Cohomologie de Hochschild des schémas

Lucas Darbas

Mémoire de M2

Mathématiques fondamentales et appliquées
Algèbre et Géométrie

Université de Nantes - 2020

Sous la direction de

Hossein Abbaspour
Friedrich Wagemann

La cohomologie de Hochschild est une théorie d'algèbre homologique concernant les algèbres associatives. Elle apparait en 1945 dans les travaux de Gerhard Hochschild et sera étudié durant le XX^{eme} siècle par de nombreux mathématiciens. Gerstenhaber, Schack, Loday, on encore Grothendieck contribueront à étendre cette théorie aux schémas à travers plusieurs définitions. Le but de ce mémoire est d'étudier les travaux de Swan pour comprendre ces différentes définitions.

Le cadre général est une algèbre associative A (non nécessairement unitaire) sur un anneau commutatif k, et un bimodule M sur A, c'est à dire un A-module à droite et à gauche satisfaisant les relations suivantes

$$\lambda m = m\lambda$$

$$a(mb) = (am)b$$

pour tout $m \in M$, $\lambda \in k$ et $a, b \in A$. Lorsque A est unitaire, cela revient à considérer un module sur l'anneau $A^e = A \otimes A^{op}$, où $\otimes = \otimes_k$, à travers la formule

$$(a \otimes b)m = amb$$

pour tout $m \in M$ et $a, b \in A$. Étant donné notre motivation à étudier des schémas, A sera toujours unitaire et même commutative. On introduit ensuite le complexe de Hochschild

$$C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$$

dont la différentielle est définie par les applications k-linéaire suivantes

$$d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i : M \otimes A^{\otimes n} \to M \otimes A^{\otimes n-1}$$

$$d_0(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n$$

$$d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \text{ pour } 0 < i < n$$

$$d_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$$

Lorsque A est commutative, ces applications sont A^e-linéaires. On peut alors définir l'homologie de Hochschild de A à valeurs dans M par

$$H_n(A, M) = H_n(C_\bullet(A, M))$$

Traditionnellement, on note $C_\bullet(A) = C_\bullet(A, M)$ et $HH_\bullet(A) = H_\bullet(A, M)$. Pour mieux comprendre cette homologie, il est commode d'utiliser le complexe "bar" de A^e-module

$$B_n(A) = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$$

dont la différentielle est donnée par les applications A^e-linéaires

$$d' = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d'_i : A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \to A \otimes A^{\otimes n-1} \otimes A$$

$$d'_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

La multiplication dans A permet d'obtenir une résolution de A^e-module

$$B_\bullet(A) \to A$$

Si A est projective sur k, alors $B_\bullet(A)$ est projectif sur A^e, et dans ce cas

$$H_n(A, M) = Tor_n^{A^e}(M, A) = Tor_n^{A^e}(A, M)$$

Pour définir la cohomologie de Hochschild de A à valeurs dans M, on s'inspire la situation précédente en posant

$$H^n(A, M) = H^n(Hom_{A^e}(B_\bullet(A), M))$$

de sorte que si A est projective sur k alors

$$H^n(A, M) = Ext^n_{A^e}(A, M)$$

Puisque les schémas que nous considèrerons seront toujours basés sur un corps, les algèbres que l'ont rencontrera seront toujours projectives. Ainsi, on préfèrera définir l'homologie et la cohomologie de Hochschild à travers les foncteurs dérivés $Tor^{A^e}_\bullet(A, -)$ et $Ext^\bullet_{A^e}(A, -)$.

Dans son article "Hochschild cohomology of quasiprojective schemes", Swan introduit trois définitions différentes de la cohomologie de Hochschild d'un schéma basé sur un corps, puis il prouve que ces trois définitions coïncident si le schéma est quasi-projectif. La démonstration fait appel à différents concepts de géométrie algébrique et utilise des techniques standard d'algèbre homologique telles que les suites spectrales. Notre objectif est de comprendre cet article en détaillant les preuves de chacun des résultats intermédiaires en apportant parfois des preuves alternatives ainsi que la démonstration générale. On conservera le plan en dix parties de l'article original.

Sommaire

1 Cohomologie de Hochschild

Rappelons la définition de la cohomologie de Hochschild d'une algèbre commutative A sur un corps k. On considère $A^e = A \otimes A$ avec $\otimes = \otimes_k$ ainsi que la multiplication

$$\varepsilon : A^e \to A$$

qui permet de regarder un A-module M comme un A^e-module que l'on notera M_ε ou simplement M si cela ne prête à aucune confusion. La cohomologie de Hochschild de A à valeur dans un A^e-module M est définie par

$$H^\bullet(A, M) = Ext^\bullet_{A^e}(A, M)$$

On peut calculer cette cohomologie en utilisant la résolution projective de A^e-module

$$B_\bullet(A) \xrightarrow{\varepsilon} A$$

où $B_\bullet(A)$ est le complexe "bar" de A [2, 1.1.12]. Très souvent, on souhaite calculer la cohomologie de Hochschild de A à valeur dans un A^e-module M_ε. Dans cette configuration, on a l'identification

$$Hom_{A^e}(B_\bullet(A), M_\varepsilon) = Hom_A(A \otimes_{A^e} B_\bullet(A), M)$$

Combinée avec l'isomorphisme de complexe de A-module

$$A \otimes_{A^e} B_\bullet(A) \simeq C_\bullet(A)$$

où $C_\bullet(A)$ est le complexe de Hochschild de A [2, 1.1.3], ce calcul donne

$$H^n(A, M) = H^n(Hom_A(C_\bullet(A), M))$$

pour tout A-module M.

Exemple (H^0 & H^1) : La différentielle $C_1(A) \to C_0(A)$ est nulle car A est commutative

$$\begin{aligned} A^e &\longrightarrow A \\ s \otimes t &\longmapsto st - ts \end{aligned}$$

Ceci montre que $H^0(A, M) = Hom_A(A, M) = M$ et $H^1(A, M) = Z^1(Hom_A(C_\bullet(A), M))$. La différentielle $C_2(A) \to C_1(A)$ donnée par

$$\begin{aligned} A \otimes A^e &\longrightarrow A^e \\ s \otimes t \otimes r &\longmapsto st \otimes r - s \otimes tr + rs \otimes t \end{aligned}$$

et l'adjonction $Hom_A(A^e, M) = Hom_k(A, M)$ permette d'interpréter les 1-cocycles de $Hom_A(C_\bullet(A), M)$ comme les dérivations de A dans M : $H^1(A, M) = Der_k(A, M)$.

La première manière d'adapter cette définition à un schéma X sur un corps k est de considérer avec $\times = \times_k$ l'application diagonale

$$\delta : X \to X \times X$$

pour regarder chaque faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module comme un faisceau de $\mathcal{O}_{X\times X}$-module en prenant $\delta_*\mathcal{F}$ mais en notant simplement $\mathcal{F}$ à la place de $\delta_*\mathcal{F}$. On peut alors définir la cohomologie de Hochschild de X à valeur dans un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module par

$$H^\bullet(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = Ext^\bullet_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

Cette définition généralise la cohomologie de Hochschild d'une algèbre, au sens où si $X = Spec\ A$ est affine et $\mathcal{F} = M^\sim$ est quasi-cohérent alors

$$H^\bullet(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = H^\bullet(A, M)$$

Ceci provient du fait que $X \times X = Spec\ A^e$, $\delta_*\mathcal{O}_X = A_\varepsilon{}^\sim$ et $\delta_*\mathcal{F} = M_\varepsilon{}^\sim$, ce qui implique

$$Ext^\bullet_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = Ext^\bullet_{A^e}(A, M)$$

Cette définition arrive avec une suite spectrale de Grothendieck. De fait, le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, -)$ envoie les faisceaux de $\mathcal{O}_{X\times X}$-module injectifs vers les faisceaux de $\mathcal{O}_{X\times X}$-module Γ-acyclique. Plus généralement, si $\mathcal{O}$ est un faisceau d'anneau sur un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}$-module et $\mathcal{I}$ un faisceau injectif de $\mathcal{O}$-module alors le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ est flasque : pour toute inclusion d'ouvert $V \subset U$ et tout morphisme de faisceau de $\mathcal{O}|_V$-module

$$\mathcal{F}|_V \to \mathcal{I}|_V$$

correspond un morphisme de faisceau de $\mathcal{O}|_U$-module

$$(\mathcal{F}|_V)_U \to \mathcal{I}|_U$$

où $(\mathcal{F}|_V)_U$ désigne le faisceau $\mathcal{F}|_V$ étendu par 0 sur U [1, Ch.II, Ex.1.19]. On obtient alors un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{I}|_U \\ 0 \arrow[r] & (\mathcal{F}|_V)_U \arrow[r] \arrow[ur] & \mathcal{F}|_U \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

En ajoutant à cela que les faisceaux flasques sont Γ-acycliques [1, Ch.III, Prop.2.5], on obtient la propriété recherchée. Ainsi, la composition de foncteur

$$Hom_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, -) = \Gamma \circ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, -)$$

induit pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module une suite spectrale de Grothendieck

$$E_2^{pq} = H^p(X \times X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})) \Rightarrow Ext^{p+q}_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

Supposons X de type fini et séparé sur k. Les fibres de $\delta_*\mathcal{F}$ sont alors données par

$$(\delta_*\mathcal{F})_{\delta(x)} = \mathcal{F}_x \text{ et } (\delta_*\mathcal{F})_y = 0 \text{ si } y \notin \delta(X)$$

pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module. Puisque $X \times X$ est noethérien et $\delta_*\mathcal{O}_X$ cohérent, ceci montre que le faisceau $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ est à support dans la diagonale $\delta(X)$:

$$(\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}))_y = Ext^q_{\mathcal{O}_{X\times X,y}}((\delta_*\mathcal{O}_X)_y, (\delta_*\mathcal{F})_y)$$

[1, Ch.III, Prop.6.8]. En conséquence, l'unité

$$\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \to \delta_*\delta^{-1}\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme. Puisque $\Gamma \circ \delta_* = \Gamma$, la cohomologie du faisceau $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ sur $X \times X$ coïncide avec la cohomologie du faisceau $\delta^{-1}\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ sur X. On préfèrera donc écrire la suite spectrale de Grothendieck sous la forme

$$H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

en regardant $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ comme un faisceau sur X via δ^{-1}. Ce dernier hérite d'une structure de $\mathcal{O}_X$-module étant donnée que le morphisme de faisceau de $\delta^{-1}\mathcal{O}_{X\times X}$-module

$$\delta^{-1}\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \to \delta^*\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme. En effet, sur les fibres, on est ramené au morphisme

$$Ext^q_{\mathcal{O}_{X\times X,\delta(x)}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{F}_x) \to \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X\times X,\delta(x)}} Ext^q_{\mathcal{O}_{X\times X,\delta(x)}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{F}_x)$$

Pour construire la réciproque, on part de la multiplication

$$\mathcal{O}_{X,x} \times Ext^q_{\mathcal{O}_{X\times X,\delta(x)}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{F}_x) \to Ext^q_{\mathcal{O}_{X\times X,\delta(x)}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{F}_x)$$

induite par la structure de $\mathcal{O}_{X,x}$-module de $\mathcal{F}_x$, puis on vérifie la bilinéarité sur $\mathcal{O}_{X\times X,\delta(x)}$ grâce au triangle commutatif donné par la co-unité

$$\begin{tikzcd}
 & (\delta_*\mathcal{O}_X)_{\delta(x)} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{O}_{X\times X,\delta(x)} \arrow[ur, "\delta^\flat_{\delta(x)}"] \arrow[r, "\delta^\sharp_x"'] & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

où $\delta^\flat : \mathcal{O}_{X\times X} \to \delta_*\mathcal{O}_X$ et $\delta^\sharp : \delta^{-1}\mathcal{O}_{X\times X} \to \mathcal{O}_X$. Par abus de notation, on parlera donc du faisceau $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ sur X au lieux d'écrire $\delta^*\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\delta_*\mathcal{O}_X, \delta_*\mathcal{F})$.

On peut préciser cette suite spectrale pour les schémas lisses. Commençons par rappeler une propriété élémentaire d'algèbre homologique qui nous servira également au paragraphe 5 : si on se donne un complexe de R-module projectif

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

tel que les homologies sont des R-modules projectifs, alors on a des isomorphismes

$$H^q(Hom_R(P_\bullet, N)) \simeq Hom_R(H_q(P_\bullet), N)$$

pour tout R-module N et tout q. Pour le démontrer, on note $Z_q = Z_q(P_\bullet)$ les cycles et $B_q = B_q(P_\bullet)$ les bords de $P_\bullet$ puis on utilise les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow Z_q \longrightarrow P_q \longrightarrow B_q \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B_{q+1} \longrightarrow Z_q \longrightarrow H_q(P_\bullet) \longrightarrow 0$$

et la projectivité de l'homologie de $P_\bullet$ pour obtenir les isomorphismes

$$Z_q \simeq H_q(P_\bullet) \oplus B_{q+1}$$

ce qui permet de prouver par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$

$$P_q \simeq B_q \oplus Z_q$$

de sorte que le complexe $P_\bullet$ s'identifie au complexe

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \longrightarrow & B_q \oplus Z_q & \longrightarrow & B_{q-1} \oplus Z_{q-1} & \longrightarrow \cdots \\
 & (b, c) & \longmapsto & (0, b) &
\end{array}$$

Dans cette configuration, le complexe $Hom_R(P_\bullet, N)$ s'identifie au complexe

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \longrightarrow & Hom_R(B_q, N) \oplus Hom_R(Z_q, N) & \longrightarrow & Hom_R(B_{q+1}, N) \oplus Hom_R(Z_{q+1}, N) & \longrightarrow \cdots \\
 & (f, g) & \longmapsto & (g|_{B_{q+1}}, 0) &
\end{array}$$

Les cocycles s'identifient alors à $Hom_R(B_q, N) \oplus Hom_R(H_q(P_\bullet), N)$ car les morphismes $Z_p \to N$ nuls sur B_{q+1} correspondent aux morphismes $H_q(P_\bullet) \to N$; tandis que les cobords s'identifient à l'image de $Hom_R(Z_q, N)$ par la restriction sur B_{q+1}, c'est à dire $Hom_R(B_{q+1}, N)$. En effet, la seconde suite exacte courte fournit une flèche $Z_q \to B_{q+1}$ qui est l'identité sur B_{q+1} de sorte que la restriction sur B_{q+1} est surjective. Ceci prouve l'isomorphisme annoncé. Ce résultat peut être utilisé dans la situation suivante. Soient

$$S \to R$$

un morphisme d'anneau, M un S-module et N un R-module. Les groupes

$$Ext^q_S(M, N) \text{ et } Tor^S_q(R, M)$$

sont naturellement munit d'une structure de R-module. Si on suppose pour tout q que $Tor^S_q(R, M)$ est projectif sur R alors on a un isomorphisme de R-module

$$Ext^q_S(M, N) \simeq Hom_R(Tor^S_q(R, M), N)$$

Pour le voir, on prend une résolution projective de S-module

$$P_\bullet \to M$$

Le complexe $R \otimes_S P_\bullet$ est alors projectif sur R et son homologie

$$H_q(R \otimes_S P_\bullet) = Tor^S_q(R, M)$$

est par hypothèse projective sur R. On a alors un isomorphisme

$$H^q(Hom_R(R \otimes_S P_\bullet, N)) \simeq Hom_R(H_q(R \otimes_S P_\bullet), N)$$

et le résultat se déduit alors de l'adjonction

$$Hom_R(R \otimes_S P_\bullet, N) \simeq Hom_S(P_\bullet, N)$$

En particulier, lorsque A est lisse sur k, on peut appliquer ceci au morphisme d'anneau

$$\varepsilon : A^e \to A$$

car le théorème de HKR fournit des isomorphismes naturels de A-module

$$Tor^{A^e}_q(A, A) \simeq \Omega^q_A$$

de sorte que $Tor^{A^e}_q(A, A)$ est projectif sur A. On obtient un isomorphisme de A-module

$$Ext^q_{A^e}(A, N) \simeq Hom_A(\Omega^q_A, N)$$

Exemple : Si $X = Spec\ A$ et $\mathcal{F} = N^\sim$ alors $H^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = Ext^n_{A^e}(A, N) \simeq Hom_A(\Omega^n_A, N)$.

Supposons X lisse sur k. Pour tout ouvert affine $U = Spec\ A$ de X, on dispose d'un isomorphisme de faisceau de $\mathcal{O}_U$-module

$$\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)|_U = Ext^q_{A^e}(A, A)^\sim \simeq (\Omega^q_U)^\vee$$

[1, Ch.III, Prop.6.2 & Ex.6.7]. Ces isomorphismes naturels se recollent pour former un isomorphisme de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module

$$\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \simeq (\Omega^q_X)^\vee \simeq \bigwedge^q \mathcal{T}_X$$

où $\mathcal{T}_X = (\Omega^1_X)^\vee$ est le faisceau tangent de X, le deuxième isomorphisme étant donné par le fait que Ω^1_X est localement libre. Avant de conclure, énonçons une propriété générale pour un faisceau d'anneau $\mathcal{O}$ arbitraire. Pour tout faisceau $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}$-module et tout ouvert U, l'application $\Gamma(U, \mathcal{O})$-bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \times \Gamma(U, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{G})) \\ (\theta, s) & \longmapsto & (- \otimes s) \circ \theta \end{array}$$

induit un morphisme de faisceau de $\mathcal{O}$-module

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{G})$$

Lorsque $\mathcal{A}$ est projectif sur $\mathcal{O}$ et $\mathcal{G}$ est localement libre, c'est un isomorphisme :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{A}_x, \mathcal{B}_x) \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{G}_x \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{A}_x, \mathcal{B}_x)$$

$$\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{A}_x, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_x) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{A}_x, \mathcal{B}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{G}_x)$$

avec $\mathcal{G}_x \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_x$. Puisque les faisceaux localement libres sont plats, on obtient en particulier pour tout faisceau localement libre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module des isomorphismes

$$\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{F} \simeq \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

On peut aussi appliquer cette propriété au faisceau canonique $\omega_X = \Omega^d_X$ de X

$$(\textstyle\bigwedge^q \mathcal{T}_X) \otimes \omega_X \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \mathcal{O}_X) \otimes \omega_X \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \omega_X)$$

Et la multiplication des formes différentielles

$$\Omega^q_X \otimes \Omega^{d-q}_X \to \omega_X$$

induit par adjonction un isomorphisme

$$\Omega^{d-q}_X \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \omega_X)$$

ce qui peut se vérifier en utilisant la liberté sur $\mathcal{O}_{X,x}$ des fibres $\Omega^q_{X,x} = \Omega^q_{\mathcal{O}_{X,x}}$. Le faisceau $\omega_X \otimes \mathcal{F}$ étant localement libre, on peut résumer ce qui précède par l'isomorphisme

$$\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{O}_X, \omega_X \otimes \mathcal{F}) \simeq \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F}$$

où $d = dim\ X$. Ainsi la suite spectrale donnée par la cohomologie de Hochschild de X à valeur dans $\omega_X \otimes \mathcal{F}$ s'écrit

$$H^p(X, \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_X, \omega_X \otimes \mathcal{F})$$

On verra au paragraphe 2 que si X est quasi-projectif sur un corps de caractéristique nulle alors cette suite spectrale dégénère et induit une décomposition

$$H^n(\mathcal{O}_X, \omega_X \otimes \mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F})$$

2 Définition par l'hyper-ext

La deuxième définition de la cohomologie de Hochschild d'un schéma X sur un corps s'inspire d'avantage du calcul

$$H^n(A, M) = H^n(Hom_A(C_\bullet(A), M))$$

Soit $\mathcal{C}_\bullet$ le complexe de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module associé au préfaisceau

$$U \mapsto C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$$

La cohomologie de Hochschild d'un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module sur X peut être définie par

$$HH^\bullet(X, \mathcal{F}) = \mathbb{E}xt^\bullet_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{F})$$

c'est à dire pour toute résolution injective $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module

$$HH^n(X, \mathcal{F}) = H^n(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet))$$

L'objectif principal de l'article de Swan est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1 : Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps. Il existe un isomorphisme de δ-foncteur en $\mathcal{F}$

$$H^\bullet(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \simeq HH^\bullet(X, \mathcal{F})$$

On peut donner par exemple l'application suivante.

Corollaire 2.2 : Soit X un schéma projectif sur un corps. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module, $HH^n(X, \mathcal{F})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Preuve : Les faisceaux $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ sont cohérents donc les $H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}))$ sont des espaces vectoriels de dimension finie [1, Ch.III, Th.5.5]. De plus, X est un espace topologique noethérien de dimension N finie, donc $H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})) = 0$ pour $p > N$ [1, Ch.III, Th.2.7] et ainsi $H^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ est une somme directe finie d'espace vectoriels de dimension finie. ■

Dans l'article original [3], Swan remarque qu'on peut également définir la cohomologie cyclique de X en considérant le complexe de faisceau $\mathcal{D}_\bullet$ associé au préfaisceau

$$U \mapsto D_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$$

où $D_\bullet(A)$ désigne le complexe total du double complexe de Connes d'une algèbre A sur un corps [2, 2.1.7] puis en posant

$$HC^\bullet(X, \mathcal{F}) = \mathbb{E}xt^\bullet_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}_\bullet, \mathcal{F})$$

La suite exacte courte usuelle [2, 2.2.2]

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A) \longrightarrow D_\bullet(A) \longrightarrow D_\bullet(A)[-2] \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte courte de complexe de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_\bullet \longrightarrow \mathcal{D}_\bullet \longrightarrow \mathcal{D}_\bullet[-2] \longrightarrow 0$$

et par suite une longue suite exacte cohomologique de Connes

$$\cdots \longrightarrow HC^{n-2}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow HC^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow HH^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow HC^{n-1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

qui permet de généraliser par récurrence le corollaire 2.2 à la cohomologie cyclique de X.

La principale difficulté autour de cette définition réside dans le fait que $\mathcal{C}_\bullet$ n'est pas quasi-cohérent en général. Néanmoins, tout comme la précédente, elle arrive avec une suite spectrale.

Lemme 2.3 : Soit $\mathcal{O}$ un faisceau d'anneau sur un espace topologique. Pour tout complexe de faisceau $\mathcal{A}_\bullet$ de $\mathcal{O}$-module borné en bas et tout faisceau $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}$-module, il existe une suite spectrale

$$E_2^{pq} = Ext^p_{\mathcal{O}}(H_q(\mathcal{A}_\bullet), \mathcal{G}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{G})$$

Preuve : Soit $\mathcal{G} \to \mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective de faisceau de $\mathcal{O}$-module. Puisque $\mathcal{A}_\bullet$ est borné en bas, la suite spectrale donnée en filtrant selon les colonnes le double complexe

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_{q+1}, \mathcal{I}^p) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_{q+1}, \mathcal{I}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_q, \mathcal{I}^p) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_q, \mathcal{I}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

converge vers la cohomologie totale $\mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{G})$. On peut calculer la deuxième page :

$$E_0^{pq} = Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_q, \mathcal{I}^p)$$

$$E_1^{pq} = H^q(Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{I}^p)) = Hom_{\mathcal{O}}(H_q(\mathcal{A}_\bullet), \mathcal{I}^p)$$

$$E_2^{pq} = H^p_h(H^q_v(Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet))) = Ext^p_{\mathcal{O}}(H_q(\mathcal{A}_\bullet), \mathcal{G}) \ \blacksquare$$

Lorsque l'on prend $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{A}_\bullet = \mathcal{C}_\bullet$ et que l'on pose $\mathcal{H}_q = H_q(\mathcal{C}_\bullet)$, on obtient

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_q, \mathcal{F}) \Rightarrow HH^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

Pour comprendre le faisceau $\mathcal{H}_q$, on a besoin d'une propriété importante concernant l'homologie de Hochschild des algèbres commutatives. Pour tout morphisme plat d'algèbre

$$A \to B$$

le morphisme d'algèbre induit

$$A^e \to B^e$$

est également plat et on dispose alors d'une formule de changement de base

$$Tor_n^{A^e}(M, N) \simeq Tor_n^{B^e}(B^e \otimes_{A^e} M, N)$$

pour tout A^e-module M et tout B^e-module N. Puisque $B \otimes_A A \simeq B$, on obtient

$$B \otimes_A Tor_n^{A^e}(M, A) \simeq Tor_n^{A^e}(M, B) \simeq Tor_n^{B^e}(B^e \otimes_{A^e} M, B)$$

$$\Rightarrow B \otimes_A H_n(A, M) \simeq H_n(B, B^e \otimes_{A^e} M)$$

En particulier, l'homologie de Hochschild commute avec la localisation :

$$(S^{-1}A)^e \otimes_{A^e} A \simeq (S^{-1}A) \otimes_A A \otimes_A (S^{-1}A) \simeq S^{-1}A$$

$$\Rightarrow (S^{-1}A) \otimes_A HH_n(A) \simeq HH_n(S^{-1}A)$$

où $HH_\bullet(A) = H_\bullet(A, A)$. On rencontrera les morphismes plats dans d'autres situations. Par exemple, une immersion ouverte de schéma affine

$$Spec\ B \hookrightarrow Spec\ A$$

induit sur les sections globales un morphisme plat

$$\varphi : A \to B$$

Pour s'en convaincre, il suffit de prouver que tout monomorphisme de A-module

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

est envoyé par le foncteur $B \otimes_A -$ vers un monomorphisme

$$0 \longrightarrow B \otimes_A M \xrightarrow{1\otimes f} B \otimes_A N$$

Par hypothèse, φ induit pour tout $\mathfrak{q} \in Spec\ B$ un isomorphisme d'anneau

$$A_\mathfrak{p} \simeq B_\mathfrak{q}$$

où $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. On a alors un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
B_\mathfrak{q} \otimes_B B \otimes_A M \arrow[r, "1\otimes 1\otimes f"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & B_\mathfrak{q} \otimes_B B \otimes_A N \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\
A_\mathfrak{p} \otimes_A M \arrow[r, "1\otimes f"'] & A_\mathfrak{p} \otimes_A N
\end{tikzcd}$$

Puisque $A_\mathfrak{p}$ est plat sur A, le morphisme du bas est un monomorphisme. Par conséquent,

$$\forall \mathfrak{q} \in Spec\ B,\ B_\mathfrak{q} \otimes_B ker(1 \otimes f) = 0$$

$$\Rightarrow ker(1 \otimes f) = 0$$

d'où le résultat. Donnons à présent un lemme important qui nous accompagnera jusqu'à la démonstration du théorème 2.1.

Lemme 2.4 : Soit X un schéma de type fini sur un corps.
(1) $\mathcal{H}_q$ est un faisceau cohérent pour tout q.
(2) $\Gamma(U, \mathcal{H}_q) = HH_q(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$ pour tout ouvert affine U de X.
(3) Si X est lisse alors $\mathcal{H}_q \simeq \Omega^q_X$.
(4) Si $X = Spec\ A$ est affine alors on a un quasi-isomorphisme

$$\delta^*\mathcal{B}_\bullet \overset{q.is.}{\to} \mathcal{C}_\bullet$$

où $\mathcal{B}_\bullet$ est le complexe de faisceau sur $X \times X$ associé au complexe de A^e-module $B_\bullet(A)$.

Preuve : La faisceautification est un foncteur exact, donc $\mathcal{H}_q$ est associé au préfaisceau

$$U \mapsto HH_q(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$$

Or, l'homologie de Hochschild commute avec la localisation. Donc si U est un ouvert affine de X alors le préfaisceau

$$U \supset V \mapsto HH_q(\Gamma(V, \mathcal{O}_X))$$

correspond à la localisation du $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-module $HH_q(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$. En particulier,

$$\Gamma(U, \mathcal{H}_q) = HH_q(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$$

Puisque X est de type fini sur un corps, $HH_q(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$ est de type fini sur $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$: si A est une algèbre de type fini sur un corps k alors on a un morphisme d'algèbre surjectif

$$k[x_1, \ldots, x_n] \to A$$

qui induit un morphisme d'anneau surjectif

$$A[x_1, \ldots, x_n] \to A \otimes A$$

ce qui montre que A^e est Noethérien. Ainsi, A admet une résolution projective de A^e-module de type fini et par conséquent $Tor_q^{A^e}(A, A)$ est un A^e-module de type fini. Puisque $HH_q(A) = Tor_q^{A^e}(A, A)$ est un A-bimodule symétrique, $HH_q(A)$ est un A-module de type fini. Tout ceci prouve (1) et (2). Le point (3) découle directement du théorème de HKR. Supposons $X = Spec\ A$ affine. Sur les ouverts principaux de $X \times X$, on a une composition

$$(A^e)_f \otimes_{A^e} B_\bullet(A) \to A_{\varepsilon(f)} \otimes_{A^e} B_\bullet(A) \simeq A_{\varepsilon(f)} \otimes_A C_\bullet(A) \to C_\bullet(A_{\varepsilon(f)})$$

qui défini un morphisme de faisceau de $\mathcal{O}_{X\times X}$-module

$$\mathcal{B}_\bullet \to \delta_* \mathcal{C}_\bullet$$

On obtient par adjonction un morphisme de complexe de $\mathcal{O}_X$-module

$$\delta^* \mathcal{B}_\bullet \to \mathcal{C}_\bullet$$

C'est un quasi-isomorphisme. Pour le voir, il suffit de calculer l'homologie sur les fibres en chaque idéal premier $\mathfrak{p} \in X$:

$$(\delta^* \mathcal{B}_\bullet)_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p} \otimes_{(A^e)_\mathfrak{q}} ((A^e)_\mathfrak{q} \otimes_{A^e} B_\bullet(A)) = A_\mathfrak{p} \otimes_{A^e} B_\bullet(A) = A_\mathfrak{p} \otimes_A C_\bullet(A)$$

où $\mathfrak{q} \in X \times X$ désigne l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ par la multiplication. Le morphisme de complexe de $A_\mathfrak{p}$-module

$$A_\mathfrak{p} \otimes_A C_\bullet(A) \to C_\bullet(A_\mathfrak{p})$$

est un quasi-isomorphisme :

$$H_q(A_\mathfrak{p} \otimes_A C_\bullet(A)) \simeq A_\mathfrak{p} \otimes_A H_q(C_\bullet(A)) = HH_q(A)_\mathfrak{p} \simeq HH_q(A_\mathfrak{p}) = H_q(C_\bullet(A_\mathfrak{p})) \blacksquare$$

Ce résultat permet de réécrire la suite spectrale précédente lorsque X est lisse :

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \mathcal{F}) \Rightarrow HH^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

On peut calculer $Ext^p_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \mathcal{F})$ en utilisant la suite spectrale de Grothendieck

$$E_2^{ij} = H^i(X, \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \mathcal{F})) \Rightarrow Ext^{i+j}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \mathcal{F})$$

donnée par la composition de foncteur

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, -) = \Gamma \circ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, -)$$

L'idée est que Ω^q_X est localement libre de rang fini ce qui implique d'une part que $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $j > 0$ et par conséquent la page E_2 de la suite de Grothendieck ne comporte qu'une seule ligne ce qui induit un isomorphisme

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \mathcal{F}) \simeq H^p(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \mathcal{F}))$$

et d'autre part que le morphisme de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module

$$(\Omega^q_X)^\vee \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \mathcal{F})$$

introduit au premier paragraphe est un isomorphisme. En particulier,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X, \omega_X \otimes \mathcal{F}) \simeq \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F}$$

Ainsi la suite spectrale donnée par la cohomologie de Hochschild de $\omega_X \otimes \mathcal{F}$ sur X s'écrit

$$H^p(X, \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F}) \Rightarrow HH^{p+q}(X, \omega_X \otimes \mathcal{F})$$

Ceci nous amène au deuxième théorème principal de l'article de Swan.

Théorème 2.5 : Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps. Si $\mathcal{H}_q$ est localement libre pour tout q alors les suites spectrales

$$H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_q, \mathcal{F}) \Rightarrow HH^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

sont isomorphes. En particulier, si X est lisse alors les suites spectrales

$$H^p(X, \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_X, \omega_X \otimes \mathcal{F})$$

$$H^p(X, \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F}) \Rightarrow HH^{p+q}(X, \omega_X \otimes \mathcal{F})$$

sont isomorphes.

Ce théorème nous permet de démontrer la décomposition de la cohomologie de Hochschild annoncée à la fin du paragraphe 1.

Corollaire 2.6 : Soit X un schéma lisse et quasi-projectif sur un corps de caractéristique nulle. La suite spectrale

$$H^p(X, \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_X, \omega_X \otimes \mathcal{F})$$

dégénère et induit un isomorphisme

$$H^n(\mathcal{O}_X, \omega_X \otimes \mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F})$$

Preuve : Le théorème 2.5 nous ramène à la suite spectrale

$$H^p(X, \Omega^{d-q}_X \otimes \mathcal{F}) \Rightarrow HH^{p+q}(X, \omega_X \otimes \mathcal{F})$$

L'idée est d'utiliser la λ-décomposition de l'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative A sur un anneaux contenant $\mathbb{Q}$ [2, 4.5.10] :

$$C_\bullet(A) = \bigoplus_{i\geq 0} C^{(i)}_\bullet(A)$$

où $C^{(i)}_\bullet(A)$ est un sous-complexe de $C_\bullet(A)$ dont l'homologie $HH^{(i)}_n(A)$ satisfait

$$HH_0(A) = HH^{(0)}_0(A)$$

$$HH_n(A) = \bigoplus_{0\leq i\leq n} HH^{(i)}_n(A),\ n \geq 1$$

Lorsque A est lisse, on a $HH_n^{(i)}(A) = 0$ pour tout $i \neq n$ [2, 3.4.4 & 4.5.12]. Ceci induit une décomposition

$$\mathcal{C}_\bullet = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{C}_\bullet^{(i)}$$

de sorte que la suite spectrale

$$H^p(X, \Omega_X^{d-q} \otimes \mathcal{F}) \Rightarrow HH^{p+q}(X, \omega_X \otimes \mathcal{F})$$

se décompose comme somme directe des suites spectrales associées aux doubles complexes $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_\bullet^{(i)}, \mathcal{I}^\bullet)$ où $\omega_X \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ est une résolution injective. La deuxième page

$$E_2^{pq} = Ext^p_{\mathcal{O}_X}(H_q(\mathcal{C}_\bullet^{(i)}), \omega_X \otimes \mathcal{F})$$

consiste alors en une seule colonne $q = i$, ce qui montre la dégénérescence à la deuxième page et donne ainsi le résultat. ■

Exemple : Si A est un anneau Noethérien alors tous les faisceaux quasi-cohérents sur $X = Spec\ A$ sont Γ-acycliques [1, Ch.III, Th.3.5]. Ainsi, si A est une algèbre lisse sur un corps de caractéristique nulle et si $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent sur X alors le corollaire 2.6 donne

$$H^n(\mathcal{O}_X, \omega_X \otimes \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \Omega_X^{d-n} \otimes \mathcal{F})$$

Or, le théorème de HKR nous avait permis de démontrer au paragraphe 1 l'identité

$$H^n(\mathcal{O}_X, \omega_X \otimes \mathcal{F}) \simeq Hom_A(\Omega_A^n, \Omega_A^d \otimes_A M)$$

où $\mathcal{F} = M^\sim$. L'isomorphisme de A-module

$$Hom_A(\Omega_A^n, \Omega_A^d \otimes_A M) \simeq \Omega_A^{d-n} \otimes_A M$$

nous permet alors d'interpréter le corollaire 2.6 comme une généralisation du théorème de HKR aux schémas lisses et quasi-projectifs sur un corps de caractéristique nulle.

3 Définition de Gerstenhaber-Schack

Introduisons à présent la troisième définition de la cohomologie de Hochschild d'un schéma X sur un corps. Dans ce paragraphe, tous les préfaisceaux sont définis sur la sous-catégorie $\mathbb{A} \subset Top(X)$ des ouverts affines de X. Pour distinguer les faisceaux des préfaisceaux, on notera $\mathcal{O}$ le faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$ vu comme un préfaisceau d'anneau et

$$\mathcal{D}_\bullet : U \mapsto C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$$

le complexe de préfaisceau de $\mathcal{O}$-module auquel $\mathcal{C}_\bullet$ est associé.

Considérons le préfaisceau d'anneau

$$\mathcal{O}^e : U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \otimes \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

La multiplication induit un morphisme de préfaisceau d'anneau

$$\mathcal{O}^e \to \mathcal{O}$$

qui permet de regarder tous les faisceaux de $\mathcal{O}_X$-module comme des préfaisceaux de $\mathcal{O}^e$-module. Gerstenhaber et Schack définissent la cohomologie de Hochschild de X à valeur dans un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module par

$$Ext^\bullet_{\mathcal{O}^e}(\mathcal{O}, \mathcal{F})$$

Naïvement, on voudrait considérer le complexe de préfaisceau de $\mathcal{O}^e$-module

$$\mathcal{B}_\bullet : U \mapsto B_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$$

comme une résolution de préfaisceau de $\mathcal{O}^e$-module

$$\mathcal{B}_\bullet \to \mathcal{O}$$

et utiliser l'identification suivante

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{F}) = Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}_\bullet, \mathcal{F}) = Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}^e} \mathcal{B}_\bullet, \mathcal{F}) = Hom_{\mathcal{O}^e}(\mathcal{B}_\bullet, \mathcal{F})$$

Le problème est que $\mathcal{B}_\bullet$ n'est en général pas projectif sur $\mathcal{O}^e$. Par contre, chaque $\mathcal{B}_\bullet(U)$ est projectif sur $\mathcal{O}^e(U)$, et cette propriété va nous permettre de construire une résolution projective de préfaisceau de $\mathcal{O}^e$-module convenable et de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1 : $Ext^\bullet_{\mathcal{O}^e}(\mathcal{O}, \mathcal{F}) \simeq HH^\bullet(X, \mathcal{F})$.

Le but est de construire une résolution projective de préfaisceau de $\mathcal{O}^e$-module à partir de $\mathcal{B}_\bullet$, mais on peut la définir dans un cadre plus général. Soient $\mathcal{A}$ un préfaisceau d'anneau et $\mathcal{A} - mod$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathcal{A}$-module. On dispose d'une adjonction

$$\begin{aligned} R :\ \mathcal{A} - mod &\longrightarrow \prod_{U \in \mathbb{A}} \mathcal{A}(U) - mod \\ \mathcal{M} &\longmapsto (\mathcal{M}(U))_{U \in \mathbb{A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L :\ \prod_{U \in \mathbb{A}} \mathcal{A}(U) - mod &\longrightarrow \mathcal{A} - mod \\ M &\longmapsto (U \mapsto \bigoplus_{V \supset U} \mathcal{A}(U) \otimes_{\mathcal{A}(V)} M_V) \end{aligned}$$

dont on peut expliciter l'unité η et la co-unité ε :

$$\begin{aligned}(\eta_M)_U :\ M_U &\longrightarrow \bigoplus_{V\supset U} \mathcal{A}(U)\otimes_{\mathcal{A}(V)} M_V \\ m &\longmapsto \begin{cases} 1\otimes m & \text{si } V=U \\ 0 & \text{si } V\neq U \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathcal{M}}(U) :\ \bigoplus_{V\supset U} \mathcal{A}(U)\otimes_{\mathcal{A}(V)} \mathcal{M}(V) &\longrightarrow \mathcal{M}(U) \\ (a_V\otimes m_V)_{V\supset U} &\longmapsto \sum_{V\supset U} a_V\cdot m_V|_U\end{aligned}$$

On note $P = LR$ et on définit un foncteur

$$\begin{aligned}Q :\ \mathcal{A}-mod &\longrightarrow \mathcal{A}-mod \\ \mathcal{M} &\longmapsto ker(\varepsilon_{\mathcal{M}})\end{aligned}$$

Ceci nous fournit pour tout préfaisceau $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$-module et tout ouvert $U \in \mathbb{A}$ une suite exacte scindée de $\mathcal{A}(U)$-module

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q\mathcal{M}(U) \arrow[r, "\subset"] & P\mathcal{M}(U) \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{M}}(U)"] & \mathcal{M}(U) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 0 \end{tikzcd}$$

où $s : m \mapsto 1\otimes m \in \mathcal{A}(U)\otimes_{\mathcal{A}(V)} \mathcal{M}(U) \subset P\mathcal{M}(U)$. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n\mathcal{M} = PQ^n\mathcal{M}$ et on a une suite exacte scindée de $\mathcal{A}(U)$-module

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q^{n+1}\mathcal{M}(U) \arrow[r] & P_n\mathcal{M}(U) \arrow[r] & Q^n\mathcal{M}(U) \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 0 \end{tikzcd}$$

On a ainsi construit une résolution de préfaisceau de $\mathcal{A}$-module

$$\cdots \longrightarrow P_2\mathcal{M} \longrightarrow P_1\mathcal{M} \longrightarrow P_0\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

Supposons que $\mathcal{M}(U)$ est projectif sur $\mathcal{A}(U)$ pour tout $U\in\mathbb{A}$. Dans ce cas l'objet $R\mathcal{M} = (\mathcal{M}(U))_{U\in\mathbb{A}}$ est projectif dans $\prod_{U\in\mathbb{A}} \mathcal{A}(U)-mod$. Puisque R est exact, L préserve les projectifs et donc $P\mathcal{M}$ est projectif sur $\mathcal{A}$. Les suites exactes scindées précédentes nous permettent de démontrer par récurrence que chaque $Q^n\mathcal{M}(U)$ est projectif sur $\mathcal{A}(U)$, de sorte que $P_n\mathcal{M}$ est également projectif sur $\mathcal{A}$. On a ainsi construit une résolution projective de préfaisceau de $\mathcal{A}$-module

$$P_\bullet\mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

Au besoin, on notera plutôt $P_n^{\mathcal{A}}\mathcal{M}$ si l'on doit préciser le préfaisceau d'anneau $\mathcal{A}$. Avant de démontrer le théorème 3.1, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2 : Si $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ est un morphisme de préfaisceau d'anneau alors pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} P_n^{\mathcal{A}}\mathcal{M} \simeq P_n^{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M})$$

Preuve : Pour tout $U\in\mathbb{A}$, on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} P^{\mathcal{A}}\mathcal{M})(U) &= \mathcal{B}(U)\otimes_{\mathcal{A}(U)} \Big(\bigoplus_{V\supset U} \mathcal{A}(U)\otimes_{\mathcal{A}(V)} \mathcal{M}(V)\Big) \\ &\simeq \bigoplus_{V\supset U} \mathcal{B}(U)\otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{A}(U)\otimes_{\mathcal{A}(V)} \mathcal{M}(V) \\ &\simeq \bigoplus_{V\supset U} \mathcal{B}(U)\otimes_{\mathcal{B}(V)} \mathcal{B}(V)\otimes_{\mathcal{A}(V)} \mathcal{M}(V) = P^{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M})(U)\end{aligned}$$

Puis on conclue par récurrence en utilisant le diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} Q^{\mathcal{A}}\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} P^{\mathcal{A}}\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\wr", no head, shift left] \arrow[d, no head, shift right] & \mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q^{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}) \arrow[r] & P^{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}) \arrow[r] & \mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et le lemme des cinq. L'exactitude de la première ligne est donnée par la présence d'une section lorsque l'on évalue en chaque ouvert $U \in \mathbb{A}$. ■

Preuve du théorème 3.1 : On considère la résolution de préfaisceau de $\mathcal{O}^e$-module

$$\mathcal{B}_\bullet \to \mathcal{O}$$

et les résolutions projectives de préfaisceau de $\mathcal{O}^e$-module

$$P_\bullet \mathcal{B}_p \to \mathcal{B}_p$$

Si on filtre selon les colonnes le double complexe

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_q\mathcal{B}_p \arrow[r] \arrow[d] & P_q\mathcal{B}_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_{q-1}\mathcal{B}_p \arrow[r] \arrow[d] & P_{q-1}\mathcal{B}_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

on obtient la suite spectrale convergente suivante :

$$E^1_{pq} = \begin{cases} \mathcal{B}_p & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q \neq 0 \end{cases}$$

$$E^2_{pq} = \begin{cases} \mathcal{O} & \text{si } (p,q) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (p,q) \neq (0,0) \end{cases}$$

Le complexe total fournit ainsi une résolution projective de préfaisceau de $\mathcal{O}^e$-module

$$P_\bullet \mathcal{B}_\bullet \to \mathcal{O}$$

ce qui donne $Ext^n_{\mathcal{O}^e}(\mathcal{O},\mathcal{F}) = H^n(Hom_{\mathcal{O}^e}(P_\bullet\mathcal{B}_\bullet,\mathcal{F}))$. Soit $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module. Si on regarde $\mathcal{F}$ comme un complexe concentré en 0, on a alors un quasi-isomorphisme

$$Hom_{\mathcal{O}^e}(P_\bullet\mathcal{B}_\bullet,\mathcal{F}) \overset{q.is.}{\to} Hom_{\mathcal{O}^e}(P_\bullet\mathcal{B}_\bullet,\mathcal{I}^\bullet)$$

Pour le voir, on filtre selon les colonnes le double complexe

$$\begin{tikzcd}
& \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}^e}((P_\bullet\mathcal{B}_\bullet)_p,\mathcal{I}^{q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}^e}((P_\bullet\mathcal{B}_\bullet)_{p+1},\mathcal{I}^{q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}^e}((P_\bullet\mathcal{B}_\bullet)_p,\mathcal{I}^{q}) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}^e}((P_\bullet\mathcal{B}_\bullet)_{p+1},\mathcal{I}^{q}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
& \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

et on obtient par projectivité

$$E_1^{pq} = H^q(Hom_{\mathcal{O}^e}((P_\bullet \mathcal{B}_\bullet)_p, \mathcal{I}^\bullet)) = Hom_{\mathcal{O}^e}((P_\bullet \mathcal{B}_\bullet)_p, H^q(\mathcal{I}^\bullet))$$

d'où l'isomorphisme à la page E_1. En utilisant l'adjonction et le lemme 3.2, on a

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{O}^e}(P_\bullet^{\mathcal{O}^e} \mathcal{B}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet) &= Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}^e} P_\bullet^{\mathcal{O}^e} \mathcal{B}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet) \\ &\simeq Hom_{\mathcal{O}}(P_\bullet^{\mathcal{O}}(\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}^e} \mathcal{B}_\bullet), \mathcal{I}^\bullet) \simeq Hom_{\mathcal{O}}(P_\bullet^{\mathcal{O}} \mathcal{D}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet) \end{aligned}$$

Comme précédemment, on peut regarder $\mathcal{D}_\bullet$ comme un double complexe centré en la ligne 0 et obtenir un quasi-isomorphisme avec le complexe total

$$P_\bullet \mathcal{D}_\bullet \overset{q.is.}{\to} \mathcal{D}_\bullet$$

car lorsque l'on filtre selon les colonnes le double complexe

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ \cdots \arrow[r] & P_q \mathcal{D}_p \arrow[r] \arrow[d] & P_q \mathcal{D}_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & P_{q-1} \mathcal{D}_p \arrow[r] \arrow[d] & P_{q-1} \mathcal{D}_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{tikzcd}$$

on obtient l'isomorphisme à la page E^1 :

$$E_{pq}^1 = \begin{cases} \mathcal{D}_p & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q \neq 0 \end{cases}$$

Puis l'injectivité donne un quasi-isomorphisme

$$Hom_{\mathcal{O}}(P_\bullet \mathcal{D}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet) \overset{q.is.}{\to} Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)$$

ce qui se voit en filtrant selon les colonnes le double complexe

$$\begin{tikzcd} & \vdots & \vdots & \\ \cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}_{q+1}, \mathcal{I}^p) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}_{q+1}, \mathcal{I}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}_q, \mathcal{I}^p) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}_q, \mathcal{I}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\ & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$E_1^{pq} = H^q(Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}_\bullet, \mathcal{I}^p)) = Hom_{\mathcal{O}}(H_q(\mathcal{D}_\bullet), \mathcal{I}^p)$$

Notons que $\mathcal{I}^p$ est injectif comme préfaisceau de $\mathcal{O}$-module car l'inclusion des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-module dans les préfaisceaux de $\mathcal{O}$-module admet comme adjoint à gauche la faisceautification, qui est exacte. Cette inclusion préserve donc les injectifs. On peut à présent terminer la démonstration :

$$\begin{aligned} Ext^n_{\mathcal{O}^e}(\mathcal{O}, \mathcal{F}) &= H^n(Hom_{\mathcal{O}^e}(P_\bullet \mathcal{B}_\bullet, \mathcal{F})) \\ &\simeq H^n(Hom_{\mathcal{O}^e}(P_\bullet \mathcal{B}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)) \\ &\simeq H^n(Hom_{\mathcal{O}}(P_\bullet \mathcal{D}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)) \\ &\simeq H^n(Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)) \\ &\simeq H^n(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)) = HH^n(X, \mathcal{F}) \blacksquare \end{aligned}$$

4 Résolutions localement libres

Pour démontrer les théorèmes 2.1 et 2.5, il nous faut établir un lien entre la cohomologie de Hochschild d'un schéma X et l'hyper-ext du complexe $\mathcal{C}_\bullet$. Pour palier aux difficultés concernant le complexe $\mathcal{C}_\bullet$, on va se ramener dans un premier temps à considérer l'hyper-ext d'une résolution localement libre de $\delta_*\mathcal{O}_X$. Dans ce paragraphe, on va mettre en avant des propriétés de complexe de faisceau qui nous serviront jusqu'à la démonstration du théorème général.

On commence par énoncer un résultat fondamental pour notre étude, que l'on peut énoncer sous la généralité suivante. On considère $\mathcal{O}$ un faisceau d'anneau sur un espace topologique X. Pour ne pas se soucier de la convergence des suites spectrales, tous les complexes de faisceau seront, dans ce paragraphe, supposés bornés en bas.

Lemme 4.1 : Un quasi-isomorphisme de complexe de faisceau de $\mathcal{O}$-module

$$\mathcal{A}_\bullet \stackrel{q.is}{\to} \mathcal{B}_\bullet$$

induit un isomorphisme entre les suites spectrales

$$Ext^p_{\mathcal{O}}(H_q(\mathcal{A}_\bullet), \mathcal{G}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{G})$$

$$Ext^p_{\mathcal{O}}(H_q(\mathcal{B}_\bullet), \mathcal{G}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}_\bullet, \mathcal{G})$$

pour tout faisceau $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}$-module. Deux morphismes de complexe homotopes

$$\mathcal{A}_\bullet \rightrightarrows \mathcal{B}_\bullet$$

induisent le même morphisme de suite spectrale.

Preuve : Soit $\mathcal{G} \to \mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective. La première suite spectrale est donnée en filtrant selon les colonnes le double complexe

$$\begin{tikzcd}
& \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_{q+1}, \mathcal{I}^p) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_{q+1}, \mathcal{I}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_q, \mathcal{I}^p) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_q, \mathcal{I}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
& \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$E_0^{pq} = Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_q, \mathcal{I}^p)$$

$$E_1^{pq} = H^q(Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{I}^p)) = Hom_{\mathcal{O}}(H_q(\mathcal{A}_\bullet), \mathcal{I}^p)$$

$$E_2^{pq} = H_h^p(H_v^q(Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet))) = Ext^p_{\mathcal{O}}(H_q(\mathcal{A}_\bullet), \mathcal{G})$$

Tout morphisme de complexe $\mathcal{A}_\bullet \to \mathcal{B}_\bullet$ induit un morphisme de double complexe

$$Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet) \to Hom_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)$$

puis un morphisme entre les suites spectrales associées. On voit qu'un quasi-isomorphisme induit un isomorphisme entre les pages E_1 et par conséquent entre les suites spectrales $(E_r)_{r\geq 2}$. De même, deux applications homotopes induisent le même morphisme sur la page E_1 et donc le même morphisme de suite spectrale $(E_r)_{r\geq 2}$. ■

Lemme 4.2 : Soient $\mathcal{L}_\bullet$ un complexe de faisceau localement libre de $\mathcal{O}$-module et

$$\mathcal{A}_\bullet \overset{q.is}{\to} \mathcal{B}_\bullet$$

un quasi-isomorphisme de complexe de faisceau de $\mathcal{O}$-module. On a un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{A}^\bullet) \overset{q.is}{\to} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{B}^\bullet)$$

Preuve : On dispose d'un morphisme de double complexe de faisceau de $\mathcal{O}$-module

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{A}^\bullet) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{B}^\bullet)$$

En filtrant selon les colonnes le double complexe de faisceau

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_p, \mathcal{A}^{q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_{p+1}, \mathcal{A}^{q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_p, \mathcal{A}^{q}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_{p+1}, \mathcal{A}^{q}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

on obtient un isomorphisme à la page E_1 :

$$E_1^{pq} = H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_p, \mathcal{A}^\bullet)) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_p, H^q(\mathcal{A}^\bullet))$$

Cette égalité de faisceau découle d'une identification des fibres

$$(H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_p, \mathcal{A}^\bullet)))_x = H^q(Hom_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{L}_{p,x}, \mathcal{A}^\bullet_x))$$

$$= Hom_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{L}_{p,x}, H^q(\mathcal{A}^\bullet_x)) = (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}_p, H^q(\mathcal{A}^\bullet)))_x$$

en utilisant que $\mathcal{L}_{p,x}$ est un $\mathcal{O}_x$-module libre. Puisque les suites spectrales convergent, ceci entraine un isomorphisme des cohomologies totales. $\blacksquare$

Lemme 4.3 : Si $\mathcal{F}$ est un faisceau plat de $\mathcal{O}$-module et $\mathcal{G}$ un faisceau injectif de $\mathcal{O}$-module alors le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est injectif.

Preuve : $Hom_{\mathcal{O}}(-, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \simeq Hom_{\mathcal{O}}(-, \mathcal{G}) \circ (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} -)$ $\blacksquare$

Lemme 4.4 : Un quasi-isomorphisme de complexe de faisceau flasque de $\mathcal{O}$-module

$$\mathcal{A}^\bullet \overset{q.is}{\to} \mathcal{B}^\bullet$$

induit un quasi-isomorphisme de complexe de $\Gamma\mathcal{O}$-module

$$\Gamma\mathcal{A}^\bullet \overset{q.is}{\to} \Gamma\mathcal{B}^\bullet$$

Preuve : Soit $\mathcal{M}^\bullet$ le cône de $\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$. Par hypothèse, $\mathcal{M}^\bullet$ est exacte. On a donc une résolution flasque du faisceau nul

$$0 \to \mathcal{M}^\bullet$$

et ainsi $0 = H^q(\Gamma\mathcal{M}^\bullet)$ pour tout q. Puisque $\Gamma\mathcal{M}^\bullet$ est le cône de $\Gamma\mathcal{A}^\bullet \to \Gamma\mathcal{B}^\bullet$, c'est le résultat. $\blacksquare$

Concentrons nous à présent sur le cas des schémas.

Lemme 4.5 : Si $i : Y \to X$ est un morphisme de schéma, $\mathcal{A}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-module et $\mathcal{B}$ un faisceau de $\mathcal{O}_Y$-module alors on a un isomorphisme de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}, i_*\mathcal{B}) \simeq i_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

Preuve : On commence par construire pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module un isomorphisme naturel de faisceau de $\mathcal{O}_Y$-module

$$i^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}) \simeq i^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} i^*\mathcal{A}$$

Pour ce faire, on part de l'unité $1 \to i_*i^*$ qui fournit un morphisme

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \to i_*i^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} i_*i^*\mathcal{A}$$

puis le morphisme $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ donne

$$i_*i^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} i_*i^*\mathcal{A} \to i_*i^*\mathcal{F} \otimes_{i_*\mathcal{O}_Y} i_*i^*\mathcal{A}$$

que l'on compose par le morphisme

$$i_*i^*\mathcal{F} \otimes_{i_*\mathcal{O}_Y} i_*i^*\mathcal{A} \to i_*(i^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} i^*\mathcal{A})$$

et on obtient par adjonction le morphisme voulu. C'est un isomorphisme, comme on peut le constater sur les fibres :

$$(i^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}))_y = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,i(y)}} (\mathcal{F}_{i(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,i(y)}} \mathcal{A}_{i(y)})$$

$$\simeq (\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,i(y)}} \mathcal{F}_{i(y)}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,i(y)}} (\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,i(y)}} \mathcal{A}_{i(y)}) = (i^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} i^*\mathcal{A})_y$$

On démontre alors le lemme grâce au plongement de Yoneda :

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}, i_*\mathcal{B})) \simeq Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}, i_*\mathcal{B})$$

$$\simeq Hom_{\mathcal{O}_Y}(i^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}), \mathcal{B}) \simeq Hom_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} i^*\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

$$\simeq Hom_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{A}, \mathcal{B})) \simeq Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, i_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{A}, \mathcal{B})) \blacksquare$$

On arrive au dernier résultat du paragraphe, dont le corollaire est le premier pas vers la démonstration du théorème général.

Proposition 4.6 : Soient $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée, $\mathcal{L}_\bullet$ un complexe de faisceau localement libre de $\mathcal{O}_X$-module et $\mathcal{S}$ un faisceau de $\mathcal{O}_Y$-module. On a un isomorphisme de δ-foncteur en $\mathcal{S}$

$$\mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, i_*\mathcal{S}) \simeq \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{S})$$

Preuve : Soient $\mathcal{S} \to \mathcal{I}^\bullet$ et $i_*\mathcal{S} \to \mathcal{J}^\bullet$ deux résolutions injectives. Le fait que i soit une immersion fermée entraine que le foncteur i_* est exact :

$$(i_*\mathcal{F})_{i(y)} = \mathcal{F}_y \text{ et } (i_*\mathcal{F})_x = 0 \text{ si } x \notin i(Y)$$

En particulier, $i_*\mathcal{S} \to i_*\mathcal{I}^\bullet$ est une résolution et on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} & i_*\mathcal{I}^\bullet \arrow[d, "q.is."] \\ i_*\mathcal{S} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{J}^\bullet \end{tikzcd}$$

D'après le lemme 4.2, on obtient un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, i_*\mathcal{I}^\bullet) \overset{q.is}{\to} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{J}^\bullet)$$

Or, d'après le lemme 4.5, on a un isomorphisme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, i_*\mathcal{I}^\bullet) \simeq i_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)$$

et d'après le lemme 4.3, les faisceaux $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{J}^\bullet)$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)$ sont injectifs et donc flasques. Par suite le faisceau $i_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)$ est flasque et le lemme 4.4 donne un quasi-isomorphisme

$$\Gamma(X, i_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)) \overset{q.is.}{\to} \Gamma(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{J}^\bullet))$$

c'est à dire

$$Hom_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet) \overset{q.is.}{\to} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{J}^\bullet)$$

ce qui donne l'isomorphisme recherché. Pour la naturalité, on choisit pour toute suite exacte de faisceau de $\mathcal{O}_Y$-module

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

des suites exactes de résolutions injectives

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}'^\bullet \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet \longrightarrow \mathcal{I}''^\bullet \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}'^\bullet \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet \longrightarrow \mathcal{J}''^\bullet \longrightarrow 0$$

rendant le diagramme à ligne exacte suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & i_*\mathcal{I}'^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & i_*\mathcal{I}^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & i_*\mathcal{I}''^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{J}'^\bullet \arrow[r] & \mathcal{J}^\bullet \arrow[r] & \mathcal{J}''^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ceci induit un diagramme à ligne exacte commutatif

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^n(i_*\mathcal{I}'^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(i_*\mathcal{I}^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(i_*\mathcal{I}''^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(i_*\mathcal{I}'^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^n(\mathcal{J}'^\bullet) \arrow[r] & H^n(\mathcal{J}^\bullet) \arrow[r] & H^n(\mathcal{J}''^\bullet) \arrow[r] & H^{n+1}(\mathcal{J}'^\bullet) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

En reprenant le quasi-isomorphisme initial

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, i_*\mathcal{I}^\bullet) \overset{q.is}{\to} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{J}^\bullet)$$

la naturalité est donnée à la page E_1

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_p, i_*\mathcal{I}^{q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_{p+1}, i_*\mathcal{I}^{q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_p, i_*\mathcal{I}^{q}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_{p+1}, i_*\mathcal{I}^{q}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$E_1^{pq} = H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_p, i_*\mathcal{I}^\bullet)) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_p, H^q(i_*\mathcal{I}^\bullet)) \blacksquare$$

Corollaire 4.7 : Soient X un schéma séparé et $\mathcal{L}_\bullet$ un complexe de faisceau localement libre de $\mathcal{O}_{X\times X}$-module tel que $H_0(\mathcal{L}_\bullet) = \delta_*\mathcal{O}_X$ et $H_p(\mathcal{L}_\bullet) = 0$ pour tout $p \neq 0$. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module, on a un isomorphisme de δ-foncteur en $\mathcal{F}$

$$H^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\delta^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{F})$$

Preuve : On part de l'isomorphisme donné par la proposition 4.6 appliquée à l'immersion fermée $\delta : X \hookrightarrow X \times X$

$$\mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{L}_\bullet, \delta_*\mathcal{F}) \simeq \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\delta^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{F})$$

puis on applique le lemme 4.1 au quasi-isomorphisme

$$\mathcal{L}_\bullet \overset{q.is.}{\to} \delta_*\mathcal{O}_X$$

ce qui fournit un isomorphisme naturel en $\mathcal{F}$

$$H^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\delta_*\mathcal{O}_X, \delta_*\mathcal{F}) \simeq \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{L}_\bullet, \delta_*\mathcal{F}) \blacksquare$$

5 Suites spectrales

Le corollaire 4.7 établie un lien entre la cohomologie de Hochschild d'un schéma X séparé et de type fini sur un corps avec l'hyper-ext d'une résolution localement libre de $\delta_*\mathcal{O}_X$. On souhaite aller plus loin en comparant les suites suites spectrales associées précédemment. Pour ce faire, on va utiliser les résolutions de Cartan-Eilenberg et les techniques de convergence des suites spectrales. La référence original de Swan est

H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956).

Rappelons ici le vocabulaire introduit dans l'article [3]. On se place dans une catégorie abélienne ayant assez d'injectif, et on suppose tous les complexes bornés en bas.

Un CE-monomorphisme $i : A^\bullet \to B^\bullet$ est un monomorphisme de complexe tel que $i_* : H^\bullet(A^\bullet) \to H^\bullet(B^\bullet)$ est un monomorphisme. Une suite CE-exacte est une suite exacte

$$0 \longrightarrow C'^\bullet \xrightarrow{f} C^\bullet \xrightarrow{g} C''^\bullet \longrightarrow 0$$

telle que $im(f) \to C^\bullet$ est un CE-monomorphisme. Un complexe $I^\bullet$ est CE-injectif si pour tout CE-monomorphisme $A^\bullet \to B^\bullet$ et tout morphisme $A^\bullet \to I^\bullet$, il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} A^\bullet \arrow[r] \arrow[dr] & B^\bullet \arrow[d, dashed] \\ & I^\bullet \end{tikzcd}$$

Enfin, une CE-résolution d'un complexe $A^\bullet$ est une suite CE-exacte

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow C^{0\bullet} \longrightarrow C^{1\bullet} \longrightarrow C^{2\bullet} \longrightarrow \cdots$$

où $C^{p\bullet}$ est CE-injectif pour tout $p \geq 0$. Les CE-résolutions existent toujours dans les catégories ayant assez d'injectif. Une propriété importante pour la suite est que si $C^{\bullet\bullet}$ est une CE-résolution de $A^\bullet$ et F un foncteur additif alors

$$H_v^q(F(C^{\bullet\bullet})) = F(H_v^q(C^{\bullet\bullet}))$$

pour tout $q \geq 0$. On va s'intéresser au cas des faisceaux avec $F = \Gamma$. On pourra alors calculer l'hypercohomologie d'un complexe de faisceau en utilisant les CE-résolutions.

Lemme 5.1 : Soit $\mathcal{M}_\bullet$ un complexe de faisceau localement libre sur un schéma Y tel que $H_q(\mathcal{M}_\bullet)$ est localement libre pour tout q. Pour tout faisceau $\mathcal{S}$ de $\mathcal{O}_Y$-module, on a un isomorphisme naturel

$$H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S})) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{S})$$

Preuve : Pour un foncteur contravariant F exact à gauche et un complexe $C_\bullet$ arbitraires, on peut construire un morphisme naturel

$$H^q(F(C_\bullet)) \to F(H_q(C_\bullet))$$

Notons Z'_q le conoyau de la différentielle $C_{q+1} \to C_q$. Par hypothèse, $F(Z'_q)$ est le noyau de $F(C_q) \to F(C_{q+1})$ et par conséquent,

$$H^q(F(C_\bullet)) = coker(F(C_{q-1}) \to F(Z'_q))$$

On dispose d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_q(C_\bullet) \longrightarrow Z'_q \longrightarrow C_{q-1}$$

qui induit une composition nulle

$$F(C_{q-1}) \to F(Z'_q) \to F(H_q(C_\bullet))$$

d'où la factorisation naturelle

$$\begin{tikzcd} F(C_{q-1}) \arrow[r] & F(Z'_q) \arrow[r] \arrow[dr] & H^q(F(C_\bullet)) \arrow[d, dashed] \\ & & F(H_q(C_\bullet)) \end{tikzcd}$$

Revenons au cas où $F = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(-, \mathcal{S})$ et $C_\bullet = \mathcal{M}_\bullet$. Pour vérifier que l'on a un isomorphisme sur les fibres, on est ramené au cas où l'on applique $Hom_R(-, N)$ à un complexe de R-module projectif

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

tel que les homologies sont des R-modules projectifs. Comme il a été remarqué au premier paragraphe, cette configuration implique l'isomorphisme voulu

$$H^q(Hom_R(P_\bullet, N)) \simeq Hom_R(H_q(P_\bullet), N) \ \blacksquare$$

Il faut remarquer l'utilisation de l'hypothèse "localement libre" sur le complexe $\mathcal{M}_\bullet$ et l'homologie $H_\bullet(\mathcal{M}_\bullet)$. En fait, lemme 5.1 reste vrai si l'on suppose seulement que les fibres $\mathcal{M}_{q,y}$ et $H_q(\mathcal{M}_\bullet)_y = H_q(\mathcal{M}_{\bullet,y})$ sont des $\mathcal{O}_{Y,y}$-modules projectifs. Cette démonstration nous montre la grande maniabilité, liée au passage aux fibres, des faisceaux pour les questions homologiques.

Corollaire 5.2 : Sous les mêmes hypothèses, si

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceau de $\mathcal{O}_Y$-module, alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{F}') \xrightarrow{f_*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{F}) \xrightarrow{g_*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

est CE-exacte.

Preuve : La suite est exacte sur les fibres, car $\mathcal{M}_{q,y}$ est projective sur $\mathcal{O}_{Y,y}$. Puisque f est un monomorphisme, on a $H^q(im(f_*)) \simeq H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{F}'))$ et le lemme 5.1 donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H^q(im(f_*)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{F})) \arrow[d, "\wr"] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{F}') \arrow[r, "f_*"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, les fibres de $H_q(\mathcal{M}_\bullet)$ sont projectives $\mathcal{O}_{Y,y}$, donc la ligne inférieure est exacte et notre suite est CE-exacte. $\blacksquare$

On arrive ici à l'étude des suites spectrales annoncée en introduction. Rappelons ici qu'une suite spectrale associée à un double complexe nul hors d'un quart de plan (par exemple une CE-résolution) converge toujours vers la cohomologie totale. Cela justifie que les complexes que l'on considère dans ce paragraphe sont supposés bornés en bas.

Lemme 5.3 : Sous les hypothèses du lemme 5.1, les suites spectrales

$$Ext^p_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{S}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S})$$

$$H^p(Y, H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S}))) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(Y, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S}))$$

sont isomorphes.

Preuve : Soit $\mathcal{S} \to \mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective. Le corollaire 5.2 montre que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{I}^0) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{I}^1) \longrightarrow \cdots$$

est CE-exacte, donc si on choisit une résolution CE-injective $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S}) \to \mathcal{J}^{\bullet\bullet}$ alors il existe un morphisme f unique à homotopie près rendant le triangle suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet) \arrow[dd, "f"] \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S}) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathcal{J}^{\bullet\bullet}
\end{tikzcd}$$

En appliquant Γ, on obtient un morphisme de double complexe

$$\Gamma f : Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet) \to \Gamma(\mathcal{J}^{\bullet\bullet})$$

Lorsque l'on filtre selon les colonnes le double complexe

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{q+1}, \mathcal{I}^p) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{q+1}, \mathcal{I}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_q, \mathcal{I}^p) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_q, \mathcal{I}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

on obtient la première suite spectrale :

$$E_1^{pq} = H^q(Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{I}^p)) = Hom_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{I}^p)$$

$$E_2^{pq} = Ext_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{S})$$

Et lorsque l'on filtre selon les colonnes le double complexe

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{J}^{p,q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \Gamma(\mathcal{J}^{p+1,q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{J}^{p,q}) \arrow[r] \arrow[u] & \Gamma(\mathcal{J}^{p+1,q}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

on obtient la deuxième suite spectrale :

$$E_1^{pq} = H^q(\Gamma(\mathcal{J}^{p\bullet})) = \Gamma(H^q(\mathcal{J}^{p\bullet}))$$

$$E_2^{pq} = H_h^p(\Gamma(H_v^q(\mathcal{J}^{\bullet\bullet}))) = H^p(Y, H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S})))$$

Cette dernière égalité découle du fait que la CE-résolution $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S}) \to \mathcal{J}^{\bullet\bullet}$ induit des résolutions injectives $H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S})) \to H_v^q(\mathcal{J}^{\bullet\bullet})$ pour tout p. Ainsi, il nous reste à vérifier que notre morphisme Γf induit un isomorphisme sur la page E_2. Sur la page E_1, Γf est donné en appliquant Γ au morphisme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{I}^\bullet) \to H_v^q(\mathcal{J}^{\bullet\bullet})$$

Or par hypothèse, le lemme 4.3 nous dis que

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{S}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{I}^\bullet)$$

est une résolution injective, tout comme

$$H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S})) \to H_v^q(\mathcal{J}^{\bullet\bullet})$$

Puisque les deux faisceaux $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(H_q(\mathcal{M}_\bullet), \mathcal{S})$ et $H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_\bullet, \mathcal{S}))$ sont isomorphes d'après le lemme 5.1, ils ont donc la même cohomologie sur Y ce qui signifie que Γf est un isomorphisme sur la page E_2. ■

Avant d'aboutir au résultat final de ce paragraphe, on a besoin d'un dernier lemme que l'on peut énoncer sous une forme générale.

Lemme 5.4 : Soient $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée et $\mathcal{A}^\bullet$ un complexe de faisceau de $\mathcal{O}_Y$-module. Les suites spectrales

$$H^p(Y, H^q(\mathcal{A}^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(Y, \mathcal{A}^\bullet)$$

$$H^p(X, H^q(i_*\mathcal{A}^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, i_*\mathcal{A}^\bullet)$$

sont isomorphes.

Preuve : Soient $\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ et $i_*\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{J}^{\bullet\bullet}$ deux CE-résolutions. Les double-complexes

$$\Gamma(Y, \mathcal{I}^{\bullet\bullet}) \; ; \; \Gamma(X, \mathcal{J}^{\bullet\bullet})$$

induisent alors les deux suites spectrales voulues. On construit un morphisme comme suit. i_* est exact donc $i_*\mathcal{A}^\bullet \to i_*\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ est une résolution. Il existe ainsi un morphisme f unique à homotopie près rendant le triangle suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} & i_*\mathcal{I}^{\bullet\bullet} \arrow[d, "f"] \\ i_*\mathcal{A}^\bullet \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{J}^{\bullet\bullet} \end{tikzcd}$$

En appliquant $\Gamma(X, -)$, on obtient un morphisme de double complexe

$$\Gamma(X, f) : \Gamma(Y, \mathcal{I}^{\bullet\bullet}) \to \Gamma(X, \mathcal{J}^{\bullet\bullet})$$

qui correspond sur la page E_2 à l'isomorphisme

$$H^p(Y, H^q(\mathcal{A}^\bullet)) = H^p(X, i_*H^q(\mathcal{A}^\bullet)) \simeq H^p(X, H^q(i_*\mathcal{A}^\bullet)) \; ■$$

Proposition 5.5 : Soient $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée et $\mathcal{L}_\bullet$ un complexe de faisceau localement libre de $\mathcal{O}_X$-module tel que $H_0(\mathcal{L}_\bullet) = \mathcal{T}$, $H_q(\mathcal{L}_\bullet) = 0$ pour tout $q \neq 0$ et $H_q(i^*\mathcal{L}_\bullet)$ est localement libre pour tout q. Pour tout faisceau $\mathcal{S}$ de $\mathcal{O}_Y$-module, les suites spectrales

$$Ext^p_{\mathcal{O}_Y}(H_q(i^*\mathcal{L}_\bullet), \mathcal{S}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{S})$$

$$H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}, i_*\mathcal{S})) \Rightarrow Ext^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}, i_*\mathcal{S})$$

sont isomorphes.

Preuve : Soit $i_*\mathcal{S} \to \mathcal{J}^\bullet$ une résolution injective. La deuxième suite spectrale est donné par l'hypercohomologie sur X du complexe de faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}, \mathcal{J}^\bullet)$ [4, Th.5.8.3]. Si on regarde $\mathcal{T}$ comme un complexe de faisceau concentré en 0, on dispose par hypothèse d'un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{L}_\bullet \overset{q.is.}{\to} \mathcal{T}$$

Par injectivité, on obtient un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}, \mathcal{J}^\bullet) \overset{q.is.}{\to} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{J}^\bullet)$$

de sorte que la deuxième suite spectrale est donnée par l'hypercohomologie sur X du complexe total de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{J}^\bullet)$. Soit $\mathcal{S} \to \mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective. Le foncteur i_* est exact, donc $i_*\mathcal{S} \to i_*\mathcal{I}^\bullet$ est une résolution et on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & i_*\mathcal{I}^\bullet \arrow[d, "q.is."] \\
i_*\mathcal{S} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{J}^\bullet
\end{tikzcd}$$

En particulier, puisque les fibres de $\mathcal{L}_\bullet$ sont libres, on obtient un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, i_*\mathcal{I}^\bullet) \overset{q.is.}{\to} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{J}^\bullet)$$

Or le lemme 4.5 donne un isomorphisme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\bullet, i_*\mathcal{I}^\bullet) \simeq i_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)$$

En conséquence, la deuxième suite spectrale est donnée par l'hypercohomologie sur X du complexe total de $i_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)$, qui est d'après le lemme 5.4 donnée par l'hypercohomologie sur Y du complexe total de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)$. Mais si on regarde $\mathcal{S}$ comme un complexe concentré en 0, on dispose d'un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{S} \overset{q.is.}{\to} \mathcal{I}^\bullet$$

et puisque les fibres de $i^*\mathcal{L}_\bullet$ sont libres, on obtient un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{S}) \overset{q.is.}{\to} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{I}^\bullet)$$

Ainsi la deuxième suite spectrale est isomorphe à la suite spectrale

$$H^p(Y, H^q(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{S}))) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(Y, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(i^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{S}))$$

Cette dernière est, par le lemme 5.3, isomorphe à la première suite spectrale. ■

Une conséquence immédiate de cette proposition est le cas où l'immersion fermée est l'application diagonale δ d'un schéma séparé X et où $\mathcal{T} = \delta_*\mathcal{O}_X$:

Corollaire 5.6 : Soient X un schéma séparé et de type fini sur un corps et $\mathcal{L}_\bullet$ un complexe de faisceau localement libre de $\mathcal{O}_{X\times X}$-module tel que $H_0(\mathcal{L}_\bullet) \simeq \delta_*\mathcal{O}_X$, $H_q(\mathcal{L}_\bullet) = 0$ pour tout $q \neq 0$ et $H_q(i^*\mathcal{L}_\bullet)$ est localement libre pour tout q. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module, les suites spectrales

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(H_q(\delta^*\mathcal{L}_\bullet), \mathcal{F}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\delta^*\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{F})$$

$$H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

sont isomorphes.

6 Résolutions plates

Après avoir établi un lien entre la cohomologie de Hochschild d'un schéma X séparé et de type fini sur un corps avec l'hyper-ext d'une résolution localement libre de $\delta_*\mathcal{O}_X$, on va se ramener à considérer des résolutions plates et quasi-cohérentes de $\delta_*\mathcal{O}_X$. Ceci nous permettra en particulier de démontrer les théorèmes 2.1 et 2.5 dans le cas où X est affine en utilisant la résolution

$$\mathcal{B}_\bullet \to \delta_*\mathcal{O}_X$$

introduite au lemme 2.4 (4).

Dans ce paragraphe, tous les complexes de chaînes sont supposés bornés en bas et X désigne un schéma quasi-projectif sur un corps. Le résultat suivant justifie la présence de cette dernière hypothèse.

Lemme 6.1 : Soit $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un épimorphisme de faisceau quasi-cohérent sur X. Si $\mathcal{G}$ est cohérent alors il existe un faisceau localement libre $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_X$-module ainsi qu'un morphisme de faisceau $\mathcal{L} \to \mathcal{F}$ tel que la composition

$$\mathcal{L} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

est un épimorphisme.

Preuve : Supposons X projectif sur un anneau Noethérien et $\mathcal{F}$ cohérent. Dans ce cas il existe un faisceau localement libre $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_X$-module ainsi qu'un épimorphisme

$$\mathcal{L} \to \mathcal{F}$$

[1, Ch.II, Cor.5.18]. Si X est seulement supposé quasi-projectif sur un corps, alors $\mathcal{F}$ se prolonge sur l'adhérence de X dans $\mathbb{P}^n$ [1, Ch.II, Ex.5.15] qui est un schéma projectif sur un anneau Noethérien. On est alors ramené à la situation précédente. Enfin, si $\mathcal{F}$ est seulement supposé quasi-cohérent, alors $\mathcal{F}$ est l'union de ses sous-faisceaux cohérents [1, Ch.II, Ex.5.15.e] et l'un d'entre eux est envoyé sur $\mathcal{G}$. En effet, la restriction de l'épimorphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sur un ouvert affine de X est déterminée par une application linéaire surjective $M \to N$ avec N est de type fini et se restreint donc sur un sous module de type fini $M' \subset M$ en une surjection. Puisque X est quasi-compact, on peut construire le faisceau cohérent $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ voulu. D'après ce qui précède, il existe un faisceau localement libre $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_X$-module ainsi qu'un épimorphisme

$$\mathcal{L} \to \mathcal{F}'$$

On obtient ainsi une composition

$$\mathcal{L} \to \mathcal{F}' \subset \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

qui est un épimorphisme. ■

Lemme 6.2 : Soit $\mathcal{K}_\bullet$ un complexe de faisceau quasi-cohérent sur X tel que chaque $H_i(\mathcal{K}_\bullet)$ est cohérent. Il existe un complexe de faisceau localement libre $\mathcal{L}_\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-module et un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{L}_\bullet \stackrel{q.is.}{\to} \mathcal{K}_\bullet$$

Preuve : On construit $\mathcal{L}_\bullet$ par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. On initialise avec le lemme 6.1 qui fournit un faisceau localement libre $\mathcal{L}_0$ de $\mathcal{O}_X$-module et un morphisme de faisceau

$$\mathcal{L}_0 \to \mathcal{K}_0$$

tels que la composition

$$\mathcal{L}_0 \to \mathcal{K}_0 \to H_0(\mathcal{K}_\bullet)$$

est un épimorphisme. Supposons à présent que l'on dispose d'un complexe de faisceau localement libre $\mathcal{L}_\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-module

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_p \longrightarrow \mathcal{L}_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow 0$$

et d'un morphisme de complexe de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module

$$f : \mathcal{L}_\bullet \to \mathcal{K}_\bullet$$

tel que le morphisme induit sur l'homologie

$$f_* : H_i(\mathcal{L}_\bullet) \to H_i(\mathcal{K}_\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout $i < p$ et un épimorphisme pour $i = p$. Soit $\mathcal{P}$ le tiré-en-arrière suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & Z_p(\mathcal{L}_\bullet) \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{K}_{p+1} \arrow[r, "d"'] & Z_p(\mathcal{K}_\bullet)
\end{tikzcd}$$

On dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & Z_p(\mathcal{L}_\bullet) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"] & coker(d') \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & 0 \\
\mathcal{K}_{p+1} \arrow[r, "d"'] & Z_p(\mathcal{K}_\bullet) \arrow[r, "\nu"'] & H_p(\mathcal{K}_\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où φ est donné par la propriété universelle du conoyau de d' :

$$(\nu \circ f) \circ d' = \nu \circ d \circ f' = 0$$

Notre hypothèse de récurrence implique que $\varphi \circ \mu = \nu \circ f = f_*$ est un épimorphisme. Donc φ est un épimorphisme. De plus, une chasse au diagramme sur les fibres permet de montrer que φ est un monomorphisme : si $\varphi(x) = 0$ alors on choisit y tel que $\mu(y) = x$

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto, "\mu"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & x \arrow[d, mapsto, "\varphi"] \\
\cdot \arrow[r, mapsto, "\nu"'] & 0
\end{tikzcd}$$

puis on choisit z tel que $dz = f(y)$

$$\begin{tikzcd}
(z, y) \arrow[r, mapsto, "d'"] \arrow[d, mapsto, "f'"'] & y \arrow[r, mapsto, "\mu"] \arrow[d, mapsto, "f"] & x \arrow[d, mapsto, "\varphi"] \\
z \arrow[r, mapsto, "d"'] & dz \arrow[r, mapsto, "\nu"'] & 0
\end{tikzcd}$$

et on obtient $x = \mu \circ d'(z,y) = 0$. Ceci prouve que $coker(d') \simeq H_p(\mathcal{K}_\bullet)$ est un faisceau cohérent. Par conséquent, $im(d') = ker(\mu)$ est un faisceau cohérent [1, Ch.II, Prop.5.7]. Utilisons à nouveau le lemme 6.1 : d'une part, on peut trouver un faisceau localement libre $\mathcal{L}'_{p+1}$ sur X et un morphisme

$$\alpha : \mathcal{L}'_{p+1} \to \mathcal{P}$$

tels que $im(d' \circ \alpha) = im(d')$; et d'autre part un faisceau localement libre $\mathcal{L}''_{p+1}$ sur X et un morphisme

$$\beta : \mathcal{L}''_{p+1} \to Z_{p+1}(\mathcal{K}_\bullet)$$

dont la composition par la projection $Z_{p+1}(\mathcal{K}_\bullet) \to H_{p+1}(\mathcal{K}_\bullet)$ est un épimorphisme. On pose alors $\mathcal{L}_{p+1} = \mathcal{L}'_{p+1} \oplus \mathcal{L}''_{p+1}$, puis on définit une différentielle

$$(d' \circ \alpha) \oplus 0 : \mathcal{L}_{p+1} \to Z_p(\mathcal{L}_\bullet)$$

et un morphisme

$$(f' \circ \alpha) \oplus \beta : \mathcal{L}_{p+1} \to \mathcal{K}_{p+1}$$

Par construction, on obtient un morphisme de complexe

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{L}_{p+1} \arrow[r, "(d'\circ\alpha)\oplus 0"] \arrow[d, "(f'\circ\alpha)\oplus\beta"'] & \mathcal{L}_p \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{L}_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{L}_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{K}_{p+1} \arrow[r] & \mathcal{K}_p \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{K}_1 \arrow[r] & \mathcal{K}_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puisque $im(d' \circ \alpha) = im(d') = ker(\mu) = ker(\varphi \circ \mu) = ker(\nu \circ f)$, ce morphisme induit en homologie un isomorphisme

$$H_p(\mathcal{L}_\bullet) \simeq H_p(\mathcal{K}_\bullet)$$

Enfin, la construction de β implique que ce morphisme induit en homologie un épimorphisme

$$H_{p+1}(\mathcal{L}_\bullet) \to H_{p+1}(\mathcal{K}_\bullet)$$

car $\mathcal{L}''_{p+1} \subset Z_{p+1}(\mathcal{L}_\bullet) = H_{p+1}(\mathcal{L}_\bullet)$. On peut donc répéter cette construction à l'infini. ■

Lemme 6.3 : Sous les mêmes hypothèses, supposons $\mathcal{L}'_\bullet$ et $\mathcal{L}''_\bullet$ deux complexes de faisceau localement libre de $\mathcal{O}_X$-module quasi-isomorphes à $\mathcal{K}_\bullet$:

$$\mathcal{L}'_\bullet \overset{q.is.}{\to} \mathcal{K}_\bullet \ ; \ \mathcal{L}''_\bullet \overset{q.is.}{\to} \mathcal{K}_\bullet$$

Il existe un complexe de faisceau localement libre $\mathcal{L}_\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-module et un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_\bullet \arrow[r, "q.is."] \arrow[d, "q.is"'] & \mathcal{L}'_\bullet \arrow[d, "q.is."] \\
\mathcal{L}''_\bullet \arrow[r, "q.is."'] & \mathcal{K}_\bullet
\end{tikzcd}$$

Preuve : Soit $\mathcal{M}_\bullet$ le cône de l'identité de $\mathcal{K}_\bullet[1]$. Il arrive avec un épimorphisme

$$\mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{K}_\bullet$$

Soit $\mathcal{G}_\bullet$ le noyau du morphisme

$$\mathcal{L}'_\bullet \oplus \mathcal{L}''_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{K}_\bullet$$

La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_\bullet \longrightarrow \mathcal{L'}_\bullet \oplus \mathcal{L''}_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet \longrightarrow \mathcal{K}_\bullet \longrightarrow 0$$

induit une longue suite exacte homologique

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{G}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{L'}_\bullet) \oplus H_n(\mathcal{L''}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{K}_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathcal{G}_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Par hypothèse, le morphisme

$$H_n(\mathcal{L'}_\bullet) \oplus H_n(\mathcal{L''}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{K}_\bullet)$$

est surjectif et son noyau est canoniquement isomorphe à $H_n(\mathcal{L'}_\bullet)$ de telle sorte que le morphisme connectant ∂ est nul et que la composition par la projection canonique

$$\mathcal{G}_\bullet \to \mathcal{L'}_\bullet \oplus \mathcal{L''}_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{L'}_\bullet$$

est un quasi-isomorphisme. Le lemme 6.2 permet de trouver un complexe de faisceau localement libre $\mathcal{L}_\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-module et un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{L}_\bullet \overset{q.is.}{\to} \mathcal{G}_\bullet$$

En utilisant les projections canoniques

$$\mathcal{L'}_\bullet \oplus \mathcal{L''}_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{L'}_\bullet \ ; \ \mathcal{L'}_\bullet \oplus \mathcal{L''}_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{L''}_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet$$

on construit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_\bullet \arrow[r, "q.is."] \arrow[d, "q.is"'] & \mathcal{L'}_\bullet \arrow[d, "q.is."] \\ \mathcal{L''}_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet \arrow[r, "q.is."'] & \mathcal{K}_\bullet \end{tikzcd}$$

Enfin, en utilisant l'inclusion composée à la projection

$$\mathcal{L''}_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{L''}_\bullet \to \mathcal{L''}_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet$$

on obtient le carré commutatif à homotopie près recherché

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_\bullet \arrow[r, "q.is."] \arrow[d, "q.is"'] & \mathcal{L'}_\bullet \arrow[d, "q.is."] \\ \mathcal{L''}_\bullet \arrow[r, "q.is."'] & \mathcal{K}_\bullet \end{tikzcd}$$

Pour le voir, il suffit de vérifier que le morphisme de complexe

$$\mathcal{L}_\bullet \to \mathcal{G}_\bullet \to \mathcal{L'}_\bullet \oplus \mathcal{L''}_\bullet \oplus \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{L'}_\bullet \oplus \mathcal{L''}_\bullet \to \mathcal{K}_\bullet$$

est homotope à l'application nulle. Pour ce faire, on utilise la contractibilité du cône $\mathcal{M}_\bullet$ qui fournit une homotopie s

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{M}_{p+1} \arrow[r] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{M}_p \arrow[r] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{M}_{p-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[dl, "s"'] \\ \cdots \arrow[r] & \mathcal{M}_{p+1} \arrow[r] & \mathcal{M}_p \arrow[r] & \mathcal{M}_{p-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

et on obtient une homotopie S

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{L}_{p+1} \arrow[r] \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{L}_p \arrow[r] \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{L}_{p-1} \arrow[r] \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[dl, "S"'] \\ \cdots \arrow[r] & \mathcal{K}_{p+1} \arrow[r] & \mathcal{K}_p \arrow[r] & \mathcal{K}_{p-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

en prenant $S : \mathcal{L}_p \to \mathcal{M}_p \overset{s}{\to} \mathcal{M}_{p+1} \to \mathcal{K}_{p+1}$. ■

Lemme 6.4 : Soient $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme de faisceau d'anneau sur un espace topologique et $f : \mathcal{F}_\bullet \to \mathcal{G}_\bullet$ un morphisme de complexe de faisceau plat de $\mathcal{A}$-module. Si f est un quasi-isomorphisme alors

$$1 \otimes f : \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_\bullet \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}_\bullet$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve : Soit $\mathcal{M}_\bullet$ le cône de f. Par hypothèse, $\mathcal{M}_\bullet$ est exact et se décompose en suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_p \longrightarrow \mathcal{M}_p \longrightarrow \mathcal{Z}_{p-1} \longrightarrow 0$$

pour tout $p > 1$. Aussi, $\mathcal{M}_\bullet$ est plat sur $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{Z}_p$ est plat sur $\mathcal{A}$ pour tout $p > 0$ [4, Ex.3.2.2]. Ainsi, $Tor_1^{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{Z}_p)$ pour tout $p > 0$ et on a des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}_1 \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}_p \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_p \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}_{p-1} \longrightarrow 0$$

pour tout $p > 1$, de sorte que $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_\bullet$, le cône de $(1 \otimes f)$, est exact. ■

On arrive au résultat le plus important de ce paragraphe. En corollaire, on obtiendra les théorèmes 2.1 et 2.5 dans le cas affine, mais on utilisera également ce résultat pour le cas général.

Proposition 6.5 : (1) Soit $\mathcal{G}_\bullet$ un complexe de faisceau plat et quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{X\times X}$-module tel que $H_0(\mathcal{G}_\bullet) = \delta_* \mathcal{O}_X$ et $H_q(\mathcal{G}_\bullet) = 0$ pour tout $q \neq 0$. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module, on a un isomorphisme de δ-foncteur en $\mathcal{F}$

$$H^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\delta_* \mathcal{G}_\bullet, \mathcal{F})$$

(2) Si de plus $H_q(\delta_* \mathcal{G}_\bullet)$ est localement libre pour tout q, alors les suites spectrales

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(H_q(\delta^* \mathcal{G}_\bullet), \mathcal{F}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\delta^* \mathcal{G}_\bullet, \mathcal{F})$$

$$H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

sont isomorphes.

Preuve : (1) Le lemme 6.2 donne un complexe de faisceau localement libre $\mathcal{L}_\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-module et un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{L}_\bullet \overset{q.is.}{\to} \mathcal{G}_\bullet$$

Le foncteur δ^{-1} est exact et $\delta^* = (\mathcal{O}_X \otimes_{\delta^{-1}\mathcal{O}_{X\times X}} -) \circ \delta^{-1}$. D'après le lemme 6.4, on a un quasi-isomorphisme

$$\delta^* \mathcal{L}_\bullet \overset{q.is.}{\to} \delta^* \mathcal{G}_\bullet$$

En utilisant le corollaire 4.7 et le lemme 4.1, on obtient un isomorphisme naturel en $\mathcal{F}$

$$H^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\delta_* \mathcal{L}_\bullet, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\delta_* \mathcal{G}_\bullet, \mathcal{F})$$

qui, d'après le lemme 6.3, ne dépend pas du choix de

$$\mathcal{L}_\bullet \overset{q.is.}{\to} \mathcal{G}_\bullet$$

(2) Plus précisément, le lemme 4.1 donne un isomorphisme entre les suites spectrales

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(H_q(\delta^*\mathcal{G}_\bullet),\mathcal{F}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\delta^*\mathcal{G}_\bullet,\mathcal{F})$$

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(H_q(\delta^*\mathcal{L}_\bullet),\mathcal{F}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\delta^*\mathcal{L}_\bullet,\mathcal{F})$$

Cette dernière est, par le corollaire 5.6, isomorphe à la suite spectrale

$$H^p(X,\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \blacksquare$$

On peut à présent démontrer les théorèmes 2.1 et 2.5 dans le cas où $X = Spec\ A$ est un schéma affine sur une algèbre de type fini sur un corps. La résolution plate (car projective) de A^e-module

$$B_\bullet(A) \to A$$

induit une résolution de faisceau plat quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{X\times X}$-module

$$\mathcal{B}_\bullet \to \delta_*\mathcal{O}_X$$

On peut lui appliquer la proposition 6.5. Pour conclure, il suffit de constater par le lemme 2.4 (4) et le lemme 4.1 que les suites spectrales

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(H_q(\delta^*\mathcal{B}_\bullet),\mathcal{F}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\delta^*\mathcal{B}_\bullet,\mathcal{F})$$

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_q,\mathcal{F}) \Rightarrow HH^{p+q}(X,\mathcal{F})$$

sont isomorphes.

7 Lemmes théoriques sur les faisceaux

Pour pouvoir aborder le théorème dans sa généralité, il nous faut aller plus loin dans les considérations géométriques. Dans ce paragraphe, on va mettre à profit la propriété de séparation des schémas, satisfaite en particulier par les schémas quasi-projectifs. L'idée principale est la suivante. Dans un schéma X séparé sur un schéma affine, l'intersection de deux ouverts affines est encore un ouvert affine [1, Ch.II, Ex.4.3]. Une conséquence importante est que pour tout ouvert affine U de X, l'inclusion $U \hookrightarrow X$ est un morphisme affine. Ce que l'on va constater, c'est que les morphismes affines ont les bonnes propriétés concernant les faisceaux quasi-cohérents et, s'ils sont plats, envoient par poussé-en-avant les faisceaux plats quasi-cohérents vers des faisceaux plats quasi-cohérents.

Commençons par une propriété des faisceaux associés aux préfaisceaux de module :

Lemme 7.1 : Soient R un préfaisceau d'anneau sur un espace topologique X, $\mathcal{R}$ son faisceau associé, M un préfaisceau de R-module et $\mathcal{M}$ son faisceau associé. Si pour tout ouvert U de X, $M(U)$ est plat sur $R(U)$, alors $\mathcal{M}$ est plat sur $\mathcal{R}$.

Preuve : Puisque $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{R}}-$ est toujours exact à droite, on doit s'assurer que si $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un monomorphisme de faisceau de $\mathcal{R}$-module alors $1 \otimes f : \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{F} \to \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{G}$ est un monomorphisme de faisceau de $\mathcal{R}$-module. Par hypothèse, le morphisme de préfaisceau $1 \otimes f : M\otimes_R\mathcal{F} \to M\otimes_R\mathcal{G}$ est un monomorphisme. On a donc des monomorphismes sur les fibres. Le fait est que $M\otimes_R\mathcal{F}$ et $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{F}$ ont les mêmes fibres quelque soit $\mathcal{F}$. Ainsi, le morphisme $1 \otimes f : \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{F} \to \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{G}$ est un monomorphisme sur les fibres et par conséquent un monomorphisme de faisceau de $\mathcal{R}$-module. ■

Intéressons-nous à présent aux morphismes affines de schéma :

Lemme 7.2 : Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat et affine de schéma. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau plat et quasi-cohérent sur X alors $f_*\mathcal{F}$ est plat et quasi-cohérent sur Y.

Preuve : La question étant locale en Y, on est ramené à traiter le cas où $Y = Spec\ A$ est affine, et par hypothèse sur f, où $X = Spec\ B$ est affine. f est alors donné par un morphisme plat d'anneau $\varphi : A \to B$, et $\mathcal{F}$ est associé à un B-module plat M. Dans ce cas, $f_*\mathcal{F}$ est associé au A-module M (dont la loi externe est donnée par φ), ce dernier étant plat sur A étant donné les isomorphismes de foncteur

$$M\otimes_A- \simeq (M\otimes_B B)\otimes_A- \simeq (M\otimes_B-) \circ (B\otimes_A-) \blacksquare$$

Lemme 7.3 : Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine de schéma. Le foncteur

$$f_* : q - Coh(X) \to q - Coh(Y)$$

est bien défini et exact.

Preuve : La question étant locale en Y, on est ramené une nouvelle fois au cas où $Y = Spec\ A$ est affine puis par hypothèse sur f, où $X = Spec\ B$ est affine. Dans cette configuration, les catégories $q - Coh(X)$ et $q - Coh(Y)$ sont respectivement équivalentes aux catégories $B - mod$ et $A - mod$, et f_* correspond alors au foncteur

$$B - mod \to A - mod$$

qui envoie un B-module M vers le A-module M induit, lequel est exact. ■

Lemme 7.4 : Pour tout carré cartésien de schéma

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

tel que f est affine, il existe un isomorphisme de foncteur

$$g^*f_* \simeq f'_*g'^* : q - Coh(X) \to q - Coh(S')$$

Preuve : La transformation naturelle $g^*f_* \to f'_*g'^*$ existe dès que l'on a un tel carré commutatif. Pour la construire, on part de la co-unité puis on utilise l'adjonction :

$$1 \to g'_*g'^*$$

$$f_* \to f_*g'_*g'^* = g_*f'_*g'^*$$

$$g^*f_* \to f'_*g'^*$$

Pour prouver l'isomorphisme, on commence par le cas où $S = Spec\ A$ et $S' = Spec\ A'$ sont des schémas affines. Alors par hypothèse sur f, $X = Spec\ B$ est un schéma affine et puisque le carré est cartésien, $X' = Spec\ A' \otimes_A B$ est également un schéma affine. Dans cette configuration, les catégories $q - Coh(X)$ et $q - Coh(S')$ sont respectivement équivalentes aux catégories $B - mod$ et $A' - mod$ et la transformation naturelle

$$g^*f_* \to f'_*g'^*$$

correspond à l'isomorphisme de foncteur

$$A' \otimes_A - \simeq (A' \otimes_A B) \otimes_B - : B - mod \to A' - mod$$

Pour le cas général, on remarque que pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module, tout ouvert U de S et tout ouvert U' de S' tel que $g(U') \subset U$, on a $g'(f'^{-1}(U')) \subset f^{-1}(U)$ et les deux identifications suivantes

$$(g^*f_*\mathcal{F})|_{U'} = (g|_{U'})^*(f|_{f^{-1}(U)})_*(\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)})$$

$$(f'_*g'^*\mathcal{F})|_{U'} = (f'|_{f'^{-1}(U')})_*(g'|_{f'^{-1}(U')})^*(\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)})$$

La première identification découle du fait que $(g^{-1}f_*\mathcal{F})|_{U'}$ et $(g|_{U'})^{-1}(f|_{f^{-1}(U)})_*(\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)})$ sont deux faisceaux associés au même préfaisceau

$$U' \supset V \mapsto \underset{W \supset g(V)}{colim}\, \Gamma(f^{-1}(W), \mathcal{F}) = \underset{U \supset W \supset g(V)}{colim}\, \Gamma(f^{-1}(W), \mathcal{F}|_{f^{-1}(U)})$$

La deuxième identification provient du même raisonnement : pour tout ouvert V de U',

$$\Gamma(V, (f'_*g'^*\mathcal{F})|_{U'}) = \Gamma(f'^{-1}(V), g'^*\mathcal{F})$$

$$\Gamma(V, (f'|_{f'^{-1}(U')})_*(g'|_{f'^{-1}(U')})^*(\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)})) = \Gamma(f'^{-1}(V), (g'|_{f'^{-1}(U')})^*(\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}))$$

et les deux faisceaux $g'^{-1}\mathcal{F}$ et $(g'|_{f'^{-1}(U')})^{-1}(\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)})$ sont associés au même préfaisceau

$$f'^{-1}(U') \supset V \mapsto \underset{W \supset g'(V)}{colim}\, \Gamma(W, \mathcal{F}) = \underset{f^{-1}(U) \supset W \supset g'(V)}{colim}\, \Gamma(W, \mathcal{F}|_{f^{-1}(U)})$$

Ceci étant dit, si on fixe un ouvert affine U de S, alors pour tout ouvert affine U' de S' tel que $g(U') \subset U$, on a un carré cartésien de schéma

$$\begin{tikzcd} f'^{-1}(U') \arrow[r, "g'|_{f'^{-1}(U')}"] \arrow[d, "f'|_{f'^{-1}(U')}"'] & f^{-1}(U) \arrow[d, "f|_{f^{-1}(U)}"] \\ U' \arrow[r, "g|_{U'}"'] & U \end{tikzcd}$$

On se retrouve alors dans la première situation considérée et on obtient l'isomorphisme des faisceaux restreints sur U' :

$$(g^* f_* \mathcal{F})|_{U'} \simeq (f'_* g'^* \mathcal{F})|_{U'}$$

Pour conclure, on choisit un recouvrement $\mathcal{U}$ de S par des ouverts affines, puis on recouvre $g^{-1}(U)$ par des ouverts affines de S' pour tout $U \in \mathcal{U}$. On obtient alors un recouvrement $\mathcal{U}'$ de S' par des ouverts affines tels que l'image de chaque $U' \in \mathcal{U}'$ par g est contenu dans un $U \in \mathcal{U}$. On a ainsi l'isomorphisme sur un recouvrement de S' et donc sur S'. ■

On termine ce paragraphe par un résultat élémentaire qu'on pourrait aussi énoncer dans la catégorie des espaces topologiques :

Lemme 7.5 : Soient $f : X \to S$ un morphisme de schéma et U un ouvert de X. On considère le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, "i"'] & S \end{tikzcd}$$

où i et j sont les inclusions et $g = f|_{f^{-1}(U)}$. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module,

$$i^* f_* \mathcal{F} = g_* j^* \mathcal{F}$$

Preuve : Puisque i et j sont des inclusions, les foncteurs i^* et j^* correspondent aux restrictions. En fait, la restriction sur U coïncide avec le foncteur i^{-1} et on a

$$i^* = (\mathcal{O}_U \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_X} -) \circ i^{-1}$$

$$\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U = i^{-1}\mathcal{O}_X$$

Ainsi, pour tout ouvert V de U, on a

$$\Gamma(V, i^* f_* \mathcal{F}) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}) = \Gamma(g^{-1}(V), \mathcal{F}) = \Gamma(V, g_* j^* \mathcal{F}) \ ■$$

8 Préfaisceau de faisceau

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire le complexe de Čech associé à un préfaisceau de faisceau. Dans certaines configurations topologiques et algébriques, la cohomologie de Čech coïncide avec la cohomologie des faisceaux [1, Ch.III, Th.4.5]. Nous allons lui trouver un intérêt dans ce qu'il nous permettra de recoller, à quasi-isomorphisme près, une famille de complexe de faisceau indexée sur les ouverts affines de notre schéma en un double complexe de faisceau. Pour pouvoir utiliser les propriétés du complexe de Čech à plusieurs reprises et dans des situations différentes, on préfèrera dans un premier temps travailler avec un préfaisceau à valeurs dans une catégorie abélienne arbitraire.

Soient X un espace topologique, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne (complète) et Q un préfaisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{A}$ dont les restrictions seront toutes notées par ρ. A tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X, on associe un complexe de cochaine de $\mathcal{A}$, noté $C^\bullet(\mathcal{U}, Q)$ comme suit. On choisit un bon ordre $\leq$ sur I, et on considère pour tout entier naturel n le produit

$$C^n(\mathcal{U}, Q) = \prod_{i_0<\cdots<i_n} Q(U_{i_0\cdots i_n})$$

où $U_{i_0\cdots i_n} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$. Considérons les projections canoniques

$$p_{i_0\cdots i_n} : C^n(\mathcal{U}, Q) \to Q(U_{i_0\cdots i_n}$$

et définissons pour tout entier ν compris entre 0 et $n+1$ les applications

$$\delta_\nu : C^n(\mathcal{U}, Q) \to C^{n+1}(\mathcal{U}, Q)$$

par $p_{i_0\cdots i_{n+1}} \circ \delta_\nu = \rho \circ p_{i_0\cdots\widehat{i_\nu}\cdots i_{n+1}}$. On peut alors définir les différentielles

$$d = \sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \delta_\nu : C^n(\mathcal{U}, Q) \to C^{n+1}(\mathcal{U}, Q)$$

On dispose aussi d'une application définie à partir des restrictions

$$\varepsilon : Q(X) \to C^0(\mathcal{U}, Q)$$

c'est à dire $p_i \circ \varepsilon = \rho$. On peut vérifier que l'on obtient bien un complexe dans $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow Q(X) \xrightarrow{\varepsilon} C^0(\mathcal{U}, Q) \xrightarrow{d} C^1(\mathcal{U}, Q) \xrightarrow{d} C^2(\mathcal{U}, Q) \xrightarrow{d} \cdots$$

On voudrait s'assurer que ce complexe est indépendant du choix de l'ordre sur I. Pour ce faire, on étend les projections en posant

$$p_{i_0\cdots i_n} = 0$$

si pour deux indices $\mu \neq \nu$ on a $i_\mu = i_\nu$ et

$$p_{\sigma(i_0)\cdots\sigma(i_n)} = sgn(\sigma) p_{i_0\cdots i_n}$$

pour toute permutation σ de $\{i_0, \cdots, i_n\}$. Alors si on se donne un raffinement $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ de $\mathcal{U}$, on peut choisir une application $\alpha : J \to I$ telle que $V_j \subset U_{\alpha(j)}$ pour ensuite définir un morphisme de complexe qui commute avec ε

$$\alpha^* : C^\bullet(\mathcal{U}, Q) \to C^\bullet(\mathcal{V}, Q)$$

par $p_{j_0\cdots j_n} \circ \alpha = \rho \circ p_{\alpha(j_0)\cdots\alpha(j_n)}$ Lorsque $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ avec un autre ordre, on peut prendre $\alpha = id_I$ et α^* est alors un isomorphisme.

On énonce à présent un résultat qui justifiera plus tard la généralité choisie pour notre construction du complexe de Čech.

Lemme 8.1 : Si $X \in \mathcal{U}$ alors le complexe

$$0 \longrightarrow Q(X) \xrightarrow{\varepsilon} C^0(\mathcal{U},Q) \xrightarrow{d} C^1(\mathcal{U},Q) \xrightarrow{d} C^2(\mathcal{U},Q) \xrightarrow{d} \cdots$$

est exact.

Preuve : On choisit sur I un ordre tel que $\min I = 0$ et $X = U_0$. On peut alors expliciter une homotopie S entre l'identité et l'application nulle

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q(X) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "1"'] & C^0(\mathcal{U},Q) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "1"'] & C^1(\mathcal{U},Q) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "1"'] & C^2(\mathcal{U},Q) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[dl, "S"'] \\
0 \arrow[r] & Q(X) \arrow[r, "\varepsilon"'] & C^0(\mathcal{U},Q) \arrow[r, "d"'] & C^1(\mathcal{U},Q) \arrow[r, "d"'] & C^2(\mathcal{U},Q) \arrow[r, "d"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

définie par $p_{i_1\cdots i_n} \circ S = \begin{cases} 0 & \text{si } i_1 = 0 \\ p_{0 i_1 \cdots i_n} & \text{si } i_1 > 0 \end{cases}$ pour tout $n \geq 1$ et $S = p_0$ pour $n = 0$. ■

Ce lemme va s'avérer très utile lorsque $\mathcal{A}$ sera la catégorie des faisceaux ou des complexes de faisceau sur un schéma. Le fait que l'exactitude d'une suite de faisceau peut s'étudier localement va nous permettre de s'y ramener en permanence. Quittons les généralités et concentrons-nous à présent sur les faisceaux.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. On construit un préfaisceau $P_X\mathcal{F}$ sur X à valeurs dans les faisceaux sur X en posant pour tout ouvert U de X, $P_X\mathcal{F}(U) = i_*(\mathcal{F}|_U)$ où $i : U \hookrightarrow X$ désigne l'inclusion. Les restrictions sont données pour toute inclusion $V \subset U$ et tout ouvert W par

$$\Gamma(W, P_X\mathcal{F}(U)) = \Gamma(W \cap U, \mathcal{F}) \to \Gamma(W \cap V, \mathcal{F}) = \Gamma(W, P_X\mathcal{F}(V))$$

Lemme 8.2 : Pour tout ouvert U et V de X, $P_X\mathcal{F}(U)|_V = P_V\mathcal{F}(U \cap V)$.

Preuve : On applique le lemme 7.5 au carré cartésien d'inclusion

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & U \arrow[d, "f"] \\
V \arrow[r, "i"'] & X
\end{tikzcd}$$

et on obtient $P_X\mathcal{F}(U)|_V = i^*f_*f^*\mathcal{F} = g_*j^*f^*\mathcal{F} = P_V\mathcal{F}(U \cap V)$. ■

Supposons à présent que $\mathcal{U}$ est fini. Avec cette hypothèse, le complexe de Čech $C^\bullet(\mathcal{U},Q)$ est toujours borné en haut, car $C^n(\mathcal{U},Q)$ est un produit vide pour tout $n \geq |\mathcal{U}|$.

Corollaire 8.3 : Pour tout ouvert V de X, $C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F})|_V = C^\bullet(\mathcal{U} \cap V, P_V\mathcal{F})$.

Preuve : On a vu au lemme 7.5 que la restriction sur V est donnée par le foncteur adjoint à gauche i^* où $i : V \hookrightarrow X$ désigne l'inclusion. Cette opération commute donc avec toutes les colimites et en particulier avec les produits finis d'une catégorie abélienne. Ainsi,

$$C^n(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F})|_V = \prod_{i_0 < \cdots < i_n} P_X\mathcal{F}(U_{i_0\cdots i_n})|_V = \prod_{i_0 < \cdots < i_n} P_V\mathcal{F}(U_{i_0\cdots i_n} \cap V) = C^n(\mathcal{U} \cap V, P_V\mathcal{F})$$ ■

Lemme 8.4 : Le complexe de faisceau

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}) \longrightarrow C^2(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

est exact.

Preuve : L'exactitude d'un complexe de faisceau est équivalente à l'exactitude locale sur un recouvrement. Puisque $\mathcal{U}$ recouvre X, on peut vérifier l'exactitude seulement sur les ouverts $V \in \mathcal{U}$. Le fait est que $V \in \mathcal{U} \cap V$, donc le lemme 8.1 nous dis que le complexe

$$0 \longrightarrow P_V\mathcal{F} \longrightarrow C^0(\mathcal{U} \cap V, P_V\mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U} \cap V, P_V\mathcal{F}) \longrightarrow C^2(\mathcal{U} \cap V, P_V\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

est exact. Mais $P_V\mathcal{F} = \mathcal{F}|_V$ donc le résultat découle du corollaire 8.3. ■

Corollaire 8.5 : Si $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe de faisceau sur X alors

$$\varepsilon : \mathcal{F}^\bullet \to C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}^\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve : En regardant $\mathcal{F}^\bullet$ comme un double complexe concentrée dans la ligne indicée par 0, les morphismes $\varepsilon : \mathcal{F}^p \to C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}^p)$ induisent un morphisme de double complexe

$$\varepsilon : \mathcal{F}^\bullet \to C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}^\bullet)$$

Puisque $\mathcal{U}$ est fini, le double complexe $C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}^\bullet)$ est borné (i.e. ses diagonales n'ont qu'un certain nombre d'objet non nul) et on peut calculer sa cohomologie à partir de suite spectrale. Lorsque l'on filtre le double complexe

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & C^{q+1}(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}^p) \arrow[r] \arrow[u] & C^{q+1}(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{q}(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}^p) \arrow[r] \arrow[u] & C^{q}(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}^{p+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

selon les colonnes, on obtient un isomorphisme à la page E^1 d'après le lemme 8.4, car la cohomologie verticale est celle du complexe de Čech $C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{F}^p)$. ■

On termine ce paragraphe par un résultat que l'on utilisera lors de la démonstration du théorème générale :

Lemme 8.6 : Soit $M^\bullet \to N^\bullet$ un morphisme de complexe de préfaisceau sur X. Si pour tout ouvert U de X, c'est un quasi-isomorphisme sur les sections $M^\bullet(U) \overset{q.is.}{\to} N^\bullet(U)$ alors le morphisme de double complexe induit est un quasi-isomorphisme :

$$C^\bullet(\mathcal{U}, M^\bullet) \overset{q.is.}{\to} C^\bullet(\mathcal{U}, N^\bullet)$$

Preuve : Lorsqu'on filtre selon les colonnes le double complexe

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & C^p(\mathcal{U}, M^{q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & C^{p+1}(\mathcal{U}, M^{q+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^p(\mathcal{U}, M^q) \arrow[r] \arrow[u] & C^{p+1}(\mathcal{U}, M^q) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

on obtient un isomorphisme à la page E^1 : puisque $\mathcal{U}$ est fini, les produits sont finis et commutent avec la cohomologie, et ainsi la cohomologie verticale est

$$H_v^q(C^p(\mathcal{U}, M^\bullet) = \prod_{i_0 < \cdots < i_n} H^q(M^\bullet(U_{i_0 \cdots i_p})) = C^p(\mathcal{U}, H^q(M^\bullet) \blacksquare$$

9 Technique de recollement de Čech

Soit X un schéma quasi-compact et séparé sur un corps. Pour chaque ouvert affine U de X, on se donne un complexe $\mathcal{S}_{\bullet U}$ de faisceau de $\mathcal{O}_U$-module. Supposons que pour chaque inclusion $V \subset U$ d'ouverts affines de X, on dispose d'un morphisme de complexe de faisceau de $\mathcal{O}_V$-module

$$\rho_{UV} : \mathcal{S}_{\bullet U}|_V \to \mathcal{S}_{\bullet V}$$

satisfaisant pour tout ouvert affine $W \subset V \subset U$ de X les relations suivantes :

$$\rho_{UU} = id_{\mathcal{S}_{\bullet U}}$$
$$\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ (\rho_{UV})|_W$$

Concrètement, c'est une donnée de recollement de faisceau, au fait près que les ρ_{UV} ne sont à priori pas des isomorphismes. Si chaque ρ_{UV} est un isomorphisme, alors il existe un complexe $\mathcal{S}_\bullet$ de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module et des isomorphismes de complexe

$$\sigma_U : \mathcal{S}_\bullet|_U \to \mathcal{S}_{\bullet U}$$

tels que $\rho_{U,U\cap V} \circ \sigma_U = \rho_{V,U\cap V} \circ \sigma_V$ sur $U \cap V$ pour tout ouvert affine U et V de X [1, Ch.II, Ex.1.22]. Plus généralement, en supposant que chaque ρ_{UV} est un quasi-isomorphisme, on va construire des préfaisceaux $P_U\mathcal{S}_\bullet$ de complexe de faisceau tel que pour tout recouvrement fini $\mathcal{U}$ de X par des ouverts affines et tout ouvert affine V de X, on a des quasi-isomorphismes

$$\mathcal{S}_{\bullet V} \overset{q.is.}{\to} C^\bullet(\mathcal{U} \cap V, P_V\mathcal{S}_\bullet) \overset{q.is.}{\leftarrow} C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_\bullet)|_V$$

Le faisceau $C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_\bullet)$ jouera alors le rôle de recollement à quasi-isomorphisme près. Cette construction, appliquée au cas particulier $\mathcal{S}_{\bullet U} = C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U))^\sim$, nous permettra de démontrer le théorème général.

Pour tout ouvert affine U de X, soit $P_X\mathcal{S}_\bullet(U) = j_*\mathcal{S}_{\bullet U}$ où $j : U \hookrightarrow X$ désigne l'inclusion. Si on a deux ouverts affines $V \subset U$, on peut définir une restriction

$$P_X\mathcal{S}_\bullet(U) \to P_X\mathcal{S}_\bullet(V)$$

donnée pour tout ouvert W de X par

$$\Gamma(W, P_X\mathcal{S}_\bullet(U)) = \Gamma(W \cap U, \mathcal{S}_{\bullet U}) \to \Gamma(W \cap V, \mathcal{S}_{\bullet U}|_V) \overset{\rho_{UV}}{\to} \Gamma(W \cap V, \mathcal{S}_{\bullet V}) = \Gamma(W, P_X\mathcal{S}_\bullet(V))$$

Ceci fait de $P_X\mathcal{S}_\bullet$ un préfaisceau sur X de complexe de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module. En fait, si les complexes $\mathcal{S}_{\bullet U}$ proviennent d'un même complexe $\mathcal{S}_\bullet$, c'est-à-dire si $\mathcal{S}_{\bullet U} = \mathcal{S}_\bullet|_U$, et si les ρ_{UV} correspondent aux restrictions de $\mathcal{S}_\bullet$, alors cette construction correspond à celle du paragraphe précédent. On va pouvoir adapter les énoncés à cette situation.

Lemme 9.1 : Si chaque $\mathcal{S}_{\bullet U}$ est quasi-cohérent et si chaque ρ_{UV} est un quasi-isomorphisme alors on a des quasi-isomorphismes naturels

$$P_X\mathcal{S}_\bullet(U)|_V \overset{q.is.}{\to} P_V\mathcal{S}_\bullet(U \cap V)$$

Preuve : Le lemme 7.5 appliqué au carré cartésien d'inclusion

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "j'"'] & U \arrow[d, "j"] \\ V \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

permet d'obtenir fonctoriellement le morphisme suivant

$$P_X\mathcal{S}_\bullet(U)|_V = i^* j_* \mathcal{S}_{\bullet U} = j'_* i'^* \mathcal{S}_{\bullet U} = j'_*(\mathcal{S}_{\bullet U}|_{U\cap V}) \overset{j'_*\rho_{U,U\cap V}}{\longrightarrow} P_V\mathcal{S}_\bullet(U\cap V)$$

L'hypothèse de séparation sur X montre que j' est un morphisme affine de schéma. Ainsi, d'après le lemme 7.3, j'_* est exact et $j'_*\rho_{U,U\cap V}$ est un quasi-isomorphisme. ■

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines. Cette propriété de finitude permet d'utiliser les suites spectrales pour calculer l'homologie du double complexe $C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_\bullet)$:

Corollaire 9.2 : Sous les mêmes hypothèses, on a un quasi-isomorphisme naturel

$$C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_\bullet)|_V \overset{q.is.}{\to} C^\bullet(\mathcal{U}\cap V, P_V\mathcal{S}_\bullet)$$

Preuve : Le morphisme est donné par le lemme 9.1 :

$$C^n(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_\bullet)|_V = \prod_{i_0<\cdots<i_n} P_X\mathcal{S}_\bullet(U_{i_0\cdots i_n})|_V \overset{q.is.}{\to} \prod_{i_0<\cdots<i_n} P_V\mathcal{S}_\bullet(U_{i_0\cdots i_n}\cap V) = C^n(\mathcal{U}\cap V, P_V\mathcal{S}_\bullet)$$

Si on filtre le double complexe

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C^p(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_q)|_V \arrow[r] \arrow[d] & C^{p+1}(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_q)|_V \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^p(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_{q-1})|_V \arrow[r] \arrow[d] & C^{p+1}(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_{q-1})|_V \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

selon les colonnes, on obtient un isomorphisme à la page E_1, car l'homologie verticale est

$$H_q^v(C^p(\mathcal{U}, P_X\mathcal{S}_\bullet)|_V) = \prod_{i_0<\cdots<i_n} H_q(P_X\mathcal{S}_\bullet(U_{i_0\cdots i_n})|_V) \ ■$$

Pour chaque ouvert affine V de X, on dispose d'une augmentation

$$\varepsilon : P_V\mathcal{S}_\bullet(V) = \mathcal{S}_{\bullet V} \to C^\bullet(\mathcal{U}\cap V, P_V\mathcal{S}_\bullet)$$

introduite au paragraphe précédent. On se retrouve alors dans une situation analogue à celle du lemme 8.4, où l'on avait construit une résolution de faisceau.

Lemme 9.3 : Sous les mêmes hypothèses, on a une résolution de complexe de faisceau

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_{\bullet V} \longrightarrow C^0(\mathcal{U}\cap V, P_V\mathcal{S}_\bullet) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}\cap V, P_V\mathcal{S}_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Preuve : Puisque l'on travail avec des faisceaux, on peut vérifier l'exactitude seulement sur un recouvrement, typiquement sur chaque $W \in \mathcal{U}\cap V$. On a alors un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_{\bullet V}|_W \arrow[r] \arrow[d, "q.is."'] & C^\bullet(\mathcal{U}\cap V, P_V\mathcal{S}_\bullet)|_W \arrow[d, "q.is."] \\
\mathcal{S}_{\bullet W} \arrow[r] & C^\bullet(\mathcal{U}\cap W, P_W\mathcal{S}_\bullet)
\end{tikzcd}$$

de sorte que l'exactitude du complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_{\bullet V}|_W \longrightarrow C^0(\mathcal{U} \cap V, P_V \mathcal{S}_\bullet)|_W \longrightarrow C^1(\mathcal{U} \cap V, P_V \mathcal{S}_\bullet)|_W \longrightarrow \cdots$$

est équivalente à l'exactitude du complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_{\bullet W} \longrightarrow C^0(\mathcal{U} \cap W, P_W \mathcal{S}_\bullet) \longrightarrow C^1(\mathcal{U} \cap W, P_W \mathcal{S}_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Ce dernier est exact d'après le lemme 8.1, car $W \in \mathcal{U} \cap W$ et $P_W \mathcal{S}_\bullet(W) = \mathcal{S}_{\bullet W}$. ■

Considérons à présent le cas où $\mathcal{S}_{\bullet U}$ est le faisceau quasi-cohérent sur U associé au complexe de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$-module $C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U))$. Les ρ_{UV} sont donnés par les applications

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_V) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_U)} C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \to C_\bullet(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))$$

Ce sont des quasi-isomorphismes, comme cela a pu être remarqué au paragraphe 2 : une immersion ouverte de schéma affine $V \hookrightarrow U$ induit un morphisme plat

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$$

Grâce aux propriétés de l'homologie de Hochschild, on obtient

$$H_n(\Gamma(V, \mathcal{O}_V) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_U)} C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U))) \simeq \Gamma(V, \mathcal{O}_V) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_U)} H_n(C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U)))$$

$$= \Gamma(V, \mathcal{O}_V) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_U)} HH_n(\Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \simeq HH_n(\Gamma(V, \mathcal{O}_V)) = H_n(C_\bullet(\Gamma(V, \mathcal{O}_V)))$$

On peut donc utiliser les résultats précédents à ce cas particulier. En fait, ces faisceaux $\mathcal{S}_{\bullet U}$ ressemblent aux faisceaux restreins $\mathcal{C}_\bullet|_U$. Plus précisément, on a un morphisme

$$\mathcal{S}_{\bullet U} \to \mathcal{C}_\bullet|_U$$

donné sur les ouverts principaux par les applications canoniques

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U)_s \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_U)} C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \to C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U)_s)$$

pour tout $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. C'est un quasi-isomorphisme, comme le montre le lemme 2.4 (4) appliqué à U, en constatant que l'isomorphisme de complexe de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$-module

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_U)^e} B_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \simeq C_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U))$$

induit un isomorphisme de faisceau quasi-cohérent

$$\delta_U{}^*(B_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U))^\sim) \simeq \mathcal{S}_{\bullet U}$$

Tout ceci nous amène au dernier résultat de ce paragraphe.

Lemme 9.4 : $C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{S}_\bullet) \overset{q.is.}{\to} C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{C}_\bullet)$

Preuve : Puisqu'il s'agit d'un morphisme de faisceau, on peut démontrer l'énoncé sur un recouvrement, à savoir sur chaque $V \in \mathcal{U}$. On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{S}_\bullet)|_V \arrow[r] \arrow[d, "q.is."'] & C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{C}_\bullet)|_V \arrow[d, "="] \\
C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{S}_\bullet)|_V \arrow[r] & C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{C}_\bullet)|_V \\
\mathcal{S}_{\bullet V} \arrow[r, "q.is."'] \arrow[u, "q.is."] & \mathcal{C}_\bullet|_V \arrow[u, "q.is."']
\end{tikzcd}$$

L'égalité et les quasi-isomorphismes verticaux se justifient respectivement (de gauche à droite puis de haut en bas) par le corollaire 9.2, le lemme 8.2, le lemme 9.3 et le corollaire 8.5. On obtient le résultat voulu. ■

10 Preuve du théorème

Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps. Pour chaque ouvert affine $U = Spec\ A$ de X, on peut considérer $\mathcal{B}_{\bullet U}$ le faisceau quasi-cohérent sur $U \times U = Spec\ A^e$ associé au complexe de A^e-module $B_\bullet(A)$. On peut aussi considérer $\mathcal{S}_{\bullet U}$ le faisceau quasi-cohérent sur U associé au complexe de A-module $C_\bullet(A)$. Comme il a été remarqué précédemment, ces deux objets sont liés par un isomorphisme de complexe de faisceau de $\mathcal{O}_U$-module

$$\mathcal{S}_{\bullet U} \simeq {\delta_U}^* \mathcal{B}_{\bullet U}$$

On va définir un préfaisceau $\mathcal{E}_\bullet$ sur les ouverts affines de X à valeurs dans les faisceaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_{X \times X}$-module.

Pour tout ouvert affine U de X, on note $\mathcal{E}_\bullet(U) = i_* \mathcal{B}_{\bullet U}$ où $i : U \times U \hookrightarrow X \times X$ désigne l'inclusion. Pour tout ouvert affine $V \in U$, on dispose d'une restriction

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$$

qui induit canoniquement un morphisme de complexe de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$-module

$$B_\bullet(\Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \to B_\bullet(\Gamma(V, \mathcal{O}_V))$$

et qui par suite induit un morphisme de faisceau de $\mathcal{O}_{U \times U}$-module

$$\mathcal{B}_{\bullet U} \to {i'}_* \mathcal{B}_{\bullet V}$$

où $i' : V \times V \hookrightarrow U \times U$ désigne l'inclusion. En appliquant i_* on obtient une restriction

$$\mathcal{E}_\bullet(U) = i_* \mathcal{B}_{\bullet U} \to i_* {i'}_* \mathcal{B}_{\bullet V} = \mathcal{E}_\bullet(V)$$

qui fait de $\mathcal{E}_\bullet$ un préfaisceau.

Choisissons un recouvrement fini $\mathcal{U}$ de X par des ouverts affines. Considérons ensuite $\mathcal{F}_\bullet^\bullet = C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{E}_\bullet)$ et $\mathcal{F}_\bullet$ son complexe total, qui est borné en bas. Chaque $\mathcal{B}_{\bullet U}$ est un complexe de faisceau quasi-cohérent et plat de $\mathcal{O}_{U \times U}$-module. D'après le lemme 7.2, chaque $\mathcal{E}_\bullet(U) = i_* \mathcal{B}_{\bullet U}$, et par suite $\mathcal{F}_\bullet$, est un complexe de faisceau quasi-cohérent et plat de $\mathcal{O}_{X \times X}$-module. Enfin, la résolution de A^e-module

$$B_\bullet(A) \to A$$

induit une résolution de faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{U \times U}$-module

$$\mathcal{B}_{\bullet U} \to \delta_{U*} \mathcal{O}_U$$

et en appliquant i_*, le lemme 7.3 montre que l'on obtient un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{E}_\bullet(U) \overset{q.is.}{\to} i_* \delta_{U*} \mathcal{O}_U = \delta_* j_* \mathcal{O}_U = \delta_* P_X \mathcal{O}_X(U)$$

où $j : U \hookrightarrow X$ désigne l'inclusion et où l'on regarde $\delta_* P_X \mathcal{O}_X(U)$ comme un complexe concentré en 0. D'après le lemme 8.6,

$$\mathcal{F}_\bullet^\bullet = C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{E}_\bullet) \overset{q.is.}{\to} C^\bullet(\mathcal{U}, \delta_* P_X \mathcal{O}_X)$$

En appliquant le foncteur exact δ_* à la résolution fournie par le lemme 8.4, on obtient une résolution de faisceau de $\mathcal{O}_{X \times X}$-module

$$\delta_* \mathcal{O}_X \to \delta_* C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{O}_X) = C^\bullet(\mathcal{U}, \delta_* P_X \mathcal{O}_X)$$

Ceci permet d'obtenir les isomorphismes

$$H_0(\mathcal{F}_\bullet) \simeq H_0(C^\bullet(\mathcal{U}, \delta_* P_X \mathcal{O}_X)) \simeq \delta_* \mathcal{O}_X$$

$$H_q(\mathcal{F}_\bullet) \simeq H_q(C^\bullet(\mathcal{U}, \delta_* P_X \mathcal{O}_X)) = 0$$

pour tout $q \neq 0$. On peut ainsi appliquer la proposition 6.5 (1) qui fournit pour tout faisceau $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}_X$-module l'isomorphisme de δ-foncteur en $\mathcal{M}$

$$H^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \simeq \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\delta^* \mathcal{F}_\bullet, \mathcal{M})$$

Pour utiliser ce résultat, on va comparer $\delta^* \mathcal{F}_\bullet$ et $\mathcal{C}_\bullet$. Si on applique le lemme 7.4 au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\delta_U"] \arrow[d, "j"'] & U \times U \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r, "\delta"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

alors on obtient un isomorphisme de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module

$$P_X \mathcal{S}_\bullet(U) = j_* \mathcal{S}_{\bullet U} \simeq j_* {\delta_U}^* \mathcal{B}_{\bullet U} \simeq \delta^* i_* \mathcal{B}_{\bullet U} = \delta^* \mathcal{E}_\bullet(U)$$

En remarquant que δ^* commute avec les sommes et les produits finis, le lemme 9.4 nous fournit un quasi-isomorphisme

$$\delta^* \mathcal{F}^\bullet_\bullet = C^\bullet(\mathcal{U}, \delta^* \mathcal{E}_\bullet) \simeq C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{S}_\bullet) \overset{q.is.}{\to} C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{C}_\bullet)$$

Or, d'après le corollaire 8.5, on dispose également d'un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{C}_\bullet \overset{q.is.}{\to} \mathcal{G}_\bullet$$

où $\mathcal{G}_\bullet$ désigne le complexe total de $C^\bullet(\mathcal{U}, P_X \mathcal{C}_\bullet)$. Ainsi, d'après le lemme 4.1,

$$\mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\delta^* \mathcal{F}_\bullet, \mathcal{M}) \simeq \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}_\bullet, \mathcal{M}) \simeq \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{M})$$

ce qui prouve l'isomorphisme naturel en $\mathcal{M}$

$$H^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \simeq HH^n(X, \mathcal{M})$$

Supposons à présent que chaque $\mathcal{H}_q$ est localement libre. D'après ce qui précède,

$$H_q(\delta^* \mathcal{F}_\bullet) \simeq H_q(\mathcal{G}_\bullet) \simeq H_q(\mathcal{C}_\bullet) = \mathcal{H}_q$$

D'après la proposition 6.5 (2), les suites spectrales suivantes sont isomorphes

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(H_q(\delta^* \mathcal{F}_\bullet), \mathcal{M}) \Rightarrow \mathbb{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\delta^* \mathcal{F}_\bullet, \mathcal{M})$$

$$H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$$

Par le lemme 4.1, la première suite spectrale est isomorphe à la suite spectrale

$$Ext^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_q, \mathcal{M}) \Rightarrow HH^{p+q}(X, \mathcal{M})$$

C'est le résultat annoncé.

On peut vérifier que l'isomorphisme ne dépend pas du recouvrement $\mathcal{U}$ choisi. Si $\mathcal{U}'$ est un recouvrement fini de X par des ouverts affines alors

$$\mathcal{V} = \{U \cap U' : U \in \mathcal{U},\, U' \in \mathcal{U}'\}$$

est un recouvrement fini de X par des ouverts affines qui raffine $\mathcal{U}$. Les restrictions induisent alors un morphisme de complexe

$$C^\bullet(\mathcal{U}, -) \to C^\bullet(\mathcal{V}, -)$$

rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\delta^* C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{E}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & C^\bullet(\mathcal{U}, P_X\mathcal{C}_\bullet) \arrow[d] & \mathcal{C}_\bullet \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "="] \\
\delta^* C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{E}_\bullet) \arrow[r] & C^\bullet(\mathcal{V}, P_X\mathcal{C}_\bullet) & \mathcal{C}_\bullet \arrow[l, "\varepsilon"]
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\delta^*\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{M}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}_\bullet, \mathcal{M}) \arrow[d] & \\
H^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & & HH^n(X, \mathcal{M}) \arrow[ul, "\simeq"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\delta^*\mathcal{F}'_\bullet, \mathcal{M}) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}'_\bullet, \mathcal{M}) &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{F}'_\bullet$ et $\mathcal{G}'_\bullet$ désignent respectivement les complexes totaux de $C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{E}_\bullet)$ et $C^\bullet(\mathcal{V}, P_X\mathcal{C}_\bullet)$.

Lexique des notations

$X \times_S Y$	produit des schémas X et Y fibré sur un schéma S
δ_X	application diagonale d'un schéma X sur un schéma de base
$f_*\mathcal{F}$	pushforward d'un faisceau $\mathcal{F}$ par une application continue $f : X \to Y$
$f^{-1}\mathcal{G}$	pullback d'un faisceau $\mathcal{G}$ par une application continue $f : X \to Y$
$f^*\mathcal{G}$	faisceau $\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{G}$ si $f : X \to Y$ est un morphisme de schéma
$M^\sim$	faisceau quasi-cohérent sur $Spec\ A$ associé à un A-module M
$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$	faisceau $U \mapsto Hom_{\mathcal{O}\|_U}(\mathcal{F}\|_U, \mathcal{G}\|_U)$
$\mathcal{E}xt^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, -)$	foncteur dérivé du foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, -)$
$\mathcal{F}_x$	fibre d'un faisceau $\mathcal{F}$ en un point x
Ω^q_A	module des q-formes différentielles de Kähler sur une algèbre A
$\Omega^q_{X/S}$	faisceau des q-formes différentielles relatives sur un S-schéma X
$M^\vee$	module dual $Hom_A(M, A)$ d'un A-module M
$\mathcal{F}^\vee$	faisceau dual $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ d'un faisceau de $\mathcal{O}$-module $\mathcal{F}$
$\Gamma(U, \mathcal{F})$	sections $\mathcal{F}(U)$ d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur un ouvert U
$H^v_\bullet(C_{\bullet\bullet})$	homologie en la première variable du double complexe $C_{\bullet\bullet}$
$H^h_\bullet(C_{\bullet\bullet})$	homologie en la seconde variable du double complexe $C_{\bullet\bullet}$
$S^{-1}A$	anneaux des fractions à numérateur dans A et à dénominateur dans S
A_s	anneaux des fractions pour $s \in A$ et $S = \{s^n : n \in \mathbb{N}\}$
$A_\mathfrak{p}$	anneaux des fractions pour $\mathfrak{p} \in Spec\ A$ et $S = A \setminus \mathfrak{p}$
$\overset{q.is.}{\to}$	quasi-isomorphisme

Bibliographie

[1] R. Hartshorne, Algebraic Geometry (Springer, Berlin, 1977)

[2] J.-L. Loday, Cyclic Homology, Second Edition (Springer, Berlin, 1998)

[3] R.G. Swan, Hochschild cohomology of quasiprojective schemes, Journal of Pure and Applied Algebra 110 (1996) 57-80

[4] C.A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra (Cambridge University Press, Cambridge, 1994)