

Année Universitaire 2019-2020

Master 2 Mathématiques Fondamentales et Appliquées
Parcours Algèbre et Géométrie

Existence d'un 3-filet géodésique stationnaire sur une 2-sphère

Par : **Jean Chartier**

Sous la direction de : **Laurent Hauswirth** et **Samuel Tapie**

Date de soutenance : **07/07/2020**

Université de Nantes

Faculté des Sciences et des Techniques

Introduction

Le présent mémoire vient à la fois clore un cycle d'études à l'Université de Nantes et ouvrir une perspective de recherche en mathématiques. En effet, le Master de Mathématiques Fondamentales et Appliquées (MFA) proposé à Nantes, prévoit en deuxième année l'écriture d'un mémoire, sous la direction d'un chercheur en mathématiques. L'objet de ce travail peut être une analyse d'article de recherche récent, ou la résolution d'un problème ouvert raisonnable. J'ai travaillé sous la direction de Laurent Hauswirth, Professeur à l'Université de Marne la Vallée et Samuel Tapie, Maître de Conférences à l'Université de Nantes. Je les remercie chaleureusement pour l'aide qu'ils m'ont apportée, dans des circonstances de confinement délicates. Les objets étudiés et les outils utilisés dans ce mémoire sont préalables à un futur travail de recherche en thèse, dirigé par Laurent Hauswirth et Arnaud de Mesmay. Il s'agira de montrer l'existence, dans une 3-sphère riemannienne, de doubles bulles stationnaires qui divisent la courbure totale de la sphère en trois parts égales. Pour l'heure nous tentons de résoudre un problème analogue, en plus basse dimension : l'existence d'un 3-filet géodésique stationnaire à la surface d'une 2-sphère riemannienne, qui divise la courbure totale de la sphère en trois parts égales. Nous nous appuyons sur des techniques de balayages introduites par Birkhoff et reprises dans un article de Colding et Minicozzi, *Min-Max for sweepouts by curves*, écrit en 2007. Le Chapitre 1 donne une caractérisation de l'objet étudié. Les Chapitres 2 et 3 décrivent les approches de plusieurs chercheurs qui ont franchi des étapes décisives dans ce domaine. Dans les chapitres 4 et 5 enfin, nous esquissons une preuve d'existence dans un cas particulier de sphères et donnons des résultats qui pourraient aider notre recherche à venir.



FIGURE 1 – Jacques Lipchitz - The Rescue, 1945

Chapitre 1

Filets géodésiques stationnaires.

Considérons une variété Riemannienne M et un multi-graphe G . Un *filet* \mathcal{F} sur M modelé par G est un plongement \mathcal{C}^1 par morceaux de G dans M . Les sommets et arêtes du graphe sont ainsi envoyés sur les sommets et arêtes du filet - ou net suivant l'usage anglais. Un filet est dit *géodésique* si chacune de ses arêtes sont des géodésiques. En outre, un filet est dit *stationnaire* si, pour tout flot Φ_t de difféomorphismes de M , la fonctionnelle de longueur $L(\Phi_t(\mathcal{F}))$ admet un point critique en zéro. Il ne s'agit pas nécessairement d'un extremum local ; cela complique sérieusement la recherche d'un tel filet. Le théorème suivant montre en particulier qu'un filet non géodésique ne saurait être stationnaire. C'est pourquoi un filet stationnaire sera souvent appelé *filet géodésique stationnaire*. Un *filet géodésique minimisant* peut être deux choses distinctes en général. Soit un filet géodésique stationnaire, critique en tant que minimum pour la fonctionnelle de longueur. Soit un filet géodésique stationnaire dont les arêtes réalisent la distance (cf. Ian Adelstein). Ces conditions ne sont ni nécessaires ni suffisantes l'une pour l'autre.

Exhibons maintenant une caractérisation utile - qui chez certains auteurs fait office de définition - du filet stationnaire.

Theorème 1.1

Soit \mathcal{F} un filet sur une variété Riemannienne M . Une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{F} soit stationnaire est qu'en chacun de ses sommets, la somme des vecteurs unitaires tangents aux arêtes soit nulle - cela correspond, pour les sommets de valence trois, à une trisection angulaire - et qu'il soit géodésique.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture, nous supposons que \mathcal{F} est constitué de deux sommets A et B , reliés par n arêtes, disjointes en dehors de A et B . Cette restriction n'est que combinatoire et n'affecte pas l'essentiel de la preuve. Supposons d'abord que les arêtes c_1, \dots, c_n de \mathcal{F} sont des géodésiques paramétrées par longueur d'arc comme suit :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, c_i : [0, l_i] \longrightarrow M$$

Avec les rencontres suivantes : $c_i(0) = A$ et $c_i(l_i) = B$.

Supposons aussi la condition aux sommets :

$$\sum_{i=1}^n c'(0) = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n c'(l_i) = 0$$

Soit maintenant un groupe \mathcal{C}^1 de difféomorphismes à un paramètre Φ_t .

On pose, pour $u \in [0, l_i]$ et $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$V_i(u) = \frac{d}{dt} \Phi_t(c_i(u)) \Big|_{t=0}$$

On veut dériver en zéro la fonctionnelle de longueur totale :

$$L(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \left| \frac{\partial}{\partial u} \Phi_t(c_i(u)) \right| du$$

La première formule variationnelle (\star) donne :

$$L'(0) = \sum_{i=1}^n \left(\langle c'_i, V_i \rangle \Big|_0^{l_i} - \int_0^{l_i} \langle \nabla_{c'_i} c'_i(u), V_i(u) \rangle du \right)$$

Or $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $c''_i = 0$ et $V_1(0) = \dots = V_n(0)$ et $V_1(l_1) = \dots = V_n(l_n)$. Donc :

$$L'(0) = \langle \sum_{i=1}^n c'_i(l_i), V_i(l_i) \rangle - \langle \sum_{i=1}^n c'_i(0), V_i(0) \rangle$$

Ainsi, sous nos hypothèses, $L'(0) = 0$, i.e. \mathcal{F} est stationnaire.

Réciproquement, nous devons montrer une formule de la forme $P \implies (Q \wedge R)$. Une table de vérité montre qu'elle est équivalente à la formule $P \implies Q \wedge (\neg R \wedge Q) \implies \neg P$. Montrons d'abord qu'un filet stationnaire est nécessairement géodésique. Supposons que $L'(0)$ donnée par (\star) est nulle, pour tout flot Φ_t de M . En particulier, pour un champ vectoriel V sur M , restreint à \mathcal{F} , nul en 0 et en l_i , on a :

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \langle \nabla_{c'_i} c'_i(u), V_i(u) \rangle du = 0$$

Si de plus V_i est positivement colinéaire à $\nabla_{c'_i} c'_i$ le long de c_i et $\forall j \neq i, V_j = 0$, alors il vient :

$$\int_0^{l_i} \langle \nabla_{c'_i} c'_i(u), V_i(u) \rangle du = 0 \text{ avec } \forall u \in [0, l_i], \langle \nabla_{c'_i} c'_i(u), V_i(u) \rangle = k(u) \|\nabla_{c'_i} c'_i(u)\|^2 \geq 0$$

D'où nécessairement : $\nabla_{c'_i} c'_i = 0$.

Nous n'avons pas formulé d'hypothèses sur i , donc toutes les arêtes de \mathcal{F} sont des géodésiques.

Montrons ensuite qu'un filet géodésique qui ne satisfait pas la condition de somme nulle aux sommets ne peut être stationnaire. Supposons qu'en A , on ait $\Sigma =: \sum_{i=1}^n c'_i(0) \neq 0 \in T_A M$. On transporte Σ parallèlement le long de chaque c_i en $\Sigma_i(u)$. En particulier, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\Sigma_i(0) = \Sigma$. On construit i champs de vecteurs le long de c_1, \dots, c_n en réduisant quadratiquement les Σ_i dans un rayon géodésique r suffisamment petit devant \mathcal{F} :

$$V_i(u) = 0 \text{ pour } u > r \text{ et } V_i(u) = \Sigma_i(u) \left(\frac{u-r}{r} \right)^2 \text{ pour } u \in [0, r[$$

On construit une variation de \mathcal{F} autour de A , raccordée à l'identité au-delà, de manière \mathcal{C}^1 :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall u \in [0, r[, \forall t \in [-\epsilon, \epsilon], c_i^t(u) = \exp_{c_i(u)}(tV_i(u))$$

On construit un flot Φ_t sur M qui est l'identité à l'extérieur du disque géodésique $D(A, r)$ et qui, à l'intérieur du disque, se comporte le long de $\mathcal{F} \cap D(A, r)$ comme la variation précédente. Ainsi obtient-on par définition :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall u \in [0, l_i], \frac{d}{dt} \Phi_t(c_i(u))|_{t=0} = V_i(u)$$

La première formule variationnelle donne :

$$L'(0) = - \sum_{i=1}^n \langle c'_i(0), V_i(0) \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^n c'_i(0), \Sigma_i(0) \right\rangle = - \langle \Sigma, \Sigma \rangle \neq 0$$

Donc \mathcal{F} n'est pas stationnaire. □

Enfin, la formule de Gauss-Bonnet implique qu'un filet géodésique stationnaire, dont les sommets sont tous de degré 3 et les faces bordées par le même nombre d'arêtes, découpe la sphère en portions de courbures totales égales. C'est le cas pour un filets modelé sur le Θ -graphe : 2 sommets et trois arêtes.

Chapitre 2

Preuves d'existence des filets géodésiques stationnaires : un balayage historique, de Poincaré à Hass & Morgan.

Le graphe élémentaire - consistant en un unique sommet bordant une unique arête fermée - modèle le lacet simple dans M . Il est clair qu'un tel lacet pointé, géodésique et stationnaire (i.e. sans angle au sommet) n'est autre qu'une géodésique fermée et simple. Ainsi, les premières preuves d'existence de filets géodésiques stationnaires coïncident avec les premières constructions de géodésiques périodiques sans points d'auto-intersection. Le 20e siècle est riche de développements autour de ces problèmes d'existence. Nous en parcourons un chemin chronologique.

2.1 La preuve incomplète de Poincaré

Les travaux mené par Henri Poincaré en 1892 dans l'*Analysis Situs*, autour du Groupe Fondamentale des variétés, permettent de construire des géodésiques fermées dans les surfaces riemanniennes dont le π_1 est non trivial. En effet, dans une classe d'homotopie non-triviale, on désigne une suite minimisante pour la longueur, qui converge dans l'espace des courbes \mathcal{C}^1 , vers une géodésique fermée, ayant la même régularité que la métrique. La difficulté demeure, comme dans le cas de la 2-sphère, quand $\pi_1(M) = 0$. Dans un article de 1905 intitulé *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Poincaré propose une preuve de l'existence d'une géodésique fermée et simple dans la 2-sphère en toute courbure. Il considère d'abord un certain espace de lacets divisant la 2-sphère en deux hémisphères de courbures totales égales.

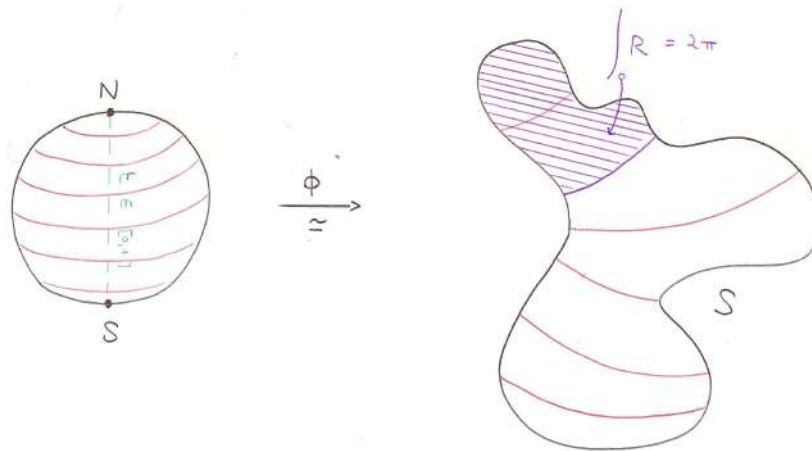


FIGURE 2.1 – Recherche d'un lacet divisant en deux parts égales la courbure totale de S .

Cet espace n'est certes pas vide. Pour en construire un élément, il suffit d'envoyer la 2-sphère S considérée vers une 2-sphère ronde S° via un difféomorphisme Φ , de balayer S avec les images réciproques des parallèles de S° et d'appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires. La deuxième idée de Poincaré est de considérer le minimum des longueurs des lacets de cet espace. Il suppose que ce minimum est réalisé par un lacet γ , dont il démontre enfin le caractère géodésique. Son ellipse réside dans l'affirmation qu'un lacet de l'espace doit réaliser le minimum de longueur; cet argument est donné par Christopher Croke en 1982, dans *Poincaré's problem and the length of the shortest closed geodesic on a convex hypersurface*.

2.2 L'idée de Birkhoff

En 1917, George David Birkhoff expose dans un article intitulé *Dynamical systems with two degrees of freedom*, un protocole de recherche d'une géodésique fermée et simple dans une 2-sphère S de courbure quelconque. Il y décrit comment envoyer une 2-sphère de paramètres dans la 2-sphère S via une application $\mathcal{B} : S^2 \rightarrow S$, continue et de degré 1 (homotope à un homéomorphisme), appelée balayage¹. Il considère ensuite la classe d'homotopie Ω_0 d'un tel balayage \mathcal{B}_0 et définit la largeur de S , relativement à Ω_0 , comme le nombre positif :

$$W =: \min_{\mathcal{B} \in \Omega_0} \max_{t \in [0,1]} E(\mathcal{B}(\cdot, t))$$

Où E est l'énergie de la fibre $\mathcal{B}(\cdot, t)$. Le degré de \mathcal{B} empêche W d'être nul. On construit une suite de balayages dont les pics d'énergie convergent vers W . On ne sait pas encore à ce stade si la suite des fibres maximales converge vers une certain lacet. Birkhoff introduit alors un nouvel outil : le resserrement des courbes. Cette application est homotope à l'identité, elle agit sur un espace approprié de lacets sur S et satisfait entre autres deux propriétés : elle diminue la longueur et discrimine les courbes presque géodésiques, sur lesquelles elle a un faible effet. Cela permet en particulier de resserrer continûment chacun des balayages de la suite et d'obtenir une suite $\mathcal{B}^j(\cdot, t_j)$ qui converge vers G , l'ensemble des géodésiques fermées et simples de S . G est *a priori* non vide, puisqu'il contient les points, mais notre limite ne saurait être un point : elle réalise W . C'est ainsi la première preuve d'existence d'au moins une géodésique fermée sur toute sphère.

2.3 Un Théorème optimal de Lyusternik et Schnirelmann

En 1929, Lazar Lyusternik and Lev Schnirelmann démontrent dans une note publiée au Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, le théorème suivant :

Theorème 2.1

*Toute variété riemannienne homéomorphe à la sphère possède au moins trois géodésiques fermées non triviales, distinctes et simples.*²

2.4 Un Théorème de Hass et Morgan en courbure positive

À l'instar de Poincaré et Croke, Joël Hass et Frank Morgan ont utilisé des arguments de minimisation sur un espace de filets divisant en parts égales la courbure totale d'une sphère. Ils l'ont fait pour montrer l'existence d'un 3-filet géodésique stationnaire sur toute sphère riemannienne de courbure positive³. Un 3-filet divise la sphère en trois zones. Il peut-être modelé sur trois topologie de graphes :

- Le Θ -graphe (2 sommets et trois arêtes).
- Le graphe en 8 (1 sommet et 2 arêtes en lacets).
- La paire de lunette (2 sommets joints par une arête et deux arêtes en lacets supplémentaires).

1. La source peut-être transformée en $[0, 1] \times [0, 1]$, pourvu qu'on impose d'une part : $\forall t \in [0, 1], \mathcal{B}(0, t) = \mathcal{B}(1, t)$, d'autre part : $\forall s \in [0, 1], \mathcal{B}(s, 0) = A$ et $\mathcal{B}(s, 1) = B$. C'est le point de vue que nous adoptons.

2. Ce résultat est optimal dans le sens où certaines variétés sphériques, dont les ellipsoïdes, n'admettent que trois géodésiques fermées et simples.

3. Rappelons le **Théorème de plongement d'Alexandrov** : Une 2-sphère riemannienne a une courbure positive si et seulement si elle est isométrique au bord d'un convexe de R^3 muni de la métrique induite.

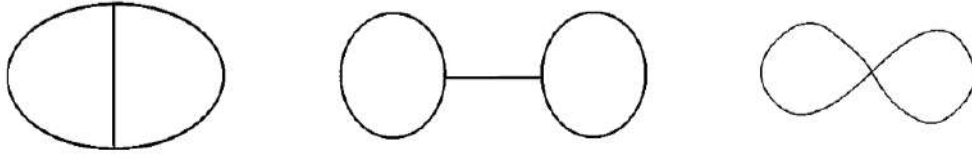
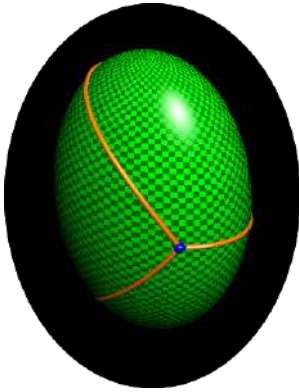


FIGURE 2.2 – Trois modèles de graphes pour les 3-fillets

Leur preuve repose fondamentalement sur un théorème que Morgan démontre en 1994 dans un article intitulé *Soap bubbles in \mathbb{R}^2 and surfaces* et qui permet de déformer un graphe donné pour amener chaque zone qu'il délimite vers une zone d'aire donnée.

Théorème 2.2 (Frank Morgan - *Soap bubbles in \mathbb{R}^2 and surfaces* - Théorème 3.2)

Soit M une surface riemannienne lisse, compacte et connexe. Soit G_0 un graphe plongé dans M , avec m faces F_0, \dots, F_m . Soient $A_1, \dots, A_m > 0$, avec $\sum_i A_i < \text{aire } M$. Il y a une déformation continue f_t de M telle que $f_0 = \text{Id}$, f_t injective pour $0 \leq t < 1$, $\mathcal{A}(f_1(F_i)) = A_i$ et $G = f_1(G_0)$ minimise la longueur parmi tous les graphes dont les faces atteignent ces aires cibles. G consiste en la rencontre d'arcs de courbure constante, disjoints ou coïncidant. De plus, aux sommets de G , les vecteurs unitaires tangents sont de sommes nulles.



Morgan ajoute en fin d'article (Paragraphe 3.4 - page 360) que la mesure d'aire peut être remplacée par n'importe quelle intégrale d'une fonction réelle positive définie sur M . Aussi adaptent-ils ce théorème en prenant la fonction courbure sur une sphère convexe et en considérant les trois graphes qui modèlent les 3-fillets sur la sphère. Ils parviennent ainsi à construire sur une sphère convexe un 3-fillets qui partage la courbure totale suivant une prescription et qui minimise pour cette propriété. Dans leur article intitulé *Geodesic nets on the 2 sphere (1997)*, Frank et Morgan vérifient enfin que les arêtes de ce filet sont nécessairement des géodésiques. Ainsi démontrent-ils l'existence de 3-fillets géodésiques stationnaires sur les sphères de courbure positive.

On commence par définir la classe des filets admissibles sur laquelle on pourra déterminer un filet minimisant. Considérons un filet G parmi les trois modèles de 3-fillets et assignons à chaque angle, selon la valence du sommet, une valeur cible :

- Pour un sommet de valence trois : $t_i = 2\pi/3$.
- Pour un sommet de valence quatre : $\pi/3 \leq t_i \leq 2\pi/3$ et $t_i = t_j$ pour les angles opposés par le sommet.

Assignons à chaque face $F_j \subset S^2 - G$ une courbure totale cible K_j , par la formule :

$$K_j = 2\pi - \sum (\pi - t_i),$$

où la somme est prise sur tous les angles cibles contenus dans F_j . Rappelons la formule de Gauss Bonnet appliquée à une face F_j :

$$\int_{F_j} R + \int_{\partial F_j} k + \sum (\pi - s_i) = 2\pi,$$

où R est la courbure de Gauss⁴, k est la courbure géodésique - c'est-à-dire la composante normale du vecteur de courbure $\nabla_{c'} c'$ - et où s_i est l'angle actuel du i -ème sommet de F_j . Si toutes les arêtes de G sont des

4. Dans une variété Riemannienne, la courbure sectionnelle en un point x , dans la direction d'un plan P de l'espace tangent, correspond à la courbure de Gauss en x du morceau de surface engendré par le disque unitaire de P , via l'application exponentielle. En dimension deux, courbure sectionnelle et courbure de Gauss sont une même chose. On rappelle que la courbure de Gauss

géodésiques et si les angles s_i de chaque face correspondent aux angles cibles t_i , alors la courbure totale des F_j est égale à la courbure totale cible :

$$\int_{F_j} R = 2\pi - \sum(\pi - s_i) = 2\pi - \sum(\pi - t_i) = K_j$$

Bilan : pour chaque région du 3-filet modelé sur le θ -graphe, la courbure totale cible est $4\pi/3$. Les monogones du 3-filet modelé sur le graphe à lunettes ont une courbure totale cible égale à $5\pi/3$, tandis que le quadrilatère a une courbure totale cible égale à $2\pi/3$. Enfin, le 3-filet en huit délimite deux monogones dont les courbures totales cibles sont égales et comprises entre $4\pi/3$ et $5\pi/3$, ainsi qu'un 2-gone dont la courbure totale cible est comprise entre $2\pi/3$ et $4\pi/3$. On appelle *filets admissibles* sur la 2-sphère les 3-filets qui atteignent effectivement ces trois répartitions de la courbure totales, avec possiblement des écrasements d'arêtes.

On note G_0 le 3-filet minimisant dans cette classe de filets admissibles, comme annoncé. Si l'une des régions F_j de G_0 est bordée par les angles s_i , alors la formule de Gauss-Bonnet implique que la courbure géodésique à la frontière de F_j satisfait :

$$(\star)^5 \int_{\delta F_j} k = \sum(s_i - t_i)$$

Considérons un chemin fermé γ traversant G_0 transversalement. La première formule de variation de la longueur d'une courbe \mathcal{C}^2 implique que la dérivée de la longueur de la courbe, lorsqu'elle est perturbée dans la direction d'un vecteur $W \in T_x M$, où $x = c(u)$ est assez loin des bords, est donnée par le produit scalaire de W et du vecteur de courbure de la courbe :

$$L'(0) = - \int_{u-\epsilon}^{u+\epsilon} \langle \nabla_{c'} c', W \rangle$$

En réalité, on considère un champ de vecteur le long de la courbe qui vaut W dans un petit voisinage de x et s'annule brusquement au-delà, via une approximation de l'identité. On néglige le régime transitoire de la variation. Par ailleurs, la dérivée de la courbure totale d'une face jouxtant une courbe soumise à une telle perturbation est donnée par le produit de R et de la partie normale de W :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{D(t)} R dV = \int_{\partial D} R \langle W, n_s \rangle du,$$

où n_s est la normale sortante. Montrons d'abord que le long d'une arête de $c \in G_0$ le produit kR est constant. On sait déjà par le Théorème 2.2 que k est constant le long des arêtes de G_0 . Le scalaire k est signé et dépend de la normale à c choisie. On prend soin de considérer le long de c une normale qui ne change pas d'orientation. Soient x et y deux points distincts de c . On pousse c en x dans le sens de la normale avec un coefficient α_1 et y dans le sens opposé à la normale avec un coefficient α_2 . On obtient d'une part $L'(0) = 2\epsilon k(\alpha_2 - \alpha_1)$ et d'autre part :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{D(t)} R dV = 2\epsilon k(R_1 \alpha_1 - R_2 \alpha_2),$$

où $D(t)$ est le domaine délimité par c pour lequel la normale à c est la normale sortante. On veut absolument préserver les courbures totales des faces adjacentes en c . C'est pourquoi on impose $R_1 \alpha_1 = R_2 \alpha_2$, c'est-à-dire $\alpha_1 = R_2 \alpha_2 / R_1$. Cette condition implique :

$$L'(0) = 2\epsilon k \left(\frac{\alpha_2(R_2 - R_1)}{R_1} \right)$$

est en particulier le produit des courbures principales, c'est-à-dire les courbures planes - minimale et maximale - des sections orthogonales au plan tangent. On rappelle enfin, dans un cadre abstrait, la définition de la courbure sectionnelle, où R est le tenseur de Riemann associé à une variété (M, \langle, \rangle) , x est un point de M et u, v sont des vecteurs de $T_x M$:

$$K_x(u, v) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}$$

5. Détail : $\int_{\delta F_j} k = 2\pi - \sum(\pi - s_i) - \int_{F_j} R = 2\pi - \sum(\pi - s_i) - K_j = 2\pi - \sum(\pi - s_i) - 2\pi + \sum(\pi - t_i) = \sum(s_i - t_i)$
Seuls les sommets de degré 4 donnent une contribution non nulle, car pour un sommet de degré 3, on a $s_i = t_i = \frac{2\pi}{3}$.

Si $R_1 \neq R_2$, on pourrait avoir $L'(0) < 0$ en choisissant convenablement le signe de α_2 . Cela est impossible. En effet, on ne peut obtenir par variation de G_0 aucun graphe de plus petite longueur qui conserve les courbures totales de ses faces. Conclusion : $R_1 = R_2$ et le produit kR est constant le long de c .

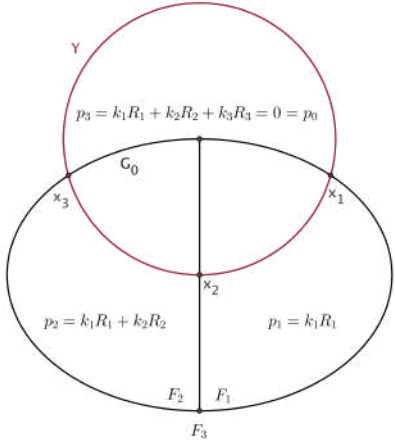
Un raisonnement similaire permet de montrer qu'on a nécessairement $\sum_i k_i R_i = 0$, où la somme est prise sur l'ensemble des points d'intersection de γ avec G_0 et où les normales permettant de définir k sont prises dans le sens de la marche⁶. En effet, dans le cas contraire, on devrait être en mesure de construire une poussée infinitésimale de G_0 dans la direction de γ qui occasionnerait un nouveau graphique de plus petite longueur et divisant S^2 en régions de mêmes courbures totales, ce qui est impossible. On peut donc définir une fonction de pression p à valeur réelle sur l'ensemble des régions avec la propriété que la différence des pressions de deux régions séparées par un arc g_0 de G_0 ayant une courbure k est donnée par $\Delta p = kR$. La fonction p est définie comme étant nulle sur une région arbitraire et donnée par la formule $\Delta p = kR$, successivement sur des régions adjacentes séparées par un arc de multiplicité un. Pour deux régions adjacentes séparées par un arc de multiplicité m , nous utilisons la formule $\Delta p = mkR$. Notez que si deux régions voisines ont la même pression, alors l'arête du graphique qui les sépare vérifie $k = 0$ (car $R > 0$, par hypothèse) et sont des géodésiques, du moins là où elles ne se heurtent pas à d'autres arêtes.

Nous considérons maintenant chacun des trois types combinatoires de graphes admissibles. Supposons d'abord que G_0 soit un Θ -graphe qui ne s'est pas effondré en huit. Si toutes les pressions sont égales, alors G_0 donne un filet géodésique. C'est ce que nous allons montrer. Soit F_j une région de pression maximale. On a :

$$p_j - p_{j-1} = k_j R_j \text{ et } p_j \geq p_{j-1}$$

Donc $k_j R_j \geq 0$, i.e. $k_j \geq 0$. De même on montre que $k_{j+1} \leq 0$. En signant chaque courbure géodésique des arêtes bordant F_j vers l'intérieur de la face, on arrive à $k \geq 0$ partout au bord de F_j . La formule (*) dans le cas du theta donne :

$$\int_{\delta F_j} k = 0$$



Il vient $k \equiv 0$. Cela implique que la pression dans les deux autres régions est égale à celle de F_j de sorte que les trois régions ont une pression égale. Étant donné que les arcs de délimitation ne se heurtent pas près d'un sommet (condition au sommets, voir Théorème 2.2), ils commencent comme des géodésiques et ne se heurtent jamais. Par conséquent, tous les arcs de frontière sont des géodésiques. Finalement, si G_0 ne dégénère pas en huit, il doit former un réseau géodésique modelé sur le Θ -graphe.

Un argument similaire s'applique au graphes à lunettes. Soit encore F_j une région de pression maximale. On a $k \geq 0$ à la frontière et par (2) : $k \equiv 0$. Si F_j est le 4-gone, cela implique que toutes les pressions sont égales puisque les deux autres régions sont adjacentes à F_j . Si F_j est un monogone, alors le 4-gone a la même pression maximale et encore une fois toutes les pressions sont égales. Ainsi, si G_0 ne dégénère pas en huit, il forme alors un réseau géodésique. Le dernier cas est plus délicat à traiter. Nous renvoyons à la preuve du **Claim 1**, dans Hass et Morgan (1997), page 3847.

Dans cette approche, l'hypothèse de convexité est décisive. Nous espérons, à l'issue de ce mémoire, pouvoir démontrer l'existence de 3-filets géodésiques stationnaires sur les 2-sphères riemannienne en toute courbure. Pour cela, nous allons privilégier les stratégies de balayages et de rétrécissement des courbes propres à Birkhoff. Nous aurons recours à la formulation moderne donnée par Tobias Colding et William Minicozzi.

Remarque 2.1. *Sur un ellipsoïde d'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, les symétries facilitent la recherche d'un Θ -filet. Considérons l'une des trois géodésiques fermées et simples. Le long de l'une des deux autres - dans un plan perpendiculaire à la première - on fait glisser un point P d'où partent deux arcs géodésiques dans les deux directions parallèles au plan de la première géodésique. Ces deux arcs rencontrent la première géodésique en deux points. La continuité du flot géodésique permet de désigner P de telle sorte que la rencontre se fasse avec un angle de $2\pi/3$. Un raisonnement symétrique dans l'hémisphère opposé achève la construction.*

6. Au point $x \in G_0 \cap \gamma$, on s'assure que $\langle c', n \rangle$ soit positif.

Minimiser la longueur sur un espace de filets qui séparent la courbure totale d'une sphère en parts égales est un principe standard. Il faut néanmoins s'assurer que l'espace sur lequel on minimise est non vide.

Theorème 2.3

Soit S une 2-sphère riemannienne. Il existe un filet lisse sur S , modelé sur le Θ -graphe, qui divise la courbure totale de S en trois parts égales.

Démonstration. Il existe par définition un difféomorphisme Φ qui envoie S sur la sphère ronde unitaire de \mathbb{R}^3 . Considérons γ une géodésique fermée et simple de S . On peut choisir Φ de telle sorte qu'il envoie γ sur l'équateur c . On fixe A et B diamétralement opposés sur $\Phi(\gamma)$ avec $\theta =: (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OB})$. Soit $\alpha \in [0, \pi]$.

On construit le demi-plan :

$$\Pi_{N,\alpha} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\alpha) \\ \cos(\theta)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \right) \cap \{z \geq 0\} = \text{vect}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{v}) \cap \{z \geq 0\}$$

Quand α balaye $]0, \pi[$, $\Pi_{N,\alpha} \cap S^2$ balaye une famille de demi-grands-cercles de S^2 .

De même on construit $\Pi_{S,\alpha}$ en remplaçant α par $-\alpha$ et $\{z \geq 0\}$ par $\{z \leq 0\}$.

On considère :

$$\alpha_N = \min_{]0, \pi[} \left\{ \alpha \mid \int_{\Phi^{-1}\{\Pi_{N,\sigma} \cap S^2 \mid \sigma \leq \alpha\}} R ds = \frac{4\pi}{3} \right\}$$

$$\alpha_S = \max_{] -\pi, 0[} \left\{ \alpha \mid \int_{\Phi^{-1}\{\Pi_{S,\sigma} \cap S^2 \mid \sigma \geq \alpha\}} R ds = \frac{4\pi}{3} \right\}$$

En effet, l'intégrale de courbure qui intervient dans la définition de α_N et α_S est une fonction continue de α : elle vaut 0 quand α tend vers 0 et 2π quand α tend vers π , conséquence de la formule de Gauss-Bonnet et du fait que γ est géodésique. Cette intégrale atteint $4\pi/3$ en vertu du Théorème des valeurs intermédiaires.

On regarde le Θ -filet sur S :

$$\mathcal{G}_\theta = \Phi^{-1}(\Pi_{N,\alpha_N} \cap S^2) \cup \Phi^{-1}(\Pi_{S,\alpha_S} \cap S^2) \cup \Phi^{-1}(c \cap \{y \leq \tan(\theta)x\})$$

Conclusion : \mathcal{G}_θ scinde S en trois zones de courbures totales égales à $4\pi/3$.

Remarque 2.2. Dans l'espace métrique où nous regardons les \mathcal{G}_θ ⁷, l'application $\theta \mapsto \mathcal{G}_\theta$ n'est pas continue. En revanche, nous pensons qu'il existe d'autres constructions de balayages qui la rendent continue.

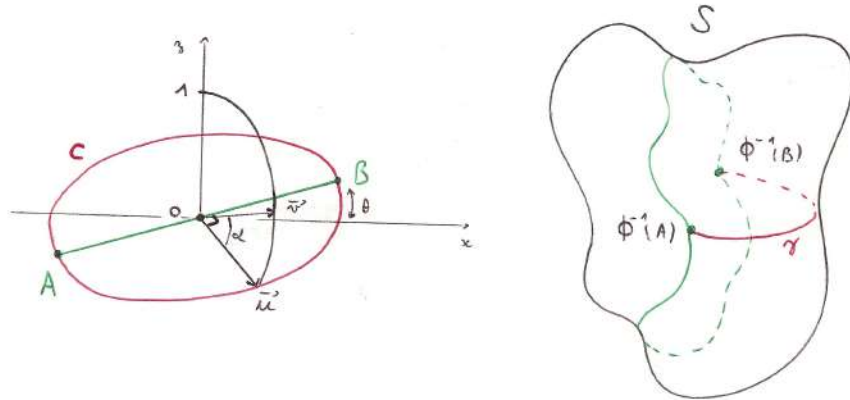


FIGURE 2.3 – Construction d'un Θ -filet divisant S en 3 zones de courbures totales égales.

□

7. Espace des applications $[0, 1] \times \{1, 2, 3\}/\mathcal{R} \rightarrow S^2$, de carré intégrable, presque partout dérivable et de dérivée au carré intégrable. \mathcal{R} est la relation d'équivalence définie par $(0, 1)\mathcal{R}(0, 2)\mathcal{R}(0, 3)$ et $(1, 1)\mathcal{R}(1, 2)\mathcal{R}(1, 3)$.

Chapitre 3

Colding & Minicozzi : Une relecture de Birkhoff.

Dans cette partie, nous nous reportons à l'article *Min-Max for sweepouts by curves* de Tobias Colding et William Minicozzi écrit en 2007. Nous présentons les objets et techniques utilisées, puis détaillons les preuves de deux résultats clés. L'enjeu est de définir le bon espace de courbes sur lequel doit s'appliquer le *pull tight* introduit par Birkhoff. On introduit dans ce but l'espace Λ des applications géodésiques par morceaux de S^1 dans M avec exactement L angles (éventuellement des angles plats) telles que la longueur de chaque géodésique ne dépasse pas 2π , paramétrée par un multiple constant de longueur d'arc. De telles courbes, parcourues à vitesse 1, sont L -Lipschitz (conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire). L'espace Λ est inclus dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}$ des applications de S^1 dans M , qui lui confère une topologie induite. La norme dans $W^{1,2}$, donnée par $\int_{S^1} |f|^2 + |f'|^2$, dépend du plongement de M choisi. Des conditions sur ce plongement sont données dans l'article de Colding & Minicozzi¹. Attention : cette norme confère à Λ , non pas une structure d'espace normé - car la norme de Sobolev est définie dans un espace vectoriel de chemins vivant dans l'espace du plongement de M - mais une structure induite d'espace métrique. Dans tout ce chapitre, nous reprenons les notations introduites dans la section 2.2.

3.1 Raccourcissement de courbes

Le raccourcissement de courbes - ou pull tight - est une application $\Psi : \Lambda \rightarrow \Lambda$ telle que :

- (1) $\Psi(\gamma)$ est homotope à γ et $L(\Psi(\gamma)) \leq L(\gamma)$.
- (2) $\Psi(\gamma)$ dépend continûment de γ .
- (3) Il existe une fonction continue $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ avec $\phi(0) = 0$ et telle que :

$$\text{dist}^2(\gamma, \Psi(\gamma)) \leq \phi \left(\frac{L^2(\gamma) - L^2(\Psi(\gamma))}{L^2(\Psi(\gamma))} \right).$$

- (4) Étant donné $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $\gamma \in \Lambda$ avec $L(\gamma) - L(\Psi(\gamma)) < \delta$, alors $\text{dist}(\gamma, G) < \epsilon$.

Il existe une telle application : on en trouvera une construction explicite dans [Co Mi]. On notera que cette construction permet de définir Ψ sur $W^{1,2}$ tout entier. En revanche, les propriétés qui viennent d'être énoncées nécessitent la compacité de Λ . La propriété (4) met en évidence l'atout discriminatoire de Ψ , au sens où son action a d'autant moins d'effet sur une courbe $\gamma \in \Lambda$ que celle-ci se trouve proche de G au sens de la norme $W^{1,2}$ sur Λ . Elle découle à la fois de la **compacité de Λ** , de la **continuité de Ψ** et d'une

1. Notons qu'il est possible de définir une norme intrinsèque sur Λ . Le recours naturel au plongement permet de simplifier certaines preuves. Composer un plongement avec une homothétie n'affecte pas les propriétés variationnelles de la variété. C'est pourquoi Colding et Minicozzi proposent une dilatation de M qui rend sa courbure suffisamment petite et son rayon d'injectivité suffisamment grand. Cela se traduit par trois exigences :

- (M1) $\sup_M |A| \leq 1/16$ où A est la seconde forme fondamentale de M .
- (M2) $R_{inj}(M) \geq 8\pi$ et $R \leq 1/64$, de sorte que toute boule géodésique de rayon $\leq 4\pi$ dans M est strictement convexe.
- (M3) $\forall x, y \in M, |x - y| \leq 1 \implies \text{dist}_M(x, y) \leq 2|x - y|$.

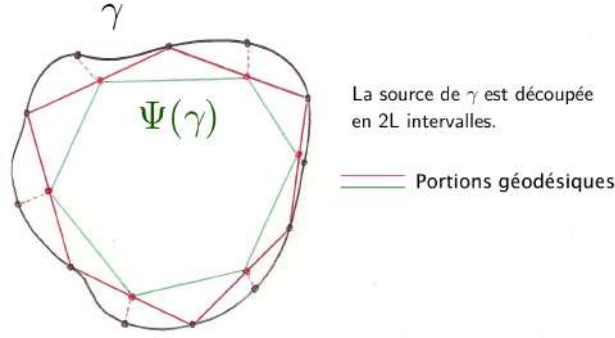


FIGURE 3.1 – Raccourcissement d'une courbe dans Λ .

propriété propre à la construction décrite dans [Co Mi] : les points fixes de Ψ sont exactement les éléments de G . Montrons cette propriété (4), via un raisonnement par l'absurde. S'il existe $\epsilon > 0$ et une suite γ_j de Λ telle que pour tout j , $L(\gamma_j) - L(\Psi(\gamma_j)) < 1/j$, avec pourtant $\text{dist}(\gamma_j, G) \geq \epsilon$. Puisque Λ est compacte, il existe une sous suite γ_{j_n} qui converge dans Λ vers γ . Par hypothèse, la sous suite $\Psi(\gamma_{j_n})$ converge aussi vers γ . Or, par continuité de Ψ , cette limite est aussi $\Psi(\gamma)$, d'où $\Psi(\gamma) = \gamma$. En tant que point fixe de Λ , on a nécessairement $\gamma \in G$. Cela qui contredit l'hypothèse selon laquelle les γ_j restent à distance non nulle de G . Le Lemme suivant permet de démontrer le Théorème de la section 3.

Lemme 3.1 (Colding & Minicozzi - *Min-Max for sweepouts by curves* - Lemme 1.4)

Soient $W \geq 0^2$ et $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$, qui tend vers zéro avec ϵ , tel que si $\gamma \in \Lambda$ et

$$(\star) \quad 2\pi(W - \delta) < L^2(\Psi(\gamma)) \leq L^2(\gamma) < 2\pi(W + \delta),$$

alors $\text{dist}(\Psi(\gamma), G) < \epsilon$.

Démonstration. Soient $W \geq 0$ et $\epsilon > 0$. Soit $\eta_1 > 0$, donné par (3), tel que $\forall \delta > 0, \delta \leq \eta_1 \implies \phi(\delta) < \epsilon^2/4$. On rappelle que ϕ est continue positive, avec $\phi(0) = 0$. Soit $\eta_2 > 0$, donné par (4), tel que $L(\gamma) - L(\Psi(\gamma)) < \eta_2 \implies \text{dist}(\gamma, G) < \epsilon/2$, où $\gamma \in \Lambda$.

On pose $\hat{\delta} = \min(\eta_1, \eta_2)$ et $\delta = \hat{\delta}/4\pi$.

Supposons que l'on ait $2\pi(W - \delta) < L^2(\Psi(\gamma)) \leq L^2(\gamma) < 2\pi(W + \delta)$.

Il vient d'une part :

$$\begin{aligned} L^2(\gamma) - L^2(\Psi(\gamma)) &< 4\pi\delta \\ L(\gamma) - L(\Psi(\gamma)) &< \frac{4\pi\delta}{L(\gamma) + L(\Psi(\gamma))} < \hat{\delta} \leq \eta_2 \end{aligned}$$

Donc $\text{dist}(\gamma, G) < \epsilon/2$.

Il vient d'autre part :

$$\frac{L^2(\gamma) - L^2(\Psi(\gamma))}{L^2(\Psi(\gamma))} < \hat{\delta} \leq \eta_1$$

Donc $\text{dist}^2(\Psi(\gamma), \gamma) = \phi\left(\frac{L^2(\gamma) - L^2(\Psi(\gamma))}{L^2(\Psi(\gamma))}\right) < \epsilon^2/4$, i.e. $\text{dist}(\Psi(\gamma), \gamma) < \epsilon/2$.

L'inégalité triangulaire donne, pour tout $g \in G$:

$$\text{dist}(\Psi(\gamma), g) \leq \text{dist}(\Psi(\gamma), \gamma) + \text{dist}(\gamma, g)$$

En minimisant sur G à droite et à gauche, on arrive à la conclusion :

$$\text{dist}(\Psi(\gamma), G) \leq \text{dist}(\Psi(\gamma), \gamma) + \text{dist}(\gamma, G) < \epsilon$$

□

2. Si aucune hypothèse n'accompagne *a priori* le réel W , il se trouve que la prémisse (\star) pourra être satisfaite si l'on prend pour W la largeur de M et pour γ , une courbe suffisamment proche de son image par Ψ , à la mesure de δ .

3.2 Une bonne suite de balayages.

Soit Ω l'ensemble des applications continues $\mathcal{B} : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow M$ telles que pour tout t , l'application $\mathcal{B}(\cdot, t)$ est dans $W^{1,2}$, l'application $t \mapsto \mathcal{B}(\cdot, t)$ est continue de $[-1, 1]$ vers $W^{1,2}$ et enfin, \mathcal{B} envoie $S^1 \times \{-1\}$ sur des points. Étant donnée une application $\hat{\mathcal{B}} \in \Omega$, la classe d'homotopie $\Omega_{\hat{\mathcal{B}}}$ est définie comme l'ensemble des applications $\mathcal{B} \in \Omega$ qui sont homotopes à $\hat{\mathcal{B}}$ à travers des applications de Ω . Fixons désormais une classe d'homotopie non triviale de balayages et notons-la simplement Ω pour plus de lisibilité. Choisissons une suite d'applications $\mathcal{B}^j \in \Omega$ (cf. 2.2) avec :

$$\max_{t \in [-1, 1]} E(\mathcal{B}^j(\cdot, t)) < W + \frac{1}{j} \quad (**)$$

On trouvera dans [Co Mi] une construction d'une nouvelle suite de balayages $\sigma^j \in \Omega$, homotopes à \mathcal{B}^j et dont les fibres, en plus de vérifier l'inégalité (**), appartiennent à Λ . Sur chaque fibre de ces nouveaux balayages, s'applique le rétrécissement des courbes. On obtient ainsi une troisième suite de balayages $\gamma^j \in \Omega$, homotopes à σ^j et définis par : $\gamma^j(\cdot, t) = \Psi(\sigma^j(\cdot, t))$.

3.3 Presque maximal implique presque critique

Théorème 3.1 (Colding & Minicozzi - *Min-Max for sweepouts by curves* - Théorème 1.9)
Soient $W \geq 0$ et $\epsilon > 0$; il existe $\delta > 0$ tel que, si $j > 1/\delta$ et pour un certain t_0 :

$$2\pi E(\gamma^j(\cdot, t_0)) = L^2(\gamma^j(\cdot, t_0)) > 2\pi(W - \delta),$$

alors pour ce j nous avons $\text{dist}(\gamma^j(\cdot, t_0), G) < \epsilon$.

Démonstration. Précisons que sur Λ , l'énergie n'est autre que la longueur au carré, divisée par 2π . Cela dit, soit $W \geq 0$ et $\epsilon > 0$. Soit encore $\delta > 0$, donné par le Lemme 3.1.1, tel que :

$$(\sigma \in \Lambda \text{ et } 2\pi(W - \delta) < L^2(\Psi(\sigma)) \leq L^2(\sigma) < 2\pi(W + \delta)) \implies \text{dist}(\Psi(\sigma), G) < \epsilon$$

Supposons que $j > 1/\delta$ et qu'il existe t_0 tel que :

$$L^2(\gamma^j(\cdot, t_0)) > 2\pi(W - \delta)$$

Comme $\gamma^j(\cdot, t_0) = \Psi(\sigma^j(\cdot, t_0))$ avec $L(\Psi(\sigma^j(\cdot, t_0))) < L(\sigma^j(\cdot, t_0))$, il vient :

$$2\pi(W - \delta) < L^2(\Psi(\sigma^j(\cdot, t_0))) < L^2(\sigma^j(\cdot, t_0))$$

Or, par (**), $L^2(\sigma^j(\cdot, t_0)) = 2\pi E(\sigma^j(\cdot, t_0)) < 2\pi(W + 1/j) < 2\pi(W + \delta)$.

En vertu des qualités conférées à δ , il vient : $\text{dist}(\gamma^j(\cdot, t_0), G) < \epsilon$. □

Appliquons enfin le **théorème 3.3.1** à la largeur W de M (relativement à un balayage canonique non trivial) et à $\epsilon > 0$, aussi petit que l'on veut. Prenons $j > 1/\delta$ où δ est donné par le Théorème. Ainsi a-t-on :

$$W \leq \max_{t \in [0, 1]} E(\gamma^j(\cdot, t))$$

Soit t_0 le paramètre qui réalise le maximum. On a $E(\gamma^j(\cdot, t_0)) > W - \delta$. Cela implique que $\text{dist}(\gamma^j(\cdot, t_0), G) < \epsilon$. Nous pouvons donc construire une sous-suite de fibres qui converge dans Λ compact, vers une limite γ , tout en s'approchant toujours plus de G . Comme G est fermé, si γ n'appartenait pas à G , les fibres de la sous-suite finiraient par s'accumuler dans un voisinage ouvert de γ distinct de G , c'est-à-dire à une distance minimum de G : Impossible ! Donc $\gamma \in G$.

Chapitre 4

Traque d'un 3-filet géodésique stationnaire dans une 2-sphère à pantalon, par balayage tripodal.

L'article de Joël Hass *What is an almost normal surface* montre l'existence d'un découpage de la 2-sphère le long d'un ensemble saturé maximal \mathcal{G} de géodésiques fermées et simples - saturé au sens où toute autre géodésique fermée et simple doit couper un élément de l'ensemble ; maximal au sens du cardinal ¹ - découpage qui, à défaut d'être unique, dresse une liste exhaustive de constituants topologiques permettant de décrire une 2-sphère : le pantalon, la nasse, le bonnet. Le premier est une sphère privée de trois disques disjoints délimités par des éléments stables de \mathcal{G} . La nasse est un anneau bordé par deux éléments de \mathcal{G} , l'un stable, l'autre instable. Le bonnet est un disque bordé par une géodésique instable de \mathcal{G} . La présence d'un pantalon étant salutaire pour la recherche que nous faisons, nous classons les 2-sphères de la façon suivante :

- Les sphères portant au moins un pantalon.
- Les double-bonnets, dont les sphères convexes.
- Les concaténations de nasses par paires renversées, se refermant sur des bonnets.

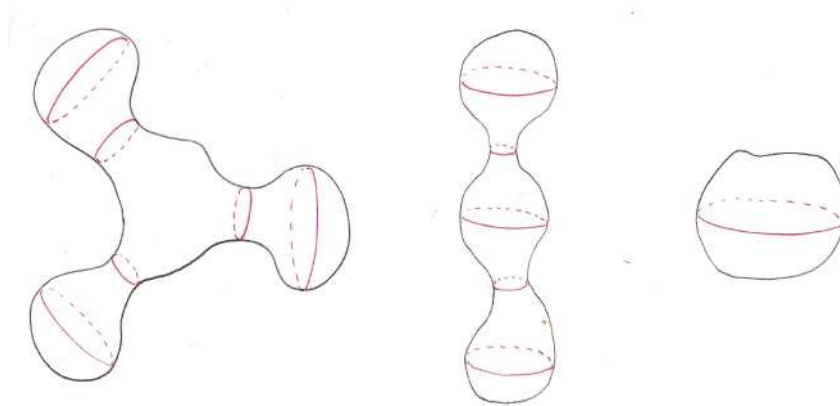


FIGURE 4.1 – Familles saturées maximales de géodésiques fermées sur des 2-sphères

Notre objectif dans cette section, est de prouver l'existence d'un 3-filet géodésique stationnaire au niveau des pantalons. Ne suivent pour le moment que des esquisses de preuves. Nous allons élaborer une procédure de min-max adaptée à la topologie du pantalon et à celle de la cible : le 3-filet. Nous nous inspirons du formalisme de Colding et Minicozzi. Il faut pourtant définir une nouvelle procédure de rétrécissement, plus délicate à manier. Le balayage standard que nous proposons consiste à accrocher trois anneaux aux bords du pantalon et de les faire se nouer au centre, le long d'un 3-filet. Détaillons maintenant cette construction.

1. Cardinal éventuellement infini si la sphère contient un tronçon annulaire plat ou torique.

4.1 Balayage tripodal d'un pantalon.

Soient $P \subset M$ un pantalon de bords $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (géodésiques) et Ω l'ensemble des applications continues $\mathcal{B} : S^1 \times \{1, 2, 3\} \times [0, 1] \rightarrow P$, injectives sur $S^1 \times \{1, 2, 3\} \times [0, 1[$ où, $\forall i, \forall t, \mathcal{B}(\cdot, i, t)$ est dans $W^{1,2}$. On demande, pour $i = 1, 2, 3$, le raccord aux bords : $S^1 \times \{i\} \times 0 \mapsto \text{Im}(\gamma_i)$. À i et t fixés, on rappelle que es applications $s \mapsto \mathcal{B}(s, i, t)$ sont munies de la norme de Sobolev donnée par :

$$\|\mathcal{B}(\cdot, i, t)\| = \int_{S^1} (|\mathcal{B}|^2 + |\mathcal{B}'|^2)$$

De plus, on exige en $t = 1$ une rencontre des trois manches en un 3-filet \mathcal{F} :

$A =: \mathcal{B}(0, 1, 1) = \mathcal{B}(0, 2, 1) = \mathcal{B}(0, 3, 1)$ et $B =: \mathcal{B}(0.5, 1, 1) = \mathcal{B}(0.5, 2, 1) = \mathcal{B}(0.5, 3, 1)$.
 $\forall s \in [0, 0.5], \mathcal{B}(s, 1, 1) = \mathcal{B}(s, 3, 1), \mathcal{B}(s, 2, 1) = \mathcal{B}(s + 0.5, 3, 1)$ et $\forall s \in [0.5, 1], \mathcal{B}(s, 1, 1) = \mathcal{B}(s, 2, 1)$.

La réunion des courbes $t \mapsto \mathcal{B}(0, i, t), i = 1, 2, 3$ d'une part, des courbes $t \mapsto \mathcal{B}(0.5, i, t), i = 1, 2, 3$ d'autre part, forme deux tripodes T_A et T_B qui sont la colonne vertébrale de notre balayage.

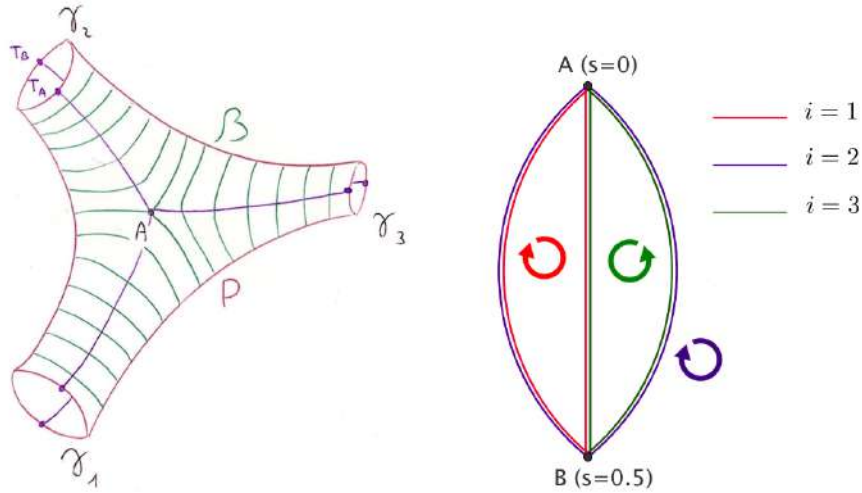


FIGURE 4.2 – Balayage tripodal d'un pantalon

4.2 Largeur tripodale d'un pantalon.

Étant donné une application $\hat{\mathcal{B}} \in \Omega$, la classe d'homotopie $\Omega(\hat{\mathcal{B}})$ est définie comme l'ensemble des applications $\mathcal{B} \in \Omega$ homotopes à $\hat{\mathcal{B}}$ à travers des applications de Ω . À toute classe d'homotopie $\Omega(\hat{\mathcal{B}})$, on associe la *largeur* $W = W(\hat{\mathcal{B}})$, définie en prenant l'infimum du maximum des énergies des tranches $\mathcal{B}(\cdot, \{1, 2, 3\}, t)$:

$$W = \inf_{\mathcal{B} \in \Omega(\hat{\mathcal{B}})} \max_{t \in [-1, 1]} E(\mathcal{B}(\cdot, \{1, 2, 3\}, t))$$

où l'énergie est donnée par $E(\mathcal{B}(\cdot, \{1, 2, 3\}, t)) = \sum_{i=1}^3 \int_{S^1} |\partial_s \mathcal{B}(s, i, t)|^2 ds$.

La topologie de P et les hypothèses sur Ω impliquent² qu'il existe un réel strictement positif qui minore l'énergie de toute fibre $\mathcal{B}(\cdot, i, t)$. C'est pourquoi la largeur W est nécessairement strictement positive.

4.3 Procédure de resserrement du balayage

Soit $\mathcal{B} \in \Omega$. À l'instar de Birkhoff, nous allons définir une procédure de rétrécissement de \mathcal{B} . Le paragraphe suivant résume une fausse piste que nous avons empruntée et dont on a tiré des leçons.

². Ce point est à détailler.

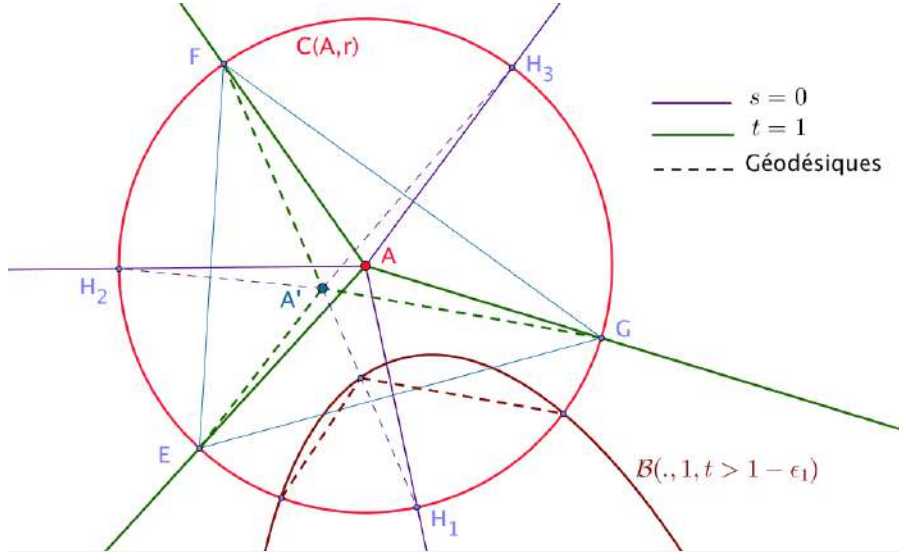


FIGURE 4.3 – Point de Fermat

Remarque 4.1 (Fausse piste). *Pour augmenter nos chances qu'une suite décroissante de balayages converge vers un filet stationnaire, nous avons eu l'idée de redresser chaque balayage en ses deux sommets de sorte que le 3-filet central satisfasse la condition au angle du Théorème 1.1. Malheureusement, l'angle formé par deux arêtes n'est pas une fonction continue sur l'espace des paires jointes d'arêtes $W^{1,2}$. En témoigne la figure 4.4 ci-dessous. Voici le détail de cette construction. Il s'agit de redresser le 3-filet \mathcal{F} ($t = 1$) au niveau de ses deux sommets, ainsi que les fibres de \mathcal{B} pour t proche de 1. Nous détaillons le protocole pour le point A . Soit $r > 0$ suffisamment petit mais maximal, pour que $D(A, r)$ et $D(B, r)$ satisfassent trois conditions : Il doivent être convexes, contenus dans les disques d'injectivité de chacun de leurs points et leurs frontières ne doivent ni se toucher, ni couper les fibres de \mathcal{B} en plus de deux points. On note E, F, G les points d'intersection de $C(A, r)$ et \mathcal{F} . On note également H_1, H_2, H_3 les points d'intersections de $C(A, r)$ et du tripode T_A ($s = 0$). Il existe trois réels $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ dans $[0, 1]$ tels que $H_i = \mathcal{B}(0, i, 1 - \epsilon_i)$ pour $i = 1, 2, 3$. Soit A' le point de Fermat³ du triangle EFG . On remplace le 3-filet, entre A et E, F, G , par des arcs géodésiques issus de A' . On remplace le tripode T_A , entre A et H_1, H_2, H_3 par des arcs géodésiques issus de A' . Enfin, pour $i = 1, 2, 3$ et $t \in]1 - \epsilon_i, 1[$, la courbe $\mathcal{B}(., i, t)$ rencontre le cercle $C(A, r)$ en deux points et le nouvel arc géodésique $A'H_i$ en un point situés entre les deux premiers. On interpole alors ces trois points par deux géodésiques. On obtient un nouveau balayage tripodale $\hat{\mathcal{B}} \in \Omega$. On pourra vérifier sa continuité en t .*



FIGURE 4.4 – Non continuité de l'angle

D'abord, transformons chaque demi-fibre⁴ de $\hat{\mathcal{B}}$ en une application géodésique par morceaux. Cette opération, continue en t , consiste à scinder les intervalles $[0, 0.5]$ et $[0.5, 1]$ en intervalles conjoints sur lesquels on remplace la fibre par un tronçon de géodésique⁵. Le nombre d'intervalles doit être pair et suffisamment grand

3. Le point de Fermat d'un triangle ABC dans le plan - dont les angles n'excèdent pas 120° - est l'unique point F tel que $(FA, FB) = (FB, FC) = 2\pi/3$. De plus, la somme des distances FA, FB et FC est minimisante. L'énoncé est transposable sur une surface riemannienne, à condition que le triangle se trouve à l'intérieur du disque d'injectivité de chacun de ses sommets : il existe un point F et trois géodésiques $[FA], [FB]$ et $[FC]$ qui se rencontrent en F suivant un angle de $2\pi/3$ et telles que la somme de leurs longueurs est minimisante. En revanche, si l'un des sommets forme un angle de plus de 120° , alors le point de Fermat n'est autre que ce sommet.

4. Pour $0 < s < 1/2$ et $1/2 < s < 1$.

5. On vérifiera qu'au bord des manches du pantalon, cette procédure est bien définie. Cela tient au fait que le voisinage des bords est géodésiquement convexe.

pour que l'interpolation soit bien définie. Elle permet de regarder les nouvelles demi-fibres dans l'espace Γ défini ci-après, sur lequel s'applique la procédure de rétrécissement introduite dans la définition 4.1.

Soit $\Gamma_{[a,b]}^L$, ou simplement Γ s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'espace des chemins $c : [a, b] \rightarrow P$ géodésiques par morceaux avec L angles, éventuellement plats, correspondant à une partition de la source, propre à chaque chemin :

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^L [x_i, x_{i+1}], \text{ où } a = x_0 < \dots < x_{L+1} = b$$

Sur chaque morceaux, on demande que c soit l'unique plus courte géodésique de x_i à x_{i+1} . On remarque que L doit être impair et suffisamment grand pour que $((L+1)R_{\text{inj}}(P))^2 \gg 2\pi W$. L'espace Γ est métrique pour la norme $W^{1,2}$. On vérifiera qu'il est compact. Nous définissons maintenant une application de resserrement des fibres du balayage, qui se veut un analogue dans notre situation à celle de Colding-Minicozzi que nous avons utilisée à la section 3.1.

Définition 4.1

Soit (x_0, \dots, x_{L+1}) un découpage de $[a, b]$ en $L+1$ intervalles et soit $\gamma \in \Gamma_{[a,b]}^L$. On précise que les angles de γ ne sont pas nécessairement situés en (x_0, \dots, x_{L+1}) .

- On remplace γ par une géodésique sur chaque intervalle $[x_{2k}, x_{2k+2}]_{k=0, \dots, (L-1)/2}$ pour obtenir $\tilde{\gamma}$.
- On remplace $\tilde{\gamma}$ par une géodésique sur chaque intervalle $[x_{2k+1}, x_{2k+3}]_{k=0, \dots, (L-3)/2}$, pour obtenir $\hat{\gamma}$.
- On re-paramétrise $\hat{\gamma}$ pour obtenir une courbe à vitesse constante, en tout point de dérivabilité.

On note $\Pi(\gamma)$ la nouvelle application $[a, b] \rightarrow P$.

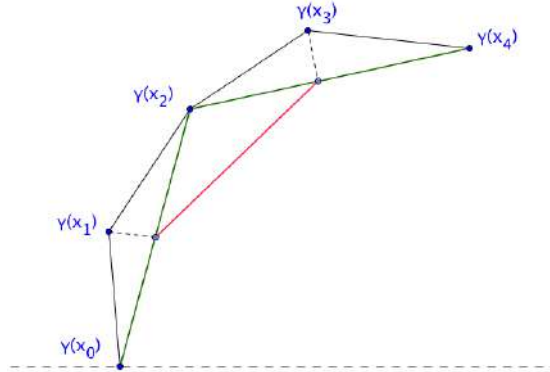


FIGURE 4.5 – Application Π

Proposition 4.1 (Non démontrée - Jugée raisonnable, à l'aune de la section 3.1)

L'opérateur $\Pi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ de la précédente définition vérifie quatre propriétés, semblables à celles de Ψ :

- (1) $\Pi(\gamma)$ est homotope à γ et $L(\Pi(\gamma)) \leq L(\gamma)$.
- (2) $\Pi(\gamma)$ dépend continûment de γ .
- (3) Il existe une fonction continue $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ avec $\phi(0) = 0$ et telle que :

$$\text{dist}^2(\gamma, \Pi(\gamma)) \leq \phi \left(\frac{L^2(\gamma) - L^2(\Pi(\gamma))}{L^2(\Pi(\gamma))} \right).$$

- (4) Étant donné $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $\gamma \in \Gamma$ avec $L(\gamma) - L(\Pi(\gamma)) < \delta$, alors $\text{dist}(\gamma, \hat{G}) < \epsilon$, où \hat{G} est l'espace fermé des géodésiques à deux bords.

4.4 Vers une preuve d'existence.

Soit \mathcal{B}^j une suite de balayages qui satisfait :

$$\max_{t \in [0,1]} E(\mathcal{B}(\cdot, \{1, 2, 3\}, t)) < W + \frac{1}{j}$$

Soit $\Gamma^{3,2}$ l'ensemble des triplets de paires de chemins dans Γ joints en leurs extrémités. Plus précisément, c'est l'ensemble des applications : $\mathcal{T} : [0, 1] \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow P$ où $\forall i = 1, \dots, 6 : \mathcal{T}(\cdot, i) \in \Gamma$ et $\mathcal{T}(0, 1) = \mathcal{T}(0, 2)$; $\mathcal{T}(0, 3) = \mathcal{T}(0, 4)$; $\mathcal{T}(0, 5) = \mathcal{T}(0, 6)$ (idem pour $\mathcal{T}(1, -)$). On munit $\Gamma^{3,2}$ d'une structure d'espace normé où la norme d'un élément \mathcal{T} est la somme des normes de ses 6 arêtes dans Γ (idem pour la longueur). Les arêtes jointes le demeurent à la limite, c'est pourquoi $\Gamma^{3,2}$ est fermé. Ci-après deux résultats dans $\Gamma^{3,2}$. Ce sont des analogues du Lemme et du Théorème de la partie 3. On note $\Pi(\mathcal{T})$, pour $\mathcal{T} \in \Gamma^{3,2}$, l'élément de $\Gamma^{3,2}$ tel que $\forall i = 1, \dots, 6 : \Pi(\mathcal{T})(\cdot, i) = \Pi(\mathcal{T}(\cdot, i))$. Comme Π fixe les extrémités, on a bien $\Pi(\mathcal{T}) \in \Gamma^{3,2}$. On note $G^{3,2}$ l'ensemble des triplets de paires de géodésiques dans \hat{G} jointes en leurs extrémités.

Lemme 4.1

Soient $W \geq 0$ et $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, si $\mathcal{T} \in \Gamma^{3,2}$ et

$$(\star) \quad 2\pi(W - \delta) < L^2(\Pi(\mathcal{T})) \leq L^2(\mathcal{T}) < 2\pi(W + \delta),$$

alors $\text{dist}(\Pi(\mathcal{T}), G^{3,2}) < \epsilon$.

Démonstration. Soient $W \geq 0$ et $\epsilon > 0$. Soit $\eta_0 > 0$, donné par (3), tel que $\forall \delta > 0, \delta \leq \eta_0 \implies \phi(\delta) < \epsilon^2/144$. On rappelle que ϕ est continue positive, avec $\phi(0) = 0$. Soit, pour $i = 1, \dots, 6$, $\eta_i > 0$, donnés par (4), tels que $L(c_i) - L(\Pi(c_i)) < \eta_i \implies \text{dist}(c_i, \hat{G}) < \epsilon/12$, où les c_i sont les arêtes d'un $\mathcal{T} \in \Gamma^{3,2}$, jointes deux par deux en leurs extrémités. Si $L(\mathcal{T}) - L(\Pi(\mathcal{T})) < \min \eta_i$, alors $\text{dist}(\mathcal{T}, G^{3,2}) < \epsilon/2$.

On pose $\hat{\delta} = \min(\eta_0, \eta_i)$ et $\delta = \hat{\delta}/4\pi$.

Supposons que l'on ait $2\pi(W - \delta) < L^2(\Pi(\mathcal{T})) \leq L^2(\mathcal{T}) < 2\pi(W + \delta)$.

Il vient d'une part :

$$\begin{aligned} L^2(\mathcal{T}) - L^2(\Pi(\mathcal{T})) &< 4\pi\delta \\ L(\mathcal{T}) - L(\Pi(\mathcal{T})) &< \frac{4\pi\delta}{L(\mathcal{T}) + L(\Pi(\mathcal{T}))} < \hat{\delta} \leq \min \eta_i \end{aligned}$$

Donc $\text{dist}(\mathcal{T}, G^{3,2}) < \epsilon/2$.

De même, on montre que $\text{dist}(\Pi(\mathcal{T}), \mathcal{T}) < \epsilon$.

L'inégalité triangulaire donne :

$$\text{dist}(\Pi(\mathcal{T}), G^{3,2}) \leq \text{dist}(\Pi(\mathcal{T}), \mathcal{T}) + \text{dist}(\mathcal{T}, G^{3,2}) < \epsilon$$

□

Théorème 4.1 (Voir Théorème 3.1)

Soient $W \geq 0$ et $\epsilon > 0$; il existe $\delta > 0$ tel que, si $k > 1/\delta$ et pour un certain t_0 :

$$2\pi E(\mathcal{Z}^k(\cdot, \{1, 2, 3\}, t_0)) = L^2(\mathcal{Z}^k(\cdot, \{1, 2, 3\}, t_0)) > 2\pi(W - \delta),$$

alors pour ce k nous avons $\text{dist}(\mathcal{Z}^k(\cdot, \{1, 2, 3\}, t_0), G^{3,2}) < \epsilon$.

Dans l'état actuel de nos recherches, nous aboutissons à deux conjectures, sous la forme d'un porisme :

Conjecture 4.1.

Si 1 est valeur d'adhérence des temps de réalisation des maximums d'énergie, alors on considère une sous-suite de tranches $\mathcal{B}^k(., \{1, 2, 3\}, t_k)$ telle que :

$$\max_{t \in [0,1]} E(\mathcal{B}^k(., \{1, 2, 3\}, t)) = E(\mathcal{B}^k(., \{1, 2, 3\}, t_k)) < W + \frac{1}{k} \text{ avec } t_k \longrightarrow 1$$

On redresse chaque balayage \mathcal{B}^k pour construire un balayage $\hat{\mathcal{B}}^k$ dont les tranches $\hat{\mathcal{B}}^k(., \{1, 2, 3\}, t)$ sont dans $\Gamma^{3,2}$. On applique enfin l'opérateur Π à toutes les demi-fibres de $\hat{\mathcal{B}}^k$, pour obtenir un troisième balayage noté \mathcal{Z}^k , homotope à \mathcal{B}^k . On a : $\forall t \in [0, 1], \mathcal{Z}^k(., \{1, 2, 3\}, t) = \Pi(\hat{\mathcal{B}}^k(., \{1, 2, 3\}, t))$. Le théorème 4.1 précédent s'applique alors et une certaine suite de tranches $\mathcal{Z}^k(., \{1, 2, 3\}, t'_k)$ doit converger vers trois paires de demi-fibres géodésiques. Comme $t_k \longrightarrow 1$, et bien qu'en général $t_k \neq t'_k$, nous pensons que cette limite est un 3-filet géodésique stationnaire.

Conjecture 4.2.

Si 1 n'est pas valeur d'adhérence des temps de réalisation des maximums d'énergie, alors redresse chaque balayage \mathcal{B}^k comme précédemment. Il existe h tel que pour tout $s \in [1 - h, 1]$, s n'est pas non plus valeur d'adhérence des temps de réalisation des maximums d'énergie. On sait que Ψ est homotope à l'identité. On construit une famille continue d'opérateurs Ψ_s , pour $s \in [0, 1]$ telle que $\Psi_s = \Psi$ pour tout $s \in [0, 1 - h]$ et $\Psi_1 = Id$. Cette homotopie, dont on trouve une description dans Croke⁶, est telle que $s < t \implies (L(\gamma) - L(\Psi_t(\gamma))) \leq (L(\gamma) - L(\Psi_s(\gamma)))$. On applique, pour tout $s \in [0, 1]$, l'opérateur Ψ_s aux trois fibres $\mathcal{B}^k(., i, s)$ pour obtenir un troisième balayage noté \mathcal{Z}^k . Il s'agira de montrer que \mathcal{Z}^k est continu en t et homotope à \mathcal{B}^k . Nous pensons pouvoir conclure qu'il existe une suite de tranches de \mathcal{Z}^k qui converge vers trois géodésiques fermées, simples et disjointes.

Supposons que ces conjectures soient vraies. Dans un pantalon, trois géodésiques fermées, simples et disjointes ne peuvent être que les trois bords γ_1, γ_2 et γ_3 . La situation de la deuxième conjecture est donc impossible, puisqu'en courbure négative, ces bords ne sauraient ni réaliser un maximum d'énergie, ni minimiser une suite de maximums d'énergie. Donc, seule la situation de la première conjecture a lieu et il existe un 3-filet géodésique stationnaire dans P .

4.5 Autre esquisse de preuve - où l'on n'utilise pas de balayage

Soit Γ l'espace des chemins $c : [0, 1] \longrightarrow P$ géodésiques par morceaux avec L angles, éventuellement plats, correspondant à une partition de la source, propre à chaque chemin :

$$[0, 1] = \bigcup_{i=0}^L [x_i, x_{i+1}], \text{ où } 0 = x_0 < \dots < x_{L+1} = 1$$

Sur chaque morceaux, on demande que c soit l'unique plus courte géodésique de x_i à x_{i+1} . On remarque que L doit être impair et suffisamment grand pour que $((L + 1)R_{\text{inj}}(P))^2 \gg 2\pi W$. L'espace Γ est compact.

Soit \mathcal{H} la classe d'homotopie - dans l'espace des Θ -filets sur P avec arêtes $c_{1,2,3}$ dans Γ - d'un Θ -filet canonique tel que $\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, la concaténation de c_i et c_{i+1} est homotope à γ_{i+2} . Nous pensons qu'un tel représentant existe (cf. figure 4.5). Par ailleurs, étant donnée une suite de Θ -filets dans \mathcal{H} , les suites induites d'arêtes $(c_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peuvent converger dans Γ que pour former un Θ -filet limite ou un graphe en huit. En effet, pour $i \neq j$, on montre qu'il ne peut y avoir convergence des deux suites (c_i^n) et (c_j^n) , ni vers deux points (nécessairement confondus), ni vers une même arête. Supposons que (c_i^n) et (c_j^n) convergent⁷ vers un même chemin constant. Pour tout n , il existe par hypothèse une homotopie $h_i^n : [n, n + 1] \times [0, 1] \longrightarrow P$ entre c_i^n et c_i^{n+1} , ainsi qu'une homotopie $h_j^n : [n, n + 1] \times [0, 1] \longrightarrow P$ entre c_j^n et c_j^{n+1} , toutes deux issues de l'homotopie dans \mathcal{H} entre les deux Θ -filets dont on a extrait les arêtes c_i^n et c_j^n d'une part, c_i^{n+1} et c_j^{n+1} d'autre part. On

6. *Area and the length of the shortest closed geodesic*, 1986 - Pages 4 et 5.

7. On pourra observer qu'une suite de paires accrochées d'éléments de Γ ne peut converger que vers une paire accrochée d'éléments de Γ , qui est compact.

a pour tout t et pour tout $n : h_i^n(t, 0) = h_j^n(t, 0)$ et $h_i^n(t, 1) = h_j^n(t, 1)$. On construit deux homotopies qui relient chaque terme des suites (c_i^n) et (c_j^n) :

$$h_i : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow P \text{ telle que } h_i(t, s) = h_i^{\lfloor f(t) \rfloor}(f(t), s) \text{ où } f(t) = \frac{1}{1-t} - 1$$

$$h_j : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow P \text{ telle que } h_j(t, s) = h_j^{\lfloor f(t) \rfloor}(f(t), s) \text{ où } f(t) = \frac{1}{1-t} - 1$$

On prolonge ces homotopies en 1 en posant $h_i(1, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_i^n)$ et $h_j(1, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_j^n)$.

On a pour tout $t : h_i(t, 0) = h_j(t, 0)$ et $h_i(t, 1) = h_j(t, 1)$. Ainsi la concaténation de c_i^0 et c_j^0 forme un lacet homotope à un point, à travers des lacets de P . Or, par hypothèse, elle est aussi homotope à l'une des trois composantes de bord de P . Le lemme suivant montre qu'il n'est pas possible qu'une composante de bord de P soit homotope à un point.

Lemme 4.2

Une variété topologique compacte connexe à bord, de dimension 2, dont l'une des composantes de bord est un cercle homotope à 0, est nécessairement un disque.

Ainsi, (c_i^n) et (c_j^n) ne peuvent s'écraser en un seul point. On montre de même qu'elles ne peuvent s'écraser l'une contre l'autre sur toute leur longueur. On pose :

$$W = \min_{\mathcal{H}} E(\mathcal{F})$$

En vertu du raisonnement précédent, on a nécessairement $W > 0$.

On extrait dans \mathcal{H} une suite de Θ -filets telle que : $W < E(\mathcal{F}^j) < W + 1/j$ (\star).

On note $\Pi(\mathcal{F}) \in \mathcal{H}$ le filet obtenu en appliquant Π aux trois arêtes de \mathcal{F} . On a pour tout j :

$$W \leq E(\Pi(\mathcal{F}^j)) \leq E(\mathcal{F}^j) < W + 1/j$$

Cela implique :

$$0 \leq \sum_{i=1}^3 E(\Pi(c_i^j)) - \sum_{i=1}^3 E(c_i^j) < \frac{1}{j}$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^3 \left(E(\Pi(c_i^j)) - E(c_i^j) \right) < \frac{1}{j}$$

Pour $i = 1, 2, 3$, il vient :

$$0 \leq E(\Pi(c_i^j)) - E(c_i^j) < \frac{1}{j}$$

$$L(\Pi(c_i^j)) - L(c_i^j) < \frac{2\pi}{j(L(\Pi(c_i^j)) + L(c_i^j))} < \frac{2\pi}{j}$$

Soit $\epsilon > 0$ et soit δ prescrit par la propriété (4) de la Proposition 4.3.1. Soit enfin $j > 2\pi/\delta$. D'après cette même propriété (4), $L(c_i^j) < \epsilon$ pour $i = 1, 2, 3$. Ainsi la suite \mathcal{F}^j converge-t-elle vers un 3-filet géodésique \mathcal{N} . Une des arêtes peut converger vers un point ; il s'agit alors d'un 3-filet géodésique modelé sur le graphe en 8. Nous savons en outre que $E(\mathcal{N}) = W$, de sorte que toute variation de \mathcal{N} augmente son énergie et sa longueur totale. C'est donc un 3-filet géodésique stationnaire.

Conclusion : Notre procédure de minimisation sur une famille de Θ -filets conduit à l'existence d'un 3-filet stationnaire sur les pantalons, modelé sur le Θ -graphe ou le graphe en 8. Néanmoins, une procédure de minimisation sur un espace convenable de 3-filets modelés sur le graphe en 8, décrits comme images de S^1 dans un pantalon géodésiquement convexe, où l'on impose un point de contact, donne déjà depuis Poincaré une géodésique fermée qui s'auto-intersecte une fois, c'est-à-dire un cas particulier de huit stationnaire. Ainsi,

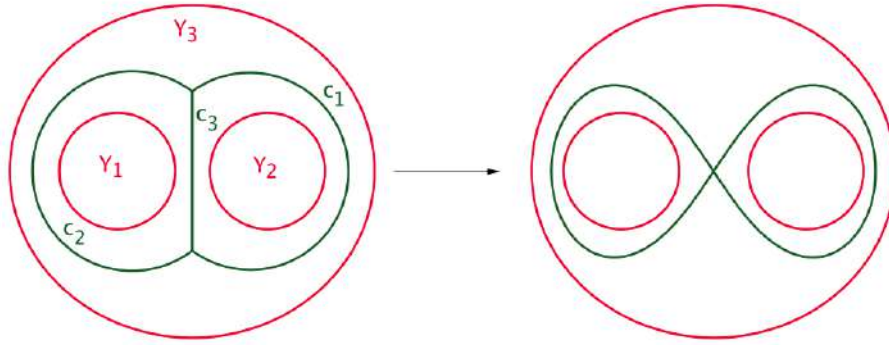


FIGURE 4.6 – Dégénérescence du Θ -filet

notre preuve n'est-elle peut-être pas satisfaisante, dans le sens où elle ne garantit pas l'existence d'un objet nouveau. Nous aimerions savoir par exemple s'il existe toujours un 3-filet stationnaire modelé sur le Θ -graphe dans un pantalon - c'est précisément l'enjeu de la partie précédente, demeurée au stade de la conjecture. Par ailleurs, si un 8 limite est minimisant parmi les 8 et les Θ , il ne l'est pas parmi tous les 3-filets. En effet, un graphe à lunettes pourrait modeler un 3-filet stationnaire optimal. La topologie particulière du pantalon nous invite à rechercher un résultat plus fort que la stationnarité, à savoir être minimisant.

Calendrier de recherche : Dans un premier temps, nous nous attacherons à prouver les deux conjectures du chapitre 4, nous aurons alors montré l'existence de Θ -filets stationnaires dans les pantalons. Si le cas du pantalon présente des avantages topologiques, les deux autres types de 2-sphères - à savoir les doubles bonnets et les concaténations de nasses - charrient de nouveaux problèmes. Nous privilégierons deux approches pour tenter de construire des 3-filets stationnaires sur n'importe quelle 2-sphère. La première sera quantitative : Le chapitre suivant nous donne des estimations pour balayer une sphère avec des cercles de longueur limitée, qui doivent s'articuler autour de Θ -filets. Une traque de type algorithmique pourrait nous permettre de resserrer le filet sur notre proie. La deuxième est qualitative : nous essaierons de balayer la sphère directement avec des Θ -filets. Il s'agira de décrire un représentant de classe convenable pour qu'une procédure de min-max puisse aboutir. L'avantage de cette procédure est que la procédure de min-max ne peut qu'aboutir à un Θ -filet.

Chapitre 5

Un nouvel horizon : L'article de Yevgeny Liokumovich

Dans son article de 2014 *Slicing a 2-sphère*, Yevgeny Liokumovich tente de séparer la 2-sphère en zones d'aires maximales, avec des lacets de longueurs minimales. Par ailleurs, il décrit comment envoyer une sphère dans un arbre trivalent, de telle sorte que les pré-images des sommets trivalents soient des Θ -filets de longueur contrôlée. Nous rapportons ici quelques résultats qui nous semblent pouvoir éclairer notre recherche à venir sur les filets.

Il y a une obstruction à la division d'une 2-sphère M en deux hémisphères d'aires grandes par une courbe simple et fermée petite. En effet, si M est une pieuvre aux tentacules suffisamment minces et longues, alors pour tout $r > \frac{1}{3}$, la longueur de la courbe fermée simple la plus courte subdivisant M en deux régions d'aire $\geq r|M|$ peut être arbitrairement grande. Alexander Nabutovsky pose la question suivante : quelle est la valeur maximale de $r \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ telle que pour un certains $c(r)$, chaque 2-sphère riemannienne d'aire 1 peut être subdivisée en deux disques d'aire $\geq r$ par une simple courbe fermée de longueur $\leq c(r)$?¹ Un premier résultat apporte une réponse à cette question.

Theorème 5.1 (*Slicing a 2-sphère*, Theorem 1, page 2)

Il existe une simple courbe fermée γ de longueur inférieure à $26\sqrt{|M|}$ qui subdivise M en deux sous-disques d'aire supérieure à $\frac{1}{3}|M|$.

Theorème 5.2 (*Slicing a 2-sphère*, Theorem 2, page 2)

Il existe une application f de M dans un arbre trivalent T , telle que les fibres de f ont une longueur $\leq 26\sqrt{|M|}$ et une topologie contrôlée : la pré-image de chaque point intérieur est une simple courbe fermée, la pré-image de chaque sommet terminal est un point et la pré-image de chaque sommet de degré 3 est homéomorphe au Θ -graphe.

Theorème 5.3 (*Slicing a 2-sphère*, Theorem 3, page 2)

Il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont les fibres ont une longueur qui n'excède pas $52\sqrt{|M|}$.

Définition 5.1 (*Slicing a 2-sphère*, Definition 9, page 8)

Une application f de M_k vers un arbre trivalent T est appelée une T -application si la topologie des fibres de f est contrôlée dans le sens suivant : la pré-image de tout point à l'intérieur d'une arête de T est un cercle, il existe k sommets terminaux $x_k \in T$, tels que $f^{-1}(x_k)$ est une composante connexe de ∂M_k , la pré-image des autres points terminaux de T sont des points et la pré-image d'un sommet trivalent de T est homéomorphe au θ -graphe.

1. Pour $r = \frac{1}{4}$, Panos Papasoglu a trouvé $c(r) = 2\sqrt{3}$ (*Cheeger constants of surfaces and isoperimetric inequalities*, 2009).

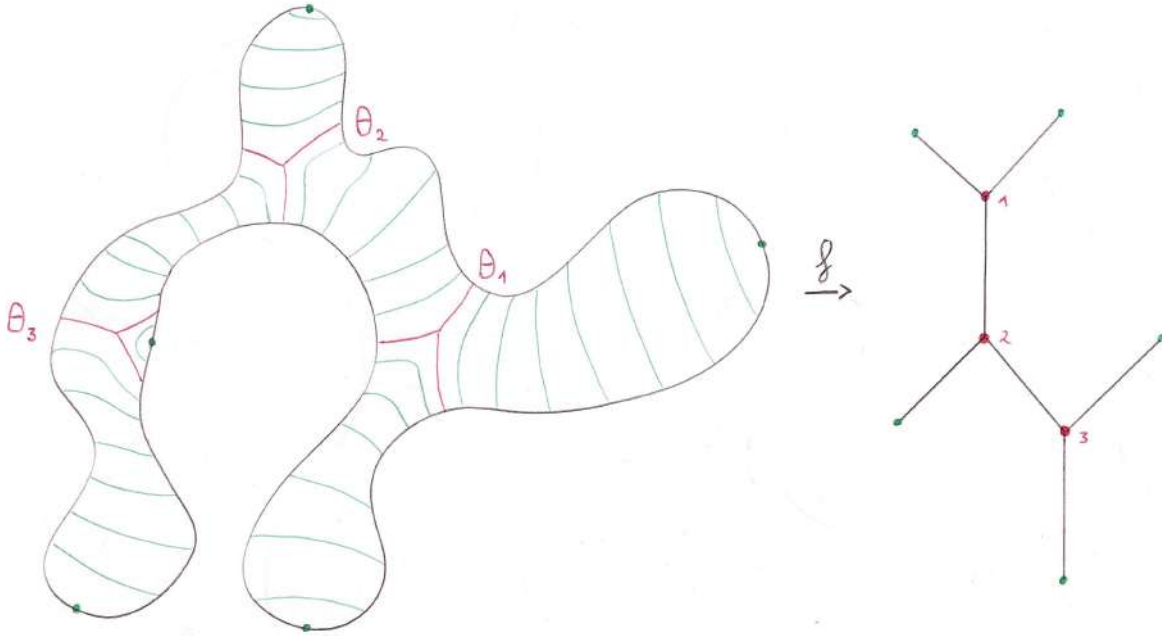


FIGURE 5.1 – T -application vers un arbre trivalent à 8 sommets, dont 5 points terminaux.

Remarque 5.1. Le balayage du pantalon que nous décrivons dans la partie 4 peut être décrit comme les niveaux d'une T -application vers un tripode, où les 3 points terminaux ont pour pré-images les 3 composantes de bord du pantalon. La pré-image du sommet trivalent est un Θ -filet.

Theorème 5.4 (*Slicing a 2-sphère*, Theorem 10, page 8)

Pour $r \in (0, \frac{1}{4}]$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une T -application f de M_p , $p \geq 0$, telle que chaque fibre de f a une longueur inférieure à $\frac{c(r)}{1-\sqrt{1-r}} + |\partial M_p| + \epsilon$.

Lemme 5.1 (*Slicing a 2-sphère*, Lemma 11, page 9)

Soit A_1 et A_2 deux sous-variétés lisses fermées (avec frontière) de M_p , telles que $\alpha = A_1 \cap A_2$ est un arc connexe. Soit c_i la composante connexe de ∂_i qui contient α . Supposons que $|c_1 \cup c_2| < L$ et que chaque A_i admet une T -application avec des fibres de longueur $< L$, alors $A_1 \cup A_2$ admet une T -application avec des fibres de longueur $\leq L$.

Lemme 5.2 (*Slicing a 2-sphère*, Lemma 12, page 9)

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $l > 0$ tel que pour tout disque $D \subset M_p$ avec $|\partial D| \leq l$, il existe un difféomorphisme f de D vers le disque fermé standard $D_{st} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ tel que la longueur de chaque pré-image $f^{-1}(\{x^2 + y^2 = cte\})$ n'excède pas $(1 + \epsilon)|\partial D|$.

Lemme 5.3 (*Slicing a 2-sphère*, Lemma 13, page 10)

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout disque $D \subset M_p$ avec $|D| \leq A$, il existe une T -application f de D avec des fibres plus courtes que $|\partial D| + \epsilon$.

Bibliographie

- Ian Adelstein, *Minimizing geodesic nets and critical points of distance*, Differential Geometry and its Applications 2019.
- Tobias Colding et William Minicozzi, *Min-max for sweepouts by curves*, 2007.
- Christopher Croke, *Poincaré's problem on the shortest closed geodesic on a convex hypersurface*, Journal of Differential Geometry **17**, 1982.
- Joël Hass et Frank Morgan, *Geodesic nets on the 2-sphere*, Proceedings of the American Mathematical Society **124**(12), 1996.
- Yevgeny Liokumovich, *Slicing a 2-sphere*, Journal of Topology and Analysis **6**(4), 2014.
- Lazar Lusternik et Lev Schnirelman, *Sur le probleme de trois géodesiques fermées sur les surfaces de genre 0*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **189**, 1929.
- Frank Morgan, *Soap bubbles in \mathbb{R}^2 and in surfaces*, Pacific Journal of Mathematics **165**, 1994.
- Alexander Nabutovsky et Fabian Parsch, *Geodesic nets : some examples and open problems*, Experimental Mathematics, 2020.
- Panos Papasoglu, *Cheeger constants of surfaces and isoperimetric inequalities*, Transactions of the American Mathematical Society **361**(10), 2009.
- Tristan Rivière, *Minmax Methods for Geodesics and Minimal Surfaces*, Powerpoint.
- Tristan Rivière, *Méthodes de min-max et la Conjecture de Willmore*, Séminaire Bourbaki **1080**, 2014.