



UNIVERSITÉ DE NANTES

S T A G E

MASTER 2

Mathématiques fondamentales et appliquées

Eléments spectraux sur le laplacien magnétique

présenté et soutenue par

Khaled ABOU ALFA

Encadrant : Frédéric HÉRAU

soutenue le 06 juillet 2020

Introduction

Le but de mon stage (en termes de physique) est d'abord de démontrer comment les électrons sont distribués sur une plaque métallique sous l'influence d'un champ magnétique dirigé vers cette plaque. En effet, l'inclusion d'un champ magnétique sur une plaque métallique localise ces électrons à la frontière. En particulier, pour un grand champ magnétique les électrons se localisent, exactement, sur les parties de la frontière où la courbure est maximal.

Dans mon stage, je vais étudier les premiers éléments d'analyse spectrale du Laplacien magnétique, dans un domaine borné, présentés dans le livre de Fournais et Helffer, "Spectral methods in surface superconductivity" [3].

L'objet d'étude dans ce rapport est un opérateur magnétique de Schrödinger avec des conditions aux bords de Neumann dans un domaine borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On va trouver une description précise des valeurs propres près du bas du spectre et de la localisation des fonctions propres associés. En particulier, les estimations d'Agmon sert à démontrer la localisation des fonctions propres près de la frontière.

Des nombreux références sur cette problématique peuvent être trouvées dans [3] et [5]. D'abord, on peut consulter les travaux de Fournais et Helffer [3] concernant l'analyse linéaire de l'opérateur de Schrödinger magnétique qui a été discuté, selon les différentes formes géométriques du domaine dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , des asymptotiques de l'énergie de l'état fondamental, sa monotonie pour un grand champ magnétique et la localisation des fonctions propres, ainsi l'introduction aux méthodes semi-classiques pour l'opérateur Schrödinger à grand potentiel électrique. De plus on peut consulter les travaux de Jean-Philippe Miqueu [5] concernant la localisation des fonctions propres et les estimations d'Agmon du Laplacien magnétique avec annulation locale du champ.

Le chapitre 1, annonce une introduction de la théorie spectrale de l'opérateur Schrödinger à champ magnétique concernant les extensions auto-adjointes, le bas du spectre et sa dépendance avec le champ magnétique.

Le chapitre 2, contient une analyse des problèmes unidimensionnels qui sont fondamentaux pour comprendre l'analyse spectral dans les situations de dimension supérieures. On étudie dans ce chapitre des familles d'opérateurs modèles à paramètres sur des intervalles réels, la variation du bas du spectre de ces opérateurs en fonction du paramètres, ainsi les fonctions propres associés et la formule de Feynman-Hellmann.

Le chapitre 3, présente le cas où le domaine est le disque unité, cela jouera un rôle de base dans l'analyse des effets de courbure. On étudie dans ce chapitre un modèle perturbé qui sera l'ingrédient principal pour obtenir l'asymptotique des valeurs propres pour le disque et par suite pour obtenir l'asymptotique des valeurs propres pour les domaines à courbure constante.

Dans le chapitre 4, on va présenter des méthodes qui permettent d'arriver à l'asymptotique à deux termes de l'énergie de l'état fondamental dans le cas bidimensionnel et à la propriété de localisation de l'état fondamental.

Table des matières

1	Analyse spectral des opérateurs de Schrödinger	9
1.1	L'opérateur Schrödinger magnétique	9
1.2	Les réalisations Dirichlet et Neumann	11
1.2.1	La réalisation Dirichlet	11
1.2.2	La réalisation Neumann	12
1.3	Opérateur Schrödinger magnétique sur l'espace \mathbb{R}^n tout entier	14
1.4	Caractérisation variationnelle pour l'opérateur Schrödinger magnétique	17
1.5	Diamagnétisme	18
2	Etude d'opérateur de Schrödinger avec des potentiels singuliers en dimension	23
1	Oscillateur Harmonique sur \mathbb{R}	23
2.1	Oscillateur Harmonique sur \mathbb{R}	23
2.2	Oscillateur harmonique sur un demi axe	24
2.2.1	Propriétés élémentaire de $\mathfrak{h}^{N,\xi}$	24
2.2.2	Variation de μ et formule de Feynman-Hellmann	28
2.2.3	Formules pour les moments	29
3	Modèle à champ constant en dimension 2 sur le disque	31
3.1	Introduction	31
3.2	Modèle perturbé	31
3.3	Asymptotique de l'énergie de l'état fondamental pour le disque	38
4	Asymptotique à grand champ de l'opérateur de Schrödinger magnétique :	39
	Le cas de la dimension 2	39
4.1	Résultat principal	39
4.2	Asymptotique de l'énergie de l'état fondamental	40
4.2.1	Preuve du théorème (4.1.1)	40
4.2.2	Les estimations d'Agmon	49
4.3	Champ magnétique constant	53
A	Changement de coordonnées au voisinage du bord en dimension 2	57

Chapitre 0

Rappels sur le bas du spectre d'un opérateur auto-adjoint

Dans ce qui suit \mathcal{H} désignera un espace de Hilbert . Si \mathcal{P} est un opérateur auto-adjoint , alors on rappelle l'ensemble résolvante de \mathcal{P} , $\rho(\mathcal{P})$, défini par

$$\rho(\mathcal{P}) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{P} - \lambda \text{ est inversible} \} .$$

Le spectre de \mathcal{P} , $\sigma(\mathcal{P})$, est donné par

$$\sigma(\mathcal{P}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{P}) .$$

On appelle λ une valeur propre de \mathcal{P} , s'il existe $u \in \text{Dom}(\mathcal{P})$, non-nul, tel que $\mathcal{P}u = \lambda u$.

La multiplicité de λ est la dimension de $\ker(\mathcal{P} - \lambda)$.

Le spectre discret de \mathcal{P} , $\sigma_d(\mathcal{P})$, est un sous-ensemble du spectre constitué des valeurs propres de multiplicité finie qui sont des points isolés de $\sigma(\mathcal{P})$.

On définit le spectre essentiel de \mathcal{P} , $\sigma_{ess}(\mathcal{P})$, par

$$\sigma_{ess}(\mathcal{P}) := \sigma(\mathcal{P}) \setminus \sigma_d(\mathcal{P}) .$$

Le bas du spectre d'un opérateur \mathcal{P} est défini comme la borne inférieure de $\sigma(\mathcal{P})$.

On rappelle ici des résultats sur un opérateur auto-adjoint permettant de faire des estimations sur le bas de son spectre. Ces estimations permettent également de prouver l'existence de valeurs propres pour un opérateur dans un interval donné.

Le principe Min-Max permet de relier les quotients de Rayleigh d'un opérateur auto-adjoint avec ses plus petites valeurs propres.

Proposition 0.0.1. (*Principe du Min-Max*) Soit \mathcal{P} un opérateur auto-adjoint borné inférieurement, q sa forme quadratique et $\text{Dom}(q)$ le domaine de sa forme. On définit le n -ième quotient de Rayleigh comme

$$\mu_n = \sup_{\psi_1, \dots, \psi_{n-1} \in \text{Dom}(q)} \inf_{\substack{\psi \in \text{vect}\{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}\}^\perp \\ \psi \in \text{Dom}(q) \setminus \{0\}}} \frac{q(\psi)}{\|\psi\|_{\mathcal{H}}^2} . \quad (1)$$

Alors à n fixé, on a l'alternative (a) ou (b) :

(a) L'opérateur \mathcal{P} a au moins n valeurs propres (comptées avec son multiplicité) sous son spectre essentiel et μ_n est la n -ième valeur propre comptée avec multiplicité,

(b) μ_n est le bas du spectre essentiel de \mathcal{P} et dans ce cas $\mu_n = \mu_{n+1} = \dots$ et \mathcal{P} a au plus $n - 1$ valeurs propres (comptées avec multiplicité) sous μ_n .

Démonstration. Voir par exemple [1]. □

Les fonctions qu' on a construire pour minimiser les quotients de Rayleigh seront appelés des " quasimodes ". Il est à remarquer que ces fonctions n'ont pas besoin d'être dans le domaine de l'opérateur, mais seulement dans son domaine de sa forme. Le théorème suivant donne une estimation plus précise si la fonction test est dans le domaine de l'opérateur.

Théorème 0.0.2. (*théorème spectral*) Soit \mathcal{P} un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et soit $Dom(\mathcal{P}) \subset \mathcal{H}$ son domaine. Soit $\sigma(\mathcal{P})$ son spectre. Alors on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \psi \in Dom(\mathcal{P}), \text{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{P})) \|\psi\|_{\mathcal{H}} \leq \|(\mathcal{P} - \lambda)\psi\|_{\mathcal{H}} . \quad (2)$$

Démonstration. Voir [1]. □

Proposition 0.0.3. Soit \mathcal{P} un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et soit $Dom(\mathcal{P}) \subset \mathcal{H}$ son domaine. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et un sous-espace $V \subset Dom(\mathcal{P})$ de dimension n tel que

$$\langle \mathcal{P}\phi, \phi \rangle \leq a |\phi|^2, \quad \forall \phi \in V,$$

est satisfait. Alors on a l'inégalité

$$\lambda_n(\mathcal{P}) \leq a .$$

Chapitre 1

Analyse spectral des opérateurs de Schrödinger

1.1 L'opérateur Schrödinger magnétique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide.

Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^∞ sur $\overline{\Omega}$ à valeur réel, qui correspond à ce que l'on appelle potentiel magnétique.

Soit $V \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ à valeur réel, qui correspond à ce que l'on appelle potentiel électrique.

Soit $B > 0$ un grand paramètre, jouant le rôle de la force du champ magnétique.

Soit $\beta := \text{rot}A$, qui correspond à ce que l'on appelle champ magnétique.

Pour $n = 2$, β définit une fonction, désignée par

$$x \mapsto \beta(x) = \text{rot}A = \partial_{x_1}A_2 - \partial_{x_2}A_1 .$$

Pour $n = 3$, le champ magnétique est identifié par un vecteur magnétique β :

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\beta_{23}, -\beta_{13}, \beta_{12}) = \text{rot}A ,$$

où

$$\text{rot}A = \nabla \wedge A .$$

On définit l'opérateur Schrödinger par :

$$\mathbf{P}_{BA,V,\Omega} = \sum_{j=1}^n (-i\partial_{x_j} + BA_j)^2 + V(x, B) .$$

Dans le cas où $B=1$, on peut écrire

$$\mathbf{P}_{A,\Omega} = \mathcal{P}_A^2 + V = -\nabla_A^2 + V = -\Delta_A + V ,$$

avec

$$\mathcal{P}_A = -i\nabla + A = -i\nabla_A ,$$

et

$$\nabla_A := \nabla + iA , \quad \Delta_A = (\nabla + iA)^2 .$$

On donne maintenant une propriété fondamentale qui décrit la dépendance du spectre de l'opérateur $\mathbf{P}_{A,V,\Omega}$ par rapport au potentiel magnétique A .

Proposition 1.1.1. (*Changement de jauge*) Soit $\phi \in H^2(\Omega)$. Alors les opérateurs $\mathbf{P}_{A+\nabla\phi, V, \Omega}$ et $\mathbf{P}_{A, V, \Omega}$ sont unitairement équivalents et donc ont le même spectre. De plus u est un vecteur propre pour $\mathbf{P}_{A, V, \Omega}$ si et seulement si $e^{i\phi}u$ est un vecteur propre pour $\mathbf{P}_{A+\nabla\phi, V, \Omega}$, et les valeurs propres associées sont identiques.

Démonstration. La preuve est assez simple si on montre que

$$e^{-i\phi}\mathcal{P}_A e^{i\phi} = \mathcal{P}_{A+\nabla\phi} . \quad (1.1)$$

En effet, pour tout $u \in \text{Dom}(\mathbf{P}_{A, V, \Omega})$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A(e^{i\phi}u) &= (-i\nabla + A)(e^{i\phi}u) \\ &= -i(i\nabla\phi e^{i\phi}u + e^{i\phi}\nabla u) + Ae^{i\phi}u \\ &= \nabla\phi e^{i\phi}u - ie^{i\phi}\nabla u + Ae^{i\phi}u \\ &= e^{i\phi}((-i\nabla + A + \nabla\phi)u) \\ &= e^{i\phi}\mathcal{P}_{A+\nabla\phi}u , \end{aligned}$$

ce qui prouve (1.1). D'où le résultat. \square

Ainsi si A_1 et A_2 sont deux potentiels magnétique réguliers vérifiant $\text{rot}A_1 = \text{rot}A_2$, avec un domaine Ω simplement connexe, on sait qu'il existe $\phi \in H^2_{\text{Loc}}(\Omega)$ tel que $A_1 - A_2 = \nabla\phi$, et les opérateurs $\mathbf{P}_{A_1, V, \Omega}$ et $\mathbf{P}_{A_2, V, \Omega}$ sont unitairement équivalents.

On peut résumer cette propriété dans l'assertion suivant : si Ω et V sont fixés, alors le spectre de l'opérateur $\mathbf{P}_{A, V, \Omega}$ ne dépend que du champ magnétique $\beta := \text{rot}A$. On remarque cependant que les vecteurs propres associés dépendent du choix du potentiel magnétique A .

Le lemme suivant donne un résultat très basique sera utilisé dans le chapitre 4.

Lemme 1.1.2. Soit $n \in \{2, 3\}$ et soit $\text{rot}A = \beta$. On rappelle les conventions que pour $n = 3$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est un vecteur et pour $n = 2$, $\beta = \beta_1$ est une fonction. Alors pour tout j , on a l'inégalité

$$\|\nabla_A u\|^2 = \langle \mathbf{P}_{A, \Omega} u, u \rangle \geq \int_{\Omega} \beta_j(x) |u(x)|^2 dx.$$

Démonstration. En utilisons la définition du $\text{rot}A$, c'est-à-dire, dans le cas où $n = 2$, $\text{rot}A = \partial_{x_1}A_2 - \partial_{x_2}A_1$, et dans le cas où $n = 3$, $\text{rot}A = \nabla \wedge A$, (\wedge est le produit vectoriel usuel dans \mathbb{R}^3), on remarque que

$$\beta_j(x) = -i[\partial_{x_k} + iA_k, \partial_{x_l} + iA_l],$$

pour un certain k et l .

Soit $X_l = \partial_{x_l} + iA_l$. Alors avec cette notation, on a

$$\begin{aligned} \beta_j(x)u(x)\overline{u(x)} &= -i[X_k, X_l]u(x)\overline{u(x)} \\ &= -i\overline{u(x)}(X_k X_l u)(x) + i\overline{u(x)}(X_l X_k u)(x). \end{aligned}$$

En intégrant sur Ω et en faisant une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \beta_j(x) |u(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} -i\overline{u(x)}(X_k X_l u)(x) + i\overline{u(x)}(X_l X_k u)(x) dx \\ &= i \langle X_k u, X_l u \rangle_{L^2} - i \langle X_l u, X_k u \rangle_{L^2} \\ &= 2\Im \langle X_l u, X_k u \rangle_{L^2} . \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
2 |\Im \langle X_l u, X_k u \rangle| &\leq 2 |\langle X_l u, X_k u \rangle| \\
&\leq 2 \|X_l u\| \cdot \|X_k u\| \\
&\leq \|X_l u\|^2 + \|X_k u\|^2 \\
&\leq \sum_{m=1}^n \|X_m u\|^2 \\
&= \|\nabla_A u\|^2,
\end{aligned}$$

ainsi,

$$\int_{\Omega} \beta_j(x) |u(x)|^2 dx \leq \|\nabla_A u\|^2.$$

□

1.2 Les réalisations Dirichlet et Neumann

Dans le cas où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , on considère les réalisations Dirichlet et Neumann. Les réalisations Dirichlet et Neumann pour le Laplacien magnétique peuvent être discuté en détails dans [4] (forme quadratique du Laplacien, extension Friedrichs et le théorème de Lax-Milgram).

1.2.1 La réalisation Dirichlet

La réalisation Dirichlet correspond à la prise de l'extention dite Friedrichs associé à la forme quadratique

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \ni u \mapsto Q_{A,V,\Omega}^D(u) := \int_{\Omega} |\nabla_A u(x)|^2 + V(x) |u(x)|^2 dx.$$

Cette forme quadratique est semi-bornée, en effet, pour $C = \|V\|_{\infty, \bar{\Omega}} + 1 > 0$, on a

$$\int_{\Omega} |\nabla_A u(x)|^2 + V(x) |u(x)|^2 dx \geq -C \|u\|_2^2, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Pour Ω est régulier borné, on pose :

$$\mathcal{V}^D(\Omega) := H_0^1(\Omega).$$

On considère la forme sesquilinéaire $q_{A,V,\Omega}^D$ définie sur $\mathcal{V}^D(\Omega) \times \mathcal{V}^D(\Omega)$ par

$$(u, v) \mapsto q_{A,V,\Omega}^D(u, v) = \int_{\Omega} (\overline{\nabla_A u(x)} \cdot \nabla_A v(x) + V(x) \overline{u(x)} v(x)) dx.$$

Alors d'après le lemme de Lax-Milgram, on peut associer un opérateur auto-adjoint $\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^D$ défini par

$$Dom(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^D) := \left\{ u \in \mathcal{V}^D(\Omega) : \begin{array}{l} \mathcal{V}^D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \\ v \mapsto q_{A,V,\Omega}^D(u, v) \end{array} \text{ est linéaire et continue pour la norme } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \right\},$$

et pour tout $u \in \text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^D)$ on a

$$\langle \mathbf{P}_{A,V,\Omega}^D u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = q_{A,V,\Omega}^D(u, v), \forall v \in \mathcal{V}^D(\Omega).$$

Le domaine de cet opérateur peut être caractérisé par

$$\text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}) = \{u \in \mathcal{V}^D(\Omega) : \mathbf{P}_{A,V,\Omega} u \in L^2(\Omega)\}. \quad (1.2)$$

En effet,

Soit $u \in \mathcal{V}^D(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}_{A,V,\Omega} u \in L^2(\Omega)$. En utilisons une simple intégration par partie, pour tout $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} q_{A,V,\Omega}^D(u, v) &= \int_{\Omega} (\overline{\nabla_A u(x)} \cdot \nabla_A v(x) + V(x) \overline{u(x)} v(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} ((-\Delta_A + V)u(x) v(x)) dx \\ &= \langle \mathbf{P}_{A,V,\Omega} u, v \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Alors en utilisons la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$|q_{A,V,\Omega}^D(u, v)| \leq \|\mathbf{P}_{A,V,\Omega} u\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2}, \forall v \in \mathcal{V}^D(\Omega),$$

ce qui montre que $u \in \text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^D)$.

Réciproquement, soit $u \in \text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^D)$, alors $\mathcal{V}^D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ se prolonge en une forme

$$v \mapsto q_{A,V,\Omega}^D(u, v)$$

linéaire continue sur $L^2(\Omega)$ et donc par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $\chi \in L^2(\Omega)$ tel que

$$q_{A,V,\Omega}^D(u) = \langle \chi, v \rangle_{L^2}, \forall v \in L^2(\Omega),$$

en particulier,

$$q_{A,V,\Omega}^D(u) = \langle \chi, v \rangle_{L^2}, \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

ce qui donne que

$$\mathbf{P}_{A,V,\Omega} u = \chi \in L^2(\Omega).$$

Ainsi (1.2) est prouvé.

Par conséquent, en utilisons un théorème de régularité (voir par exemple [4]), le domaine défini dans (1.2) peut être caractérisé, si Ω suppose être régulier, comme

$$\text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^D) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (1.3)$$

$H_0^1(\Omega)$ s'injecte de façon compact dans $L^2(\Omega)$, ce qui implique que le domaine de $\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^D$ s'injecte de façon compact dans $L^2(\Omega)$. Alors $\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^D$ est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte, et donc le spectre consistera en une suite non décroissante, discrets, de valeurs propres notées par $\lambda_j^D(A, V, \Omega)$.

1.2.2 La réalisation Neumann

La réalisation Neumann correspond à prendre d'abord l'extension Friedrichs de la forme quadratique

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \ni u \mapsto Q_{A,V,\Omega}^N(u) := \int_{\Omega} |\nabla_A u(x)|^2 + V(x) |u(x)|^2 dx.$$

Ici encore, l'existence de l'extension Friedrichs aura lieu, c'est-à-dire, s'il existe un $C > 0$ tel que

$$\int_{\Omega} |\nabla_A u(x)|^2 + V(x) |u(x)|^2 dx \geq -C \|u\|_2^2, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

L'ouvert Ω étant borné et régulier, le domaine de la forme est dans notre cas donné par

$$\mathcal{V}^N(\Omega) := H^1(\Omega).$$

Soit $q = q_{A,V,\Omega}^N$ la forme sésquilinéaire associée à $Q_{A,V,\Omega}$, définie par

$$\mathcal{V}^N(\Omega) \times \mathcal{V}^N(\Omega) \ni (u, v) \mapsto \int_{\Omega} (\overline{\nabla_A u(x)} \cdot \nabla_A v(x) + V(x) \overline{u(x)} v(x)) dx.$$

Alors d'après le lemme de Lax-Milgram, on associe un opérateur auto-adjoint $\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^N$ par

$$\text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^N) := \left\{ u \in \mathcal{V}^N(\Omega) : \begin{array}{l} \mathcal{V}^N(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \\ v \mapsto q_{A,V,\Omega}^N(u, v) \end{array} \text{ est linéaire et continue pour la norme } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \right\},$$

et pour tout $u \in \text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^N)$, on a

$$\langle \mathbf{P}_{A,V,\Omega}^N u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = q_{A,V,\Omega}^N(u, v), \forall v \in \mathcal{V}^N(\Omega).$$

On appelle réalisation de Neumann du Laplacien magnétique cette extension auto-adjointe $\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^N$ et condition de Neumann magnétique au bord la condition suivante :

$$(-i\nabla + A)u \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

pour toute fonction u appartenant au domaine de l'opérateur $\text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^N)$ où ν désigne la normale unitaire intérieure à $\partial\Omega$.

Le domaine de l'opérateur $\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^N$ est alors donné par :

$$\text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^N) = \{u \in L^2(\Omega), (-i\nabla + A)^2 u \in L^2(\Omega), (-i\nabla + A)u \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Lorsque Ω est borné et régulier, un théorème classique de régularité (voir [4]) donne :

$$\text{Dom}(\mathbf{P}_{A,V,\Omega}^N) = \{u \in H^2(\Omega) : \nu \cdot (-i\nabla + A)u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (1.4)$$

Les valeurs propres de l'opérateur Schrödinger de Neumann sera désigné par λ_j^N . De même, comme la réalisation Dirichlet, le spectre de cet opérateur consistera en une suite des valeurs propres non décroissante, discrets.

Remarque 1.2.1. Si on introduit le paramètre B , alors le domaine de l'opérateur Dirichlet est indépendant de B d'après (1.3).

D'autre part si nous voulons un domaine de l'opérateur de Neumann soit indépendant de B , d'après (1.4), nous devons imposer la condition

$$\nu(x) \cdot A(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega.$$

Remarque 1.2.2. *Étant donnée un potentiel vecteur $A = (A_1, A_2)$, à changement de jauge près, on peut choisir le potentiel suivant :*

$$\tilde{A}_1(x_1, x_2) = - \int_0^{x_2} \beta(x_1, y) dy, \quad \tilde{A}_2(x_1, x_2) = 0.$$

Il suffit de considérer le changement de jauge ϕ défini par :

$$\phi(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} A_2(x_1, y) dy + \int_0^{x_1} A_1(x_1, 0) dx,$$

qui vérifie

$$\tilde{A} = A - \nabla\phi.$$

En effet, remarquons que

$$\begin{aligned} A_1(x_1, x_2) - \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= A_1(x_1, x_2) - \int_0^{x_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(x_1, y) dy - A_1(x_1, 0) \\ &= A_1(x_1, x_2) - \int_0^{x_2} \beta(x_1, y) dy - A_1(x_1, x_2) + A_1(x_1, 0) - A_1(x_1, 0) \\ &= \tilde{A}_1(x_1, x_2), \end{aligned}$$

et

$$A_2(x_1, x_2) - \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \tilde{A}_2(x_1, x_2).$$

Ce choix vérifie bien la condition $\tilde{A} \cdot \nu = 0$ sur la frontière de l'ensemble $\{x_2 > 0\}$.

1.3 Opérateur Schrödinger magnétique sur l'espace \mathbb{R}^n tout entier

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, on considère la condition $V \geq -C$ pour un certain constant $C > 0$. Alors on peut considérer l'extension Friedrichs de la forme quadratique

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \ni u \mapsto Q_{A,V,\Omega} = \int_{\Omega} |\nabla_A u(x)|^2 + V(x) |u(x)|^2 dx.$$

Le domaine de forme est caractériser par

$$\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \nabla_A u \in L^2(\mathbb{R}^n), (V + C)^{\frac{1}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Le domaine de l'opérateur associé est alors donné par

$$Dom(\mathbf{P}_{A,V}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathbf{P}_{A,V} u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \quad (1.5)$$

Cette extension de Friedrichs est l'unique extension auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ à partir de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que son domaine satisfait (1.5). En effet, il suffit de prouver que l'opérateur $(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathbf{P}_{A,V})$ est essentiellement auto-adjoint. C'est le résultat du théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Supposons que $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{A,V} = (-i\nabla + A)^2 + V$ est borné inférieurement sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $V \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Alors \mathbf{P} est essentiellement auto-adjoint.*

Démonstration. \mathbf{P} est borné inférieurement, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\langle u, \mathbf{P}u \rangle_{L^2} \geq -C \|u\|_{L^2}^2, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ce qui donne que

$$\langle u, (\mathbf{P} + C + 1)u \rangle_{L^2} \geq \|u\|_{L^2}^2, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Donc on peut supposer sans perte de généralité en remplaçant \mathbf{P} par $\mathbf{P} + C + 1$, que

$$\langle u, \mathbf{P}u \rangle_{L^2} \geq \|u\|_{L^2}^2, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1.6)$$

On rappelle que $H_{comp}^1(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ avec support compact. Par la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $H_{comp}^1(\mathbb{R}^n)$, l'inégalité (1.6) nous donne

$$\langle u, \mathbf{P}u \rangle_{L^2} \geq \|u\|_{L^2}^2, \forall u \in H_{comp}^1(\mathbb{R}^n),$$

ce qui est équivalent à dire que

$$\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} V(x) |u(x)|^2 dx \geq \|u\|_{L^2}^2, \forall u \in H_{comp}^1(\mathbb{R}^n). \quad (1.7)$$

Selon le critère général de l'opérateur auto-adjoint, il suffit de vérifier que l'image de \mathbf{P} , $R(\mathbf{P})$, est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\langle f, \mathbf{P}u \rangle = 0, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1.8)$$

On va montrer que $f = 0$.

D'abord montrons que $f \in H_{Loc}^2(\mathbb{R}^n)$

Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, par une intégration par partie au sens de distribution, on a

$$\langle f, \mathbf{P}u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \mathbf{P}u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathbf{P}f(x)} u(x) dx.$$

Alors (1.8) nous donne que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathbf{P}f(x)} u(x) dx = 0, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ce qui implique que

$$\mathbf{P}f = ((-i\nabla + A)^2 + V)f = 0$$

au sens de distribution, et donc

$$(-i\nabla + A)^2 f = -Vf \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Alors, la théorie de régularité elliptique standard pour le Laplacien implique que $f \in H_{Loc}^2(\mathbb{R}^n)$.

On introduit maintenant, une famille de fonctions de troncature, χ_k , définit par

$$\chi_k(x) := \chi\left(\frac{x}{k}\right), \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

où $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfait $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi \equiv 1$ sur la boule unité $B(0, 1)$, et $\text{supp}\chi \subset B(0, 2)$.

Pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\nabla_A(\chi_k f)} \cdot \nabla_A(\chi_k u) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k^2(x) V(x) \overline{f(x)} u(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \langle f, \mathbf{P}(\chi_k^2 u) \rangle_{L^2} + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_k(x)|^2 \overline{f(x)} u(x) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k(x) \nabla \chi_k(x) \cdot [\overline{f(x)} \nabla_A u(x) - u(x) \overline{\nabla_A f(x)}] dx. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

En effet, soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, par une intégration par partie au sens de distribution, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\nabla_A(\chi_k f)} \cdot \nabla_A(\chi_k u) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k^2(x) V(x) \overline{f(x)} u(x) dx \\
&= \langle \nabla_A(\chi_k f), \nabla_A(\chi_k u) \rangle_{L^2} + \langle f, \chi_k^2 V u \rangle_{L^2} \\
&= \langle f, -\chi_k \Delta_A(\chi_k u) \rangle_{L^2} + \langle f, V(\chi_k^2 u) \rangle_{L^2} \\
&= \langle f, -\Delta_A(\chi_k^2 u) + V(\chi_k^2 u) \rangle_{L^2} + \langle f, \Delta_A(\chi_k^2 u) - \chi_k \Delta_A(\chi_k u) \rangle_{L^2} \\
&= \langle f, \mathbf{P}(\chi_k^2 u) \rangle_{L^2} + \langle f, \Delta_A(\chi_k^2 u) - \chi_k \Delta_A(\chi_k u) \rangle_{L^2}. \tag{1.10}
\end{aligned}$$

D'autre part, on utilisons le fait que

$$\nabla_A(u_1 u_2) = (\nabla u_1) u_2 + u_1 (\nabla_A u_2),$$

on peut facilement montrer l'égalité

$$\Delta_A(\chi_k^2 u) - \chi_k \Delta_A(\chi_k u) = \chi_k \nabla_A u \cdot \nabla \chi_k + u |\nabla \chi_k|^2 + \nabla_A \cdot ((\chi_k u) \nabla \chi_k).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\langle f, \Delta_A(\chi_k^2 u) - \chi_k \Delta_A(\chi_k u) \rangle_{L^2} \\
&= \langle f, u |\nabla \chi_k|^2 \rangle_{L^2} + \langle f, \chi_k \nabla_A u \cdot \nabla \chi_k \rangle_{L^2} + \langle f, \nabla_A \cdot ((\chi_k u) \nabla \chi_k) \rangle_{L^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} u(x) |\nabla \chi_k|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \chi_k \nabla_A u \cdot \nabla \chi_k dx - \langle \nabla_A f, \chi_k u (\nabla \chi_k) \rangle_{L^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_k(x)|^2 \overline{f(x)} u(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k(x) \nabla \chi_k(x) \cdot \overline{f(x)} \nabla_A u(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k(x) \nabla \chi_k(x) \cdot u(x) \overline{\nabla_A f(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_k(x)|^2 \overline{f(x)} u(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k(x) \nabla \chi_k(x) \cdot [\overline{f(x)} \nabla_A u(x) - u(x) \overline{\nabla_A f(x)}] dx \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Alors, (1.10) et (1.11) nous donne (1.9).

Mais f satisfait (1.8), alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\nabla_A(\chi_k f)} \cdot \nabla_A(\chi_k u) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k^2(x) V(x) \overline{f(x)} u(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_k(x)|^2 \overline{f(x)} u(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k(x) \nabla \chi_k(x) \cdot [\overline{f(x)} \nabla_A u(x) - u(x) \overline{\nabla_A f(x)}] dx, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Cette formule peut être étendue pour les fonctions $u \in H_{Loc}^1(\mathbb{R}^n)$, en particulier on peut prendre $u = f \in H_{Loc}^2(\mathbb{R}^n)$ et obtenir

$$\begin{aligned} & \|\nabla_A(\chi_k f)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k^2 V(x) |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_k(x)|^2 |f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k(x) \nabla \chi_k(x) \cdot [\overline{f(x)} \nabla_A f(x) - f(x) \overline{\nabla_A f(x)}] dx, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_k(x)|^2 |f(x)|^2 dx + 2i \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k(x) \nabla \chi_k(x) \cdot \Im\{\overline{f(x)} \nabla_A f(x)\} dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \|\nabla_A(\chi_k f)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k^2 V(x) |f(x)|^2 dx \\ &= \Re\{\|\nabla_A(\chi_k f)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_k^2 V(x) |f(x)|^2 dx\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_k(x)|^2 |f(x)|^2 dx. \end{aligned} \tag{1.12}$$

En utilisant (1.7) pour $\chi_k f \in H_{comp}^1(\mathbb{R}^n)$ et (1.12), on obtient

$$\begin{aligned} \|\chi_k f\|_{L^2}^2 &\leq \|\nabla_A(\chi_k f)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} V(x) |\chi_k f|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_k(x)|^2 |f(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

et donc faisons $k \rightarrow +\infty$, et en utilisant le théorème de convergence dominée on obtient

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 0$$

et donc $f = 0$. Ce qui termine la preuve. \square

1.4 Caractérisation variationnelle pour l'opérateur Schrödinger magnétique

En utilisant la caractérisation Min-Max (voir chapitre 0), l'infimum du spectre de $\mathbf{P}_{BA,V,\Omega}$ est donné par

$$\inf(\sigma(\mathbf{P}_{BA,V,\Omega})) = \inf_{u \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} \frac{Q_{BA,V,\Omega}(u)}{\|u\|^2}, \tag{1.13}$$

où \mathcal{V} désigne le domaine de la forme quadratique $Q_{BA,V,\Omega}$.

Comme le spectre est la réunion disjointe du spectre discret et du spectre essentielle

$$\sigma(\mathbf{P}_{BA,V,\Omega}) = \sigma_d(\mathbf{P}_{BA,V,\Omega}) \cup \sigma_{ess}(\mathbf{P}_{BA,V,\Omega}),$$

alors l'infimum du spectre peut être une valeur propre ou un élément du spectre essentielle.

Dans le cas où l'opérateur est à résolvante compact, c'est-à-dire, le domaine \mathcal{V} s'injecte de façon compact dans $L^2(\Omega)$, le spectre essentielle est vide. Alors l'infimum du spectre est une valeur propre. C'est en particulier le cas (pour les conditions au bords de Dirichlet et de Neumann) lorsque Ω est régulier et borné.

Le principe Min-Max permet de contrôler la continuité des valeurs propres par rapport aux paramètres.

Les deux lemmes suivantes sont des conséquences du principe Min-Max pour les réalisations Dirichlet et Neumann dans une domaine générale $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (Voir [3]).

Lemme 1.4.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, borné, régulier et connexe. Alors le n -ième valeur propre de la réalisation Neumann de $\mathbf{P}_{A,V} = -\Delta_A + V$ est inférieure ou égale du n -ième valeur propre de la réalisation Dirichlet.*

Lemme 1.4.2. *Soit $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ deux ouverts, bornés et réguliers. Alors n -ième valeur propre de la réalisation Dirichlet de l'opérateur Schrödinger dans Ω_2 est inférieure ou égale à n -ième valeur propre de la réalisation Dirichlet de l'opérateur Schrödinger dans Ω_1 .*

Ces deux lemmes seront utiliser dans le chapitre 2 pour analyser la réalisation Neumann magnétique dans le cas unidimensionnel.

On appelle énergie correspondante au quasimode $u \in \mathcal{V}$, le quotient

$$\frac{Q_{BA,V,\Omega}(u)}{\|u\|^2}.$$

On appelle énergie de l'état fondamental, l'infimum donné en (1.13), et l'état fondamental c'est le quasimode qui correspond à cette énergie.

1.5 Diamagnétisme

Dans cette section on va montrer que pour les opérateurs Schrödinger, l'inclusion d'un champ magnétique augmente l'énergie de l'état fondamental.

Sans perte de généralité fixons $B = 1$.

Proposition 1.5.1. *Supposons que $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\nabla f \in (L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n))^n$. Alors $\nabla|f| \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ et avec la notation*

$$\text{sign}z = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z} & , \text{pour } z \neq 0, \\ 0 & , \text{pour } z = 0, \end{cases}$$

on a

$$\nabla|f|(x) = \Re\{\text{sign}(f(x))\nabla f(x)\} \text{ pour presque partout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.14)$$

En particulier,

$$|\nabla |f|| \leq |\nabla f|,$$

presque partout dans \mathbb{R}^n .

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$, on définit $|z|_\epsilon$ par

$$|z|_\epsilon = \sqrt{|z|^2 + \epsilon^2} - \epsilon.$$

On observe que

$$0 \leq |z|_\epsilon \leq |z| \text{ et } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} |z|_\epsilon = |z|.$$

Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. on définit $|u|_\epsilon$ par

$$|u|_\epsilon(x) = |u(x)|_\epsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On a $|u|_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et

$$\nabla |u|_\epsilon = \frac{\Re(\bar{u}\nabla u)}{\sqrt{|u|^2 + \epsilon^2}}, \quad (1.15)$$

en effet, on a

$$|u|_\epsilon(x) = \sqrt{u\bar{u} + \epsilon^2} - \epsilon,$$

ce qui donne que pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} |u|_\epsilon &= \frac{\partial_{x_j}(u\bar{u})}{2\sqrt{u\bar{u} + \epsilon^2}} \\ &= \frac{(\partial_{x_j} u)\bar{u} + u(\partial_{x_j} \bar{u})}{2\sqrt{|u|^2 + \epsilon^2}} \\ &= \frac{\Re(\bar{u}\partial_{x_j} u)}{\sqrt{|u|^2 + \epsilon^2}}, \end{aligned}$$

ce qui prouve (1.15).

Maintenant soit $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\nabla f \in (L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n))^n$, et on définit f_δ comme la convolution

$$f_\delta = f * \rho_\delta,$$

où ρ_δ est une approximation standard de l'unité. Explicitement on prend un $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\rho \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1,$$

et on définit $\rho_\delta(x) := \delta^{-n} \rho(\frac{x}{\delta})$, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$.

Alors $f_\delta \rightarrow f$, $|f_\delta| \rightarrow |f|$ et $\nabla f_\delta \rightarrow \nabla f$ dans $L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ quand $\delta \rightarrow 0^+$.

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction test. On peut extraire une sous-suite $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (où $\delta_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$) telle que $f_{\delta_k}(x) \rightarrow f(x)$, pour presque partout $x \in \text{supp}\phi$. Pour simplifier les notations, nous omettons le k de la notation et écrivons $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ au lieu de $\lim_{k \rightarrow +\infty}$.

On a

- $(\nabla\phi)|f|_\epsilon \rightarrow (\nabla\phi)|f|$, presque partout dans \mathbb{R}^n ,
- $|(\nabla\phi)|f|_\epsilon| \leq |\nabla\phi||f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

alors par le théorème de convergence dominé,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\phi|f| dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\phi)|f|_\epsilon dx, \quad (1.16)$$

de même par le théorème de convergence dominé, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\phi|f|_\epsilon dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\phi)|f_\delta|_\epsilon dx. \quad (1.17)$$

En utilisant une intégration par partie et (1.15), on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\phi)|f_\delta|_\epsilon dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \phi \frac{\Re(\overline{f_\delta} \nabla f_\delta)}{\sqrt{|f_\delta|^2}} dx. \quad (1.18)$$

Alors (1.16),(1.17) et (1.18) assure que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\phi|f| dx = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \phi \frac{\Re(\overline{f_\delta} \nabla f_\delta)}{\sqrt{|f_\delta|^2}} dx. \quad (1.19)$$

De plus, on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \phi \frac{\Re(\overline{f_\delta} \nabla f_\delta)}{\sqrt{|f_\delta|^2}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \frac{\Re(\overline{f} \nabla f)}{\sqrt{|f|^2}} dx. \quad (1.20)$$

En effet, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi \Re \left(\frac{\overline{f_\delta} \nabla f_\delta}{\sqrt{|f_\delta|^2}} - \frac{\overline{f} \nabla f}{\sqrt{|f|^2}} \right) dx = I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \Re \left\{ \frac{\overline{f_\delta}}{\sqrt{|f_\delta|^2 + \epsilon^2}} (\nabla f_\delta - \nabla f) \right\} dx,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \Re \left\{ \left(\frac{\overline{f_\delta}}{\sqrt{|f_\delta|^2 + \epsilon^2}} - \frac{\overline{f}}{\sqrt{|f|^2 + \epsilon^2}} \right) \nabla f \right\} dx.$$

En remarquons que

$$\left| \frac{\overline{f_\delta}}{\sqrt{|f_\delta|^2 + \epsilon^2}} \right| \leq 1,$$

on obtient

$$|I_1| \leq \|\phi\|_\infty \|\nabla f_\delta - \nabla f\|_{L^1(\text{supp}\phi)},$$

et donc

$$I_1 \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+.$$

D'autre part

- $\phi \Re\left\{\left(\frac{\bar{f}_\delta}{\sqrt{|f_\delta|^2 + \epsilon^2}} - \frac{\bar{f}}{\sqrt{|f|^2 + \epsilon^2}}\right) \nabla f\right\} \rightarrow 0$ presque partout,
- $\left|\phi\left(\frac{\bar{f}_\delta}{\sqrt{|f_\delta|^2 + \epsilon^2}} - \frac{\bar{f}}{\sqrt{|f|^2 + \epsilon^2}}\right) \nabla f\right| \leq 2|\phi| |\nabla \phi| \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

alors par le théorème de convergence dominé

$$I_2 \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+.$$

Ainsi (1.20) est vérifié.

Alors (1.19) et (1.20) nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi |f| dx = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \phi \frac{\Re(\bar{f} \nabla f)}{\sqrt{|f|^2 + \epsilon^2}} dx.$$

De plus on a

- $\phi \Re\{\overline{f(x)}(|f(x)|^2 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \nabla f\} \rightarrow \phi \Re\{\text{sign} f(x) \cdot \nabla f(x)\}$,
- $\left\|\phi \frac{\Re(\bar{f} \nabla f)}{\sqrt{|f|^2 + \epsilon^2}}\right\| \leq |\phi| |\nabla f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

alors par le théorème de convergence dominé, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi |f| dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \phi \Re\{\overline{f(x)} \nabla f(x)\} dx,$$

c'est pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, ce qui prouve (1.14).

Par conséquent

$$|\nabla |f|| \leq |\nabla f|,$$

et

$$\nabla |f| \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n).$$

□

Théorème 1.5.2. (Inégalité diamagnétique) Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dans $(L^2_{Loc}(\mathbb{R}^n))^n$ et supposons que $f \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ est tel que $(-i\nabla + A)f \in (L^2_{Loc}(\mathbb{R}^n))^n$. Alors $|f| \in H^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ et

$$|\nabla |f|| \leq |(-i\nabla + A)f| \tag{1.21}$$

presque partout dans \mathbb{R}^n .

Démonstration. on a

$$A \in (L^2_{Loc}(\mathbb{R}^n))^n \text{ et } f \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}^n)$$

ce qui implique que

$$Af \in (L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n))^n,$$

mais $(\nabla + iA)f \in (L^2_{Loc}(\mathbb{R}^n))^n \subset (L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n))^n$, alors $\nabla A \in (L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n))^n$.

Par conséquent, on peut utiliser la proposition (1.5.1) pour conclure que (1.14) est valable pour f .

Puisque $\Re\{\text{sign}(f)iAf\} = 0$, on peut réécrire (1.14) comme

$$\nabla |f| = \Re\{\text{sign}(f)(\nabla + iA)f\},$$

et par conséquent, comme $|z| \geq |\Re(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a (1.21) qui se termine la preuve. □

En utilisant le théorème (1.5.2), on obtient par la caractérisation variationnelle de l'énergie de l'état fondamental (1.13),

$$\inf \sigma(\mathbf{P}_{A,\Omega}^N + V) \geq \inf \sigma(-\Delta_\Omega^N + V), \quad (1.22)$$

où $-\Delta_\Omega^N$ représente le Laplacien magnétique.

En effet, en utilisant (1.13), pour tout $f \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$, on a

$$\inf \sigma(-\Delta_\Omega^N + V) \leq \frac{Q_{V,\Omega}(|f|)}{\| |f| \|},$$

et d'après (1.21), on a

$$\frac{Q_{V,\Omega}(|f|)}{\| |f| \|} \leq \frac{Q_{A,V,\Omega}(f)}{\|f\|},$$

ce qui donne que

$$\inf \sigma(-\Delta_\Omega^N + V) \leq \frac{Q_{A,V,\Omega}(f)}{\|f\|}, \forall f \in H^1(\Omega) \setminus \{0\},$$

et donc le principe Min-Max (1.13), assure le résultat de (1.22).

Par conséquent, l'énergie de l'état fondamental augmente lorsqu'un champ magnétique est appliqué.

Chapitre 2

Etude d'opérateur de Schrödinger avec des potentiels singuliers en dimension 1

Des nombreux problèmes spectraux que nous verront après peuvent être complètement décrit en termes de problèmes unidimensionnels.

On étudie dans ce chapitre des familles d'opérateurs modèles à paramètres sur des intervalles réels.

2.1 Oscillateur Harmonique sur \mathbb{R}

En fait, le rôle principal sera joué par cet opérateur dans sa réalisation sur un demi-axe, mais avant d'analyser cela, on rappelle quelques résultats sur le cas sans frontière.

Pour $k \in \mathbb{N}$, et $I \subset \mathbb{R}$ un interval non-borné, on définit $B^k(I)$ par

$$B^k(I) := \{u \in L^2(I) : t^p u^{(q)} \in L^2(I), \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tel que } p + q \leq k\}. \quad (2.1)$$

L'oscillateur harmonique sur \mathbb{R} est défini comme l'opérateur

$$\mathfrak{h}_0 := -\frac{d^2}{dt^2} + t^2, \quad (2.2)$$

sur le domaine $Dom(\mathfrak{h}_0) = B^2(\mathbb{R})$. Cet opérateur est l'unique opérateur auto-adjoint associé à la forme quadratique sur $B^1(\mathbb{R})$:

$$B^1(\mathbb{R}) \ni u \mapsto \int_{\mathbb{R}} (|u'(t)|^2 + t^2 |u(t)|^2) dt. \quad (2.3)$$

Cet opérateur est positif à résolvante compacte et son spectre est constitué de valeurs propres simples :

$$\sigma(\mathfrak{h}_0) = \{(2j - 1), j \in \mathbb{N}^*\}. \quad (2.4)$$

De plus la base orthonormée correspond aux vecteurs propres $\{\varphi_j\}$ (associés aux valeurs propres $2j - 1, j \in \mathbb{N}^*$) sont générées à partir du Gaussien

$$\varphi_1(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (2.5)$$

à travers l'action de création

$$L = -\frac{d}{dt} + t,$$

par la formule :

$$\varphi_j = c_j L^{j-1} \varphi_1, \quad (2.6)$$

où $c_j \in \mathbb{R}$ une constante de normalisation.

2.2 Oscillateur harmonique sur un demi axe

Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on considère la réalisation de Neumann $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ associé à l'opérateur $-\frac{d^2}{dt^2} + (t + \xi)^2$, c'est-à-dire,

$$\mathfrak{h}^{N,\xi} := -\frac{d^2}{dt^2} + (t + \xi)^2$$

et

$$\text{Dom}(\mathfrak{h}^{N,\xi}) = \{u \in B^2(\mathbb{R}^+) : u'(0) = 0\}. \quad (2.7)$$

2.2.1 Propriétés élémentaire de $\mathfrak{h}^{N,\xi}$

On énonce des propriétés de l'opérateur $\mathfrak{h}^{N,\xi}$. La forme quadratique associée à $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ est définie par

$$q^{(N,\xi)}(u) := \int_0^{+\infty} |u'(t)|^2 + (t + \xi)^2 |u(t)|^2 dt, \quad (2.8)$$

sur le domaine de la forme $B^1(\mathbb{R}^+)$ défini en (2.1).

Puisque l'injection de $B^1(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ est compacte, on a l'opérateur $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ est à résolvante compacte. Puisqu'il est clairement positif, son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini.

On note $\mu_j(\xi)$ la j -ième valeur propre. On note parfois pour simplifier $\mu(\xi) = \mu_1(\xi)$ la première valeur propre de $\mathfrak{h}^{N,\xi}$.

Par le théorème de cauchy, les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$\begin{cases} -u''(t) + (t + \xi)^2 u(t) = \mu_j(\xi) u(t), \\ u'(0) = 0, \end{cases}$$

forment un espace vectoriel de dimension 1.

Les valeurs propres μ_j sont donc simples pour tout entier j et tout réel ξ . Si u est une fonction propre tel que $u(0) = 0$, alors par le théorème d'unicité de cauchy, u est nul. Donc les fonctions propres non-nuls, ne s'annule pas en 0.

Supposons que f est un état fondamental normalisé dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ pour $\mathfrak{h}^{N,\xi}$, c'est-à-dire la fonction propre associé à la plus petite valeur propre $\mu(\xi)$ de $\mathfrak{h}^{N,\xi}$, et donc $\mu(\xi) = q^{(N,\xi)}(f)$. Par le principe Min-Max (1.13),

$$\mu(\xi) = \inf_{u \in B^1 \setminus \{0\}} \frac{q^{(N,\xi)}(u)}{\|u\|_2^2},$$

ce qui donne que

$$\mu(\xi) \leq q^{(N,\xi)}(|f|).$$

D'autre part, en utilisant la proposition (1.5.1), on a l'inégalité

$$\| |f'| \|^2 \leq |f'|,$$

et donc

$$q^{(N,\xi)}(|f|) \leq q^{(N,\xi)}(f) = \mu(\xi).$$

Par conséquent,

$$\mu(\xi) = q^{(N,\xi)}(|f|),$$

c'est-à-dire, $|f|$ à une énergie inférieure.

Par conséquent, nous pouvons supposer que $f \geq 0$.

Supposons qu'il existe t_0 tel que $f(t_0) = 0$, mais $f \geq 0$, alors nous devons avoir $f'(t_0) = 0$, et donc par l'unicité de Cauchy $f = 0$, ce qui est une contradiction avec la condition normalisée de f . Nous voyons l'état fondamental sera positif.

Alors, on définit la fonction φ_ξ l'unique état fondamental normalisé dans L^2 , strictement positif, de $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ associé à $\mu(\xi)$.

Maintenant on va étudier des propriétés concernant la fonction

$$\xi \longmapsto \mu(\xi).$$

D'abord, la caractérisation Min-Max montre que c'est une fonction continue. De plus l'opérateur $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ est clairement positif et donc $\mu(\xi) > 0$.

Proposition 2.2.1. *on a*

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mu(\xi) = +\infty, \quad (2.9)$$

et

$$\mu(0) = 1. \quad (2.10)$$

Démonstration. En remarquons que

$$\begin{aligned} \mu(\xi) &= \int_0^{+\infty} |\varphi'_\xi|^2 dt + \int_0^{+\infty} (t + \xi)^2 |\varphi_\xi|^2 dt \\ &\geq \xi^2 \int_0^{+\infty} |\varphi_\xi|^2 dt \\ &= \xi^2, \quad \forall \xi \geq 0, \end{aligned}$$

on obtient immédiatement (2.9).

En remarque qu'une fonction propre paire de $-\frac{d^2}{dt^2} + t^2$ dans \mathbb{R} vérifie la condition de Neumann en 0, et peut donc se restreindre en fonction propre de $-\frac{d^2}{dt^2} + t^2$ dans \mathbb{R}^+ . Réciproquement, une fonction propre de $-\frac{d^2}{dt^2} + t^2$ dans \mathbb{R}^+ peut se prolonger en une fonction propre paire de $-\frac{d^2}{dt^2} + t^2$ dans \mathbb{R} . Alors la plus basse valeur propre de la réalisation Neumann $-\frac{d^2}{dt^2} + t^2$ dans \mathbb{R}^+ est la même que la valeur propre la plus basse de $-\frac{d^2}{dt^2} + t^2$ dans \mathbb{R} qui est 1 (d'après (2.4)). Ainsi $\mu(0) = 1$, ce qui termine la preuve. \square

Proposition 2.2.2. *Au voisinage de $-\infty$, on a*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mu(\xi) = 1. \quad (2.11)$$

Démonstration. Montrons d'abord la borne supérieure de (2.11). On va choisir comme quasimode, la fonction

$$u : t \longmapsto e^{-\frac{1}{2}(t+\xi)^2},$$

qui se trouve dans le domaine de forme $B^1(\mathbb{R}^+)$, et on a

$$\begin{aligned} q^{(N,\xi)}(u) &= \int_0^{+\infty} \left| -(t+\xi)e^{-\frac{1}{2}(t+\xi)^2} \right|^2 + (t+\xi)^2 \left| e^{-\frac{1}{2}(t+\xi)^2} \right|^2 dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} (t+\xi) e^{-\frac{1}{2}(t+\xi)^2} dt \\ &= e^{-\xi^2}, \end{aligned}$$

de plus, pour $\xi \leq 0$, on a

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_0^{+\infty} e^{-(t+\xi)^2} dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

alors en utilisant le principe Min-Max on obtient

$$\mu(\xi) \leq \frac{q^{(N,\xi)}(u)}{\|u\|^2} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}, \forall \xi < 0,$$

et donc

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mu(\xi) \leq 1.$$

Pour la borne inférieure, on va montrer d'abord la décroissance uniforme de φ_ξ au voisinage de 0 quand $\xi \rightarrow -\infty$.

Soit $\lambda(\xi)$ la plus petite valeur propre de la réalisation Dirichlet $\mathfrak{h}^{D,\xi}$ qui vérifie en utilisant le lemme (1.4.1) que

$$\mu(\xi) \leq \lambda(\xi) \leq \lambda(0) = 3.$$

Pour $R > 0, \xi < -R$, on a

$$(R+\xi)^2 \leq (t+\xi)^2, \forall t \leq R,$$

et donc

$$(R+\xi)^2 \int_0^R |\varphi_\xi|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} (t+\xi)^2 |\varphi_\xi|^2 dt,$$

ce qui donne que

$$(R+\xi)^2 \int_0^R |\varphi_\xi|^2 dt \leq q^{(N,\xi)}(\varphi_\xi) = \mu(\xi) \leq 3,$$

et donc

$$\int_0^R |\varphi_\xi|^2 dt \leq \frac{3}{(R+\xi)^2}, \forall \xi < -R. \quad (2.12)$$

On va choisir maintenant comme quasimode pour l'oscillateur harmonique \mathfrak{h}_0 , la fonction

$$v : x \mapsto \chi(x-\xi)\varphi_\xi(x-\xi),$$

où $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, a support dans $]0, +\infty[$ tel que $\chi \equiv 1$ sur $[1, +\infty[$.

La plus petite valeur propre de \mathfrak{h}_0 est 1, et donc en appliquant le principe Min-Max (1.13), on obtient

$$1 \leq \frac{q_0(v)}{\|v\|_2^2}, \quad (2.13)$$

où q_0 est la forme quadratique associé à \mathfrak{h}_0 .

on a

$$q_0(v) = \int_{\mathbb{R}} |v'(t)|^2 + t^2 |v(t)|^2 dt \quad (2.14)$$

$$= \int_{\xi}^{\xi+1} |v'(t)|^2 + t^2 |v(t)|^2 dt + \int_1^{+\infty} |v'(t)|^2 + t^2 |v(t)|^2 dt. \quad (2.15)$$

En combinant (2.12), (2.13) et (2.15), on obtient l'existence de $C > 0$ tel que

$$1 \leq \mu(\xi) + \frac{C}{|\xi|}, \forall \xi \leq -C,$$

et donc

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mu(\xi) \geq 1.$$

Par conséquent

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mu(\xi) = 1.$$

□

Corollaire 2.2.3. *Il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}^-$ tel que*

$$\mu(\xi_0) = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \mu(\xi) < 1. \quad (2.16)$$

De plus, la deuxième valeur propre $\mu_2(\xi)$ satisfait

$$\mu_2(\xi) \geq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Démonstration. En utilisons d'abord l'identité (2.20) qu'on va démontrer après

$$\mu'(\xi) = [\mu(\xi) - \xi^2] \varphi_{\xi}(0)^2,$$

on obtient

$$\mu'(0) = \varphi_0(0)^2 > 0.$$

Mais

$$\mu(0) = 1 \text{ et } \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mu(\xi) = 1,$$

et alors il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}^-$ tel que

$$\mu(\xi_0) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mu(\xi) < 1.$$

Soit u_2 une fonction associé à $\mu_2(\xi)$, u_2 , qui est orthogonale à la première fonction propre φ_{ξ} qui est strictement positif, admet aux moins un zéro $x_2(\xi)$ dans \mathbb{R}_+ . Donc la restriction de u_2 sur $]x_2(\xi), +\infty[$ est une fonction propre de la réalisation Dirichlet de l'oscillateur harmonique

$$-\frac{d^2}{dt^2} + (t + \xi)^2, \text{ dans }]x_2(\xi), +\infty[.$$

Donc $\mu_2(\xi)$ est plus grand que la valeur propre la plus basse de ce problème. Par la monotonie du problème de Dirichlet (voir le lemme (1.4.2)), on obtient que $\mu_2(\xi)$ est supérieure à la valeur propre la plus basse de l'oscillateur harmonique sur \mathbb{R} , qui est égale à 1. Ce qui prouve (2.17). □

2.2.2 Variation de μ et formule de Feynman-Hellmann

On considère maintenant plus en détail les propriétés de $\xi \mapsto \mu(\xi)$ et $\varphi_\xi(\cdot)$, qui sont liées à la formule de Feynman-Hellmann.

Proposition 2.2.4. (*Feynman-Hellmann*) *On a la formule suivante*

$$\mu'(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} (t + \xi) |\varphi_\xi(t)|^2 dt. \quad (2.18)$$

Démonstration. On différencie l'identité suivant par rapport à ξ :

$$\mathfrak{h}^N(\xi)\varphi(\cdot; \xi) = \mu(\xi)\varphi(\cdot; \xi),$$

on obtient

$$[\partial_\xi \mathfrak{h}(\xi) - \mu'(\xi)]\varphi(\cdot; \xi) + [\mathfrak{h}^N(\xi) - \mu(\xi)](\partial_\xi \varphi)(\cdot; \xi) = 0. \quad (2.19)$$

En prenant le produit scalaire avec φ_ξ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, on obtient

$$\langle \partial_\xi \mathfrak{h}^N(\xi)\varphi_\xi, \varphi_\xi \rangle - \mu'(\xi) + \langle (\partial_\xi \varphi)(\cdot; \xi), (\mathfrak{h}^N(\xi) - \mu(\xi))\varphi_\xi \rangle = 0,$$

ce qui donne

$$\mu'(\xi) = \langle \partial_\xi \mathfrak{h}^N(\xi)\varphi_\xi, \varphi_\xi \rangle.$$

Mais

$$\partial_\xi \mathfrak{h}^N(\xi) = 2(t + \xi),$$

alors

$$\mu'(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} (t + \xi) |\varphi_\xi(t)|^2 dt.$$

□

Proposition 2.2.5. *La valeur propre μ admet un minimum Θ_0 , qui est atteint en un point $\xi_0 < 0$, et satisfait $\Theta_0 \in]0, 1[$. De plus, ce minimum est non dégénéré et μ est strictement décroissant sur $] - \infty, \xi_0]$ de 1 à Θ_0 et strictement croissant sur $[\xi_0, +\infty[$ de Θ_0 à $+\infty$.*

Démonstration. Établissons d'abord l'inégalité suivante

$$\mu'(\xi) = [\mu(\xi) - \xi^2]\varphi_\xi(0)^2. \quad (2.20)$$

Pour obtenir (2.20), nous utilisons la formule de Feynman-Hellmann (2.18)

$$\mu'(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} (t + \xi) |\varphi_\xi(t)|^2 dt.$$

En procède en écrivant $2(t + \xi) = \frac{d}{dt}(t + \xi)^2$ et en intégrant par partie, cela donne

$$\mu'(\xi) = -2 \int_0^{+\infty} (t + \xi)^2 \varphi_\xi(t) \varphi'_\xi(t) dt - \xi^2 \varphi_\xi(0). \quad (2.21)$$

Mais

$$\mathfrak{h}^{N,\xi}(\varphi_\xi) = \mu(\xi)\varphi_\xi(\xi),$$

ce qui donne que

$$-(t + \xi)^2 \varphi_\xi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \varphi_\xi(t) - \mu(\xi) \varphi_\xi(t).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mu'(\xi) &= -2 \int_0^{+\infty} \mu(\xi) \varphi_\xi(t) \varphi_\xi'(t) dt - \xi^2 \varphi_\xi(0) \\ &= -\mu(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (\varphi_\xi(t))^2 dt - \xi^2 \varphi_\xi(0) \\ &= \mu(\xi) \varphi_\xi(0)^2 - \xi^2 \varphi_\xi(0)^2 \\ &= (\mu(\xi) - \xi^2) \varphi_\xi(0)^2. \end{aligned}$$

Ce qui prouve (2.20).

Dérivons (2.20) par rapport à ξ , on obtient

$$\mu''(\xi) = (\mu'(\xi) - 2\xi) \varphi_\xi(0)^2 + (\mu(\xi) - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \varphi_\xi(0)^2.$$

Soit ξ_c un point critique de $\mu(\xi)$, c'est-à-dire, $\mu'(\xi_c) = 0$, alors

$$\mu(\xi) = \xi^2$$

et

$$\mu''(\xi_c) = -2\xi_c \varphi_{\xi_c}(0)^2 \neq 0. \quad (2.22)$$

Donc tout point critique négatif sera un minimum local. Ainsi, il peut y avoir au plus un point critique négatif, car si on suppose que μ admet deux points critique négatif $\xi_1 < \xi_2 < 0$, alors on obtient l'existence d'un $\xi_3 \in]\xi_1, \xi_2[$ tel que μ admet un maximum local en ξ_3 ce qui est une contradiction avec (2.22) car $\xi_3 < 0$. L'existence d'une point critique négative découle du corollaire (2.2.3).

Supposons que μ admet un point critique positif ξ_1 , alors d'après (2.22) ξ_1 est un maximum local, mais $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mu(\xi) = +\infty$, alors il existe $\xi_2 > \xi_1$ tel que μ possède un minimum local en ξ_2 ce qui est impossible d'après (2.22).

Par conséquent, μ admet un unique point critique $\xi_0 < 0$ qui est un minimum globale.

On pose

$$\Theta_0 := \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \mu(\xi) = \mu(\xi_0) < 1. \quad (2.23)$$

De plus, par (2.20)

$$\Theta_0 = \xi_0^2. \quad (2.24)$$

Ce qui termine la preuve. □

2.2.3 Formules pour les moments

On fixe

$$u_0 = \varphi_{\xi_0}, \quad (2.25)$$

et on introduire la constante

$$\mathcal{C}_1 = \frac{u_0^2(0)}{3}. \quad (2.26)$$

La formule suivante (2.27) est simplement une reformulation de (2.22) :

$$\frac{\mu''(\xi_0)}{2} = 3\mathcal{C}_1\sqrt{\Theta_0}. \quad (2.27)$$

On définit M_k le k -ième moment, centré en $-\xi_0$, de la mesure $u_0^2(t)dt$:

$$M_k = \int_{\mathbb{R}^+} (t + \xi_0)^k u_0^2(t) dt. \quad (2.28)$$

Ces moments peuvent être calculés comme suit

Lemme 2.2.6. *Les premiers moments peuvent être exprimés par les formules suivantes :*

$$M_0 = 1, M_1 = 0, M_2 = \frac{\Theta_0}{2}, M_3 = \frac{u_0^2(0)}{6} > 0. \quad (2.29)$$

Démonstration. Voir [3] (page 38). □

Proposition 2.2.7. *on a $\Theta_0 > \frac{1}{2}$.*

Démonstration. En utilisant la borne inférieure de l'oscillateur harmonique sur le demi-axe,

$$1 < \int_0^{+\infty} |u_0'(t)|^2 + t^2 |u_0(t)|^2 dt.$$

Mais

$$t^2 = (t + \xi_0)^2 - 2\xi_0(t + \xi_0) + \xi_0^2,$$

alors

$$1 < \int_0^{+\infty} (|u_0'(t)|^2 + (t + \xi_0)^2 |u_0(t)|^2) dt - 2\xi_0 M_1 + \xi_0^2,$$

et donc

$$1 < \Theta_0 + \xi_0^2 = 2\Theta_0.$$

Cela termine clairement la preuve. □

Lemme 2.2.8. *Soit $\mathbf{P}_0 = \mathfrak{h}^N(\xi_0) - \Theta_0$. Pour $\phi \perp u_0$, on peut définir $\mathbf{P}_0^{-1}\phi$ comme la solution unique f de*

$$\mathbf{P}_0 f = \phi, \quad f \perp u_0.$$

Soit $\mathcal{R}_0 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$ le résolvant régularisé :

$$\mathcal{R}_0 \phi = \begin{cases} 0 & , \phi \parallel u_0, \\ \mathbf{P}_0^{-1} \phi & , \phi \perp u_0, \end{cases} \quad (2.30)$$

(et étendu par linéarité). Alors \mathcal{R}_0 est continue de $S(\mathbb{R}^+)$ à $S(\mathbb{R}^+)$.

Démonstration. Voir [3]. □

Remarque 2.2.1. *Les fonctions propres de $\mathfrak{h}^N(\xi)$ se trouvent dans $S(\mathbb{R}^+)$.*

Chapitre 3

Modèle à champ constant en dimension 2 sur le disque

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère le disque dans \mathbb{R}^2 . On étudie l'opérateur

$$\mathbf{P}_{BF} = (-i\nabla + BF)^2,$$

avec la condition aux bords de Neumann, et où $rotF = 1$, c'est-à-dire c'est le cas où

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(-x_2, x_1).$$

Les modèles à courbures constante (comme le disque) sont importants où la compréhension précises des domaines généraux Ω . En effet, si on travaille sur un domaine générale $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alors on fait des approximations aux bords, c'est-à-dire, pour un point $x_0 \in \partial\Omega$, on considère un petit voisinage de x_0 et l'approximation est obtenu en considérons le disque avec une courbure est égale à la courbure de $\partial\Omega$ en x_0 .

Le principale but est en effet le cas des conditions aux bords de Neumann.

Le but est d'obtenir une formule asymptotique pour l'énergie de l'état fondamental.

3.2 Modèle perturbé

On va considérer dans cette section une version perturbé de $\mathfrak{h}^{N,\xi}$.

Soit η assez petit, et on choisit pour la précisions

$$\eta \in]0, \frac{1}{100}[.$$

Soit $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de troncature standard qui vaut 1 sur $|t| \leq 1$ tel que $0 \leq \chi \leq 1$ et $supp\chi \subset [-2, 2]$, et on considère la fonction l sur \mathbb{R}^+ définie par

$$l(\tau) := \tau\chi(2B^{-\eta}\tau).$$

On observe que

$$l(\tau) = \tau, \text{ si } \tau \leq \frac{B^\eta}{2},$$

$$l(\tau) = 0, \text{ si } \tau \geq B^\eta,$$

et que

$$0 \leq l \leq B^\tau. \quad (3.1)$$

On considère, pour $\delta, B \geq B_0$ (avec B assez grand), la forme quadratique

$$q_{\eta, \delta, B}(\phi) := \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}}\right)^{-1} \left((\tau + \xi_0) + B^{-\frac{1}{2}}(\delta - \frac{l(\tau)^2}{2})\right)^2 |\phi(\tau)|^2 + \left(1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}}\right) |\phi'(\tau)|^2 d\tau, \quad (3.2)$$

défini sur l'espace $B^1(\mathbb{R}^+)$.

Cette forme quadratique fermée définit un opérateur non-borné, auto-adjoint, $\mathfrak{h}(\delta, B)$ sur

$$L^2(\mathbb{R}^+; (1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}})d\tau)$$

(avec les conditions de Neumann en 0) qui est l'opérateur différentielle suivant :

$$\mathfrak{h}(\delta, B) = -\left(1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}}\right)^{-1} \frac{d}{d\tau} \left(1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}}\right) \frac{d}{d\tau} + \left(1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}}\right)^{-2} \left((\tau + \xi_0) + B^{-\frac{1}{2}}(\delta - \frac{l(\tau)^2}{2})\right)^2. \quad (3.3)$$

On note $\{\lambda_j(q_{\eta, \delta, B})\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des valeurs propres de l'opérateur $\mathfrak{h}(\delta, B)$. Alors on a le résultat suivant.

Proposition 3.2.1. *Soit $\eta \in]0, \frac{1}{100}[$. Il existe des constantes positives \mathfrak{c}_0, M et B tel que si $B \geq B_0$, alors*

- Si $|\delta| \geq MB^{\frac{1}{4}+\eta}$, alors

$$\lambda_1(q_{\eta, \delta, B}) \geq \Theta_0 + \mathfrak{c}_0 \min(1, \frac{\delta^2}{B}).$$

- Si $|\delta| \leq MB^{\frac{1}{4}+\eta}$, alors

$$\lambda_2(q_{\eta, \delta, B}) \geq 1.$$

Démonstration. On rappelle d'abord la forme quadratique non perturbée $q^{(N, \xi)}$ de (2.8).

En utilisons (3.1), on a

$$1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}} \geq (1 - B^{\eta-\frac{1}{2}}),$$

et

$$\left(1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}}\right)^{-1} \geq \left(1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}}\right) \geq (1 - B^{\eta-\frac{1}{2}}).$$

Alors

$$q_{\eta, \delta, B}(\phi) \geq (1 - B^{\eta-\frac{1}{2}}) \int_0^{+\infty} |\phi'(t)|^2 + \left| \tau + \xi_0 + B^{-\frac{1}{2}}\delta - B^{-\frac{1}{2}} \frac{l(\tau)^2}{2} \right|^2 |\phi|^2 d\tau. \quad (3.4)$$

Remarquons que

$$\left| \tau + \xi_0 + B^{-\frac{1}{2}}\delta - B^{-\frac{1}{2}} \frac{l(\tau)^2}{2} \right|^2 \geq (1 - \epsilon) \left| \tau + \xi_0 + B^{-\frac{1}{2}}\delta \right|^2 - \frac{1}{\epsilon} B^{-1} l(\tau)^4, \quad (3.5)$$

où $\epsilon = B^{2\eta-\frac{1}{2}}$. En effet, il suffit de remarquer que

$$(a - b)^2 \geq (1 - \epsilon)a^2 - \frac{1}{\epsilon}b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall 0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2},$$

en effet,

$$\begin{aligned}\epsilon(1-\epsilon)a^2 &\leq \epsilon(1-\epsilon)(|a-b|+|b|)^2 \\ &\leq 2\epsilon(1-\epsilon)((a-b)^2+b^2) \\ &\leq \epsilon(a-b)^2+b^2,\end{aligned}$$

et donc pour $\epsilon = B^{2\eta-\frac{1}{2}} \in]0, \frac{1}{2}[$ (pour B assez grand) on obtient immédiatement (3.5).

Alors (3.4) devient

$$q_{\eta,\delta,B}(\phi) \geq (1-B^{\eta-\frac{1}{2}})(1-B^{2\eta-\frac{1}{2}}) \int_0^{+\infty} |\phi'(\tau)|^2 + (\tau + \xi_0 + \frac{\delta}{\sqrt{B}})^2 |\phi(\tau)|^2 d\tau - B^{-2\eta+\frac{1}{2}}(1-B^{\eta-\frac{1}{2}}) \int_0^{+\infty} |\phi(\tau)|^2 d\tau,$$

et donc on obtient l'existence $C > 0$ tel que pour tout $\delta \in \mathbb{R}$,

$$q_{\eta,\delta,B}(\phi) \geq (1-CB^{2\eta-\frac{1}{2}})q^{(N,\xi_0+\frac{\delta}{\sqrt{B}})}(\phi) - CB^{2\eta-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} |\phi(\tau)|^2 d\tau. \quad (3.6)$$

Cela implique par la caractérisation variationnelle (1.13) que, pour tout $j \geq 1$,

$$\lambda_j(q_{\eta,\delta,B}) \geq (1-CB^{2\eta-\frac{1}{2}})\mu_j(\xi_0 + \frac{\delta}{\sqrt{B}}) - CB^{2\eta-\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

En particulier, en utilisant le résultat de non-dégénérescence (2.22), ce qui implique l'existence de $\mathbf{c}_0 > 0$ tel que

$$\mu(\xi) \geq \Theta_0 + \mathbf{c}_0 \min(|\xi - \xi_0|^2, 1),$$

on obtient

$$\lambda_1(q_{\eta,\delta,B}) \geq (1-CB^{2\eta-\frac{1}{2}})[\Theta_0 + \mathbf{c}_0 \min(1, \frac{\delta^2}{\sqrt{B}})] - CB^{2\eta-\frac{1}{2}}.$$

Alors pour M suffisamment grand on a

$$\lambda_1(q_{\eta,\delta,B}) \geq \Theta + \mathbf{c}'_0 \min(1, \frac{\delta^2}{B}), \quad (3.8)$$

pour tout $|\delta| \geq MB^{\frac{1}{4}+\eta}$.

Maintenant, on considère les valeurs de δ tel que $|\delta| \leq MB^{\frac{1}{4}+\eta}$, en particulier, $\frac{\delta}{\sqrt{B}}$ est borné.

On considère une fonction propre f_j de $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ avec une valeur propre $\mu_j(\xi)$. Comme mentionné dans la remarque (2.2.1), f_j se décroît exponentiellement à $+\infty$. En appliquant la proposition (0.0.3) au sous-espace $V := \text{vect}\{f_1, \dots, f_n\}$, où les f_j sont pris avec $\xi = \xi_0 + \frac{\delta}{\sqrt{B}}$, on obtient

$$\lambda_j(q_{\eta,\delta,B}) \leq \mu_j(\xi_0 + \frac{\delta}{\sqrt{B}}) + CB^{2\eta-\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

où la constante C est uniforme pour $|\delta| \leq MB^{\frac{1}{4}+\eta}$.

En combinant (3.7) et (3.9), on trouve

$$\left| \lambda_j(q_{\eta,\delta,B}) - \mu_j(\xi_0 + \frac{\delta}{\sqrt{B}}) \right| \leq CB^{2\eta-\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

En particulier, on peut conclure en utilisant (2.17) que $q_{\eta,\delta,B}$ admet exactement une valeur propre inférieure à 1 pour B suffisamment grand. Ainsi la preuve est terminée. \square

Maintenant, pour analyser la preuve de la proposition suivante, on va utiliser des opérateurs différentielles définis par :

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_0 &:= \mathfrak{h}^{N,\xi_0} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + (\tau + \xi_0)^2, \\ \mathfrak{k}_1 &:= \frac{d}{d\tau} + 2(\tau + \xi_0)\left(\delta - \frac{\tau^2}{2}\right) + 2\tau(\tau + \xi_0)^2, \\ \mathfrak{k}_2 &:= \tau \frac{d}{d\tau} + \left(\delta - \frac{\tau^2}{2}\right)^2 + 4\tau(\tau + \xi_0)\left(\delta - \frac{\tau^2}{2}\right) + 3\tau^2(\tau + \xi_0)^2,\end{aligned}$$

pour $\delta \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.2.2. *Soit $\eta \in]0, \frac{1}{100}[$. Il existe des constantes positives C, M et B_0 tel que si $B \geq B_0$ et $|\delta| \leq MB^{\frac{1}{4}+\eta}$, alors*

$$\left| \lambda_1(q_{\eta,\delta,B}) - (\Theta_0 - \mathcal{C}_1 B^{-\frac{1}{2}} + \lambda_2(\delta) B^{-1}) \right| \leq C \left(\frac{1 + |\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (3.11)$$

où λ_2 est donné par l'expression

$$\lambda_2(\delta) = 3\mathcal{C}_1 \sqrt{\Theta_0} ((\delta - \hat{\delta}_0)^2 + \mathcal{C}_0), \quad (3.12)$$

pour les constantes universelles $\hat{\delta}_0$ et \mathcal{C}_0 et avec \mathcal{C}_1 de (2.26).

Démonstration. D'abord les constantes M et B_0 sont les mêmes que celle dans la proposition précédente, dans ce cas $\frac{\delta}{\sqrt{B}}$ est borné.

Pour $f \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, on a

$$\left\| \mathfrak{h}(\delta, B)f - (\mathfrak{k}_0 + B^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{k}_1 + B^{-1}\mathfrak{k}_2)f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \mathcal{O}\left(\frac{1 + |\delta|^2}{B^{\frac{3}{2}}}\right). \quad (3.13)$$

En effet, observons d'abord (en utilisons le fait que $f \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$) que l vérifie

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (l(\tau) - \tau)^2 |f^{(k)}(\tau)|^2 d\tau &= \int_{\frac{B^\eta}{2}}^{B^\eta} (l(\tau) - \tau)^2 |f^{(k)}(\tau)|^2 d\tau + \int_{B^\eta}^{+\infty} \tau^2 |f^{(k)}(\tau)|^2 d\tau \\ &= \mathcal{O}(B^{-\infty}),\end{aligned}$$

et

$$\int_0^{+\infty} l'(\tau)^2 |f'(\tau)|^2 d\tau = \mathcal{O}(B^{-\infty}).$$

Alors on peut remplacer l par τ jusqu'à des erreurs $\mathcal{O}(B^{-\infty})$, et donc en regroupant les termes et par un calcul simple on obtient (3.13).

Soit u_0 l'état fondamental normalisé connu de \mathfrak{h}^{N,ξ_0} avec une valeur propre Θ_0 . Soit \mathcal{R}_0 le résolvante régularisé considéré dans le lemme (2.2.8). Soit $\lambda_1(\delta)$ et $\lambda_2(\delta)$ donnés par

$$\lambda_1 := \langle u_0, \mathfrak{k}_1 u_0 \rangle,$$

et

$$\lambda_2 := \lambda_{2,1} + \lambda_{2,2},$$

où

$$\lambda_{2,1} := \langle u_0, \mathfrak{k}_2 u_0 \rangle, \quad \lambda_{2,2} := \langle u_1, (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_1 \rangle.$$

Ici les produits scalaires sont les produits scalaires habituels en $L^2(\mathbb{R}^+; d\tau)$. Les fonctions u_1 et u_2 sont données par

$$\begin{aligned} u_1 &:= -\mathcal{R}_0(\mathfrak{k}_1 - \lambda_1)u_0 \\ u_2 &:= -\mathcal{R}_0\{(\mathfrak{k}_1 - \lambda_1)u_1 + (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2)u_0\}. \end{aligned}$$

Notons que $u_0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ et que, par le lemme (2.2.8), \mathcal{R}_0 transforme $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ en lui même d'une façon continue. Par conséquent, u_0 , u_1 , u_2 sont à décroissance rapide sur \mathbb{R}^+ . En outre chaque fonction satisfait la condition de Neumann en 0.

Ainsi on définit notre état d'essai par

$$\psi := u_0 + B^{-\frac{1}{2}}u_1 + B^{-1}u_2. \quad (3.14)$$

D'abord on va expliquer comment les objets ci-dessus (λ_1 , λ_2 , u_1 et u_2) dépendent du δ . On peut réécrire \mathfrak{k}_1 comme

$$\mathfrak{k}_1 = \frac{d}{d\tau} + 2(\delta - \xi_0^2)(\tau + \xi_0) + (\tau + \xi_0)^3.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \langle u_0, \mathfrak{k}_1 u_0 \rangle \\ &= \int_0^{+\infty} u_0'(\tau)u_0(\tau)d\tau + 2(\delta - \xi_0^2) \int_0^{+\infty} (\tau + \xi_0) |u_0(\tau)|^2 d\tau + \int_0^{+\infty} (\tau + \xi_0)^3 |u_0(\tau)|^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\tau} |u_0(\tau)|^2 d\tau + 2(\delta - \xi_0^2)M_1 + M_3 \\ &= -\frac{u_0^2(0)}{2} + 2(\delta - \xi_0^2)M_1 + M_3, \end{aligned}$$

où M_1 et M_3 sont les constantes donnés par (2.28).

En utilisant (2.26) et (2.29), on a

$$\mathcal{C}_1 = \frac{u_0^2(0)}{3}, \quad M_1 = 0 \text{ et } M_3 = \frac{u_0^2(0)}{6}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{u_0^2(0)}{2} + 0 + \frac{u_0^2(0)}{6} \\ &= -\frac{u_0^2(0)}{3} \\ &= -\mathcal{C}_1. \end{aligned}$$

Ainsi, λ_1 est un constant ne dépend pas de δ

$$\lambda_1 = -\mathcal{C}_1.$$

On a

$$u_1 = -\mathcal{R}_0(\mathfrak{k}_1 - \lambda_1)u_0 = -\mathcal{R}_0(\mathfrak{k}_1 + \mathcal{C}_1)u_0,$$

avec \mathfrak{k}_1 seulement qui dépend de δ et la puissance maximale qui se trouve sur δ dans \mathfrak{k}_1 est 1, donc il existe $u_{1,0}, u_{1,1} \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, tel que

$$u_1 = \delta u_{1,1} + u_{1,0},$$

où $u_{1,0}$ et $u_{1,1}$ sont indépendant de δ .

Remarquons que,

$$\lambda_{2,2} = - \langle u_0, (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) \mathcal{R}_0(\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_0 \rangle .$$

Puisque λ_1 est indépendant de δ alors la puissance maximale qui se trouve sur δ dans $(\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) \mathcal{R}_0(\mathfrak{k}_1 - \lambda_1)$ est 2. Donc $\lambda_2(\delta)$ est un polynôme quadratique en δ .

En observons les expressions des opérateurs différentielles \mathfrak{k}_1 et \mathfrak{k}_2 , on en déduit que la coefficient de δ^2 dans $\lambda_{2,1} = \langle u_0, \mathfrak{k}_2 u_0 \rangle$ est égale à 1 et la coefficient de δ^2 dans $\lambda_{2,2} = - \langle u_0, (\tau + \xi_0) \mathcal{R}_0(\tau + \xi_0) u_0 \rangle$ est égale à $-4 \langle u_0, (\tau + \xi_0) \mathcal{R}_0(\tau + \xi_0) u_0 \rangle$.

Alors le coefficient de δ^2 dans $\lambda_2(\delta)$ est

$$1 - 4 \langle u_0, (\tau + \xi_0) \mathcal{R}_0(\tau + \xi_0) u_0 \rangle . \quad (3.15)$$

Par conséquent, u_2 est quadratique en δ et

$$u_2 = \delta^2 u_{2,2} + \delta u_{2,1} + u_{2,0},$$

où $u_{2,2}, u_{2,1}, u_{2,0} \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

Maintenant on va estimer la norme suivant

$$\left\| \{ \mathfrak{h}(\delta, B) - (\Theta_0 + \lambda_1 B^{-\frac{1}{2}} + \lambda_2 B^{-1}) \} \psi \right\| ,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $L^2(\mathbb{R}^+; (1 - \frac{l(\tau)}{\sqrt{B}}) d\tau)$.

D'abord, en utilisons (3.13), on obtient

$$\left\| \{ \mathfrak{h}(\delta, B) - (\Theta_0 + \lambda_1 B^{-\frac{1}{2}} + \lambda_2 B^{-1}) \} \psi \right\| \leq \left\| (\mathfrak{k}_0 - \lambda_0) \psi + B^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) \psi + B^{-1} (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2) \psi \right\| + \mathcal{O}\left(\frac{1 + |\delta|^2}{B^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Mais

$$\begin{aligned} \bullet (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) \psi &= (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) u_0 + B^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) u_1 + B^{-1} (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) u_2 \\ &= B^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) u_1 + B^{-1} (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) u_2, \\ \bullet B^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) \psi &= B^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_0 + B^{-1} (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_1 + B^{-\frac{3}{2}} (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_2, \\ \bullet B^{-1} (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2) \psi &= B^{-1} (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2) u_0 + B^{-\frac{3}{2}} (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2) u_1 + B^{-2} (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2) u_2. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left\| (\mathfrak{k}_0 - \lambda_0) \psi + B^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) \psi + B^{-1} (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2) \psi \right\| &\leq B^{-\frac{1}{2}} \| (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) u_1 + (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_0 \| \\ &\quad + B^{-1} \| (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) u_2 + (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_1 + (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2) u_0 \| \\ &\quad + B^{-\frac{3}{2}} \| (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_2 + (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2) u_1 \| \\ &\quad + B^{-2} \| (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2) u_2 \|. \end{aligned}$$

En utilisant la décroissance rapide de ces fonctions et que $\frac{|\delta|}{\sqrt{B}} \leq 1$, on a

$\bullet (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) u_1 + (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_0$ est polynôme de degré 1 en δ et $B^{-\frac{1}{2}} |\delta| \leq \frac{|\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}}$, alors

$$B^{-\frac{1}{2}} \| (\mathfrak{k}_0 - \Theta_0) u_1 + (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1) u_0 \| \leq C \left(\frac{1 + |\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}} \right),$$

• $(\mathfrak{k}_0 - \Theta_0)u_2 + (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1)u_1 + (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2)u_0$ est un polynôme de degré 2 en δ et $B^{-1}|\delta|^2 \leq C\frac{|\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}}$, alors

$$B^{-1} \|(\mathfrak{k}_0 - \Theta_0)u_2 + (\mathfrak{k}_1 - \lambda_1)u_1 + (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2)u_0\| \leq C\left(\frac{1 + |\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}}\right),$$

• $(\mathfrak{k}_1 - \Theta_1)u_2 + (\mathfrak{k}_2 - \Theta_2)u_1$ est un polynôme de degré 3 en δ , alors

$$B^{-\frac{3}{2}} \|(\mathfrak{k}_1 - \lambda_1)u_2 + (\mathfrak{k}_2 - \lambda_2)u_1\| \leq C\left(\frac{1 + |\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}}\right),$$

• $(\mathfrak{k}_2 - \lambda_2)u_2$ est un polynôme de degré 4 en δ et $B^{-2}|\delta|^4 = \frac{|\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{|\delta|}{\sqrt{B}} \leq \frac{|\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}}$, alors

$$B^{-2} \|(\mathfrak{k}_2 - \lambda_2)u_2\| \leq C\left(\frac{1 + |\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Par conséquent, en combinons ces résultats, on obtient :

$$\left\| \{\mathfrak{h}(\delta, B) - (\Theta_0 + \lambda_1 B^{-\frac{1}{2}} + \lambda_2 B^{-1})\} \psi \right\| = \mathcal{O}\left(\frac{1 + |\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}}\right).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\psi\|_2 &= \left\| u_0 + B^{-\frac{1}{2}}u_1 + B^{-1}u_2 \right\|_2 \\ &= \left\| u_0 + (B^{-\frac{1}{2}}u_{1,0} + B^{-1}u_{2,0}) + (B^{-\frac{1}{2}}u_{1,1} + B^{-1}u_{2,1})\delta + B^{-1}u_{2,2}\delta^2 \right\|_2 \\ &\leq 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1 + |\delta|}{B^{\frac{1}{2}}}\right), \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème spectral (0.0.2), nous obtenons

$$\text{dist}(\Theta_0 + \lambda_1 B^{-\frac{1}{2}} + \lambda_2 B^{-1}, \sigma(\mathfrak{h}(\delta, B))) = \mathcal{O}\left(\frac{1 + |\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Comme $\mathfrak{h}(\delta, B)$ n'a qu'une seule valeur propre en dessous de 1, nous avons donc prouver que

$$\lambda_1(q_{\eta, \delta, B}) = \Theta_0 + \lambda_1 B^{-\frac{1}{2}} + \lambda_2 B^{-1} + \mathcal{O}\left(\frac{1 + |\delta|^3}{B^{\frac{3}{2}}}\right).$$

En utilisons le chapitre 2 et (3.15), on trouve que le coefficient de δ^2 dans $\lambda_2(\delta)$ est

$$\frac{\mu''(\xi_0)}{2} = 3\mathcal{C}_1\sqrt{\Theta_0}.$$

Notons que $3\mathcal{C}_1\sqrt{\Theta_0} > 0$, qui exprime la non dégénérescence du minimum de μ en ξ_0 .

Comme λ_2 est quadratique en δ , il existe donc $\hat{\delta}_0$ et $\mathcal{C}_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_2(\delta) = 3\mathcal{C}_1\sqrt{\Theta_0}((\delta - \hat{\delta}_0)^2 + \mathcal{C}_0).$$

Les constantes $\hat{\delta}_0$ et \mathcal{C}_0 sont en effet définis par

$$3\mathcal{C}_1\sqrt{\Theta_0}\mathcal{C}_0 = \min_{\delta \in \mathbb{R}} \lambda_2(\delta) = \lambda_2(\hat{\delta}_0).$$

□

3.3 Asymptotique de l'énergie de l'état fondamental pour le disque

Dans cette section on énoncera une estimation asymptotique précise pour l'énergie de l'état fondamental. On rappelle que les paramètres spectraux \mathcal{C}_1 , Θ_0 et ξ_0 ont été introduits dans (2.23) et (2.26).

Théorème 3.3.1. (*Asymptotique des valeurs propres pour le disque*) *On suppose que $\Omega = D(0, 1)$ est le disque unité. On définit $\delta(m, B)$, pour $m \in \mathbb{Z}, B \geq 0$, par*

$$\delta(m, B) := m - \frac{B}{2} - \xi_0 \sqrt{B}. \quad (3.16)$$

On pose

$$\hat{\Delta}_B := \inf_{m \in \mathbb{Z}} \left| \delta(m, B) - \hat{\delta}_0 \right|.$$

Alors pour tout $\eta > 0$,

$$\lambda_1(B) = \Theta_0 B - \mathcal{C}_1 \sqrt{B} + 3\mathcal{C}_1 \sqrt{\Theta_0} (\hat{\Delta}_B^2 + \mathcal{C}_0) + \mathcal{O}(B^{\eta - \frac{1}{2}}),$$

où $\hat{\delta}_0$ et \mathcal{C}_0 sont les constantes introduites dans la preuve de la proposition (3.2.2).

Démonstration. Voir [3]. □

On peut facilement obtenir des résultats pour d'autres domaines à courbure constante en appliquant une mise à l'échelle aux modèles de disque. Soit $k \in \mathbb{R}$. Alors le modèle à courbure constante k est

$$\Omega_k := \begin{cases} D(0, k_{-1}), & \text{si } k > 0, \\ \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D(0, k^{-1})}, & \text{si } k < 0, \\ \mathbb{R}^{2,+}, & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

En mettant à l'échelle, on voit que, pour $k \neq 0$,

$$\lambda_1(B, \Omega_k) = k^2 \lambda_1\left(\frac{B}{k^2}, \Omega_{\text{sign}(k)}\right).$$

Par conséquent, on trouve le corollaire suivant du théorème (3.3.1).

Corollaire 3.3.2. *Il existe des constantes positives C et B_0 tel que si Ω_k est un domaine de courbure du bord constant k , alors pour tout $k \in \mathbb{R}, B \geq B_0 k^2$,*

$$\left| \lambda_1(B, \Omega_k) - (\Theta_0 B - \mathcal{C}_1 k \sqrt{B}) \right| \leq C k^2.$$

Chapitre 4

Asymptotique à grand champ de l'opérateur de Schrödinger magnétique : Le cas de la dimension 2

Dans ce chapitre on étudie l'asymptotique de l'énergie de l'état fondamental de l'opérateur Neumann magnétique $\mathbf{P}_{BA,\Omega}^N$ quand l'intensité du champ magnétique B tend vers l'infini. On obtient également les propriétés de localisation de l'état fondamental.

4.1 Résultat principal

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné. On considère l'opérateur Neumann magnétique $\mathbf{P}_{BA,\Omega}^N$ où B un grand paramètre et A un potentiel magnétique. Soit $\beta = \text{rot}A$ le champ magnétique associé. On introduit les notations

$$\inf_{x \in \bar{\Omega}} |\beta(x)| = b \quad , \quad \inf_{x \in \partial\Omega} |\beta(x)| = b'. \quad (4.1)$$

Le premier théorème "approximatif" pour la réalisation de Neumann est le suivant .

Théorème 4.1.1. *On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est borné et régulier. Alors*

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B} \inf \sigma(\mathbf{P}_{BA,\Omega}^N) = \min(b, \Theta_0 b'), \quad (4.2)$$

où Θ_0 est le constant de (2.23).

Un théorème important que nous aimerions présenter est

Théorème 4.1.2. *Soit Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^2 . Si le champ magnétique est constant et non-nul, alors tout état fondamental correspondant à la réalisation de Neumann est localisé quand $B \rightarrow +\infty$ près de la frontière de Ω .*

Ces deux théorèmes ne sont pas nécessairement optimaux. Dans de nombreux de cas, on peut donner des expressions asymptotiques plus précise pour l'énergie de l'état fondamental. Aussi, dans de nombreux cas, l'état fondamental sera localisé dans une région plus petite, c'est-à-dire près d'une partie de la frontière.

On donne un résultat plus précise pour le cas d'un champ magnétique constant.

Théorème 4.1.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné et régulier. Si le champ magnétique est constant non-nul, alors tout état fondamental correspondant à la réalisation de Neumann est localisé quand $B \rightarrow +\infty$ près des points de la frontière où la courbure est maximal.*

4.2 Asymptotique de l'énergie de l'état fondamental

4.2.1 Preuve du théorème (4.1.1)

Bornes supérieures

Les bornes supérieures sont basés sur la construction des quasimodes appropriés. Considérons deux cas :

Cas 1 Le cas où $b < \Theta_0 b'$.

Supposons sans perte de généralité que l'infimum de β est atteint en 0 à l'intérieure de Ω , c'est-à-dire, $\beta(0) = b$, et dans une jauge où

$$A(x_1, x_2) = \frac{b}{2}(-x_2, x_1) + \mathcal{O}(|x|^2),$$

on considère le quasimode

$$u(x, B) := \rho^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} B^{\frac{1}{2}} e^{-\rho\sqrt{b}|x|^2} \chi(x),$$

où χ est une fonction de troncature est égale à 1 au voisinage de 0 et $\rho > 0$ doit être déterminé. Le ρ minimal est calculé en minimisant (par rapport à ρ) l'énergie correspondant à champ magnétique constant $b = 1$ et $B = 1$:

$$\frac{\int |(\partial_{y_1} - \frac{i}{2}y_2)u_\rho(y)|^2 + |(\partial_{y_2} + \frac{i}{2}y_1)u_\rho(y)|^2 dy}{\|u_\rho\|^2},$$

où

$$u_\rho(y) = \pi^{-\frac{1}{4}} \rho^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}y^2}.$$

Par un calcul simple on a

$$\begin{aligned} \left| (\partial_{y_1} - \frac{i}{2}y_2)u_\rho(y) \right|^2 &= \left| -\pi^{-\frac{1}{4}} \rho^{\frac{1}{2}} (\rho y_1 + \frac{y_2}{2}i) e^{-\frac{\rho}{2}y^2} \right|^2 \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} \rho (\rho^2 y_1^2 + \frac{y_2^2}{4}) e^{-\rho y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| (\partial_{y_2} + \frac{i}{2}y_1)u_\rho(y) \right|^2 &= \left| -\pi^{-\frac{1}{4}} \rho^{\frac{1}{2}} (\rho y_2 - \frac{y_1}{2}i) e^{-\frac{\rho}{2}y^2} \right|^2 \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} \rho (\rho^2 y_2^2 + \frac{y_1^2}{4}) e^{-\rho y^2}. \end{aligned}$$

Alors la quantité de l'énergie sera égale à

$$(\rho^2 + \frac{1}{4}) \frac{\int y^2 e^{-\rho y^2} dy}{\int e^{-\rho y^2} dy},$$

et on obtient que cette quantité est minimisée pour $\rho = \frac{1}{2}$ et que l'énergie correspondante vaut 1. Ainsi, par le principe Min-Max (1.13), on obtient

$$\inf \sigma(\mathbf{P}_{BA, \Omega}^N) \leq Bb + \mathcal{O}(B^{\frac{1}{2}}),$$

et donc

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B} \inf \sigma(\mathbf{P}_{BA, \Omega}^N) \leq b.$$

Cas 2 Le cas où $\Theta b' \leq b$.

Soit $x_0 \in \partial\Omega$ où $|\beta(x_0)| = b'$. On peut prendre un système des coordonnées $x \mapsto (s, t)$ tel que $t(x)$ désigne la distance à la frontière et $s(x)$ est une paramétrisation de la frontière (c'est changement de coordonnées seront donnés en détails dans l'annexe A).

À l'aide de changement de jauge on peut supposer que $A \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$, et donc dans les coordonnées (s, t) , pour B assez grand, l'opérateur ressemblera

$$R = -\partial_t^2 + (-i\partial_s + Bb't)^2$$

sur le demi plan $t > 0$, (plus précisément nous devrions considérer $\mathbb{S}^1 \times]0, t_0[$ avec les conditions aux bords de Neumann à $t = 0$ et les conditions de Dirichlet à $t = t_0$).

On considère la fonction

$$\psi : (t, s) \mapsto B^{\frac{1}{4}} e^{i\rho_0 s \sqrt{B}} u_0(B^{\frac{1}{2}} \tau_0 t),$$

où $\mathbb{R}^+ \ni v \mapsto u_0(v)$ est la fonction propre du modèle en demi-droite avec $\xi = \xi_0$ et champ magnétique est égale à 1.

On va choisit ρ_0 et τ_0 de façon que ψ soit une fonction propre de l'opérateur

$$R = -\partial_t^2 + (-i\partial_s + Bb't)^2,$$

associé au valeur propre $B\Theta b'$, c'est-à-dire,

$$[-\partial_t^2 + (-i\partial_s + Bb't)^2]\psi = B\Theta_0 b' \psi. \quad (4.3)$$

(4.3) est équivalent à

$$-B\tau_0^2 u_0''(B^{\frac{1}{2}} \tau_0 t) + (\rho_0 B^{\frac{1}{2}} + Bb't)^2 u_0(B^{\frac{1}{2}} \tau_0 t) = \Theta_0 Bb' u_0(B^{\frac{1}{2}} \tau_0 t), \forall t > 0,$$

équivalent à dire que,

$$-B\tau_0^2 u_0''(\tau) + (\rho_0 B^{\frac{1}{2}} + \frac{B^{\frac{1}{2}} b'}{\tau_0} \tau)^2 u_0(\tau) = \Theta_0 Bb' u_0(\tau), \forall \tau > 0,$$

ce qui est équivalent à,

$$-u_0''(\tau) \left(\frac{\rho_0}{\tau_0} + \frac{b'}{\tau_0^2} \tau \right)^2 u_0(\tau) = \Theta_0 \frac{b'}{\tau_0} u_0(\tau), \forall \tau > 0.$$

Mais u_0 vérifie,

$$-u_0''(\tau) + (\tau + \xi_0)^2 u_0(\tau) = \Theta_0 u_0(\tau), \forall \tau > 0.$$

Alors on choisit τ_0 et ρ_0 de façon que

$$\frac{\rho_0}{\tau_0} = \xi_0 \quad \text{et} \quad \frac{b'}{\tau_0^2} = 1,$$

c'est-à-dire,

$$\tau_0 = \sqrt{b'} \quad \text{et} \quad \rho_0 = \xi_0 \sqrt{b'}.$$

D'autre part la fonction ψ n'est pas définie dans le domaine $\mathbb{S}^1 \times]0, t_0[$, alors il reste à tronquer la fonctions ψ par une fonction de troncature $t \mapsto \chi(t)$ à support compact dans

$]0, t_0[$ et avec une fonction $s \mapsto \chi_0(s)$ à support dans un voisinage de 0. Ainsi, la fonction d'essai que nous choisissons (pour une constante C indépendante de B et pour $\alpha > 0$ arbitraire) est

$$\phi(t, s; B) = \phi_0(t, s; B)\chi(t)\chi_0(s),$$

où

$$\phi_0(t, s; B) = CB^{\frac{5}{16}}e^{-\alpha B^{\frac{1}{4}}s^2}e^{i\xi_0\sqrt{Bb'}s}u_0(\sqrt{Bb'}t).$$

Le calcul de l'énergie de cette fonction d'essai et le principe Min-Max (1.13), nous donne

$$\inf\sigma(\mathbf{P}_{BA,\Omega}^N) \leq B\Theta_0b' + o(B). \quad (4.4)$$

En effet, en utilisant les propriétés de décroissance de u_0 et celle de l'exponentielle du Gaussien, nous obtenons d'abord

$$\begin{aligned} \langle \phi, R\phi \rangle_{L^2} &= \int \{|\phi|^2 + |(-i\partial_s + Bb')\phi|^2\} ds dt \\ &= \int \{|\partial_t\phi_0|^2 + |(-i\partial_s + Bb')\phi_0|^2\} \chi^2(t)\chi_0^2(s) ds dt + \mathcal{O}(B^{-\infty}) \\ &= \int \{C^2B^{\frac{5}{8}}Bb'e^{-2\alpha B^{\frac{1}{4}}s^2} \left|u'_0(\sqrt{Bb'}t)\right|^2 \\ &\quad + C^2B^{\frac{5}{8}}e^{-2\alpha B^{\frac{1}{4}}s^2} \left|u_0(\sqrt{Bb'}t)\right|^2 \left|\xi_0\sqrt{Bb'} + 2i\alpha B^{\frac{1}{4}}s + Bb't\right|^2\} \chi^2(t)\chi_0^2(s) ds dt + \mathcal{O}(B^{-\infty}). \end{aligned}$$

Ici, les fonctions de troncatures ont complètement disparu et l'intégration dans la variable s est donnée sur $] -\infty, +\infty[$, et celle de t sur $]0, +\infty[$.

Alors,

$$\begin{aligned} \langle \phi, R\phi \rangle &= \int \{C^2B^{\frac{5}{8}}Bb'e^{-2\alpha B^{\frac{1}{4}}s^2} \left|u'_0(\sqrt{Bb'}t)\right|^2 \\ &\quad + C^2B^{\frac{5}{8}}e^{-2\alpha B^{\frac{1}{4}}s^2} \left|u_0(\sqrt{Bb'}t)\right|^2 \left|\xi_0\sqrt{Bb'} + 2i\alpha B^{\frac{1}{4}}s + Bb't\right|^2\} ds dt + \mathcal{O}(B^{-\infty}). \end{aligned}$$

Avec les changement de variables

$$\sigma = \sqrt{2\alpha}B^{\frac{1}{8}}s \text{ et } \tau = \sqrt{Bb'}t,$$

on a :

$$\begin{aligned} \cdot ds &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}B^{\frac{1}{8}}}d\sigma \text{ et } dt = \frac{1}{\sqrt{Bb'}}d\tau, \\ \cdot C^2B^{\frac{5}{8}}Bb' \frac{1}{\sqrt{2\alpha}B^{\frac{1}{8}}} \frac{1}{\sqrt{Bb'}} &= \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}}B\sqrt{b'}, \\ \cdot C^2B^{\frac{5}{8}} &= \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{b'}}, \\ \cdot & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\xi_0\sqrt{Bb'} + Bb't)^2 &= (\xi_0\sqrt{Bb'} + Bb'\frac{\tau}{Bb'})^2 \\ &= (\xi_0\sqrt{Bb'} + \tau\sqrt{Bb'})^2 \\ &= Bb'(\tau + \xi_0)^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \xi_0 \sqrt{Bb'} + Bb't + 2i\alpha B^{\frac{1}{4}} s \right|^2 &= (\xi_0 \sqrt{Bb'} + Bb't)^2 + 4\alpha^2 B^{\frac{1}{2}} s^2 \\ &= Bb'(\tau + \xi_0)^2 + 2\alpha B^{\frac{1}{4}} \sigma^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \phi, R\phi \rangle &= \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}} B\sqrt{b'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2} |u'_0(\tau)|^2 d\sigma d\tau \\ &+ \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{b'}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2} |u_0(\tau)|^2 [Bb'(\tau + \xi_0)^2 + 2\alpha B^{\frac{1}{4}} \sigma^2] d\sigma d\tau + \mathcal{O}(B^{-\infty}) \\ &= \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}} B\sqrt{b'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2} |u'_0(\tau)|^2 d\sigma d\tau \\ &+ \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{b'}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2} |u_0(\tau)|^2 Bb'(\tau + \xi_0)^2 d\sigma d\tau \\ &+ \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{b'}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2} |u_0(\tau)|^2 2\alpha B^{\frac{1}{4}} \sigma^2 d\sigma d\tau \mathcal{O}(B^{-\infty}) \\ &= \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}} B\sqrt{b'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2} \{ |u'_0(\tau)|^2 + (\tau + \xi_0)^2 |u_0(\tau)|^2 \} d\sigma d\tau \\ &+ C^2 \sqrt{\frac{2\alpha}{b'}} B^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sigma^2 e^{-\sigma^2} |u_0(\tau)|^2 d\sigma d\tau + \mathcal{O}(B^{-\infty}) \\ &= \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}} B\sqrt{b'} \sqrt{\pi} \Theta_0 + C^2 \sqrt{\frac{2\alpha}{b'}} B^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(B^{-\infty}) \\ &= C^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} B\sqrt{b'} \Theta_0 + C^2 \sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}} \frac{B^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{b'}} + \mathcal{O}(B^{-\infty}). \end{aligned}$$

D'autre part, de même manière avec ce changement de variable, on a

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} C^2 B^{\frac{5}{8}} e^{-2\alpha B^{\frac{1}{4}} s^2} \left| u_0(\sqrt{Bb'}t) \right|^2 ds dt + \mathcal{O}(B^{-\infty}) \\ &= \frac{C^2}{\sqrt{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{b'}} \sqrt{\pi} + \mathcal{O}(B^{-\infty}) \\ &= C^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{b'}} + \mathcal{O}(B^{-\infty}). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \phi, R\phi \rangle_{L^2}}{\|\phi\|_{L^2}^2} &= \frac{C^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} B\sqrt{b'} \Theta_0 + C^2 \sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}} \frac{B^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{b'}}}{C^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{b'}}} + \mathcal{O}(B^{-\infty}) \\ &= Bb' \Theta_0 + \alpha B^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(B^{-\infty}) \\ &= Bb' \Theta_0 + o(B). \end{aligned}$$

Alors, d'après le principe Min-Max (1.13), on obtient

$$\inf \sigma(\mathbf{P}_{BF,\Omega}^N) \leq Bb' \Theta_0 + o(B),$$

ce qui donne que,

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B} \inf \sigma(\mathbf{P}_{BA, \Omega}^N) \leq \Theta_0 b'.$$

Par conséquent,

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B} \inf \sigma(\mathbf{P}_{BA, \Omega}^N) \leq \min(b, \Theta_0 b').$$

Bornes inférieures

Proposition 4.2.1. *Soit $z \in \partial\Omega$ et $R_0 > 0$. Alors pour un certain $0 \leq \rho \leq 1$, et pour B suffisamment grand on a*

$$\int_{\Omega} |(-i\nabla + BA)u|^2 dx \geq (\Theta_0 B \beta(z) - CB^{\frac{3}{4}}) \|u\|^2, \quad (4.5)$$

pour tout $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\text{supp} u \subset D(z_0, R_0 B^{-\rho})$, où C est un constant positif.

Démonstration. Soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\text{supp} u \subset D(z_0, R_0 B^{-\rho})$. Pour B suffisamment grand on a

$$\text{supp} u \subset \Omega_{t_0},$$

où $t_0 > 0$ est petit et Ω_{t_0} définit par

$$\Omega_{t_0} := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < t_0\}.$$

Alors, nous utiliserons les coordonnées du frontière (s, t) définies dans l'annexe A, et on obtient après changement de coordonnées.

Nous choisissons maintenant une jauge pratique

$$\tilde{A} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2),$$

où

$$\tilde{A}_1(s, t) := - \int_0^t (1 - t'k(s)) \tilde{\beta}(s, t') dt', \quad \tilde{A}_2(s, t) := 0.$$

Alors, avec un changement de jauge approprié, c'est-à-dire, avec la substitution $\tilde{v} = e^{iB\phi} u$ pour une fonctions ϕ (sera expliquer en détails dans l'annexe A, proposition(A.0.2)), nous avons pour $\text{supp} u \subset D(z_0, R_0 B^{-\rho})$,

$$\int |(-i\nabla + BA)u|^2 dx = \int (1 - tk(s))^{-1} \left| (-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v} \right|^2 + (1 - tk(s)) |\partial_t \tilde{v}|^2 ds dt. \quad (4.6)$$

On définit

$$\begin{aligned} k_0 &:= k(0), \\ \Delta k &:= k(s) - k(0), \\ \bar{A}(s, t) &:= -\tilde{\beta}(0, 0) \left(t - \frac{1}{2} t^2 k(0) \right), \\ \tilde{b}(s, t) &:= (1 - tk(s)) \tilde{\beta}(s, t) - (1 - tk(0)) \tilde{\beta}(0, 0), \\ \tilde{a}_1(s, t) &:= - \int \tilde{b}(s, t') dt'. \end{aligned}$$

Alors on a les estimations sur le support de \tilde{v} :

$$\begin{aligned}
& \cdot |\Delta k| = |k(s) - k(0)| \leq C \|\gamma(s) - \gamma(0)\| \leq CR_0 B^{-\rho}, \\
& \cdot \left| \tilde{b}(s, t) \right| \leq CR_0 B^{-\rho}, \\
& \cdot |\tilde{a}_1(s, t)| \leq \int_0^t \left| \tilde{b}(s, t') \right| dt' \leq CR_0 B^{-\rho} t.
\end{aligned}$$

Sur le $\text{supp} \tilde{v}$, $|t| \leq CB^{-\rho}$, et donc $t = \mathcal{O}(B^{-\rho})$.

Soit B grand tel que $2^{-1} \leq (1 - tk(s)) \leq 2$ sur $\text{supp} v$. Alors on a l'estimation

$$\begin{aligned}
& \int |(-i\nabla + BA)u|^2 dx \geq (1 - \eta) \int (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + B\bar{A})\tilde{v}|^2 + (1 - tk_0) |\partial_t \tilde{v}|^2 dsdt \\
& - C \int |\Delta k| \left\{ |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 + |\partial_t \tilde{v}|^2 \right\} dsdt - \eta^{-1} \int (1 - tk_0)^{-1} B^2 \tilde{a}_1^2 |\tilde{v}|^2 dsdt, \tag{4.7}
\end{aligned}$$

pour tout $0 < \eta < 2^{-1}$ et tout u tel que $\text{supp} u \subset D(z_0, R_0 B^{-\rho})$.

En effet,

Observons d'abord que

$$\begin{aligned}
& ((1 - tk(s))^{-1} - (1 - tk_0)^{-1}) \left| (-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v} \right|^2 + ((1 - tk(s)) - (1 - tk_0)) |\partial_t \tilde{v}|^2 \\
& = \frac{t\Delta k}{(1 - tk(s))(1 - tk(0))} \left| (-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v} \right|^2 - t\Delta k |\partial_t \tilde{v}|^2 \\
& \geq -Ct |\Delta k| \left\{ |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 + |\partial_t \tilde{v}|^2 \right\},
\end{aligned}$$

en utilisons le fait que $2^{-1} \leq (1 - tk(s)) \leq 2$.

Alors, en utilisant (4.6), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int (-i\nabla + BA)u|^2 dx \\
& \geq \int (1 - tk_0)^{-1} \left| (-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v} \right|^2 + (1 - tk_0) |\partial_t v|^2 dsdt - C \int |\Delta k| \left\{ |(-i\partial_s + B\tilde{A})\tilde{v}|^2 + |\partial_t \tilde{v}|^2 \right\}. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

D'autre part, en remarquons que

$$\tilde{A}_1(s, t) = \bar{A}(s, t) + \tilde{a}_1(s, t),$$

on obtient

$$\left| (-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v} \right|^2 \geq (1 - \eta) \left| (-i\partial_s + B\bar{A})\tilde{v} \right|^2 + \eta^{-1} B^2 \tilde{a}_1^2 |\tilde{v}|^2. \tag{4.9}$$

(4.9) peut être obtenu d'après l'inégalité suivante

$$(z_1 + z_2)^2 \geq (1 - \eta) z_1^2 - \eta^{-1} z_2^2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \forall 0 < \eta < \frac{1}{2},$$

en prenant $z_1 = (-i\partial_s + B\bar{A})\tilde{v}$ et $z_2 = B\tilde{a}_1\tilde{v}$.

Par conséquent, en combinant (4.8) et (4.9), on obtient l'estimation dans (4.7).

Le terme

$$\int (1 - tk_0)^{-1} \left| (-i\partial_s + B\bar{A})\tilde{v} \right|^2 + (1 - tk_0) |\partial_t \tilde{v}|^2 dsdt$$

représente la forme quadratique à une courbure constante et un champ magnétique constant, alors, en utilisant le corollaire (3.3.2), on obtient

$$\int (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + B\bar{A})\tilde{v}|^2 + (1 - tk_0) |\partial_t \tilde{v}|^2 dsdt \geq (\Theta_0 B\beta(z) - \mathcal{C}_1 k_0 \sqrt{B\beta(z)} - C) \|\tilde{v}\|_2^2. \quad (4.10)$$

Le second terme est estimé par

$$C \int |\Delta k| \{ |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 + |\partial_t \tilde{v}|^2 \} dsdt \leq C \hat{C} B^{-2\rho} \int |(-i\nabla + BA)u|^2 dx, \quad (4.11)$$

en effet,
on a

$$|\Delta k| \leq CR_0 B^{-\rho}, \quad t = \mathcal{O}(B^{-\rho}),$$

de plus

$$\begin{aligned} \int |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 + |\partial_t \tilde{v}|^2 dsdt &\leq \int 2\{(1 - tk(s))^{-1} |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 + (1 - tk(s)) |\partial_t \tilde{v}|^2\} dsdt \\ &= 2 \int |(-i\nabla + BA)u|^2 dx, \end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation dans (4.11).

Le troisième terme est estimé par

$$\eta^{-1} \int (1 - tk_0)^{-1} B^2 \tilde{a}_1^2 |\tilde{v}|^2 dsdt \leq \tilde{C} \eta^{-1} B^{2-4\rho} \|\tilde{v}\|_2^2, \quad (4.12)$$

en utilisant le fait que

$$(1 - tk_0)^{-1} \leq 2 \text{ et } \tilde{a}_1^2 \leq C^2 R_0^2 B^{-2\rho} t^2 \leq C^2 R_0 B^{-4\rho}.$$

Nous choisissons $\eta = B^{\frac{1}{2}-2\rho}$ et $\rho = \frac{3}{8}$, alors, on combine (4.7), (4.10), (4.11) et (4.12), on obtient

$$\begin{aligned} \int |(-i\nabla + BA)u|^2 dx &\geq (1 - B^{-\frac{1}{4}})(\Theta_0 B\beta(z) - \mathcal{C}_1 k_0 \sqrt{B\beta(z)} - C) \|\tilde{v}\|_2^2 \\ &\quad - C \hat{C} B^{-\frac{3}{4}} \int |(-i\nabla + BA)u|^2 - \hat{C} B^{\frac{3}{4}} \|\tilde{v}\|_2^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour B suffisamment grand on a

$$\int |(-i\nabla + BA)u|^2 dx \geq (\Theta_0 B\beta(z) - CB^{\frac{3}{4}}) \|u\|_2^2,$$

pour tout u tel que $\text{supp } u \subset D(z, R_0 B^{-\rho})$. Ce qui termine la preuve de la proposition (4.2.1). \square

Proposition 4.2.2. *Il existe des constantes positives C et B_0 , telles que, pour*

$$U_\beta(x) := \begin{cases} B\beta(x) & , \quad d(x, \partial\Omega) \geq B^{-\frac{3}{8}}, \\ \Theta_0 B\beta(x) & , \quad d(x, \partial\Omega) \leq B^{-\frac{3}{8}}, \end{cases} \quad (4.13)$$

on a

$$\int_\Omega |(-i\nabla + BA)u|^2 dx \geq \int_\Omega (U_\beta(x) - CB^{\frac{3}{4}}) |u(x)|^2 dx, \quad (4.14)$$

pour tout $u \in H_{BA}^1(\Omega)$ et tout $B \geq B_0$.

Démonstration. Soit $0 \leq \rho \leq 1$. Alors il existe un $C > 0$ tel que, pour tout $R_0 > 0$, nous pouvons, en mettant à l'échelle une partition standard de l'unité de \mathbb{R}^2 , et en la restreignant à $\overline{\Omega}$, trouver une partition d'unité χ_j^B satisfaisant dans Ω ,

$$\sum_j |\chi_j^B|^2 = 1, \quad (4.15)$$

$$\sum_j |\nabla \chi_j^B|^2 \leq CR_0^{-2} B^{2\rho}, \quad (4.16)$$

et

$$\text{supp}(\chi_j^B) \subset Q_j = D(z_j, R_0 B^{-\rho}),$$

où $D(c, r)$ désigne la boule ouverte dans \mathbb{R}^2 de centre c et de rayon r . De plus nous pouvons ajouter la propriété

$$\text{soit } \text{supp}\chi_j^B \cap \partial\Omega = \emptyset \text{ ou } z_j \in \partial\Omega. \quad (4.17)$$

Selon les deux alternatives de (4.17), on peut décomposer la somme de (4.15) sous la forme

$$\sum = \sum_{int} + \sum_{bnd},$$

où " \sum_{int} " fait référence aux j tels que $z_j \in \Omega$, et " \sum_{bnd} " fait référence aux j tels que $z_j \in \partial\Omega$. Alors

$$Q(u) = \sum_j Q(\chi_j^B u) - \sum_j \|\nabla \chi_j^B u\|^2, \forall u \in H_{BA}^1(\Omega). \quad (4.18)$$

Ici $Q = Q_{BA}^N$, la forme quadratique magnétique définie par

$$Q_{BA}^N(u) = \int_{\Omega} |(-i\nabla + BA)u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla_{BA} u|^2 dx, \forall u \in H_{BA}^1(\Omega).$$

Pour vérifier l'égalité dans (4.18), il suffit de voir que

$$\begin{aligned} |\nabla_{BA}(\chi_j^B u)|^2 &= |\chi_j^B \nabla_{BA} u + (\nabla \chi_j^B) u|^2 \\ &= |\chi_j^B|^2 |\nabla_{BA} u|^2 + |\nabla \chi_j^B|^2 |u|^2 + 2\mathcal{R}(\chi_j^B \nabla \chi_j^B \cdot u \nabla_{BA} u), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_j Q(\chi_j^B u) &= \sum_j \int |\chi_j^B|^2 |\nabla_{BA} u|^2 dx + \sum_j \int |\nabla \chi_j^B|^2 |u|^2 dx \\ &= Q(u) + \sum_j \|\nabla \chi_j^B u\|^2, \end{aligned}$$

ce qui prouve (4.18). Nous pouvons réécrire le côté droit de (4.18) comme somme de trois termes

$$Q(u) = \sum_{int} Q(\chi_j^B u) + \sum_{bnd} Q(\chi_j^B u) - \sum_j \|\chi_j^B u\|^2, \forall u \in H_{BA}^1(\Omega). \quad (4.19)$$

Pour la dernière terme sur le côté droit de (4.16)

$$\sum_j \|\chi_j^B u\|^2 \leq CB^{2\rho} R_0^{-2} \|u\|^2. \quad (4.20)$$

le premier terme sur le côté droit de (4.19), peut être estimé par le bas en utilisant (1.1.2). Le support de $\chi_j^B u$ est en effet contenu dans Ω .

Donc nous avons

$$\sum_{int} Q(\chi_j^B u) \geq B \sum_{int} \beta(x) |\chi_j^B u|^2 dx. \quad (4.21)$$

Le second terme de (4.19) peut être estimé en utilisant la proposition (4.2.1) pour $\chi_j^B u$ qui vérifie que son support est contenu dans $D(z_j, R_0 B^{-\rho})$ pour chaque j tel que $z_j \in \partial\Omega$ (pour $\rho = \frac{3}{8}$, $R_0 = 1$). Alors en utilisant (4.5), on obtient

$$\sum_{bnd} Q(\chi_j^B u) \geq \sum_{bnd} (\Theta_0 B \beta(z_j) - C B^{\frac{3}{4}}) \|\chi_j^B u\|_2^2. \quad (4.22)$$

En combinant (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22), on obtient

$$Q(u) \geq B \sum_{int} \int \beta(x) |\chi_j^B u|^2 dx + \Theta_0 B \sum_{bnd} \int \beta(z_j) |\chi_j^B u|^2 dx - C B^{\frac{3}{4}} \sum_j \int |\chi_j^B u|^2 dx. \quad (4.23)$$

Ainsi, ce qui prouve (4.14) pour B assez grand. \square

Proposition 4.2.3. *Il existe des constantes positives C et B_0 telles que, pour tout $B \geq B_0$, nous avons l'estimation*

$$\lambda_1(BA) \geq B \min(b, \Theta_0 b') - C B^{\frac{3}{4}}. \quad (4.24)$$

Démonstration. La preuve est assez simple d'après la proposition (4.2.2), en écrivons

$$\begin{aligned} Q(u) &\geq B \int_{\{d(x, \partial\Omega) \geq B^{-\frac{3}{8}}\}} \beta(x) |u(x)|^2 dx + \Theta_0 B \int_{\{d(x, \partial\Omega) < B^{-\frac{3}{8}}\}} \beta(x) |u(x)|^2 dx - C B^{\frac{3}{4}} \|u\|_2^2 \\ &\geq B b \int_{\{d(x, \partial\Omega) \geq B^{-\frac{3}{8}}\}} |u(x)|^2 dx + \Theta_0 B b' \int_{\{d(x, \partial\Omega) < B^{-\frac{3}{8}}\}} |u(x)|^2 dx - C B^{\frac{3}{4}} \|u\|_2^2 \\ &\geq B \min(b, \Theta_0 b') \left(\int_{\{d(x, \partial\Omega) \geq B^{-\frac{3}{8}}\}} |u(x)|^2 dx + \int_{\{d(x, \partial\Omega) < B^{-\frac{3}{8}}\}} |u(x)|^2 dx \right) - C B^{\frac{3}{4}} \|u\|_2^2 \\ &\geq (B \min(b, \Theta_0 b') - C B^{\frac{3}{4}}) \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

\square

Ainsi, d'après la proposition (4.2.3), on a

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B} \inf \sigma(\mathbf{P}_{BA, \Omega}^N) \geq \min(b, \Theta_0 b').$$

Finalement, la preuve du théorème (4.1.1) est complète.

Nous pouvons également faire le choix $\rho = \frac{1}{2}$, $\eta = B^{-\frac{1}{8}}$ et R_0 grand dans la proposition (4.2.1). Cela donne une estimation qui peut sembler plus faible de la proposition (4.2.2), mais sera plus efficace dans l'étude de la décroissance. La raison est que la zone limite a maintenant la bonne échelle de longueur à savoir $B^{-\frac{1}{2}}$. Le résultat analogue à la proposition (4.2.2) est

Proposition 4.2.4. *Il existe $C, B_0 > 0$ et, pour tout $R_0 > 0$, il existe $C(R_0)$ tel que pour*

$$U_\beta(x) := \begin{cases} B\beta(x) & , d(x, \partial\Omega) \geq R_0 B^{-\frac{1}{2}}, \\ BC(R_0)\beta(x) & , d(x, \partial\Omega) < R_0 B^{-\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (4.25)$$

on a

$$\int_{\Omega} |(-i\nabla + BA)u|^2 dx \geq \int_{\Omega} (U_\beta^{(2)}(x) - C\frac{B}{R_0^2}) |u(x)|^2 dx, \quad (4.26)$$

pour tout $u \in H_{BA}^1(\Omega)$ et tout $B \geq B_0$.

4.2.2 Les estimations d'Agmon

On va démontrer que les états fondamentaux se localisent près de la frontière dans le cas où

$$\Theta_0 b' < b \quad (4.27)$$

est satisfait.

Proposition 4.2.5. *Soit ϕ une fonctions réelle et uniformément lipchitizienne. Si u est une fonction propre associée à la valeur propre la plus basse $\lambda_1(BA)$ de l'opérateur $\mathbf{P}_{BA,\Omega}^N$, alors on a l'identité*

$$\lambda_1(BA) \left\| e^{\sqrt{B}\phi} u \right\|^2 = Q_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) - B \left\| |\nabla\phi| e^{\sqrt{B}\phi} u \right\|^2, \quad (4.28)$$

où Q_{BA} est la forme quadratique associé à l'opérateur $\mathbf{P}_{BA,\Omega}^N$.

Démonstration. On observe d'abord que si ϕ est une fonction réelle Lipchitizienne et si u est dans le domaine de la réalisation de Neumann $\mathbf{P}_{BA,\Omega}^N$, alors

$$\Re \langle \mathbf{P}_{BA,\Omega}^N u, e^{2\sqrt{B}\phi} u \rangle = Q_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) - B \left\| |\nabla\phi| e^{\sqrt{B}\phi} u \right\|^2. \quad (4.29)$$

En effet, par une simple intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \Re \langle \mathbf{P}_{BA,\Omega}^N u, e^{2\sqrt{B}\phi} u \rangle &= \Re \langle (-i\nabla + BA)u, (-i\nabla + BA)e^{2\sqrt{B}\phi} u \rangle \\ &= \Re \langle \nabla_{BA} u, \nabla_{BA}(e^{2\sqrt{B}\phi} u) \rangle, \end{aligned}$$

de plus en utilisons le fait que

$$\begin{aligned} \nabla_{BA}(e^{2\sqrt{B}\phi} u) &= \nabla_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} \cdot e^{\sqrt{B}\phi} u) \\ &= \sqrt{B} \nabla\phi e^{\sqrt{B}\phi} e^{\sqrt{B}\phi} u + e^{\sqrt{B}\phi} \nabla_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u), \end{aligned}$$

on obtient

$$\Re \langle \mathbf{P}_{BA,\Omega}^N u, e^{2\sqrt{B}\phi} u \rangle = \Re[\langle e^{\sqrt{B}\phi} \nabla_{BA} u, \nabla_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) \rangle + \langle \nabla_{BA} u, \sqrt{B} \nabla\phi e^{2\sqrt{B}\phi} u \rangle],$$

mais

$$e^{\sqrt{B}\phi} \nabla_{BA} u = \nabla_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) - \sqrt{B} \nabla\phi e^{\sqrt{B}\phi} u,$$

alors

$$\begin{aligned}
\Re \langle \mathbf{P}_{BA,\Omega}^N u, e^{2\sqrt{B}\phi} u \rangle &= \Re[\langle \nabla_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) - \sqrt{B}\nabla\phi e^{\sqrt{B}\phi} u, \nabla_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) \rangle + \langle \nabla_{BA} u, \sqrt{B}\nabla\phi e^{2\sqrt{B}\phi} u \rangle] \\
&= \Re[Q_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) - \langle \sqrt{B}\nabla\phi e^{\sqrt{B}\phi} u, \nabla_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) - e^{\sqrt{B}\phi} \nabla u \rangle] \\
&= \Re[Q_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) - \langle \sqrt{B}\nabla\phi e^{\sqrt{B}\phi} u, \sqrt{B}\nabla\phi e^{\sqrt{B}\phi} u \rangle] \\
&= Q_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u) - B \left\| |\nabla\phi| e^{\sqrt{B}\phi} u \right\|^2,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (4.29).

En particulier, si u est une fonction propre associée à la valeur propre la plus basse $\lambda_1(BA)$, alors on obtient l'égalité dans (4.28). \square

Ce résultat est l'ingrédient principal de la preuve du théorème suivant. Ce théorème est le plus important, il montre le résultat du théorème concernant la localisation de l'état fondamental aux frontières du domaine.

Théorème 4.2.6. *Avec la condition (4.27), il existe $C > 0, \alpha > 0$ et $B_0 > 0$, de sorte que si $B \geq B_0$ et u_B est l'état fondamental de $\mathbf{P}_{BA,\Omega}^N$, alors*

$$\int_{\Omega} e^{2\alpha d(x,\partial\Omega)} \{|u_B(x)|^2 + B^{-1} |\mathcal{P}_{BA} u_B(x)|^2\} dx \leq C \|u_B\|^2. \quad (4.30)$$

Démonstration. Définissons d'abord

$$\phi(x) = \alpha \max(d(x, \partial\Omega), R_0 B^{-\frac{1}{2}}),$$

où $\alpha > 0$ doit être déterminé après. Alors, en appliquant la proposition (4.2.4), on obtient

$$Q_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi}) \geq \int_{\Omega} (U_{\beta}^{(2)}(x) - C \frac{B}{R_0^2}) |e^{\sqrt{B}\phi} u|^2 dx. \quad (4.31)$$

La mise en oeuvre (4.27), (4.2) devient

$$\lambda_1^N(BA) \leq \Theta_0 b' B + o(B). \quad (4.32)$$

Ainsi, en utilisant (4.28), nous obtenons

$$(\Theta_0 b' B + o(B)) \left\| e^{\sqrt{B}\phi} u \right\|^2 \geq \int_{\Omega} (U_{\beta}^{(2)}(x) - C \frac{B}{R_0^2}) e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx - B \left\| |\nabla\phi| e^{\sqrt{B}\phi} u \right\|^2,$$

ce qui donne que

$$\begin{aligned}
&(\Theta_0 b' B + o(B)) \left\{ \int_{\{t(x) \geq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx + \int_{\{t(x) < R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx \right\} \\
&\geq \int_{\{t(x) \geq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} (B\beta(x) - C \frac{B}{R_0^2}) e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx + \\
&\int_{\{t(x) < R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} (BC(R_0)\beta(x) - C \frac{B}{R_0^2}) e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx - B \int_{\{t(x) \geq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} \alpha^2 e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \int_{\{t(x) \geq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} (B\beta(x) - C \frac{B}{R_0^2} - \Theta_0 b' B - o(B) - \alpha^2 B) e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx \\ & \leq \int_{\{t(x) < R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} (\Theta_0 b' B + o(B) - BC(R_0)\beta(x) + C \frac{B}{R_0^2}) e^{2\sqrt{B}\phi} dx, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} & \int_{\{t(x) \geq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} [\beta(x) - \Theta_0 b' + o(1) - \frac{C}{R_0^2} - \alpha^2] e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx \\ & \leq \int_{\{t(x) \leq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} [\Theta_0 b' - C(R_0)\beta(x) + o(1) + \frac{C}{R_0^2}] e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Mais sur $\{t(x) \leq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}$ on a $\phi(x) = \alpha R_0 B^{-\frac{1}{2}}$, alors on obtient

$$\int_{\{t(x) \geq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} [\beta(x) - \Theta_0 b' + o(1) - \frac{C}{R_0^2} - \alpha^2] e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx \leq C'(\alpha, R_0) \int_{\{t(x) \leq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} |u(x)|^2 dx. \quad (4.33)$$

Puisque $\Theta_0 b' \leq b$, alors on peut choisir $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \sqrt{b - \Theta_0 b'}$ (par exemple on prend $\alpha = \frac{\sqrt{b - \Theta_0 b'}}{2}$), qui vérifie que

$$b - \Theta_0 b' - \alpha^2 > 0,$$

et donc on peut choisir R_0 suffisamment grand pour obtenir

$$b - \Theta_0 b' - \alpha^2 - \frac{C}{D_0^2} > 0,$$

ce qui est un constant qui dépend de α et de R_0 , et alors, en utilisant (4.33), on obtient

$$\int_{\{t(x) \geq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx \leq C_1(\alpha, R_0) \int_{\{t(x) \leq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} |u(x)|^2 dx. \quad (4.34)$$

De plus on a

$$\int_{\{t(x) \leq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx = e^{2\alpha R_0} \int_{\{t(x) \leq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} |u(x)|^2 dx. \quad (4.35)$$

Par conséquent (4.34) et (4.35) nous donne

$$\int_{\Omega} e^{2\sqrt{B}\phi} |u(x)|^2 dx \leq C(\alpha, R_0) \int_{\{t(x) \leq R_0 B^{-\frac{1}{2}}\}} |u(x)|^2 dx. \quad (4.36)$$

On en déduit l'estimation de $\left\| e^{\alpha\sqrt{B}d(x, \partial\Omega)} u \right\|_2$ dans (4.30).

Maintenant on va démontrer la seconde estimation

$$B^{-1} \int_{\Omega} e^{\sqrt{B}\phi} |(-i\nabla + BA)u_B(x)|^2 dx \leq C \|u_B\|^2.$$

D'abord, on a

$$(-i\nabla + BA)(e^{\sqrt{B}\phi} u_B) = e^{\sqrt{B}\phi} (-i\nabla + BA)u_B - i\sqrt{B}\nabla\phi e^{\sqrt{B}\phi} u_B,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left| e^{\sqrt{B}\phi} (-i\nabla + BA) u_B \right|^2 &= \left| (-i\nabla + BA)(e^{\sqrt{B}\phi}) + i\sqrt{B}\nabla\phi e^{\sqrt{B}\phi} u_B \right|^2 \\ &\leq 2 \left| (-i\nabla + BA)(e^{\sqrt{B}\phi} u_B) \right|^2 + 2B |\nabla\phi|^2 e^{2\sqrt{B}\phi} |u_B|^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\Omega} e^{2\sqrt{B}\phi} |(-i\nabla + BA) u_B|^2 dx \leq 2Q_{BA}(e^{\sqrt{B}\phi} u_B) + 2B \left\| |\nabla\phi| e^{\sqrt{B}\phi} u_B \right\|^2.$$

En utilisant (4.28), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{2\sqrt{B}\phi} |(-i\nabla + BA) u_B|^2 dx &\leq 2\lambda_1(BA) \left\| e^{\sqrt{B}\phi} u_B \right\|^2 + 3B \left\| |\nabla\phi| e^{\sqrt{B}\phi} u_B \right\|^2 \\ &\leq (2\lambda_1(BA) + 3B\alpha^2) \left\| e^{\sqrt{B}\phi} u_B \right\|^2. \end{aligned}$$

mais

$$\left\| e^{\sqrt{B}\phi} u_B \right\|^2 \leq C \|u_B\|^2,$$

alors

$$\int_{\Omega} e^{2\sqrt{B}\phi} |(-i\nabla + BA) u_B|^2 dx \leq C(2\lambda_1(BA) + 3\alpha^2 B) \|u_B\|^2.$$

Par conséquent, en utilisant

$$\lambda_1(BA) \leq \Theta_0 b' B + o(B),$$

on obtient

$$B^{-1} \int_{\Omega} e^{2\sqrt{B}\phi} |(-i\nabla + BA) u_B|^2 dx \leq C' \|u_B\|^2,$$

et la preuve est terminée. \square

Corollaire 4.2.7. *Supposons que (4.27) est satisfait. Alors il existe $C_n > 0$ tel que*

$$\int_{\Omega} t(x)^n \{|u_B(x)|^2 + B^{-1} |\mathcal{P}_{BA} u(x)|^2\} dx \leq C_n B^{-\frac{n}{2}} \|u_B\|^2. \quad (4.37)$$

Démonstration. Rappelons que

$$t^n \leq n! e^t, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors avec les constantes du théorème (4.2.6), on a

$$(2\alpha\sqrt{B}t(x))^n \leq n! e^{2\alpha\sqrt{B}t(x)},$$

ce qui donne que

$$t(x)^n \leq \frac{n!}{(2\alpha)^n} B^{-\frac{n}{2}} e^{2\alpha\sqrt{B}t(x)},$$

et donc en utilisant (4.30), on obtient immédiatement l'estimation dans (4.37). \square

4.3 Champ magnétique constant

Dans cette section, on considère des asymptotiques plus précises dans le cas particulier important d'un champ magnétique constant.

On suppose donc que

$$\beta(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega.$$

Dans ce cas, le théorème (4.1.1) devient

Proposition 4.3.1. *Dans le cas d'un champ magnétique constant, nous avons*

$$\lambda_1(B) = \Theta_0 B + o(B). \quad (4.38)$$

Aussi, la localisation exponentielle dans le théorème (4.2.6) est vraie. Dans le cas d'un champ magnétique constant, le terme suivant dans l'expansion est déterminé par le maximum de la courbure frontière.

Théorème 4.3.2. *Supposons que Ω est borné et régulier et que $\beta(x) \equiv 1$. Alors*

$$\lambda_1(B) = \Theta_0 B - \mathcal{C}_1 k_{max} \sqrt{B} + \mathcal{O}(B^{\frac{1}{3}}), \quad (4.39)$$

où

$$k_{max} := \max\{k(s) : s \in \partial\Omega\},$$

$k(s)$ désigne la courbure de la frontière au point $\gamma(s)$, et \mathcal{C}_1 est la constante définie en (2.26).

Démonstration. on va trouver une borne inférieure et une borne supérieure de $\lambda_1(B)$ pour B assez grand.

- Borne inférieure.

L'argument est la même que la preuve du théorème (4.1.1). D'abord rappelons qu'on a choisit une partition d'unité $(\chi_j^B)_j$ de \mathbb{R}^2 tel que $\text{supp}(\chi_j^B) \subset D(z_j, R_0 B^{-\frac{1}{2}})$ qui vérifie dans Ω ,

$$\sum_j |\chi_j^B|^2 = 1,$$

et

$$\sum_j |\nabla \chi_j^B|^2 \leq C R_0 B^{-\frac{1}{2}},$$

avec la propriété qu'on a déjà vue

$$\text{soit } \text{supp}\chi_j^B \cap \partial\Omega = \emptyset \text{ ou } z_j \in \partial\Omega.$$

De la même façon comme avant, on obtient

$$Q(u) = \sum_{int} Q(\chi_j^B u) + \sum_{bnd} Q(\chi_j^B u) - \sum_j \|\nabla \chi_j^B u\|^2, \quad \forall u \in H_{BA}^1(\Omega),$$

$$\sum_j \|\nabla \chi_j^B u\|^2 \leq C B^{2\rho} R_0 B^{-\rho} \|u\|^2,$$

$$\sum_{int} Q(\chi_j^B u) \geq B \sum_{int} \int \beta(x) |\chi_j^B u|^2 dx = B \sum_{int} \int |\chi_j^B u|^2 dx.$$

Alors les estimations qui changent sont celles qui correspondent aux boules qui sont centrées à la frontière. Nous choisissons $R_0 = 1$. Concernant les termes de la frontière, comme on a le champ magnétique est constant, alors la fonction \tilde{b} satisfait

$$\tilde{b}(s, t) = -t(\Delta k)(s),$$

et donc

$$\tilde{a}_1(s, t) = \frac{1}{2}t^2(\Delta k)(s).$$

Par conséquent (4.7) sera

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(-i\nabla + BA)u|^2 dx &\geq (1 - \eta) \int (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + B\bar{A})\tilde{v}|^2 + (1 - tk_0) |\partial_t \tilde{v}|^2 ds dt \\ &\quad - C \int |t\Delta k| \{ |(-i\partial_s + \tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 + |\partial_t \tilde{v}|^2 \} ds dt - C\eta^{-1}B^2 \int t^4(\Delta k)^2 |\tilde{v}|^2 ds dt, \end{aligned} \quad (4.40)$$

pour tout $0 < \eta < 2^{-1}$ et pour tout u tel que $\text{supp } u \subset D(z, B^{-\rho})$. En utilisant le fait que $\Delta k = \mathcal{O}(B^{-\rho})$ et que $2^{-1} \leq (1 - tk(s)) \leq 2$ sur $\text{supp } \tilde{v}$, on a les estimations suivantes

$$\int |t\Delta k| \{ |(-i\partial_s + \tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 + |\partial_t \tilde{v}|^2 \} ds dt \leq B^{-\rho} \int t(x) |\mathcal{P}_{BA}(\chi_j^B u)|^2 dx,$$

et

$$B^2 \int t^4(\Delta k)^2 |\tilde{v}|^2 ds dt \leq B^{2-2\rho} \int t(x)^4 |\chi_j^B u|^2 dx.$$

De plus, rappelons l'estimation qui correspond à une courbure constante dans (4.10) est

$$C \int |\Delta k| \{ |(-i\partial_s + B\tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 + |\partial_t \tilde{v}|^2 \} ds dt \leq C\hat{C}B^{-2\rho} \int |(-i\nabla + BA)u|^2 dx.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \int |(-i\nabla + BA)u|^2 dx &\geq B \sum_{int} \int |\chi_j^B u|^2 dx + \sum_{bnd} (1 - \eta) \int (\Theta_0 B - C_1 k(z_j) \sqrt{B} - C) |\chi_j^B u|^2 dx \\ &\quad - CB^{-\rho} \sum_{bnd} \int t(x) |\mathcal{P}_{BA}(\chi_j^B u)|^2 dx - C\eta^{-1}B^{2-2\rho} \sum_{bnd} \int t(x)^4 |\chi_j^B u|^2 dx - CB^{2\rho} \|u\|^2, \end{aligned} \quad (4.41)$$

pour tout $u \in H_{BA}^1(\Omega)$.

En particulier pour $u = u_B$ l'état fondamental de $\mathbf{P}_{BA, \Omega}^N$, nous pouvons appliquer le corollaire (4.2.7) et trouver

$$\begin{aligned} \sum_{bnd} \int t(x) |\mathcal{P}_{BA}(\chi_j^B u)|^2 dx &\leq CB^{\frac{1}{2}}, \\ \sum_{bnd} \int t(x)^4 |\chi_j^B u|^2 dx &\leq CB^{-2}. \end{aligned}$$

En choisissons $\eta = B^{-\frac{1}{2}}$ et $\rho = \frac{1}{6}$, et en prenant $u = u_B$ dans (4.41), on obtient

$$\int_{\Omega} |(-i\nabla + BA)u_B|^2 dx \geq B \sum_{int} |\chi_j^B u_B|^2 dx + \sum_{bnd} (1 - \eta) \int (\Theta_0 B - C_1 k_{max} \sqrt{B} - C) |\chi_j^B u_B|^2 dx - 2CB^{\frac{1}{3}},$$

et donc en utilisant $\Theta_0 < 1$ et pour B assez grand, on obtient

$$\lambda_1(B) \geq (\Theta_0 B - \mathcal{C}_1 k_{max} \sqrt{B}) \sum_j \int |\chi_j^B u_B|^2 dx + \mathcal{O}(B^{\frac{1}{3}}),$$

avec $\sum_j \int |\chi_j^B u_B|^2 dx = 1$, ce qui prouve la borne inférieure dans (4.39).

- Borne supérieure

Pour la borne supérieure nous choisissons u comme étant normalisé près de $z \in \partial\Omega$, où la courbure de la frontière est maximale et vaut k_0 . Cela ce fait d'une telle manière qu'un seul terme (le terme au bord correspondant) dans la somme de la borne inférieure est différent de 0. Alors par (4.6) nous obtenons, de la même manière que (4.40)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(-i\nabla + BA)u|^2 dx &\leq (1 + \eta) \int (1 - tk_0)^{-1} |(-i\partial_s + B\bar{A})\tilde{v}|^2 + (1 - tk_0) |\partial_t \tilde{v}|^2 dsdt \\ &+ C \int |t\Delta k| \{ |(-i\partial_s + \tilde{A}_1)\tilde{v}|^2 + |\partial_t \tilde{v}|^2 \} dsdt + C\eta^{-1} B^2 \int t^4 (\Delta k)^2 |\tilde{v}|^2 dsdt. \end{aligned} \quad (4.42)$$

On choisit

$$\tilde{v} = \chi(B^\rho s) \chi(B^\rho t) u_{1,B,k_0}(s, t),$$

où u_{1,B,k_0} est un état fondamental normalisé pour le modèle à courbure constante de courbure k_0 tel qu'analysé dans le chapitre 3. La valeur propre $\lambda_1(B, \Omega_{k_0}) = \Theta_0 B - \mathcal{C}_1 k_0 \sqrt{B} + \mathcal{O}(1)$.

En choisissant $\rho = \frac{1}{6}$, $\eta = B^{-\frac{1}{2}} - \rho$ comme pour la borne inférieure, on trouve (en utilisant la décroissance en t de u_{1,B,k_0} , voir corollaire (4.2.7))

$$\int_{\Omega} |(-i\nabla + BA)u|^2 dx \leq [(1 + \eta)\lambda_1(B, \Omega_{k_0}) + C' B^{\frac{1}{3}}] \|u\|^2.$$

Cela termine la preuve de la borne supérieure. □

Finalement l'asymptotique à deux termes de l'énergie de l'état fondamental sert à montrer, en utilisant les estimations d'Agmon, la localisation de l'état fondamental près du bord où la courbure est maximal.

Annexe A

Changement de coordonnées au voisinage du bord en dimension 2

Il est utile de faire un changement de coordonnées près du bord. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, borné, régulier et simplement connexe. Soit

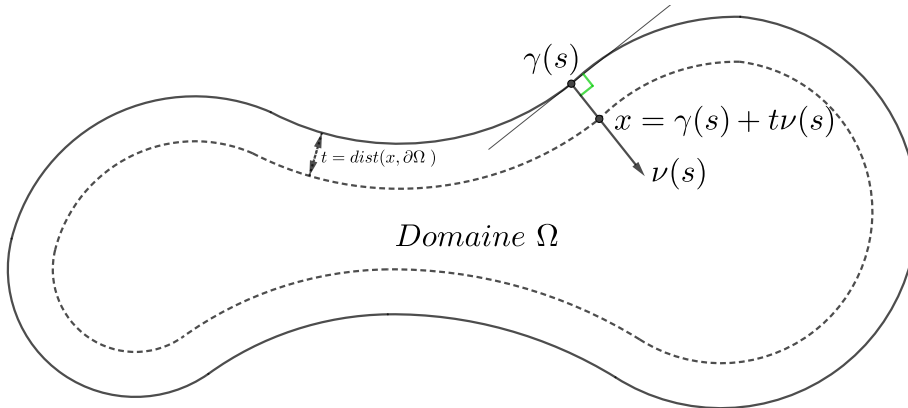
$$\gamma : \mathbb{R}/(|\partial\Omega| \mathbb{Z}) \longrightarrow \partial\Omega$$

une paramétrisation du frontière où $|\gamma'(s)| = 1$ pour tout s . Soit $\nu(s)$ la normale (unitaire) intérieure à $\partial\Omega$ au point $\gamma(s)$. On choisit l'orientation de la paramétrisation γ de façon que

$$\det(\gamma'(s), \nu(s)) = 1.$$

La courbure $k(s)$ de $\partial\Omega$ en $\gamma(s)$ est donné par la paramétrisation

$$\gamma''(s) = k(s)\nu(s).$$

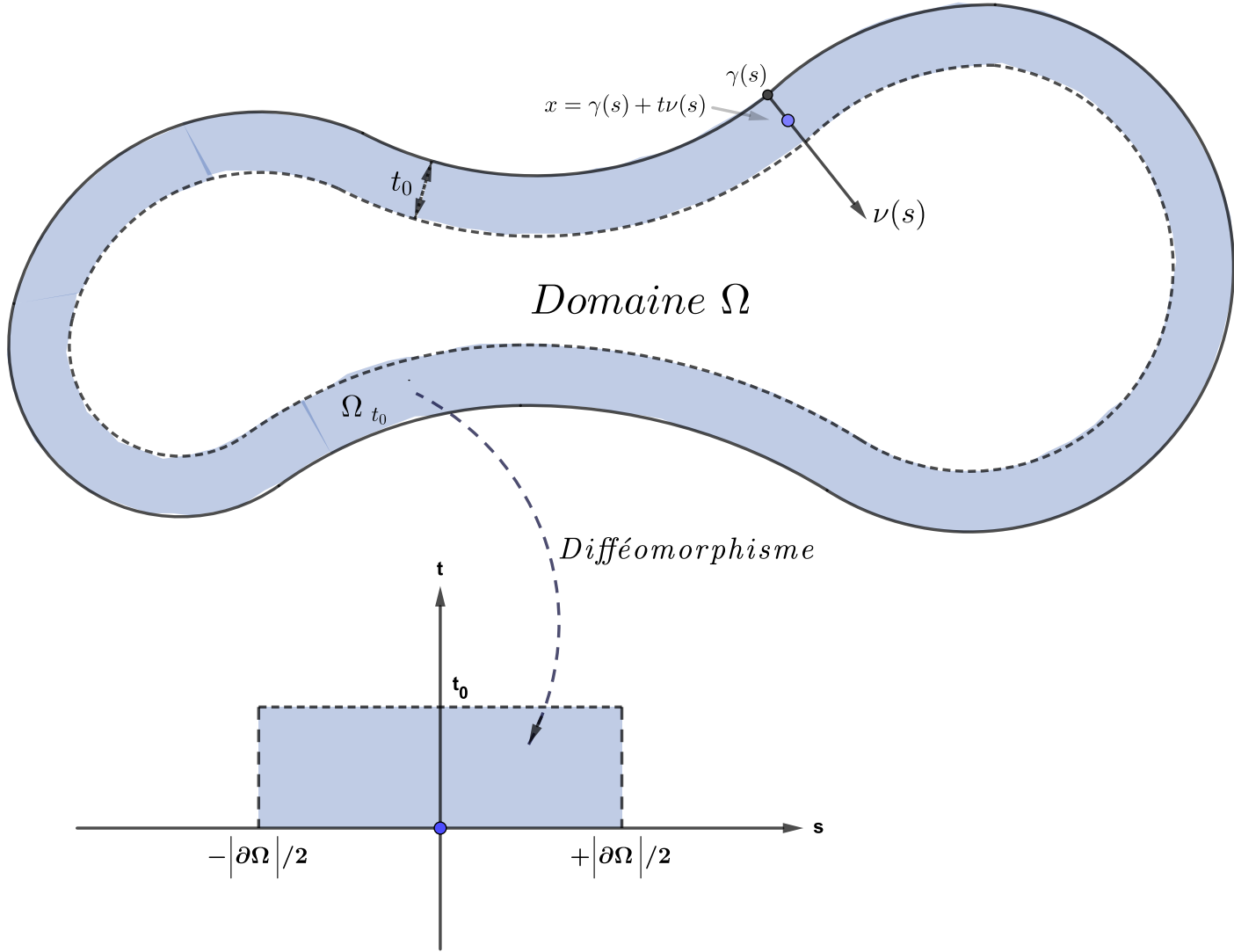


On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}/(|\partial\Omega| \mathbb{Z}) \times]0, t_0[\longrightarrow \Omega$, défini par

$$\Phi(s, t) = \gamma(s) + t\nu(s), \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}/(|\partial\Omega| \mathbb{Z}) \times]0, t_0[, \quad (\text{A.1})$$

où $t_0 > 0$ assez petit, pour que Φ soit un difféomorphisme d'image

$$\Phi(\mathbb{R}/(|\partial\Omega| \mathbb{Z}) \times]0, t_0]) = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < t_0\} := \Omega_{t_0}.$$



Soit $B > 0$ et A un champ de vecteurs sur $\bar{\Omega}$ avec $\beta = \text{rot}A$. On considère l'opérateur Schrödinger magnétique $\mathbf{P}_{BA,\Omega}$ de forme quadratique $Q_{BA,\Omega}$ de domaine de forme $H^1(\Omega)$.

Proposition A.0.1. *Avec le changement de coordonnées précédent Φ^{-1} , la forme quadratique $Q_{BA,\Omega}$ se réécrit de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} Q_{BA,\Omega} &= \int_{\Omega_{t_0}} |(-i\nabla + BA)u|^2 dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\Omega_{t_0})} \left\{ (1 - tk(s))^2 \left| (-i\partial_s + B\tilde{A}_1)v \right|^2 + \left| (-i\partial_t + B\tilde{A}_2)v \right|^2 \right\} (1 - tk(s)) ds dt, \end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega_{t_0}} |u(x)|^2 dx = \int_{\Phi^{-1}(\Omega_{t_0})} |v(s, t)|^2 (1 - tk(s)) ds dt,$$

pour tout $u \in H^1(\Omega_{t_0})$, avec :

- $v = u \circ \Phi$,

$$\tilde{A}_1(s, t) = (1 - tk(s))(A \circ \Phi) \cdot \gamma' \quad \text{et} \quad \tilde{A}_2(s, t) = (A \circ \Phi) \cdot \nu. \quad (\text{A.2})$$

Démonstration. On désigne par α l'angle orienté et régulier formé par l'axe des abscisses et le vecteur $\gamma'(s)$. Comme $|\gamma'(s)| = 1$, alors

$$\gamma'(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)).$$

$\nu(s)$ est un vecteur unitaire, orthogonal à $\gamma'(s)$ et $\det(\gamma'(s), \nu(s)) = 1$, alors $\nu(s)$ est la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ de $\gamma'(s)$, et donc

$$\nu(s) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)).$$

En utilisant le fait que $\nu'(s) = -k(s)\gamma'(s)$, on obtient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, t) = \gamma'(s) + t\nu'(s) = (1 - tk(s))\gamma'(s),$$

de plus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(s, t) = \nu(s),$$

alors la matrice Jacobiennne J_Φ s'écrit :

$$J_\Phi(s, t) = ((1 - tk(s))\gamma'(s), \nu(s)),$$

et donc l'expression de Jacobien est donné par :

$$\begin{aligned} \det J_\Phi(s, t) &= (1 - tk(s))\det(\gamma'(s), \nu(s)) \\ &= (1 - tk(s)). \end{aligned}$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ une fonction test à support compact dans Ω_{t_0} et $v = u \circ \Phi$. D'abord, on va démontrer que

$$\nabla u = (1 - tk(s))^{-1} \frac{\partial v}{\partial s} \gamma'(s) + \frac{\partial v}{\partial t} \nu(s). \quad (\text{A.3})$$

En effet, en écrivons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= (1 - tk(s))\gamma'(s) \\ &= (1 - tk(s))(\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu(s) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)),$$

on obtient, avec la notation

$$\Phi(s, t) = (\Phi_1(s, t), \Phi_2(s, t)),$$

que

- $\frac{\partial \Phi_1}{\partial s} = (1 - tk(s))\cos\alpha(s),$
- $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = -\sin\alpha(s),$
- $\frac{\partial \Phi_2}{\partial s} = (1 - tk(s))\sin\alpha(s),$

- $\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = \cos \alpha(s)$.

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ &= (1 - tk(s)) \cos \alpha(s) \frac{\partial u}{\partial x_1} + (1 - tk(s)) \sin \alpha(s) \frac{\partial u}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ &= -\sin \alpha(s) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos \alpha(s) \frac{\partial u}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

En inversant le système linéaire, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = (1 - tk(s))^{-1} \cos \alpha(s) \frac{\partial v}{\partial s} - \sin \alpha(s) \frac{\partial v}{\partial t},$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = (1 - tk(s))^{-1} \sin \alpha(s) \frac{\partial v}{\partial s} + \cos \alpha(s) \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\ &= (1 - tk(s))^{-1} (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)) \frac{\partial v}{\partial s} + (-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)) \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= (1 - tk(s))^{-1} \frac{\partial v}{\partial s} \gamma'(s) + \frac{\partial v}{\partial t} \nu(s), \end{aligned}$$

ce qui prouve (A.3).

On en déduit que l'expression du gradient dans la base $(\gamma'(s), \nu(s))$ et dans les coordonnées (s, t) est donnée par :

$$\left((1 - tk(s))^{-1} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

D'autre part l'expression du potentiel dans la base $(\gamma'(s), \nu(s))$ est donnée par :

$$A \circ \Phi = (A \circ \Phi.\gamma; , A \circ \Phi.\nu).$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} |(-i\nabla + BA)u|^2 &= \left| \left(-i \left((1 - tk(s))^{-1} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) + B(A \circ \Phi.\gamma', A \circ \Phi.\nu) \right) v \right|^2 \\ &= \left| \left(-i \left((1 - tk(s))^{-1} \frac{\partial}{\partial s} + BA \circ \Phi.\gamma' \right) v \right|^2 + \left| \left(-i \frac{\partial}{\partial t} + BA \circ \Phi.\nu \right) v \right|^2 \\ &= (1 - tk(s))^{-2} |(-i\partial_s + B(1 - tk(s))A \circ \Phi.\gamma')v|^2 + |(-i\partial_t + BA \circ \Phi.\nu)v|^2 \\ &= (1 - tk(s))^{-2} \left| (-i\partial_s + B\tilde{A}_1)v \right|^2 + \left| (-i\partial_t + B\tilde{A}_2)v \right|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega_{t_0}} |(-i\nabla + BA)u|^2 dx = \int_{\Phi^{-1}(\Omega_{t_0})} \{(1-tk(s))^{-2} \left| (-i\partial_s + B\tilde{A}_1)v \right|^2 + \left| (-i\partial_t + B\tilde{A}_2)v \right|^2\} (1-tk(s)) ds dt.$$

□

Proposition A.0.2. *Il existe un changement de jauge ϕ (correspondant à la conjugaison $e^{i\phi}$ avec $\phi \in H^2(\Omega)$) pour lequel l'expression de la forme quadratique donnée dans la proposition (A.0.1) est (localement) la suivante :*

$$\begin{aligned} Q_{BA,\Omega}(u) &= \int_{\Omega_{t_0}} |(-i\nabla + BA)u|^2 dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\Omega_{t_0})} \{(1-tk(s))^{-2} \left| (-i\partial_s + \tilde{A}_1)\tilde{v} \right|^2 + \left| (-i\partial_t)\tilde{v} \right|^2\} (1-tk(s)) ds dt, \end{aligned}$$

où on a noté $\tilde{v} = e^{i\phi}v$ et $v = u \circ \Phi$.

Démonstration. La proposition (A.0.1) donne :

$$\tilde{A}_1(s, t) = (1-tk(s))A(\Phi(s, t)).\gamma'(s), \text{ et } \tilde{A}_2(s, t) = A(\Phi(s, t)).\nu(s).$$

on a :

$$\begin{aligned} \partial_s \tilde{A}_2(s, t) &= \partial_s(A \circ \Phi)(s, t).\nu(s, t) + (A \circ \Phi)(s, t).\nu'(s, t) \\ &= \partial_s(A \circ \Phi)(s, t).\nu(s) - k(s)(A \circ \Phi)(s, t).\gamma'(s), \end{aligned}$$

et

$$\partial_t \tilde{A}_1(s, t) = -k(s)A(\Phi(s, t)).\gamma'(s) + (1-tk(s))\partial_t(A \circ \Phi).\nu(s).$$

Le calcul de $\nabla \times \tilde{A}_1$ donne :

$$\begin{aligned} (\partial_s \tilde{A}_2 - \partial_t \tilde{A}_1)(s, t) &= (D_{\Phi(s,t)}A \times (1-tk(s))\gamma'(s)).\nu(s) - (1-tk(s))(D_{\Phi(s,t)}A \times \nu(s)).\gamma'(s) \\ &= (1-tk(s))(\partial_{x_1}A_2(\Phi(s, t)) - \partial_{x_2}A_1(\Phi(s, t))) \\ &= (1-tk(s))\beta(\Phi(s, t)) \\ &= (1-tk(s))\tilde{\beta}(s, t). \end{aligned}$$

On considère le changement de jauge donné par :

$$\phi(s, t) = \int_0^t \tilde{A}_2(s, t') dt' + \int_0^s \tilde{A}_1(s', 0) ds',$$

qui correspond à la conjugaison de l'opérateur par $e^{i\phi}$, on obtient une nouvelle expression de potentiel vecteur.

En notant de la même manière $\tilde{\tilde{A}}_1$ et $\tilde{\tilde{A}}_2$ des nouveaux potentiels obtenus, on a :

$$\begin{aligned} (\tilde{\tilde{A}}_1, \tilde{\tilde{A}}_2) &= (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) - \nabla_{(s,t)}\phi \\ &= \left(\tilde{A}_1 - \frac{\partial\phi}{\partial s}, \tilde{A}_2 - \frac{\partial\phi}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) = \tilde{A}_2(s, t),$$

alors

$$\tilde{\tilde{A}}_2(s, t) = 0.$$

D'autre part, en dérivons sous le signe intégral, on trouve

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) = \int_0^t \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial s}(s, t') dt' + \tilde{A}_1(s, 0),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{A}}_1(s, t) &= \tilde{A}_1(s, t) - \int_0^t \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial s}(s, t') dt' - \tilde{A}_1(s, 0) \\ &= \tilde{A}_1(s, t) - \int_0^t \{(1 - t'k(s))\tilde{\beta}(s, t') + \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial t'}(s, t')\} dt' - \tilde{A}_1(s, 0) \\ &= \tilde{A}_1(s, t) - \int_0^t (1 - t'k(s))\tilde{\beta}(s, t') dt' - \tilde{A}_1(s, t) + \tilde{A}_1(s, 0) - \tilde{A}_1(s, 0) \\ &= - \int_0^t (1 - t'k(s))\tilde{\beta}(s, t') dt'. \end{aligned}$$

□

Bibliographie

- [1] C Cheverry and N Raymond. A walk through spectral theory. 8
- [2] Soeren Fournais and Bernard Helffer. Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic neumann laplacian. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 56, pages 1–67, 2006.
- [3] Søren Fournais and Bernard Helffer. *Spectral methods in surface superconductivity*, volume 77. Springer Science & Business Media, 2010. 3, 18, 30, 38
- [4] Mathieu Lewin. *Éléments de théorie spectrale : le laplacien sur un ouvert borné*. 2017. 11, 12, 13
- [5] Jean-Philippe Miqueu. *Étude des états fondamentaux du Laplacien magnétique avec annulation locale du champ*. PhD thesis, 2016. 3
- [6] Nicolas Popoff. *Sur le spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique dans un domaine diédral*. PhD thesis, 2012.