Rapport de stage

Table de caractères et distinction des représentations du groupe $Gl_2(\mathbb{F}_q)$

Manon DUBOIS
Tuteur : Paul BROUSSOUS
Encadrant universitaire : Erwan BRUGALLE

Juillet 2022

Table des matières

1 Introduction et notations **2**

2 Représentations induites, caractères et irréductibilité **3**
2.1 Représentation induite : définition et modèle 3
2.2 Formule de Frobenius pour le caractère d'une représentation induite. 3
2.3 Réciprocité de Frobenius 3
2.4 Décomposition et critère d'irréductibilité de Mackey 4

3 Représentations irréductibles du groupe $\mathbf{Gl}_2(\mathbb{F}_q)$ **4**
3.1 Classes de conjugaison du groupe $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_q)$ 5
3.2 Représentations irréductibles et table de caractères de $Gl_2(\mathbb{F}_q)$ 9
3.2.1 Caractères de G 9
3.2.2 La représentation par permutation de G sur $P^1(\mathbb{F})$ 10
3.2.3 Produits tensoriels 11
3.2.4 Représentations induites par le sous-groupe de Borel 12
3.2.5 Représentations induites par le sous-groupe K 14
3.2.6 Conclusion 17

4 Introduction à la distinction des représentations, application dans le cadre de $\mathbf{Gl}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ **17**
4.1 Définition 17
4.2 Application à $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$ 17
4.2.1 Par le calcul 17
4.2.2 Une généralisation et une condition sans calculs 19

1 Introduction et notations

L'objectif de ce stage a été de manipuler des outils et notions sur les représentations en les appliquant notamment à deux groupes de matrice à coefficient dans $\mathbb{F}$, un corps fini de caractéristique différente de 2 : le groupe de Heisenberg $H_3 = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{F}\}$ et le groupe $Gl_2(\mathbb{F})$. Le but final était notamment de discuter de la distinction des représentations irréductibles de ces deux groupes.
Le document ci-présent relate les différents résultats obtenus pour le groupe $Gl_2(\mathbb{F})$ mais il convient de mentionner quelques résultats concernant le groupe de Heisenberg. En effet, en m'appuyant sur un document non publié [M] de Nadir Matringe, j'ai pu expliciter les différentes représentations irréductibles de $H_3(\mathbb{F})$ puis m'intéresser à la distinction des représentations irréductibles de $H_3(\mathbb{F}_{q^2})$ sous $H_3(\mathbb{F}_q)$, q désignant un nombre entier impair, puissance d'un nombre premier. Cette étude m'a menée à trouver certaines conditions pour que les représentations irréductibles de $H_3(\mathbb{F}_{q^2})$ soient distinguées sous $H_3(\mathbb{F}_q)$. L'autre résultat très important de ce document est le suivant : si G est un groupe de cardinal impair, alors toutes les représentations (π, V) de G distinguées sous un sous-groupe H vérifient $dim(V^H) = 1$. Ce résultat va en réalité se généraliser dans un cadre plus général dont nous reparlerons par la suite. J'ai ensuite travaillé sur le groupe $Gl_2(\mathbb{F})$. Avant d'étudier la distinction des représentations irréductibles de ce groupe, il faut d'abord en établir la table de caractères. Ce travail fait l'objet de la partie 3 et nécessite de nombreux outils liés aux représentations induites, c'est pourquoi la partie 2 rappelle les résultats principaux dont je me sers. Le but a ensuite été de trouver à quelles conditions les représentations de $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$ sont distinguées sous $Gl_2(\mathbb{F}_q)$. J'ai réalisé cette étude de deux manières différentes : dans un premier temps par le calcul, dans la partie 4.2.1, méthode qui nécessite peu d'outils mais qui s'avère être longue et fastidieuse. Dans un second temps je me suis interessée à l'astucieuse démonstration de Dipendra Prasad dans son article [P]. Les deux théorèmes démontrés dans cet article sont les suivants : soit (π, V) une représentation de $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$, elle est distinguée sous $Gl_2(\mathbb{F}_q)$ si et seulement si $\pi^F \simeq \tilde{\pi}$ et de plus, dans le cas où elle est distinguée, on a nécessairement $dim(V^{Gl_2(\mathbb{F}_q)}) = 1$. Ce résultat est particulièrement surprenant puisque qu'il indique que la présence d'un vecteur fixe sous le sous-groupe $Gl_2(\mathbb{F}_q)$ permet de détecter une symétrie de π. Ces deux résultats se généralisent dans un cadre beaucoup plus général qui est celui des représentations stables des groupes algébriques connexes, comprenant par exemple le groupe de Heisenberg, $O_n(\mathbb{F}), Sl_n(\mathbb{F})$, ou encore $Gl_n(\mathbb{F})$. Pour finir, dans la partie 4.2.2, je vérifie sur quelques représentations que le théorème de D. Prasad est cohérent avec les résultats obtenus par la méthode calculatoire de la partie 4.2.1.

La plupart des notations utilisées dans ce rapport sont des notations standards mais il convient de les rappeler pour être sûr de leur signification. Ainsi lorsque l'on aura deux groupe G et H, on notera par $Hom(G, H)$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans H. Pour une représentation (π, V), on notera toujours par χ_V ou par χ_π son caractère. Nous noterons par V_{triv} la représentation triviale et si (π, V) et (ρ, W) sont deux représentations d'un même groupe G, on notera par $Hom_G(V, W)$ ou $Hom_G(\pi, \rho)$ l'espace des G-morphismes de π vers ρ. De manière générale on confondra souvent, dans les notations, la représentation et son espace sous-jacent. Nous noterons par $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(V, W)$ ou $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ l'ensemble des applications $\mathbb{C}$-linéaires d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel W. Enfin, pour une matrice donnée A, nous noterons toujours χ_A son polynôme caractéristique et μ_A son polynôme minimal.

2 Représentations induites, caractères et irréductibilité

Le but de cette partie est de rappeler la définition d'une représentation induite ainsi que ses différentes propriétés. Notamment, nous expliciterons le caractère d'une telle représentation et trouverons une condition pour son irréductibilité. La plupart des résultats cités dans cette partie ne seront pas démontrés car ils sont considérés comme des pré-requis et seront utilisés comme des outils dans les parties suivantes.

2.1 Représentation induite : définition et modèle

Dans cette partie, on considère G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On suppose que l'on dispose d'une représentation (σ, W) de H.

Définition 1 *On appelle représentation induite de (σ, W) sur G et on note $ind_H^G(\sigma)$ la représentation (π, V) de G donnée par : V=$\{f : G \to W; f(hg) = \sigma(h)f(g)\ \forall h \in H, g \in G\}$ et on pose*

$$\forall f \in V, \forall g \in G, \forall x \in G, \pi(g)(f)(x) = f(xg)$$

Remarque 1 *Pour vérifier que la définition est valable, il faut vérifier que l'application π ainsi définie est bien un morphisme de groupe et vérifier que $\forall g \in G, \forall f \in V, \pi(g)(f) \in V$.*

Proposition 1 *En gardant les notations précédentes, notons $V_0 = \{f \in V; supp(f) \subset H\}$ alors :*
- *V_0 est isomorphe, en tant que représentation de H à W via le H-morphisme : $w \in W \mapsto f_w \in V_0$ définie par $\forall h \in H, f_w(h) = \sigma(h)f(w)$ et V_0 est H-stable, c'est à dire $\forall f \in V_0, \forall h \in H, \pi(h)(f) \in V_0$*
- *$\forall h \in H, \pi(h)|_{V_0} = \sigma(h)$*
- *Si on note $g_1, ..., g_s$ un système de représentants de G/H, on a $V = \oplus_{i=1}^s \pi(g_i^{-1})V_0$*

Remarque 2 *La définition ici énoncée de représentation induite est en réalité un modèle, permettant de vérifier une définition plus large donnée par les items de la Proposition 1. Dans ce rapport, nous utiliserons toujours ce modèle, ce qui explique pourquoi nous avons donné cette définition directement.*

2.2 Formule de Frobenius pour le caractère d'une représentation induite.

Proposition 2 *On considère G un groupe fini, H un sous-groupe de G, (σ, W) une représentation de H, on note χ le caractère de σ et χ_π celui de $ind_H^G(\sigma)$, on a alors la formule suivante : $\forall u \in V$,*

$$\chi_\pi(u) = \sum_{r \in R, r^{-1}ur \in H} \chi(r^{-1}ur)$$

Où R désigne un système de représentant de G/H.

2.3 Réciprocité de Frobenius

Proposition 3 *(Réciprocité de Frobenius) Soit G un groupe fini, H un sous-groupe de G, (σ, W) une représentation irréductible de H et (π, V) une représentation irréductible de G. Alors les deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $Hom_H(\pi|_H, \sigma)$ et $Hom_G(\pi; ind_H^G(\sigma))$ sont isomorphes de façon naturelle.*

De la même manière,

Proposition 4 *(Réciprocité de Frobenius) Soit G un groupe fini, H un sous-groupe de G, (σ, W) une représentation irréductible de H et (π, V) une représentation irréductible de G. Alors les deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $Hom_H(\sigma; \pi|_H)$ et $Hom_G(ind_H^G(\sigma); \pi)$ sont isomorphes.*

Autrement dit, la représentation σ apparaît autant de fois dans $\pi|_H$ que π apparaît dans $ind_H^G(\sigma)$.

2.4 Décomposition et critère d'irréductibilité de Mackey

On rappelle tout d'abord la proposition suivante, résumant le lemme de Schur et sa réciproque.

Proposition 5 *(Schur) Soit G un groupe fini et soit (π, V) une représentation de G. Cette représentation est irréductible si et seulement si $Hom_G(\pi;\pi) = \mathbb{C}Id_V$.*

Proposition 6 *Soit G un groupe fini et soit (π, V) une représentation de G. Supposons que $dim(Hom_G(\pi;\pi)) = 2$; alors la représentation (π, V) se décompose exactement en 2 composantes irréductibles non isomorphes.*

Soit désormais G un groupe fini, H et K deux sous-groupes de G. On considère (σ, W) une représentation de H et on note $(\pi, V) := ind_H^G(\sigma)$. On s'intéresse à la représentation $\pi|_K$. On désignera par R un système de représentants des doubles classes H\G/K. Pour chaque g dans R, on notera $V_g = \{f \in V; supp(f) \subset HgK\}$. De plus pour chaque g dans G, on définit une représentation ${}^g\sigma$ de $K \cap g^{-1}Hg$ sur W en posant pour tout x dans $K \cap g^{-1}Hg$: ${}^g\sigma(x) = \sigma(gxg^{-1})$.

Proposition 7 *(Décomposition de Mackey) Avec les notations précédentes, on a alors $\forall g \in R, V_g$ est une sous K-représentation de V et cette représentation de K est isomorphe à $ind_{K\cap g^{-1}Hg}^K {}^g\sigma$. On a alors la décomposition suivante :*

$$\begin{aligned} ind_H^G(\sigma)|_K &= \bigoplus_{g\in R} V_g \\ &= \bigoplus_{g\in R} ind_{K\cap g^{-1}Hg}^K \, {}^g\sigma \end{aligned}$$

Proposition 8 *(Critère d'irréductibilité de Mackey) Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G, on considère $(\sigma; W)$ une représentation de H. On note (π, V) la représentation induite par σ sur G et R un système de représentant des doubles classes $H\backslash G/H$. Alors, si σ n'est pas irréductible, ρ n'est pas non plus irréductible. Par ailleurs, si σ est irréductible, π est irréductible si et seulement si $\forall g \in R\backslash H, Hom_{H\cap g^{-1}Hg}({}^g\sigma, \sigma) = \{0\}$*

3 Représentations irréductibles du groupe $\mathbf{Gl}_2(\mathbb{F}_q)$

Dans cette section, nous souhaitons expliciter la table de caractères du groupe $Gl_2(\mathbb{F}_q)$. Dans toute cette section, q désignera un nombre impair, puissance d'un nombre premier p. On notera de plus $\mathbb{F}_q$ par $\mathbb{F}$ et l'extension quadratique $\mathbb{F}_{q^2}$ de $\mathbb{F}$ par $\mathbb{F}'$. Le groupe $Gl_2(\mathbb{F}_q)$ sera désigné par G. On rappelle que le groupe $Gl_2(\mathbb{F}_q)$ est un groupe à $q(q-1)^2(q+1)$ éléments. Par ailleurs, on a le lemme suivant :

Lemme 1 *Soit ϵ un non carré de $\mathbb{F}$; alors il existe $\alpha \in \mathbb{F}'$ tel que $\mathbb{F}' = \mathbb{F}[\alpha]$ et $\alpha^2 = \epsilon$*

Remarque 3 *Ce résultat se généralise à une extension de corps quadratique quelconque avec caractéristique différente de 2.*

Preuve 1 *Soit $\beta \in \mathbb{F}'\backslash\mathbb{F}$, on a $\mathbb{F} \subsetneq \mathbb{F}[\beta] \subset \mathbb{F}'$. On note que l'extension étant finie, β est un élément algébrique sur $\mathbb{F}$ et on a ainsi $\mathbb{F}[\beta] = \mathbb{F}(\beta)$ qui est un corps. Alors, on a : $[\mathbb{F}';\mathbb{F}] = [\mathbb{F}';\mathbb{F}[\beta]][\mathbb{F}[\beta];\mathbb{F}]$ et comme $[\mathbb{F}';\mathbb{F}] = 2$ et $[\mathbb{F}[\beta];\mathbb{F}] \neq 1$, on a nécessairement $[\mathbb{F}';\mathbb{F}[\beta]] = 1$ et donc $\mathbb{F}[\beta] = \mathbb{F}'$; cependant, nous n'avons pas encore forcément $\beta^2 = \epsilon$ et nous ne sommes même pas encore assurés que $\beta^2 \in \mathbb{F}$*
Si $\beta^2 = \epsilon$, on choisit $\alpha = \beta$.
Sinon, on considère μ_β le polynôme minimal de β sur $\mathbb{F}$. Puisque $\mathbb{F}[\beta]$ est un corps, celui ci est un un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}$ et il est également de degré 2 puisque l'extension $\mathbb{F}[\beta]\backslash\mathbb{F}$ est de degré 2. Écrivons alors $\mu_\beta(X) = X^2 + bX + c = (X + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}$ avec b et c des éléments de $\mathbb{F}$. Comme β est racine de μ_β, $\beta + \frac{b}{2}$ est une racine carré de $\frac{b^2}{4} - c$. Ainsi ; en posant $\alpha = \beta + \frac{b}{2}$, on a $\mathbb{F}[\alpha] = \mathbb{F}[\beta] = \mathbb{F}'$ car $b \in \mathbb{F}$ et on a $\alpha^2 = \frac{b^2}{4} - c \in \mathbb{F}$. Nous sommes donc désormais assurés que $\alpha \in \mathbb{F}$. Cependant nous n'avons pas encore, à priori, $\alpha^2 = \epsilon$ Mais, si ce n'est pas le cas, α^2 est un non carré dans $\mathbb{F}$ puisque ses racines sont $+\alpha$ et $-\alpha$ qui sont dans $\mathbb{F}'\backslash\mathbb{F}$ Comme il n'y a qu'une seule classe de non carrés dans $\mathbb{F}$, α^2 et ϵ sont égaux modulo un carré de $\mathbb{F}$ c'est à dire : $\exists\lambda \in \mathbb{F}$ tel que $\lambda^2\alpha^2 = \epsilon$. On remplace alors α par $\lambda\alpha$ et on a le résultat souhaité.

Dans la suite de cette section, nous fixons donc ϵ un générateur de $\mathbb{F}^*$, qui est bien un non carré de $\mathbb{F}$ (sinon il serait d'ordre strictement inférieur à q-1 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{F}^*$). On notera alors α l'élément $\alpha \in \mathbb{F}'\backslash\mathbb{F}$ obtenu par le Lemme 1.

3.1 Classes de conjugaison du groupe $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_q)$

Le but de cette section est de déterminer les classes de conjugaison du groupe $Gl_2(\mathbb{F}_q)$. En particulier, nous allons montrer que $Gl_2(\mathbb{F}_q)$ se décompose de la manière suivante en classes de conjugaison.

Représentant	Nombre d'éléments par classe	Nombre de classes
$\mathrm{a}_x = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	1	q-1
$\mathrm{b}_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	$\mathrm{q}^2 - 1$	q-1
$\mathrm{c}_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}; x \neq y$	$\mathrm{q}^2 + q$	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$
$\mathrm{d}_{x,y} = \begin{pmatrix} x & \epsilon y \\ y & x \end{pmatrix}; y \neq 0$	$\mathrm{q}^2 - q$	$\frac{q(q-1)}{2}$

(1)

Pour cela, pour chaque classe de conjugaison nous allons montrer que le nombre d'éléments dans la classes et que le nombre de classes correspondant au représentant donné sont corrects. Nous montrerons ensuite que ces éléments définissent bien des classes de conjugaison différentes. Pour finir nous dénombrerons le nombre total de classes de conjugaison afin de connaître le nombre de représentations irréductibles de G.

— Il est clair que pour x fixé dans $\mathbb{F}$, l'élément a_x est seul dans sa classe de conjugaison puisque $\forall P \in Gl_2(\mathbb{F}_q), P.a_x.P^{-1} = P.xI_2.P^{-1} = a_x$. Par ailleurs, le nombre de tels représentants est $q-1$ puisqu'on peut prendre n'importe quel x non nul de $\mathbb{F}$

— Soit maintenant x fixé dans $\mathbb{F}$. Montrons que b_x a q^2-1 éléments dans sa classe. Notons C_{b_x} la classe de conjugaison de l'élément b_x. On considère l'action de G sur C_{b_x} par conjugaison et on détermine le stabilisateur de cette action. Soit alors une matrice P de G, P=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a,b,c,d des éléments de $\mathbb{F}$. Après calculs, la condition $P.b_x.P^{-1} = b_x$ est équivalente à :

$$\frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} adx - ac - bcx & a^2 \\ -c^2 & -cbx + ca + dax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \tag{2}$$

On a donc nécesairement c=0 et (2) devient

$$\begin{pmatrix} x & ad^{-1} \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ce qui impose a=d. Réciproquement, on peut vérifier que les matrices de la forme $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ sont bien dans le stabilisateur de b_x. Ce stabilisateur est donc donné par l'ensemble :

$$\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}; a \neq 0\}$$

de cardinal (q-1)q. On a alors

$$|C_{b_x}| = \frac{(q-1)^2(q+1)q}{(q-1)q} = q^2 - 1$$

Ce qui correspond bien à ce que l'on voulait prouver.
Comme précédemment, le nombre de représentants de la forme b_x est $q-1$ car on peut choisir n'importe quel x de $\mathbb{F}^*$.

— Soit $x \neq y$ fixés dans $\mathbb{F}$. Montrons maintenant que $c_{x,y}$ a q^2+q éléments dans sa classe. De nouveau, on cherche à exprimer le stabilisateur de l'action de conjugaison de G sur la classe de conjugaison de $c_{x,y}$. On considère de nouveau la matrice P de G. Après calcul , on trouve :

$$P.c_{x,y}.P^{-1} = c_{x,y}$$

$$\iff \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} adx-cby & -abx+aby \\ dcx-cdy & --bcx+ady \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{ad-cb}cd(x-y) & = & 0 \\ \frac{1}{ad-cb}ab(y-x) & = & 0 \\ \frac{1}{ad-cb}(adx-cby) & = & x \\ \frac{1}{ad-cb}(-bcx+ady) & = & y \end{cases} \quad (4)$$

Supposons alors que $c \neq 0$, comme $x \neq y$, on alors d=0 et (4) devient :

$$\begin{cases} \frac{1}{-cb}ab(y-x) & = & 0 \\ y & = & x \\ x & = & y \end{cases}$$

qui est incompatible puisque $x \neq y$. On a donc nécessairement c=0. Ainsi, ad-cb devient seulement ad, et comme cet élément doit être non nul, on a en particulier a et d non nuls. On a alors nécessairement c=0 et (4) devient :

$$\begin{cases} bd^{-1} & = & 0 \\ \frac{1}{ad}(adx) & = & x \\ \frac{1}{ad}(ady) & = & y \end{cases} \quad (5)$$

Finalement on obtient : b=0 et c=0. Réciproquement, on peut vérifier que $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec b=0 et c=0 est bien dans le stabilisateur de l'élément $c_{x,y}$. Ainsi,le stabilisateur de $c_{x,y}$ est donné par l'ensemble suivant :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} ; (a,d) \in (\mathbb{F}^*)^2 \right\}$$

Celui ci est de cardinal $(q-1)^2$ et donc finalement le cardinal de classe de conjugaison de $c_{x,y}$ est donné par :

$$\frac{(q-1)^2(q+1)q}{(q-1)^2} = q^2 + q$$

qui était bien le résultat attendu.
Nous comptons désormais le nombre de classes de conjugaison ayant pour représentant une matrice de la forme $c_{x,y}$. On dénombre au total $(q-1)(q-2)$ matrices de la forme $c_{x,y}$ avec $x \neq y$ car on si on fixe x en premier, non nul, on a $q-1$ choix et il nous reste ensuite $q-2$ choix pour y puisque y ne peut être ni nul ni égal à x. Cependant, on remarque que les couples (x,y) et (y,x) représentent la même classe de conjugaison car les matrices $c_{x,y}$ et $c_{y,x}$ sont conjuguées par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi nous avons compté deux fois chaque classe de conjugaison et il faut diviser par deux le résultat précédent : il y a donc finalement $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ classes de conjugaison ayant pour représentants un élément de la forme $c_{x,y}, x \neq y \in \mathbb{F}^*$.

— Nous cherchons désormais à connaître le cardinal de $C_{d_{x,y}}$, la classe de conjugaison de l'élément $d_{x,y}$. Nous pourrions de nouveau travailler avec le stabilisateur de $d_{x,y}$ en résolvant un système ; mais celui-ci serait long et difficile à résoudre car cette fois ci l'élément $d_{x,y}$ n'a pas de coefficient nul. Nous allons donc adopter une nouvelle méthode pour déterminer le cardinal de cette classe de conjugaison. Nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 9 *Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque et A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$, ayant le même polynôme minimal, de degré n, irréductible. Alors A et B sont conjuguées dans $GL_n(\mathbb{K})$.*

Preuve 2 *On note tout d'abord que l'on a alors $\mu_A = \chi_A$ et $\mu_B = \chi_B$*

Lemme 2 *Dans le cadre de la proposition 9, il n'existe aucun sous espace vectoriel strict de $\mathbb{K}^n$ non trivial et A- stable.*

Preuve 3 *En effet, supposons que l'on dispose de W un sous espace strict de $\mathbb{K}^n$ A-stable non trivial, considérons $\mathscr{B}$ une base de W complétée en une base de $\mathbb{K}^n$. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté par A dans la base canonique ; la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Où A_1 et A_2 sont deux matrices. On a alors $\chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_2}$ ce qui contredit le fait que le polynôme minimal de A soit irréductible (puisque $\mu_A = \chi_A$). Un tel sous espace n'existe donc pas et cela achève la preuve du lemme 2.

Revenons à la preuve de la proposition 9 : On considère alors $v \in (\mathbb{K}^n)^*$, la famille $\mathscr{B} = (v, Av, ..., A^n v)$ engendre un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ non réduit à 0 et stable par A, d'après le lemme 2, on a donc nécessairement $Vect(v, Av, ..., A^n v) = \mathbb{K}^n$. Ainsi

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & . & & & . & -a_1 \\ 0 & 1 & . & & . & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & 0 & . \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est conjugée avec A pour des coefficients $a_0, ..., a_{n-1}$ de $\mathbb{K}$, et de plus $\chi_A = \mu_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$

De la même manière, la matrice B est conjuguée à la matrice :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & -b_0 \\ 1 & . & & & . & -b_1 \\ 0 & 1 & . & & . & -b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & 0 & . \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

et on a $\chi_B = \mu_B = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + ... + b_0$. Or, comme $\mu_A = \mu_B$, on a $a_i = b_i \ \forall i \in \{0, ..., n-1\}$ et les matrices A et B sont donc toutes les deux conjuguées à la même matrice :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & -b_0 \\ 1 & . & & & . & -b_1 \\ 0 & 1 & . & & . & -b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & 0 & . \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

et sont donc conjuguées entre elles. Cela achève la preuve.

Corollaire 1 *Soit g et h deux éléments de G tous deux de polynômes caractéristiques irréductibles. Alors les éléments g et h sont conjugués sous G si et seulement si leur polynômes caractéristiques sont égaux.*

Revenons à notre classe de conjugaison ; on remarque tout d'abord que l'élément $d_{x,y}$ est sans valeur propre puisque son polynôme caractéristique est $X^2 - 2xX + (x^2 - \epsilon y^2) = (X - (x - \alpha y))(X - (x + \alpha y))$ qui est bien sans racines dans $\mathbb{F}$. On va en fait démontrer que tout élément de G sans valeur propre s'écrit, à conjugaison près, $d_{x,y}$ pour x et y dans $\mathbb{F}$ avec y non nul.
Soit g un élément de G sans valeur propre. Ainsi le polynôme caractéristique de g est irréductible et il est égal à son polynôme minimal. Le corps $\mathbb{L} := \mathbb{F}(g)$ est alors une extension de degré 2 du corps $\mathbb{F}$. Cette extension étant isomorphe à $\mathbb{F}'$, on a alors $\mathbb{L} \simeq \mathbb{F}(\alpha)$. On identifie donc désormais α à l'élément lui correspondant dans $\mathbb{L}$. Le polynôme $X^2 - \epsilon$, étant irréductible sur $\mathbb{F}$ et ayant pour racine α, c'est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{F}$. Or, la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a également pour polynôme minimal $X^2 - \epsilon$. D'après la Proposition 9, les matrices A et α sont donc conjuguées dans G. Posons alors $x \in$ G tel que $A = x\alpha x^{-1}$. On peut remplacer notre élément g par son conjugué : $g' = xgx^{-1}$, ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{L}' & := & \mathbb{F}[g'] \\ & = & \mathbb{F}[xgx^{-1}] \\ & = & x\mathbb{F}[g]x^{-1} \\ & = & x\mathbb{F}[\alpha]x^{-1} \\ & = & \mathbb{F}[x\alpha x^{-1}] \\ & = & \mathbb{F}[A] \end{array}$$

On peut donc supposer que $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc $\mathbb{F}[g'] = \mathbb{F}[\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}] = \{x + yA; x, y \in \mathbb{F}\} = \{\begin{pmatrix} x & \epsilon y \\ y & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{F}\}$. Donc l'élément g' est de la forme $d_{x,y}$ pour x et y dans $\mathbb{F}$, mais y est nécessairement non nul car g' est également sans valeur propre. Ainsi, g est conjugué à un élément de la forme $d_{x,y}$ avec $x, y \in \mathbb{F}$ et $y \neq 0$.
Nous avons donc pour l'instant montré que tout élément sans valeur propre était dans la classe de conjugaison d'un élément $d_{x,y}$. Par ailleurs, on remarque que la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & -\epsilon \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie : $P^{-1}d_{x,y}P = d_{x,-y}$. Ainsi, il y a aussi l'élément $d_{x,-y}$ dans la classe de g.
Par ailleurs, d'après le Corollaire 1, les éléments $g_{x,y}$ et $g_{x',y'}$ sont conjugués si et seulement si ils ont le même polynôme caractéristique. En résolvant le système on obtient que $g_{x,y}$ et $g_{x',y'}$ sont conjugués si et seulement si x=x' et $y = \pm y'$. Ainsi, pour dénombrer les classes de conjugaison avec pour représentant un élément de la forme $d_{x,y}$ avec y non nul, il suffit de dénombrer les couples $\{(x; y) \in \mathbb{F}^2; y \neq 0$ puis de diviser par deux car on aura alors compté chaque classe deux fois en la comptant avec le représentant $(x; y)$ puis avec $(x; -y)$. On trouve alors en effet $\frac{q(q-1)}{2}$ telles classes de conjugaison. Nous cherchons maintenant à savoir combien d'éléments il y a dans ces classes de conjugaison.
Fixons $x \in \mathbb{F}$, $y \in \mathbb{F}^*$ et notons $g := d_{x,y}$. On cherche à connaître l'ensemble $Stab(g) = \{m \in G; mgm^{-1} = g\}$. On commence pour cela par déterminer $A_g = \{m \in G; mg = gm\}$ $\mathbb{F}'$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{F}$. Ainsi, $M_2(\mathbb{F})$ peut être vu comme l'ensemble des applications $\mathbb{F}$-linéaires sur $\mathbb{F}'$. On munit $\mathbb{F}'$ d'une structure de $\mathbb{F}[g]$ espace vectoriel en définissant :

$$\forall a \in \mathbb{F}[g], \forall v \in \mathbb{F}', a.v = a(v)$$

$\mathbb{F}'$ est alors de dimension 1 sur $\mathbb{F}[g]$ pour cette structure. On peut alors reformuler :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A}_g & = & \{\mathrm{m} \in \mathscr{L}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}'); mg = gm\} \\ & = & \{\mathrm{m} \in \mathscr{L}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}'); mh = gh \ \forall h \in \mathbb{F}[g]\} \\ & = & \{\mathrm{m} \in \mathscr{L}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}'); \forall h \in \mathbb{F}[g]; \forall v \in \mathbb{F}' m.(h.v) = h.(m(v))\} \\ & = & \mathrm{L}_{\mathbb{F}[g]} \\ & = & \{\text{homotéties de } \mathbb{F}'\} \\ & = & \{\text{multiplication par des éléments de } \mathbb{F}[g]\} \\ & \simeq & \mathbb{F}[g] \end{array} \tag{6}$$

Et ainsi, on a $Stab(g) = \mathbb{F}[g]^\times = \mathbb{F}[A]^\times = \{\begin{pmatrix} x & \epsilon y \\ y & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{F}\}^\times$ où les deux dernières égalités ont été obtenues à partir de ce qui a été fait précédemment. Ce dernier ensemble est de cardinal $q^2 - 1$ car il suffit de fixer la première colonne non nulle. On a alors

$$|C_{d_{x,y}}| = \frac{q(q-1)^2(q+1)}{q^2-1} = q^2 - q$$

Ce qui était le résultat souhaité.

En faisant le total des classes de conjugaison obtenues et de leur cardinal, on obtient bien le nombre d'éléments de G. Il n'y a donc pas d'autre classe de conjugaison à rechercher. Il reste cependant à voir que les classes de conjugaisons trouvées sont bien distinctes. Pour cela, il suffit de voir que $a_x, b_x, c_{x,y}$ et $d_{x,y}$ n'ont pas les mêmes polynômes minimaux et ne peuvent donc pas être conjugués. Ceci achève la vérification du tableau (1).

3.2 Représentations irréductibles et table de caractères de $Gl_2(\mathbb{F}_q)$

Nous allons maintenant chercher toutes les représentations irréductibles du groupe G. Grâce aux classes de conjugaison déterminées précedemment, nous savons que nous devons en trouver au total :

$$(q-1)+(q-1)+\frac{(q-1)(q-2)}{2}+\frac{(q-1)q}{2}$$

ce qui donne finalement q^2-1 représentations irréductibles.

3.2.1 Caractères de G

Proposition 10 *Les caractères de G sont exactement les applications de la forme $\beta \circ det$ avec β un caractère du groupe multiplicatif $\mathbb{F}^*$.*

.

Remarque 4 *On remarque que le résultat est faux pour $Gl_2(\mathbb{F}_2)$: en effet, ce groupe est isomorphe à S_3 et la représentation correspondant à la signature dans S_3 ne peut pas s'écrire sous la forme $\beta \circ det$ avec β un caractère de $\mathbb{F}_2^*$.*

Preuve 4 *On vérifie facilement que si $\beta \in Hom(\mathbb{F}^*;\mathbb{C}^*)$, alors l'application* $\begin{array}{rccc} \chi : & G & \to & \mathbb{C}^* \\ & g & \mapsto & \beta \circ det(g) \end{array}$ *est un caractère de G. Réciproquement, considérons χ un caractère de G. On va montrer que ce caractère est trivial sur le noyau du déterminant (qui est $SL_2(\mathbb{F})$) et donc que l'on peut le factoriser à travers le déterminant. Pour commencer, la caractère χ est constant sur chaque classe de conjugaison. Par conséquent, on a $\forall g,h \in G, \chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$ et en particulier, si on considère les matrices $g = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient :*

$$\chi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \chi(\begin{pmatrix} 1 & tx \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Ainsi,$\chi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ prend au maximum deux valeurs, celle pour x non nul et celle pour x nul (qui vaut 1). Définissons alors l'application : ψ sur $\mathbb{F}$ par $\psi(x) = \chi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. Cette application est à valeur dans $\mathbb{C}^*$ et on vérifie aisément que c'est un morphisme de groupe. . Par ailleurs, nous venons de constater que cette application ne prend que deux valeurs, notons c la valeur de ψ sur les éléments x non nuls. Comme la caractéristique de $\mathbb{F}$ est différente de 2, on peut choisir $x \in \mathbb{F}$ tel que $2x \neq 0$ On a alors $\psi(2x) = \psi(x)^2$ et donc $c^2 = c$ ce qui prouve que c est égal à 1. Ainsi, on a $\chi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1\ \forall x \in \mathbb{F}$. Comme les matrices de transvections engendrent $SL_2(\mathbb{F})$, χ est bien triviale sur $SL_2(\mathbb{F})$. L'application χ se factorise donc en une application $\tilde{\chi} : G/Sl_2(\mathbb{F}) \to \mathbb{C}^*$. Par ailleurs, le déterminant est un morphisme surjectif entre G et $\mathbb{F}^*$, de noyau $Sl_2(\mathbb{F})$ et se factorise donc également en une application $\tilde{det} : G/Sl_2(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^*$ qui est même un isomorphisme. En notant $\theta := \tilde{\chi} \circ \tilde{det}^{-1}$ On a alors $\chi = \theta \circ \tilde{det} \circ \pi = \theta \circ det$ et on a bien le résultat souhaité.

Ainsi on a obtenu tous les caractères de G , il y en a donc $q-1$. Il reste à calculer le caractère des représentations ainsi obtenues. Considérons β un caractère de $\mathbb{F}^*$, on obtient aisément la table de caractère suivante pour le caractère $\beta \circ det$ de G :

Représentant	a_x	b_x	$c_{x,y}$	$d_{x,y}$
$\chi_{\beta \circ det}$	$\beta(x^2)$	$\beta(x^2)$	$\beta(xy)$	$\beta(x^2-y^2\epsilon)$

Nous noterons ces représentations U_β dans la suite. On notera que $\beta(x^2 - y^2\epsilon)$ s'écrit également $\beta(x - y\alpha)\beta(x + y\alpha)$ lorsqu'on travaille dans l'extension $\mathbb{F}'$.

3.2.2 La représentation par permutation de G sur $P^1(\mathbb{F})$

On rappelle la définition suivante :

Définition 2 *$P^1(\mathbb{F}) = \{[x, y]; (x, y) \in \mathbb{F}^2 \backslash (0; 0)\}$ où on a définit la relation d'équivalence $(x; y) \sim (x', y')$ si $\exists \lambda \in \mathbb{F}^*$ tel que*

$$(x; y) = \lambda(x'; y')$$

C'est en fait l'ensemble des droites vectorielles sur $\mathbb{F}$ Ainsi, le cardinal de $P^1(\mathbb{F})$ est q+1 car il y a $q^2 - 1$ vecteurs de $\mathbb{F}^2$ non nuls mais il y a q-1 scalaires non nuls de $\mathbb{F}$ donc nous avons compté chaque droite (ou chaque classe d'équivalence) $q - 1$ fois. Autrement dit il y a q-1 représentants possibles par classe d'équivalence. Ainsi on obtient bien exactement q+1 classes d'équivalences.
G agit sur $P^1(\mathbb{F})$ naturellement, ce qui donne lieu à la représentation de permutation que l'on notera (ρ, V) associée à cette action. Celle-ci est donnée par $V = \{f : P^1(\mathbb{F}) \to \mathbb{C}\}$ et

$$\forall f \in V, \forall g \in G, \forall d \in P^1(\mathbb{F}), \rho(g)(f)(d) = f(g^{-1}.d)$$

Cette représentations admet deux sous représentations notables : la représentation triviale donnée par $T = \{f \in V; f \text{ constante}\}$ et la représentation que l'on appellera représentation de Steinberg donnée par $St = \{f \in V; \sum_{d \in P^1(\mathbb{F})} f(d) = 0\}$. Ces deux sous représentations sont supplémentaires dans V. La sous représentation T est bien entendu irréductible puisqu'elle est de dimension 1 mais nous allons montrer que St est également irréductible.

Proposition 11 *La sous représentation St de V est une représentation irréductible de G.*

Remarque 5 *Cette proposition se généralise de la manière suivante : si un groupe G fini agit sur X un ensemble fini de manière 2-transitive, alors la représentation St de G, définie comme supplémentaire de la représentation triviale dans la représentation de permutation associée à l'action de G sur X, est irréductible.*

Preuve 5 *Nous allons ici utiliser la proposition 6. Notons pour toute droite d de $P^1(\mathbb{F})$, δ_d l'élément de V qui vaut 1 en d et 0 sur toutes les autres droites de $P^1(\mathbb{F})$. La famille $(\delta_d)_{d \in P^1(\mathbb{F})}$ est une base de V. On a $Hom_G(V, V) = \{a \in \mathscr{L}(V, V); \forall f \in V, \forall g \in G, a(\rho(g)(f)) = \rho(g)(a(f))\}$. Soit $a \in \mathscr{L}(V, V)$. On note $(a_{xy})_{x,y \in P^1(\mathbb{F})}$ la matrice de a dans la base $(\delta_d)_{d \in P^1(\mathbb{F})}$. Avec cette écriture, on a donc $\forall x \in P^1(\mathbb{F}), \forall f \in V, a(f)(x) = \sum_{y \in P^1(\mathbb{F})} a_{xy} f(y)$ Soit $f \in V, g \in G$, on a d'une part :*

$$\begin{aligned} a(\rho(g)(f)) \quad &= (\textstyle\sum_{z \in P^1(\mathbb{F})} a_{xz}(\rho(g)(f))(z))_{x \in P^1(\mathbb{F})} \\ &= (\textstyle\sum_{z \in P^1(\mathbb{F})} a_{xz}(f(g.z)))_{x \in P^1(\mathbb{F})} \end{aligned}$$

et donc après changement d'indice et en évaluant en $y \in P^1(\mathbb{F})$:

$$a(\rho(g)(f))(y) = \sum_{z \in P^1(\mathbb{F})} a_{y, g^{-1}.z} f(z) \tag{7}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \rho(g)(a(f)) \quad &= \rho(g)((\textstyle\sum_{z \in P^1(\mathbb{F})} a_{xz} f(z))_{x \in P^1(\mathbb{F})}) \\ &= (\textstyle\sum_{z \in P^1(\mathbb{F})} a_{g.x,z} f(z))_{x \in P^1(\mathbb{F})} \end{aligned}$$

Et donc en évaluant en $y \in P^1(\mathbb{F})$, on obtient :

$$\rho(g)(a(f))(y) = \sum_{z \in P^1(\mathbb{F})} a_{g.y,z} f(z) \tag{8}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} a \in End_G(V, V) \quad &\Leftrightarrow \forall (f, g, y) \in V \times G \times P^1(\mathbb{F}), \textstyle\sum_{z \in P^1(\mathbb{F})} a_{g.y,z} f(z) = \sum_{z \in P^1(\mathbb{F})} a_{y, g^{-1}.z} f(z) \\ &\Leftrightarrow \forall (g, y, z) \in G \times P^1(\mathbb{F}) \times P^1(\mathbb{F}), a_{g.y,z} = a_{y, g^{-1}.z} \end{aligned}$$

Et donc

$$a \in End_G(V,V) \Leftrightarrow \forall (g,y,z) \in G \times P^1(\mathbb{F}) \times P^1(\mathbb{F}), a_{g.y,g.z} = a_{y,z} \tag{9}$$

Or, l'action de G sur $P^1(\mathbb{F}) \times P^1(\mathbb{F})$ est transitive (l'action de G su $P^1(\mathbb{F})$ est 2-transitive), elle a donc deux orbites : celle composée des couples (x,x) avec $x \in P^1(\mathbb{F})$ et celle composée des couples (x,y) où $x \neq y \in P^1(\mathbb{F})$. Ainsi, en prenant z=y dans l'équation (9) on obtient $\forall g \in G, \forall y \in P^1(\mathbb{F}), a_{g.y,g.y} = a_{y,y}$ ce qui signifie que tous les termes diagonaux de a sont les mêmes. D'autre part, en considérant deux couples d'éléments (x,y) , (x',y') avec $x \neq y$ et $x' \neq y'$, vérifiant g.y=y' et g.x=x', et en leur appliquant l'équation (9), on obtient

$$a_{y',x'} = a_{g.y,g.x} = a_{y,x}$$

ce qui montre que tous les coefficients non diagonaux de a sont égaux. Ainsi,

$$a \in End_G(V,V) \Leftrightarrow \text{ a est de la forme } \begin{pmatrix} \lambda & \mu & . & . & . & \mu \\ \mu & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & \mu \\ \mu & . & . & . & \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

On a donc $dim_{\mathbb{C}}(End_G(V)) = 2$. D'après la proposition 6, la représentation V se décompose en 2 sous représentations irréductibles non isomorphes. St est donc nécessairement irréductible sinon V pourrait se décomposer en 3 sous représentations irréductibles. Ceci achève la preuve de la proposition 11.

Pour calculer le caractère de la représentation de Steinberg sur les différentes classes de conjugaison de G, il suffit pour chaque représentant de soustraire 1 (le caractère de la représentation triviale) au caractère de la représentation par permutation. Calculons donc la caractère de la représentation par permutation sur chacune des classes de conjugaison. Pour cela, pour chaque représentant de la classe de conjugaison il suffit de compter le nombre de droites fixées par cet élément.

— a_x est une homothétie, elle fixe donc toutes les droites et on a alors : $\chi_{perm}(a_x) = q+1$

— pour b_x, une droite de représentant (x_1, x_2) est fixée par b_x si et seulement si

$$[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} xx_1 + x_2 \\ xx_2 \end{pmatrix}]$$

et on voit donc que la droite est fixée si et seulement si $x_2 = 0$ Ainsi on a $\chi_{perm}(b_x) = 1$

— Pour $c_{x,y}$, on considère de nouveau une droite de représentant (x_1, x_2) ; elle est fixée par $c_{x,y}$ si et seulement si

$$[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} xx_1 \\ yx_2 \end{pmatrix}].$$

Or, comme on a $x \neq y$, seules les droites de représentants (0 ;1) et (1 ;0) sont donc fixées. On a alors $\chi_{perm}(c_{x,y}) = 2$.

— Pour $d_{x,y}$, la droite représentée par (x_1, x_2) est fixée par $d_{x,y}$ si et seulement si

$$[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} xx_1 + \epsilon yx_2 \\ yx_1 + xx_2 \end{pmatrix}].$$

Ainsi, il faut donc que $\epsilon yx_2 = 0$ et $yx_1 = 0$ mais y et ϵ sont non nuls, il faudrait donc que $(x_1, x_2) = (0;0)$ mais cet élément n'est pas le représentant d'une droite. Aucune droite n'est donc fixée par $d_{x,y}$ et on a $\chi_{perm}(d_{x,y}) = 0$

Ainsi, on trouve le tableau suivant pour le caractère de la représentation de Steinberg :

Représentant	a_x	b_x	$c_{x,y}$	$d_{x,y}$
χ_{St}	q	0	1	-1

3.2.3 Produits tensoriels

Nous allons maintenant obtenir de nouvelles représentations de G en utilisant le produit tensoriel. En effet, on obtient une représentation de G en effectuant le produit tensoriel $St \otimes U_\beta$ où on rappelle

que U_β est la représentation $\beta \circ det$ avec β un caractère de $\mathbb{F}^*$. On note alors, pour un tel β, V_β la représentation $St \otimes U_\beta$. Son caractère s'obtient donc facilement en multipliant les caractères des deux représentations impliquées et ces représentations sont irréductibles car obtenues comme produit tensoriel entre un caractère et une représentation irréductible. On obtient alors la table de caractères suivante :

Représentant	a_x	b_x	$c_{x,y}$	$d_{x,y}$
χ_{V_β}	$q\beta(x^2)$	0	$\beta(xy)$	$-\beta(x^2 - y^2\epsilon)$

Nous avons de manière évidente que la représentation St est en fait la représentation V_{triv}, obtenue comme produit tensoriel de St elle même et de U_{triv}. Pour l'instant nous avons donc au total trouvé $2q-2$ représentations non isomorphes (de par leurs caractères distincts), avec la table de caractère suivante :

Représentant	a_x	b_x	$c_{x,y}$	$d_{x,y}$
$\chi_{\beta\circ det}$	$\beta(x^2)$	$\beta(x^2)$	$\beta(xy)$	$\beta(x^2 - y^2\epsilon)$
χ_{V_β}	$q\beta(x^2)$	0	$\beta(xy)$	$-\beta(x^2 - y^2\epsilon)$

3.2.4 Représentations induites par le sous-groupe de Borel

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de construire des représentations irréductibles de G à partir de représentations induites par un sous-groupe particulier. Nous allons en effet nous intéresser au sous-groupe de Borel de G donné par :

$$B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; (a,b,c) \in \mathbb{F}^* \times \mathbb{F} \times \mathbb{F}^*\}$$

Préliminaires sur le sous-groupe de Borel : Nous commençons par introduire plusieurs éléments utiles sur le sous-groupe de Borel. Le but principal est de trouver des représentants de $G\backslash B$,qui nous seront utiles pour le calcul du caractère des représentations induites. Ces représentants sont au nombre de q+1 puisque G est de cardinal $q(q-1)^2(q+1)$ et que B est de cardinal $(q-1)^2q$. Nous admettons que l'ensemble $B\backslash G/B$ des double classes est donné par $\{[I_2];[w]\}$ où $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que G se décompose : $G = B \bigsqcup BwB$. Notons alors T et U les sous-groupes de B respectivement définis par

$$T = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{F}^*\}$$

$$U = \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{F}\}$$

On remarque que toute matrice de B s'écrit comme produit d'une matrice de T et d'une matrice de U via :

$$\begin{pmatrix} a & d \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc $B = UT$ et donc :

$$\begin{aligned} BwB &= UTwB \\ &= Uww^{-1}TwB \\ &= UwTB \end{aligned}$$

car $w^{-1}Tw = T$ comme on a $\forall t, t' \in \mathbb{F}^*, w^{-1}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t' \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} t' & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. De plus, on note que $T \subset B$, donc $TB = B$ et ainsi : $BwB = UwB$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{G} &= \mathrm{B} \bigsqcup UwB \\ &= \mathrm{B} \bigsqcup (\bigsqcup_{a\in\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} wB) \\ &= \mathrm{B} \bigsqcup (\bigsqcup_{a\in\mathbb{F}} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B) \end{aligned}$$

On a donc bien trouvé q+1 représentants des classes de G modulo B : I_2 et les $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $a \in \mathbb{F}$. On notera désormais R ce système de représentants et on notera $\forall a \in \mathbb{F}, g_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Représentations de G induites par des représentations de B : On se donne μ, β deux caractères de $\mathbb{F}$ On définit une représentation de B en posant : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{F}^* \times \mathbb{F} \times \mathbb{F}^* : \Psi_{\mu,\beta}(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}) = \mu(a)\beta(b)$ On notera par $(\psi_{\mu,\beta}, W_{\mu;\beta})$ la représentation de G donnée par $ind_B^G(\Psi_{\mu,\beta})$. Nous cherchons à savoir si cette représentation est irréductible, à calculer son caractère et à voir dans quelle mesure de telles représentations sont isomorphes entre elles. Commençons par calculer le caractère de cette représentation. On utilise la formule donnée en proposition 2. On a donc

$$\chi_{W_{\mu,\beta}}(g) = \sum_{r \in R, r^{-1}gr \in B} \chi_{\Psi_{\mu,\beta}}(r^{-1}gr)$$

Examinons cette somme pour chacune des classes de conjugaison de G.

— Pour a_x, on a : $I_2^{-1}a_xI_2 = a_x \in B$ et $g_a^{-1}a_xg_a = a_x \in B$ donc on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \chi_{W_{\mu,\beta}}(a_x) & = & \sum_{r \in R} \chi_{\Psi_{\mu,\beta}}(r^{-1}a_xr) \\ & = & \sum_{r \in R} \chi_{\Psi_{\mu,\beta}}(a_x) \\ & = & \sum_{r \in R} \mu(x)\beta(x) \\ & = & (\text{q+1})\mu(x)\beta(x) \end{array}$$

— Pour b_x, on a : $I_2^{-1}b_xI_2 = b_x \in B$ et $g_a^{-1}b_xg_a = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix} \notin B$. Il n'y a donc qu'un seul terme dans notre somme et :

$$\chi_{W_{\mu,\beta}}(b_x) = \chi_{\Psi_{\mu,\beta}}(b_x) = \mu(x)\beta(x)$$

— Pour $c_{x,y}$, on a $I_2^{-1}c_{x,y}I_2 = c_{x,y} \in B$ et $g_a^{-1}c_{x,y}g_a = \begin{pmatrix} y & 0 \\ a(x-y) & x \end{pmatrix}$ et cette dernière matrice est dans B si et seulement si a=0 puisque $x \neq y$. On a donc

$$\begin{array}{rcl} \chi_{W_{\mu,\beta}}(c_{x,y}) & = & \sum_{r \in \{I_2, g_0\}} \chi_{\Psi_{\mu,\beta}}(r^{-1}c_{x,y}r) \\ & = & \chi_{\Psi_{\mu,\beta}}(c_{x,y}) + \chi_{\Psi_{\mu,\beta}}(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}) \\ & = & \mu(x)\beta(y) + \mu(y)\beta(x) \end{array}$$

— Pour $d_{x,y}$, on a $I_2^{-1}d_{x,y}I_2 = d_{x,y} \notin B$ et $g_a^{-1}d_{x,y}g_a = \begin{pmatrix} ay+x & y \\ y(\epsilon - a^2) & x-ay \end{pmatrix}$. Ainsi, $g_a^{-1}d_{x,y}g_a$ est dans B si et seulement si $y(\epsilon - a^2) = 0$ ce qui n'est jamais le cas puisque y est non nul et ϵ n'est pas un carré dans $\mathbb{F}$. Ainsi il n'y a aucun terme dans la somme pour le calcul du caractère et on a

$$\chi_{W_{\mu,\beta}}(d_{x,y}) = 0$$

On obtient donc la table de caractère suivante pour le caractère $\psi_{\mu,\beta}$:

Représentant	a_x	b_x	$c_{x,y}$	$d_{x,y}$
$\chi_{\psi_{\mu,\beta}}$	$(\text{q+1})\mu(x)\beta(x)$	$\mu(x)\beta(x)$	$\mu(x)\beta(y) + \mu(y)\beta(x)$	0

On cherche maintenant à savoir si cette représentation est irréductible. Pour cela,nous aurions pu utiliser le produit scalaire mais nous choisissons d'utiliser un autre outil : le critère d'irréductibilité de Mackey donné en Proposition 8. Nous avons admis que l'ensemble $B\backslash G/B$ des doubles classes était donné par $\{[I_2]; [w]\}$; c'est à dire que I_2 et w forment l'ensemble noté R dans la proposition 8. On a $I_2 \in B$ donc il suffit de vérifier le critère de la proposition pour l'élément w. Pour cela, on remarque tout d'abord que :

$$w^{-1}Bw = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}; a, b; c \in \mathbb{F};\ a \neq 0\ c \neq 0\}$$

On a alors $B \cap w^{-1}Bw = T$. On a par ailleurs,

$$\begin{aligned} {}^{w}\Psi_{\mu,\beta}(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}) &= \Psi_{\mu,\beta}(w^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} w) \\ &= \Psi_{\mu,\beta}(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}) \\ &= \mu(b)\beta(a) \end{aligned}$$

Ainsi ; $\psi_{\mu,\beta}$ est irréductible si et seulement si $dim(Hom_T({}^{w}\Psi_{\mu,\beta}; \Psi_{\mu,\beta})) = 0$. Or d'après le lemme de Schur ; cette dernière dimension est égale à 0 si ${}^{w}\Psi_{\mu,\beta} \neq \Psi_{\mu,\beta}|_T$ et égal à 1 si au contraire ${}^{w}\Psi_{\mu,\beta} = \Psi_{\mu,\beta}|_T$. Par la définition de ces deux caractères, on remarque qu'ils sont égaux si et seulement si $\mu = \beta$. Cela nous conduit donc au résultat suivant.

Proposition 12 *La représentation $\psi_{\mu,\beta}$ est irréductible si et seulement si les caractères μ et β de $\mathbb{F}^*$ sont distincts.*

On remarque de plus en regardant la table de caractères que $\psi_{\mu,\beta} \simeq \psi_{\beta,\mu}$. Nous avons donc trouvé ici $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ représentations irréductibles de G. Ces représentations sont de dimension $|G/B| = q+1$ et ne sont isomorphes à aucune des autres représentations précédemment citées.

Nous avons donc pour l'instant un total de $2q - 2 + \frac{1}{2}(q-1)(q-2) = \frac{1}{2}(q-1)(q+2)$ représentations non isomorphes. Comme nous cherchons au total $q^2 - 1$ représentations, il nous en reste donc $\frac{1}{2}q(q-1)$ à trouver.

3.2.5 Représentations induites par le sous-groupe K

On note K le sous-groupe de G donné par

$$K = \{\begin{pmatrix} x & \epsilon y \\ y & x \end{pmatrix}; (x,y) \in \mathbb{F}^2 \backslash (0;0)\}$$

Comme $(1;\alpha)$ est une base de $\mathbb{F}'$ sur $\mathbb{F}$, on peut identifier K à $(\mathbb{F}')^*$ via l'application :

$$\begin{pmatrix} x & \epsilon y \\ y & x \end{pmatrix} \mapsto x + y\alpha$$

Ainsi, K est un groupe cyclique d'ordre $q^2 - 1$. Nous allons de nouveau induire une représentation de G avec cette fois ci une représentation du sous-groupe K. Considérons ϕ un caractère de K. On peut donc le voir comme un caractère : $\phi : (\mathbb{F}')^* \to \mathbb{C}$. On notera Φ la représentation induite par ϕ sur G. Tout d'abord, cette représentation est de dimension [G :K]=$q^2 - q$ On calcule dans un premier temps le caractère de cette représentation. Nous allons, comme précédemment, utiliser la formule de la Proposition 2. Pour cela, il nous faut d'abord trouver des représentants de G/K.

Lemme 3 $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{F}^*; b \in \mathbb{F}\}$ *est un système de représentants de G/K*

Preuve 6 *On remarque tout d'abord que $M \cap K = \{I_2\}$; par ailleurs, l'application* $\begin{array}{ccc} MK & \to & G \\ (m\,;k) & \mapsto & mk \end{array}$ *est injective car si mk=m'k', alors $mm'^{-1} = k'k^{-1}$ et d'après la remarque précédente, $mm'^{-1} = I_2$ et $k'k^{-1} = I_2$. Par ailleurs, par cardinalité, cette application est également surjective. Ainsi, tout élément g de G s'écrit mk avec $m \in M$ et $k \in K$ et par injectivité de l'application, les classe $\{mK; m \in M\}$ sont bien disjointes deux à deux. On a donc bien la décomposition $G = \sqcup_{m \in M} mK$.*

Notons désormais $g_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $a \in \mathbb{F}^*$ et $b \in \mathbb{F}$

— Pour a_x : on a $g_{a,b}^{-1} a_x g_{a,b} = a_x \in K$ et donc

$$\begin{aligned} \chi_\Phi(a_x) &= \textstyle\sum_{a \in \mathbb{F}^*, b \in \mathbb{F}} \chi_\phi(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}) \\ &= (\mathrm{q}^2 - q)\phi(x) \end{aligned}$$

— Pour b_x, on a $g_{a,b}^{-1} b_x g_{a,b} = \begin{pmatrix} x & a^{-1} \\ 0 & x \end{pmatrix} \notin K$ car a est non nul. Ainsi il n'y a aucun termes dans la somme et en particulier, $\chi_\Phi(b_x) = 0$

— Pour $c_{x,y}$, $g_{a,b}^{-1} c_{x,y} g_{a,b} = \begin{pmatrix} x & a^{-1}b(x-y) \\ 0 & y \end{pmatrix} \notin K$ car $x \neq y$ donc il n'y a aucun terme dans la somme et en particulier $\chi_\Phi(c_{x,y}) = 0$.

— Pour $d_{x,y}$, on a $g_{a,b}^{-1} d_{x,y} g_{a,b} = \begin{pmatrix} x - by & a^{-1}y(\epsilon - b^2) \\ ay & by + x \end{pmatrix}$Comme y est non nul et que ϵ est un non carré, pour que cette dernière matrice soit dans K, il faut et il suffit que l'on ait les deux conditions : b=0 et $a = a^{-1}$. Les deux seules matrices qui contribuent à la somme sont donc I_2 et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \chi_\Phi(d_{x,y}) &= \chi_\phi(\begin{pmatrix} x & \epsilon y \\ y & x \end{pmatrix}) + \chi_\phi(\begin{pmatrix} x & -\epsilon y \\ -y & x \end{pmatrix}) \\ &= \phi(x + \alpha y) + \phi(x - \alpha y) \\ &= \phi(x + \alpha y) + \phi(x + \alpha y)^q \end{aligned}$$

En effet , si on considère le morphisme de Frobenius F : $\mathbb{F}' \to \mathbb{F}'; x \mapsto x^q$, on sait que $\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{F}'; F(x) = x\}$. On a donc, si x et y sont dans $\mathbb{F}$:

$$\begin{aligned} (x + \alpha y)^q &= x^q + y^q \alpha^q \\ &= \text{x+y } \alpha^{q-1}\alpha \\ &= x + y\epsilon^{\frac{q-1}{2}}\alpha \text{ car } q-1 \text{ est pair} \\ &= x - \alpha y \text{ car } \epsilon \text{est un non carré dans } \mathbb{F} \end{aligned}$$

Donc on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{F}, y \in \mathbb{F}^*, (x + \alpha y)^q = x - \alpha y \tag{10}$$

ce qui était bien le résultat attendu.

On obtient finalement les caractères suivants pour notre représentation Φ :

Représentant	a_x	b_x	$c_{x,y}$	$d_{x,y}$
χ_Φ	q(q-1)$\phi(x)$	0	0	$\phi(x + \alpha y) + \phi(x + \alpha y)^q$

On remarque grâce à cette table de caractères, que si l'on considère deux caractères ϕ et $\tilde{\phi}$ de K, les induites correspondantes Φ et $\tilde{\Phi}$ sont isomorphes si et seulement si $\phi = \tilde{\phi}$ ou $\phi = \tilde{\phi}^q$. Ainsi, pour compter le nombre de représentations non isomorphes que l'on obtient ainsi, il faut faire attention à cette condition. Il y a exactement $q^2 - 1$ caractères de K, soit ϕ un tel caractère, ϕ et ϕ^q donnent la même représentation induite. On est donc ramenés à rechercher les caractères de K qui vérifient $\phi = \phi^q$ (pour savoir si ce caractère donne 1 ou 2 représentations de G). Or, on a $\phi(x) = \phi(x)^q \ \forall x \in \mathbb{F}'^* \Leftrightarrow \phi(x^{q-1}) = 1 \ \forall x \in \mathbb{F}'^*$ et donc un tel ϕ est d'ordre divisant q-1 dans $(\mathbb{F}'^*)^{dual}$. Or $(\mathbb{F}'^*)^{dual} \simeq \mathbb{Z}/(q^2-1)\mathbb{Z}$ et donc il y a exactement q-1 éléments d'ordre divisant q-1 dans ce groupe. On a donc exactement q-1 caractères ϕ de K qui vérifient $\phi = \phi^q$ et $q^2 - q$ caractères de K qui vérifient $\phi \neq \phi^q$. En considérant seulement les représentations induites par les caractères ϕ de $\mathbb{F}^*$ vérifiant $\phi \neq \phi^q$, on obtient alors $\frac{1}{2}q(q-1)$ représentations de G non isomorphes, ce qui est exactement le nombre de représentation irréductibles qu'il nous manquait.

Cependant, on remarque par le calcul que ces représentations ne sont pas irréductibles. En effet, on a :

— si $\phi \neq \phi^q$, on a

$$\begin{aligned} \text{q(q-1)}^2(q+1) < \chi_\Phi; \chi_\Phi > &= \textstyle\sum_{x \in G} \chi_\Phi \overline{\chi_\Phi} \\ &= \textstyle\sum_{x \in \mathbb{F}'^*} q^2(q-1)^2 \phi(x)\overline{\phi(x)} \\ &\quad + 0{,}5 \textstyle\sum_{x \in \mathbb{F}, y \in \mathbb{F}^*} (q^2 - q)(\phi(\zeta) + \phi(\zeta)^q)(\overline{\phi(\zeta)} + \overline{\phi(\zeta)^q} \\ &= \textstyle\sum_{x \in \mathbb{F}'^*} q^2(q-1)^2 \\ &\quad + 0{,}5 \textstyle\sum_{x \in \mathbb{F}, y \in \mathbb{F}^*} (q^2 - q)(\phi(\zeta) + \phi(\zeta)^q)(\overline{\phi(\zeta)} + (\overline{\phi(\zeta)^q}) \end{aligned}$$

car ϕ est à valeur dans les racines $q^2 - 1$ ièmes de l'unité. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} (\phi(\zeta) + \phi(\zeta)^q)(\overline{\phi(\zeta)} + (\overline{\phi(\zeta)^q}) &= 2 + \phi(\zeta)^q \overline{\phi(\zeta)} + \phi(\zeta)\overline{\phi(\zeta)}^q \\ &= 2 + \phi(\zeta)^{q-1} + \phi(\zeta)^{1-q} \end{aligned}$$

Comme $\phi \neq \phi^q$, $\phi^{1-q} et \phi^{q-1}$ sont des caractères distincts et non triviaux de K=$\mathbb{F}'^*$ On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\mathbb{F},y\in\mathbb{F}^*} \phi(\zeta)^{q-1} &= \sum_{x\in\mathbb{F},y\in\mathbb{F}} \phi(\zeta)^{q-1} - \sum_{x\in\mathbb{F}} \phi(x)^{q-1} \\ &= \sum_{z\in\mathbb{F}'} \phi(z) - \sum_{x\in\mathbb{F}} \phi(1) \\ &= \text{-(q-1)}\end{aligned}$$

Et de même,

$$\sum_{x\in\mathbb{F},y\in\mathbb{F}^*} \phi(\zeta)^{1-q} = -(q-1)$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\mathbb{F},y\in\mathbb{F}^*} (\phi(\zeta)+\phi(\zeta)^q)(\overline{\phi(\zeta)}+(\overline{\phi(\zeta)^q}) &= \sum_{x\in\mathbb{F},y\in\mathbb{F}^*} 2+\phi(\zeta)^{q-1}+\phi(\zeta)^{1-q} \\ &= 2(\mathrm{q}^2-q)-2(q-1) \\ &= 2(\mathrm{q}^2-2q+1) \\ &= 2(\text{q-1})^2\end{aligned}$$

Et finalement,

$$\begin{aligned}\text{q(q-1)}^2(q+1) < \chi_\Phi;\chi_\Phi > &= \mathrm{q}^2(q-1)^2(q-1)+(q^2-q)(q-1)^2 \\ &= (\text{q-1})^2 q(q^2-1)\end{aligned}$$

Et donc $< \chi_\Phi;\chi_\Phi >= q-1$

— si $\phi = \phi^q$, par le même calcul, on obtient $< \chi_\Phi;\chi_\Phi >= q$

On obtient bien que la représentation Φ n'est pas irréductible. Cependant, nous allons tout de même essayer d'obtenir une représentation irréductible à partir de celle-ci. A partir de maintenant, nous ne considérerons que les caractères ϕ de K qui vérifient $\phi \neq \phi^q$. Nous aurons besoin du lemme et de la définition suivante :

Définition 3 *On appelle caractère virtuel d'un groupe G toute combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de caractères de G.*

Lemme 4 *Un caractère virtuel χ de G est le caractère d'une représentation irréductible de G si et seulement si $\chi(1) > 0$ et $< \chi;\chi >= 1$.*

Preuve 7 *Supposons que $\chi = \sum_{i=1}^{s} m_i\chi_i$ où les m_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$ et les χ_i sont des caractères de G non nécessairement irréductibles. Comme les caractères des représentations irréductibles de G forment une base des fonctions de classes sur G, on peut réécrire $\chi = \sum_{i=1}^{r} n_i\rho_i$ où les n_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$ et les $\rho_i, i = 1,...,r$ sont les représentations irréductibles de G. On notera que certains des coefficients n_i peuvent être nuls si certains caractères n'apparaissent pas dans la décomposition. On notera de plus que cette dernière décomposition est unique puisque la décomposition de chacun des χ_i est unique.*

- *Supposons que χ soit le caractère d'une représentation irréductible. Alors, on a $\chi(1) = dim(V) > 0$ où V est l'espace associé à cette représentation. De plus, on a $< \chi;\chi >= 1$ puisque la représentation de caractère χ est irréductible.*
- *Supposons que $\chi(1) > 0$ et $< \chi;\chi >= 1$ On a alors $\sum_{i=1}^{r} n_i^2 = 1$ donc un seul des n_i est non nul. On notera l'entier l l'entier réalisant cette condition. De plus, on a alors $n_l = \pm 1$. Or on a $\chi(1) = n_l\rho_l(1) > 0$ et comme $\rho_l(1) > 0$, on a nécessairement $n_l = 1$. On a donc finalement $\chi = \rho_l$ et χ correspond donc bien à un caractère de G.*

Nous allons donc construire des représentations de G en construisant virtuellement leur caractères puis en montrant grâce au lemme précèdent que ces caractères correspondent bien à des représentations de G. Fixons un caractère μ de $\mathbb{F}^*$ et regardons le produit tensoriel $St \otimes \psi_{\mu,1}$; sa table de caractère est la suivante :

Représentant	a_x	b_x	$\mathrm{c}_{x,y}$	$\mathrm{d}_{x,y}$
$\chi_{St\otimes\psi_{\mu,1}}$	q(q+1)$\mu(x)$	0	$\mu(x)+\mu(y)$	0

Et on considère le caractère virtuel que l'on notera χ_ϕ, donné par

$$\chi_\phi = \chi_{St\otimes\psi_{\mu,\beta}} - \chi_{\psi_{\mu,1}} - \chi_\Phi$$

Ce caractère vaut alors $(q-1)\phi(x)$; $-\phi(x)$; 0 ; $-(\phi(x+\alpha y)+\phi(x+\alpha y)^q)$ sur les classes de conjugaisons de G. Par le même type de calcul que ceux qui nous ont permis de montrer que Φ n'était pas irréductible, on a cette fois $< \chi_\phi ; \chi_\phi >= 1$ et de plus $\chi_\phi(1) = q-1 > 0$. Ces deux point montrent, d'après le Lemme 4 ; que χ_ϕ est bien le caractère d'une représentation irréductible de G que nous noterons X_ϕ. De plus on remarque par la table de caractère que cette représentation n'est isomorphe à aucune des autres représentations trouvées précédemment. Ces $\frac{1}{2}q(q-1)$ représentations X_ϕ pour $\phi \neq \phi^q$ complètent donc la liste des représentations irréductibles de G.

3.2.6 Conclusion

En conclusion, nous avons obtenu la table de caractères suivante pour les représentations irréductibles de G :

Représentant	a_x	b_x	$c_{x,y}$	$d_{x,y}$
$\chi_{\beta\circ det}$	$\beta(x^2)$	$\beta(x^2)$	$\beta(xy)$	$\beta(x^2-y^2\epsilon)$
χ_{V_β}	q$\beta(x^2)$	0	$\beta(xy)$	-$\beta(x^2-y^2\epsilon)$
$\chi_{W_{\mu,\beta}}$	(q+1)$\mu(x)\beta(x)$	$\mu(x)\beta(x)$	$\mu(x)\beta(y)+\mu(y)\beta(x)$	0
χ_{X_ϕ}	(q-1)$\phi(x)$	-$\phi(x)$	0	-$(\phi(x+\alpha y)+\phi(x+\alpha y)^q)$

Où l'on a : β un caractère de $\mathbb{F}^*$ et ϕ un caractère de $\mathbb{F}'^*$

4 Introduction à la distinction des représentations, application dans le cadre de $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_{q^2})$

4.1 Définition

Définition 4 *On considère un groupe G et une involution de G, notée σ, on note de plus H le sous-groupe de G constitué des éléments de G laissés stables par σ. Soit (π, V) une représentation irréductible du groupe G, on dit qu'elle est distinguée sous H si $V^H \neq \{0\}$.*

4.2 Application à $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$

Dans cette partie on notera F le morphisme de Frobenius de $\mathbb{F}'$ et on l'étendra à$Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$ par simple application de F à chacun des coefficients. Cela définit un isomorphisme de groupe involutif de $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$ dans lui même, et l'ensemble des points fixes de $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$ sous F est le groupe $Gl_2(\mathbb{F}_q)$. Le but de cette partie est de s'intéresser à la distinction des représentations irréductibles de $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$ sous $Gl_2(\mathbb{F}_q)$. On notera dans la suite G=$Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$ et H=$Gl_2(\mathbb{F}_q)$.

4.2.1 Par le calcul

Dans cette partie, nous allons essayer de déterminer par le calcul quelles sont les représentations irréductibles du groupe G qui sont distinguées sous H. Nous donnerons l'exemple sur deux types de représentations irréductibles et énoncerons les résultats trouvés en appliquant cette méthode pour les deux derniers types. Pour cela nous commençons par réécrire la condition de distinction. Soit (π,V) une représentation de $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$, on a alors :

$$\begin{aligned} \pi \text{ est distinguée} \quad & \Leftrightarrow \{v \in V ; \pi(g)(v) = v \ \forall g \in Gl_2(\mathbb{F}_q)\} \neq \{0\} \\ & \Leftrightarrow \text{ le caractère trivial apparaît dans } \pi|_{Gl_2(\mathbb{F}_q)} \\ & \Leftrightarrow < \mathbf{1}_{Gl_2(\mathbb{F}_q)} ; \pi|_{Gl_2(\mathbb{F}_q)} >_{Gl_2(\mathbb{F}_q)} \neq 0 \end{aligned}$$

Pour pouvoir faire ce calcul, on remarque que lorsqu'on regarde les matrices de $Gl_2(\mathbb{F}_q)$ dans $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$, la matrice $d_{x,y}$ $x \in \mathbb{F}, y \in \mathbb{F}^*$ est conjuguée dans $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$ à la matrice $\begin{pmatrix} x-\alpha y & 0 \\ 0 & x+\alpha y \end{pmatrix}$. Il n'y a donc aucun éléments de $Gl_2(\mathbb{F}_q)$ dans le quatrième type de classes de conjugaison de $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$.

— Pour les représentations $\beta \circ det$ avec β un caractère de $\mathbb{F}'^*$, on a

$$\begin{array}{rcl} \text{q(q-1)}^2(q+1) < \chi_{\beta\circ det}; \mathbf{1}_{Gl_2(\mathbb{F})} >_{Gl_2(\mathbb{F})} & = & \sum_{x\in\mathbb{F}^*} \beta(x^2) + \sum_{x\in\mathbb{F}^*}(q^2-1)\beta(x^2) \\ & & + \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{F}^*, x\neq y}(q^2+q)\beta(xy) \\ & & +\frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{F}, y\in\mathbb{F}^*}(q^2-q)\beta(x-\alpha y)\beta(x+\alpha y) \end{array}$$

Notons :

$$S_1 = \sum_{x\in\mathbb{F}^*} \beta(x^2)$$

$$S_2 = \sum_{x,y\in\mathbb{F}^*, x\neq y} \beta(xy)$$

$$S_3 = \sum_{x\in\mathbb{F}, y\in\mathbb{F}^*} \beta(x-\alpha y)\beta(x+\alpha y)$$

On a alors :

$$\begin{array}{rl} \text{S}_1 & = |\text{F}^*| \times < \beta^2; \mathbf{1}_{\mathbb{F}^*} > \\ & = \left\{ \begin{array}{l} q-1 \ si \ \beta^2|_{\mathbb{F}^*} = 1 \\ 0 \ sinon \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{S}_2 & = \sum_{x,y\in\mathbb{F}^*} \beta(xy) - \sum_{x\in\mathbb{F}} \beta^2(x) \\ & = \sum_{x\in\mathbb{F}^*} \beta(x); \sum_{y\in\mathbb{F}^*} \beta(y) - S_1 \\ & = (\sum_{x\in\mathbb{F}^*} \beta(x))^2 - S_1 \\ & = \text{S}_2'^2 - S_1 \end{array}$$

Où,

$$\begin{array}{rl} \text{S}_2' & = \sum_{x\in\mathbb{F}^*} \beta(x) \\ & = \left\{ \begin{array}{l} (q-1) \ si \ \beta|_{\mathbb{F}^*} = 1 \\ 0 \ sinon \end{array} \right. \end{array}$$

Pour le calcul de S_3 nous notons plusieurs points importants, tout d'abord, comme $(1;\alpha)$ forment une base de $\mathbb{F}'$ sur $\mathbb{F}$, l'ensemble des $x+\alpha y$ pour $x \in \mathbb{F}$ et $y \in \mathbb{F}^*$ parcourt exactement l'ensemble $\mathbb{F}'^* \backslash \mathbb{F}^*$. Par ailleurs, par la formule (10), nous avons $(x+\alpha y)^q = x - \alpha y$. D'où :

$$\begin{array}{rl} \text{S}_3 & = \sum_{z\in\mathbb{F}'^*\backslash\mathbb{F}^*} \beta(z^q)\beta(z) \\ & = \sum_{z\in\mathbb{F}'^*} \beta(z^{q+1}) - \sum_{z\in\mathbb{F}^*} \beta(z^{q+1}) \\ & = \sum_{z\in\mathbb{F}'^*} \beta(z^{q+1}) - \sum_{z\in\mathbb{F}^*} \beta(z^2) \\ & = \text{S}_4 - S_1 \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rl} \text{S}_4 & := \sum_{z\in\mathbb{F}'^*} \beta(z^{q+1}) \\ & = \sum_{z\in\mathbb{F}'^*} \beta(zF(z)) \end{array}$$

Or, on peut montrer que l'application $\begin{array}{ccc} (\text{F'}^*)^2 & \to & \text{F}^* \\ \text{z} & \mapsto & \text{zF(z)} \end{array}$ est bien définie et surjective.On a donc

$$\text{S}_4 = \left\{ \begin{array}{l} q^2-1 \ si \ \beta|_{\mathbb{F}^*} = 1 \\ 0 \ sinon \end{array} \right.$$

En rassemblant tous ces résultats, on a alors

$$\begin{array}{rcl} \text{q(q-1)}^2(q+1) < \chi_{\beta\circ det}; \mathbf{1}_{Gl_2(\mathbb{F})} >_{Gl_2(\mathbb{F})} & = & \text{S}_1 + (q^2-1)S_1 \\ & & +\frac{1}{2}(\text{q}^2+\text{q})(S_2'^2 - S_1) + \frac{1}{2}(q^2-q)(S_4 - S_1) \\ & = & \frac{1}{2}\ \text{q}((\text{q}+1)\text{S}_2'^2 + (q-1)S_4) \end{array}$$

et donc

$$< \chi_{\beta\circ det}; \mathbf{1}_{Gl_2(\mathbb{F})} >_{Gl_2(\mathbb{F})} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \beta|_{\mathbb{F}^*} = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Finalement, on trouve donc que la représentation $\beta \circ det$ de $Gl_2(\mathbb{F}')$ est distinguée si et seulement si $\beta|_{\mathbb{F}^*} = 1$ et de plus, dans ce cas, $dim(V^H) = 1$ si on appelle V l'espace de $\beta \circ det$.

— Pour V_β, on a

$$\begin{array}{rcl} \text{q(q-1)}^2(q+1) < \chi_{V_\beta}; \mathbf{1}_{Gl_2(\mathbb{F})} >_{Gl_2(\mathbb{F})} & = & \text{q}^2 \sum_{x\in\mathbb{F}^*} \beta(x^2) + \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{F}^*, x\neq y}(q^2+q)\beta(xy) \\ & & +\frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{F}, y\in\mathbb{F}^*}(q^2-q)\beta(x-\alpha y)\beta(x+\alpha y) \\ & = & \text{q}^2 S_1 + \frac{1}{2}(q^2+q)(S_2'^2 - S_1) + \frac{1}{2}(q^2-q)S_3 \\ & = & \text{q}^2 S_1 + \frac{1}{2}(q^2+q)(S_2'^2 - S_1) + \frac{1}{2}(q^2-q)(S_4 - S_1) \\ & = & \frac{1}{2}(\text{q}^2+q)S_2'^2 + \frac{1}{2}(q^2-q)S_4 \end{array}$$

Qui est exactement le même résultats que pour $q(q-1)^2(q+1) < \chi_{\beta\circ det}; \mathbf{1}_{Gl_2(\mathbb{F})} >_{Gl_2(\mathbb{F})}$. On a donc finalement :

$$< \chi_{V_\beta}; \mathbf{1}_{Gl_2(\mathbb{F})} >_{Gl_2(\mathbb{F})} = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta|_{\mathbb{F}^*} = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

De nouveau, on trouve donc que la représentation V_β est distinguée si et seulement si β est trivial sur $\mathbb{F}^*$. On retrouve également que lorsque la représentation est distinguée, $dim(V_\beta^H) = 1$.
Par la même méthode et toujours les mêmes astuces de calcul, on trouve les résultats suivants pour les deux derniers "types" de représentations :

— Pour les représentations induites par le sous-groupe B : $\psi_{\mu,\beta}$ où μ et β sont des caractères de $\mathbb{F}'^*$ on obtient la condition

$$\psi_{\mu,\beta} \text{ est distinguée sous H } \Leftrightarrow \begin{cases} \mu|_{\mathbb{F}^*} = 1 \text{ et } \beta|_{\mathbb{F}^*} = 1 \\ \text{ ou } \mu(x^q) = \beta(x^{-1}) \ \forall x \in \mathbb{F}^* \end{cases}$$

— Pour les représentations X_ϕ obtenues à l'aide de caractère ϕ de $\mathbb{F}_{q^4}^*$, on trouve que ces représentations ne sont jamais distinguées. En effet , le produit scalaire $< \chi_{X_\phi}; \mathbf{1}_{Gl_2(\mathbb{F})} >_{Gl_2(\mathbb{F})}$ est nul sans condition sur ϕ.
Nous avons donc obtenu, dans chacun des quatre cas, une condition simple pour que notre représentation soit distinguée sous H. Nous remarquons par ailleurs que dans tous les cas où un représentation (π, V) de G est distinguée sous H, alors $dim(V^H) = 1$. C'est un résultat se prouve dans un cadre plus général.

4.2.2 Une généralisation et une condition sans calculs

Dans cette dernière partie, nous nous appuyons sur l'article [P] de Dipendra Prasad pour avoir une méthode moins calculatoire pour savoir quelles représentations de $Gl_2(\mathbb{F})$ sont distinguées . Nous nous intéresserons également à la dimension du sous espace V^H dans les cas où la représentation est distinguée. Il est à noter que l'article énonce les résultats que nous allons traiter dans un cadre beaucoup plus général : celui des représentations stables des groupes algébriques connexes. Nous nous contenterons ici d'énoncer les résultats pour le groupe $Gl_2(\mathbb{F}')$ et donnerons les grandes lignes des démonstrations. Nous vérifierons également, dans deux cas particulier que le théorème énoncé est bien en cohérence avec les résultats trouvés dans la partie précédente.

Définition 5 *Soit G un groupe et (π, V) une représentation de G, on appelle représentation contragrédiente de π la représentation $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ de G où $\tilde{V} = \mathbf{L}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ définie par :*

$$\forall \phi \in \tilde{V}, \forall g \in G, \forall v \in V, : \tilde{\pi}(g)(\phi)(v) = \phi(\pi(g^{-1}(v)).$$

Définition 6 *Soit (π, V) une représentation de $Gl_2(\mathbb{F}')$, on notera (π^F, V) la représentation de $Gl_2(\mathbb{F}')$ définie par*

$$\forall g \in Gl_2(\mathbb{F}'), \forall v \in V, \ \pi^F(g)(v) = \pi(F^{-1}(g))(v)$$

Dans la suite, on notera de nouveau G=$Gl_2(\mathbb{F}')$ et H=$Gl_2(\mathbb{F})$. On considérera (π, V), une représentation irréductible de G.

Théorème 1 *Soit (π, V) une représentation de G, alors on a nécessairement $dim(V^H) \leq 1$*

Ce théorème confirme ce que nous avons vu par le calcul dans la partie précédente, lorsque la représentation est distinguée, on a toujours $dim(V^H) = 1$.

Théorème 2 *Soit (π, V) une représentation de G, elle est distinguée si et seulement si $\tilde{\pi} \simeq \pi^F$*

Idée de la démonstration des théorèmes 1 et 2 : Le but de la démonstration est d'interpréter la dimension $dim(V^H)$ ainsi que la condition $\tilde{\pi} \simeq \pi^F$ à l'aide du caractère de π.

Proposition 13 *Soit G un groupe et (π, V), (ρ, W) des représentations de G ; alors l'espace $Hom_G(W; \tilde{V})$ est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires de $W \times V$ dans $\mathbb{C}$ G-équivariante c'est-à-dire qui vérifient*

$$\forall g \in G, \forall (v, w) \in V \times W, \phi(\rho(g)(w), \pi(g)(v)) = \phi(w, v)$$

Preuve 8 *Tout d'abord, on regarde seulement $Hom_{\mathbb{C}}(W, \tilde{V})$ et on note que cet espace est isomorphe à l'espace $Bil_{\mathbb{C}}(W \times V; \mathbb{C})$ via l'application*

$$\Psi : f \in Hom_{\mathbb{C}}(W, \tilde{V}) \to B_f : (w, v) \to f(w)(v)$$

Cette application est bien à valeur dans $Bil_{\mathbb{C}}(W \times V; \mathbb{C})$. De plus elle est injective car si on a $f, f' \in Hom_{\mathbb{C}}(W, \tilde{V})$ telles que $\forall w \in W$ $\forall v \in V$ $f(w)(v) = f'(w)(v)$, on a alors $f(w) = f'(w)$ $\forall w \in W$ et donc f=f'. Pour la surjectivité, si on fixe B$\in Bil_{\mathbb{C}}(W \times V; \mathbb{C})$ on note que l'application $f_B : w \in W \mapsto (v \in V \mapsto B(w, v))$ est bien un élément de $Hom_{\mathbb{C}}(W, \tilde{V})$ antécédent de B par l'application Ψ. Il faut désormais regarder à quelle condition un élément de $Hom_{\mathbb{C}}(W, \tilde{V})$ est-elle un G-morphisme et par quelle condition cela se traduit sur les applications bilinéaires. Soit $f \in Hom_{\mathbb{C}}(W, \tilde{V})$ On a alors :

$$\begin{aligned}
f \in Hom_G(W, \tilde{V}) \quad & \Leftrightarrow \forall g \in G, f \circ \rho(g) = \tilde{\pi}(g) \circ f \\
& \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall w \in W, f(\rho(g)w) = \tilde{\pi}(g)(f(w)) \\
& \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall (w, v) \in W \times V, f(\rho(g)w)(v) = \tilde{\pi}(g)(f(w))(v) \\
& \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall (w, v) \in W \times V, f(\rho(g)w)(v) = f(w)(\pi(g^{-1})(v)) \\
& \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall (w, v) \in W \times V, B_f(\rho(g)(w), v) = B_f(w, \pi(g^{-1})(v)) \\
& \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall (w, v) \in W \times V, B_f(\rho(g)(w), \pi(g)v) = B_f(w, \pi(g^{-1})(\pi(g)v)) \\
& \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall (w, v) \in W \times V, B_f(\rho(g)(w), \pi(g)v) = B_f(w, v)
\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$Hom_G(W, \tilde{V}) \simeq \{f \in Bil_{\mathbb{C}}(W, V); f(\rho(g)(w); \pi(g)(v)) = f(w, v) \forall g \in G, \forall (w, v) \in W \times V\}$$

On notera ce dernier ensemble $Bil_G(W, V)$ et cela achève notre preuve.

Revenons à la preuve de nos théorèmes 1 et 2. Nous allons désormais définir une nouvelle représentations de G. On pose $\rho : G \to GL(Bil_{\mathbb{C}}(V \times V; \mathbb{C})$ définie par

$$\forall g \in G, \forall B \in Bil_{\mathbb{C}}(V \times V; \mathbb{C}), \forall (w, v) \in V^2;\ \rho(g)(B)(w, v) = B(\pi(g^{-1})(w); \pi^F(g^{-1})(v))$$

Comme la condition $\rho(g)(B) = B$ est équivalente à dire que B est G-équivariante, on a alors :

$$dim(Bil_G(V \times V; \mathbb{C})) =< \rho; \mathbf{1}_G >_G \tag{11}$$

Par conséquent, on a

$$dim(Bil_G(V \times V; \mathbb{C})) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \tag{12}$$

Mais par, ailleurs, nous venons de montrer que $dim(Bil_G(V \times V; \mathbb{C})) = dim(Hom_G(V^F, \tilde{V}))$ qui vaut 0 ou 1 d'après le lemme de Schur puisque les deux représentations π^F et $\tilde{\pi}$ sont irréductibles. On a donc :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = \begin{cases} 1 \ si\ \tilde{\pi} \simeq \pi^F \\ 0 \ sinon \end{cases} \tag{13}$$

D'autre part,

$$dim(V^H) =< \chi_{\pi|_H}; \mathbf{1}_H >_H$$

c'est à dire

$$dim V^H = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \chi_\pi(g) \tag{14}$$

Le principe de la démonstration est alors de démontrer que

$$\frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\chi_\pi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)$$

Égalité que nous ne démontrerons pas ici. Dès que l'on a cette égalité, en alliant les équations (14) et (13), on obtient que

$$dim(V^H) = \begin{cases} 1 \ si \ \tilde{\pi} \simeq \pi^F \\ 0 \ sinon \end{cases} \quad (15)$$

ce qui est exactement le résultat qui était attendu pour démontrer les théorèmes 1 et 2.

Vérification de la cohérence avec les résultats obtenus par le calcul : Nous allons vérifier que le critère obtenu dans le théorème 2 est bien en accord avec ce que nous avons fait dans la partie calculatoire. Nous vérifierons uniquement sur deux "types" de représentations de G, les autres étant plus difficiles à traiter, à savoir les caractères et les représentations $W_{\mu,\beta}$.

— Pour les caractères $(\beta\circ det; U_\beta)$où β est un caractère de $\mathbb{F}^*$: on cherche tout d'abord à expliciter la représentation $\tilde{U_\beta}$. Cette représentation est une représentation de G dans $\mathscr{L}_\mathbb{C}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ qui s'identifie à $\mathbb{C}$ grâce à l'application $\lambda Id_\mathbb{C} \mapsto \lambda$. Soit $g \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$, en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathscr{L}_\mathbb{C}(\mathbb{C};\mathbb{C})$, on a $\beta \tilde{\circ} det(g)(\lambda) = \lambda\times(\beta\circ det(g^{-1})) = \lambda\times(\beta((det(g))^{-1}))$. Ainsi $\tilde{U_\beta}$ peut être identifiée au caractère $\beta\circ det^{-1}$ où l'exposant -1 désigne l'inversion dans $\mathbb{F}$ et non une application réciproque du déterminant. D'autre part, pour $g \in G$ on a $(\beta\circ det)^F(g) = \beta(detF(g))Id_\mathbb{C} = \beta(det(g^q))Id_\mathbb{C} = \beta((det(g))^q)Id_\mathbb{C}$ et donc $(\beta\circ det)^F = \beta\circ det^q$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_\beta^F \simeq \tilde{U_\beta} \quad & \Leftrightarrow \beta(det(g)^{-1}) = \beta(det(g)^q)\forall g \in G \\
& \Leftrightarrow \ \beta(det(g)^q)\beta(det(g)^{-1})^{-1} = 1\forall g \in G \\
& \Leftrightarrow \ \beta(det(g)^q)\beta(det(g)) = 1\forall g \in G \\
& \Leftrightarrow \ \beta(det(g)^{q+1}) = 1\forall g \in G \\
& \Leftrightarrow \ \beta(x^{q+1}) = 1\forall x \in \mathbb{F}'^* \text{ par surjectivité du déterminant sur } \mathbb{F}'^* \\
& \Leftrightarrow \ \beta(xF(x)) = 1\forall x \in \mathbb{F}'^* \\
& \Leftrightarrow \ \beta(x) = 1\forall x \in \mathbb{F}^* \text{ par surjectivité de l'application de } \mathbb{F}'^* \text{ dans } \mathbb{F}^* x \mapsto xF(x) \\
& \Leftrightarrow \beta|_{\mathbb{F}^*} = 1
\end{aligned}$$

ce qui était bien le résultat trouvé en partie 4.2.1.

— Pour les représentations $(\psi_{\mu,\beta}, W_{\mu,\beta})$:
pour plus de simplicité dans les notations, fixons μ, β deux caractères de $\mathbb{F}^*$ et notons dans la suite ψ la représentation $(\psi_{\mu,\beta}, W_{\mu,\beta})$. Nous noterons par ailleurs, comme précédemment, $\Psi_{\mu,\beta}$ la représentation de B qui induit ψ. Regardons tout d'abord la contragrédiente de cette représentations. On admettra le lemme suivant concernant les représentations induites et leurs contragrédientes :

Lemme 5 *Soit G un groupe, H un sous-groupe de G et (σ, V) une représentation de H. Alors la contragrédiente de $ind_H^G(\sigma)$ est isomorphe à la représentation induite par la contragrédiente de G : $ind_H^G(\tilde{\sigma})$.*

Ainsi, on a ici $\tilde{\psi} \simeq ind_B^G(\tilde{\Psi}_{\mu,\beta})$. Examinons donc pour commencer la représentation $\tilde{\Psi}_{\mu,\beta}$ de B. Considérons une matrice de B : $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ Comme $\Psi_{\mu,\beta}$ est un caractère de B, on va de nouveau pouvoir faire l'identification $\mathscr{L}_\mathbb{C}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$; soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\tilde{\Psi}_{\mu,\beta}(g)(\lambda) = \lambda \times \Psi_{\mu,\beta}(g^{-1}) = \lambda\times\mu(a^{-1})\beta(c^{-1})$. Notons alors σ l'application inverse de $\mathbb{F}'^*$ dans $\mathbb{F}'^*$. On vient donc de démontrer que

$$\tilde{\Psi}_{\mu,\beta} \simeq \Psi_{\mu\circ\sigma,\beta\circ\sigma}$$

Et donc, grâce au lemme, nous avons :

$$\tilde{\psi} \simeq ind_B^G(\Psi_{\mu\circ\sigma,\beta\circ\sigma}) \quad (16)$$

Par ailleurs, on a également le lemme suivant :

Lemme 6 $Ind_B^G(\Psi_{\mu,\beta}) \circ F \simeq Ind_B^G(\Psi_{\mu,\beta} \circ F)$

Preuve 9 *On montre ici un résultats plus général. Soit (χ, W) est une représentations de B, π la représentation induite correspondante sur G, on note de plus π' la représentation induite par $\chi \circ F$ sur G. Alors $(\pi \circ F; Ind_B^G(\chi)) \simeq (\pi'; Ind_B^G(\chi \circ F))$. Commençons par expliciter les deux espaces de ces représentations : on note V_1 l'espace d'arrivée de $Ind_B^G(\pi) \circ F$; on a alors*

$$V_1 = \{f : G \to \mathbb{C}; f(bg) = \pi(b)f(g)\ \forall b \in B\ \forall g \in G\}.$$

On note V_2 l'espace de $Ind_B^G(\pi \circ F)$, on a alors

$$V_2 = \{f : G \to \mathbb{C}; f(bg) = \pi(F(b))f(g)\ \forall b \in B\ \forall g \in G\}$$

On définit alors deux applications :

$$\begin{aligned} \psi : \quad & V_1 \to V_2 \\ & f \mapsto f \circ F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi : \quad & V_2 \to V_1 \\ & g \mapsto g \circ F^{-1} \end{aligned}$$

Et on note que $F = F^{-1}$ En remarquant que B est stable par F, on vérifie aisément que ces deux applications sont bien définies et sont bijections réciproques l'une de l'autre. Il reste à vérifier que c'est un morphisme d'entrelacement. Considérons $g \in G$ et $f \in V_1$ On a d'une part

$$\begin{aligned} \psi(\pi \circ F(g))(f) \quad &= (\pi \circ F(g)(f)) \circ F \\ &= (\pi(F(g))(f)) \circ F \\ &= (x \in V \mapsto f(F(x)F(g)) \\ &= (x \mapsto f(F(xg))) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \pi'(g)(\psi(f)) \quad &= \pi'(g)(f \circ F) \\ &= (x \mapsto f(F(xg)) \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall g \in G, \forall f \in V_1, \pi'(g)(\psi(f)) = \psi(\pi \circ F(g))(f)$$

Ce qui montre que ψ est un morphisme d'entrelacement. De même, ϕ est un morphisme d'entrelacement et nous avons donc bien explicité un isomorphismes entre les deux représentations $(\pi \circ F; Ind_B^G(\chi))$ et $(\pi'; Ind_B^G(\chi \circ F))$. Ceci achève la preuve du Lemme 6.

Ainsi, on va s'intéresser dans un premier temps à $\Psi_{\mu,\beta} \circ F$. On a

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu,\beta} \circ F(g) \quad &= \Psi_{\mu,\beta}(\begin{pmatrix} a^q & b^q \\ 0 & c^q \end{pmatrix} \\ &= \mu(a^q)\beta(c^q) \\ &= \mu(F(a))\beta(F(c)) \\ &= \Psi_{\mu\circ F, \beta\circ F}(g) \end{aligned}$$

Donc on a bien

$$\Psi_{\mu,\beta} \circ F = \Psi_{\mu\circ F, \beta\circ F}$$

Et grâce au lemme précédent nous avons donc :

$$\psi^F \simeq ind_B^G(\Psi_{\mu\circ F, \beta\circ F}) \tag{17}$$

Ainsi, d'après les équations (16) et (17) on a

$$\psi^F \simeq \tilde{\psi} \Leftrightarrow ind_B^G(\Psi_{\mu\circ F, \beta\circ F}) \simeq ind_B^G(\Psi_{\mu\circ\sigma, \beta\circ\sigma})$$

Or, nous avons vu dans la partie 3.2.4 que les induites $ind_B^G(\Psi_{\mu\circ\sigma,\beta\circ\sigma})$ et $ind_B^G(\Psi_{\mu\circ F,\beta\circ F})$ étaient isomorphes si et seulement si $(\mu\circ F,\beta\circ F)=(\mu\circ\sigma,\beta\circ\sigma)$ ou $(\mu\circ\sigma,\beta\circ\sigma)=(\beta\circ F,\mu\circ F)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\psi^F \simeq \tilde{\psi} \quad &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu(x^q)=\mu(x^{-1}) \ et \ \beta(x^q)=\beta(x^{-1})\forall x\in\mathbb{F}'^* \\ ou \ \mu(x^q)=\beta(x^{-1}) \ et \ \beta(x^q)=\mu(x^{-1})\forall x\in\mathbb{F}'^* \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu(x^{q+1})=1 \ et \ \beta(x^{q+1})=1\forall x\in\mathbb{F}'^* \\ ou \ \mu(x^q)=\beta(x^{-1})\forall x\in\mathbb{F}'^* \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu(xF(x))=1 \ et \ \beta(xF(x))=1\forall x\in\mathbb{F}'^* \\ ou \ \mu(x^q)=\beta(x^{-1})\forall x\in\mathbb{F}'^* \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu|_{\mathbb{F}^*}=1 \ et \ \beta|_{\mathbb{F}^*}=1 \\ ou \ \mu(x^q)=\beta(x^{-1})\forall x\in\mathbb{F}'^* \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ce qui était également la condition trouvée par le calcul.
Finalement, pour ces deux "types" de représentations, en appliquant le théorème 2, on retrouve bien la même condition que par le calcul pour que la représentation soit distinguée sous H.

Le théorème 2 permet donc d'éviter de nombreux calculs déjà dans le cadre de l'étude des représentations irréductibles de $Gl_2(\mathbb{F}_{q^2})$. Ce théorème est d'autant plus puissant qu'il se généralise, comme mentionné dans l'introduction, à des groupes pour lesquels les calculs sont plus difficiles et plus longs que celui que nous venons d'étudier.

Bibliographie

Livres

W.Fulton et J.Harris, *Representation theory. A first course*, Springer-Verlag, 1991

J.P Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1998

Articles de recherche

[P] D.Prasad, *Distinguished Representations for Quadratic Extensions*, Compositio Mathematica 119, 1999

Documents disponibles en ligne

B.Casselman, *Representations of finite groups*, Cours donné à l' Université de la Colombie Britannique, 2016

Documents non publiés

[M] N.Matringe, Document non publié sur la distinction des réprésentations du groupe de Heisenberg, 2021