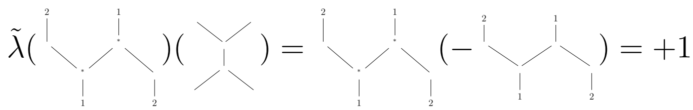
 $\mapsto$ 

Calculons $\tilde{\lambda}$ *:*

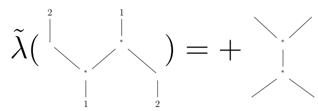
— $\tilde{\lambda}($  $)($  $) =$  $(-$  $) = +1$

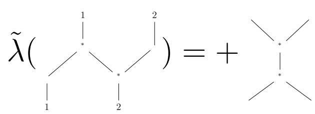
i.e :

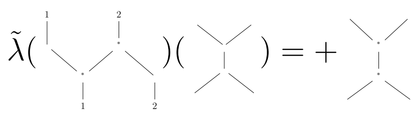


— 

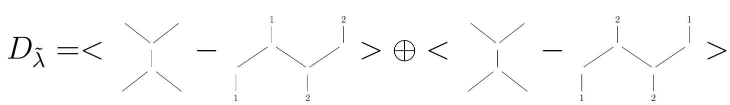
i.e :

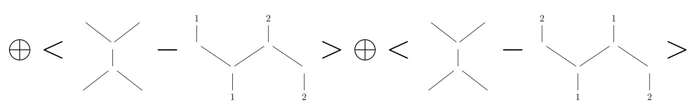


— 

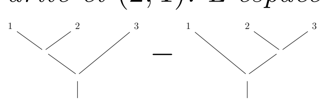
— 

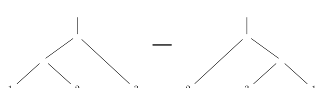
Ce qui donne



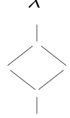


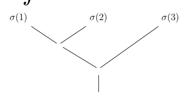
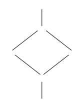
Corollaire 3.4. *La propérade duale de Koszul* $BiLie^!$ *de la propérade des bialgèbres de Lie,* $BiLie$*, est donnée par* $BiLie^! = F(V\oplus W)/(R\oplus D\oplus S)$ *où* V *est engendré sur* $\mathbb{K}$ *par un produit commutatif* m *en arité* $(1,2)$ *et* W *par un coproduit cocommutatif* Δ *en arité et* $(2,1)$*. L'espace des relations,* $R\oplus D\oplus S$*, est engendré par*

—  *l'associateur.*

—  *le coassociateur .*

— $D_{\tilde{\lambda}}$

— 

Démonstration 3.3. *$BiLie = \mathcal{F}(V \oplus W)/(R \oplus D \oplus S)$ avec $V \oplus W = m.\mathbb{K} \oplus \Delta.\mathbb{K}$ et les relations ont été données dans l'exemple 3.3. D'après le théorème précédent, $BiLie^!$ est engendrée par $V^\vee \oplus W^\vee = m^*.\mathbb{K} \bigoplus \Delta^*.\mathbb{K}$, avec m^* un produit commutatif et Δ^* un coproduit cocommutatif. Les relations $R^\perp$ en arité $(1,3)$ sont l'orthogonal de la relation de Jacobi : si $e_\sigma :=$*  *$, \sigma \in \mathbb{S}_3$, alors une base de $\mathcal{F}_{(2)}(V \oplus W)(1,3)$ est $(e_{Id}, e_{(123)}, e_{(132)})$ et la relation de Jacobi s'écrit dans cette base $e_{Id} + e_{(123)} + e_{(132)}$, sont orthogonal est donc engendré par $< e^*_{Id} - e^*_{(123)}; e^*_{(123)} - e^*_{(132)} >=< e^*_{Id} - e^*_{(123)} >$, c'est à dire l'associateur. Le cas de l'arité $(3,1)$ est dual à celui-ci. En arité $(1,1)$ l'orthogonal de 0 est donné par $<$*  *$>$. En arité $(2,2)$, c'est $D_{\tilde{\lambda}}$ calculé à l'exemple 3.5.*

Annexe A

Rappels

On commence par rappeler quelques résultats fondamentaux sur les représentations des groupes finis, sous l'hypothèse que la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ ne divise par l'ordre du groupe.

Définition A.1. Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous groupe de G. Pour un H-module à droite M, la *représentation induite* de G sur M est notée $Ind_H^G M$, définie par :

$$Ind_H^G M := M \otimes_H \mathbb{K}[G]$$

où la multiplication à gauche $H \times G \to G$ induit la structure de H-module à gauche de $\mathbb{K}[G]$.

Théorème A.1 (Maschke)**.** *Toute représentation de G est somme directe de sous représentations irréductibles.*

Théorème A.2. *Toute représentation irréductible de G est facteur direct dans la représentation régulière.*

Une conséquence de ces deux résultats est que tout $\mathbb{K}[G]$-module est facteur direct d'un module libre, i.e est projectif. On en déduit un lemme de non-annulation :

Lemme A.3. *Soit B un $\mathbb{S}_n$-module non réduit à 0, alors*

$$B \otimes_{\mathbb{S}_n} (\mathbb{K}^n)^{\otimes n} \neq 0$$

Démonstration A.1. *L'inclusion* $\begin{array}{rcl} i : \mathbb{K}[\mathbb{S}_n] & \hookrightarrow & (\mathbb{K}^n)^{\otimes n} \\ 1 & \mapsto & e_1 \otimes ... \otimes e_n \end{array}$ *induit la suite exacte courte :*

$$0 \to \mathbb{K}[\mathbb{S}_n] \overset{i}{\hookrightarrow} (\mathbb{K}^n)^{\otimes n} \twoheadrightarrow Coker(i) \to 0$$

Par projectivité de B*, on en déduit la suite exacte courte :*

$$0 \to B \otimes_{\mathbb{S}_n} \mathbb{K}[\mathbb{S}_n] \simeq B \overset{i}{\hookrightarrow} B \otimes_{\mathbb{S}_n} (\mathbb{K}^n)^{\otimes n} \twoheadrightarrow B \otimes_{\mathbb{S}_n} Coker(i) \to 0$$

En particulier, $B \otimes_{\mathbb{S}_n} (\mathbb{K}^n)^{\otimes n}$ *est non nul.*

Remerciements

Je tenais, dans ces lignes, à remercier les quelques personnes sans qui ce mémoire n'existerait pas.

Je remercie Salim Rivière pour avoir encadré ce mémoire avec dévouement et patience.

Je remercie également Friedrich Wagemann pour son dévouement, son humanité et pour avoir toujours su répondre avec clarté à mes nombreuses questions.

Enfin, une pensée toute particulière pour Guillaume Roux et ces nombreuses heures passées à discuter de topologie algébrique après les cours de géométrie affine. Ces discussions, passionnées, ont très nettement influencées mes goûts mathématiques, et je tenais à l'en remercier chaleureusement.

Bibliographie

[Gan02] Wee Liang Gan. Koszul duality for dioperads. *arXiv preprint math/0201074*, 2002.

[GK94] Victor Ginzburg and Mikhail Kapranov. Koszul duality for operads. *Duke Math. J.*, 76(1) :203–272, 10 1994.

[Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique, i. *Tohoku Math. J. (2)*, 9(2) :119–221, 1957.

[Hin97] Vladimir Hinich. Homological algebra of homotopy algebras. *Communications in algebra*, 25(10) :3291–3323, 1997.

[HMS74] Dale Husemoller, John C. Moore, and James Stasheff. Differential homological algebra and homogeneous spaces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 5(2) :113 – 185, 1974.

[LV12] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette. *Algebraic operads*, volume 346. Springer Science & Business Media, 2012.

[Mac] S MacLane. Categories for the working mathematician. 1972.

[Mil12] Joan Millès. The koszul complex is the cotangent complex. *International Mathematics Research Notices*, 2012(3) :607–650, 2012.

[Val07] Bruno Vallette. A koszul duality for props. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359(10) :4865–4943, 2007.

[Val09] Bruno Vallette. Free monoid in monoidal abelian categories. *Applied Categorical Structures*, 17(1) :43–61, 2009.