# Mémoire de Topologie Différentielle

*Auteur:*

Lucas Morel

*Responsable:*

Yann Rollin

*Laboratoire de Mathématiques Jean Leray*

25 juin 2022

# Table des matières

# Introduction

**Mots-Clés :** Algèbre de Clifford ; Structure *Spin* et *Spin*$^{\mathbb{C}}$ ; Opérateurs de Dirac ; Équations de Seiberg-Witten ; Espaces de modules ; Surfaces kahlériennes.

L'objectif de ce mémoire est de comprendre les équations de Seiberg-Witten, les propriétés de leur espace des modules, l'invariant de Seiberg-Witten qui en est issu, et expliciter tous ces concepts dans le cas restreint des surfaces kählériennes. Nous introduirons dans les deux premiers chapitres les notions de nature algébrique permettant l'énonciation et la compréhension des équations de Seiberg-Witten. Puis, à la fin du second chapitre, nous effectuerons une brève étude analytique de l'opérateur de Dirac, avant de détailler les équations ainsi que les propriétés de leur espace des modules au début du troisième chapitre. Nous introduirons alors l'invariant de Seiberg-Witten et détaillerons le cas kählérien à la fin du chapitre.

# Chapitre 1 : Un peu d'algèbre

## 1.1 : Les algèbres de Clifford

Soit $V$ un espace vectoriel réel de dimension fini muni d'une norme $\|.\|$ issue d'un produit scalaire $\langle . , . \rangle$. On considère l'algèbre tensorielle de $V$ :

$$T(V) = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes^k}$$

ainsi que l'idéal de $T(V)$ généré par les éléments de la forme $v \otimes v + \|v\|^2 1$, avec $v \in V$ ; que l'on notera $\mathcal{I}(V)$. On a alors :

**Definition.** L'algèbre de Clifford associée à $V$ et à la norme $\|.\|$, notée $Cl(V)$, est définie comme le quotient de $T(V)$ par $\mathcal{I}(V)$ :

$$Cl(V) \equiv T(V)/\mathcal{I}(V)$$

*Remarque.* L'image de $V = V^{\otimes^1}$ par la projection naturelle $T(V) \to Cl(V)$ fournit un plongement :

$$V \hookrightarrow Cl(V).$$

De plus, on peut montrer que la restriction de la projection à $V$ est injective. Dès lors, étant donné que $T(V)$ est générée par $V$, on voit que $Cl(V)$ est générée par $V$ (ainsi que l'identité 1) soumis aux relations :

$$v.v = -\|v\|^2 1 \qquad (v \in V).$$

Dans un tel contexte, on peut se donner une base orthonormée $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de $V$, puis écrire $Cl(V)$ en fonction de générateurs et de relations. $Cl(V)$ s'interprète alors comme la $\mathbb{R}$-algèbre générée par la famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ sujette aux relations :

$$\begin{cases} \forall\, 1 \leq i \leq n, \;\; e_i^2 = -1 \\ \;\forall\, i \neq j, \;\; e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i \end{cases}$$

En particulier, tout élément de $Cl(V)$ peut s'écrire de façon unique comme somme de produits de la forme :

$$e_{i_1} \cdots e_{i_k},$$

où $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

**Exemple.**

1. $Cl(\mathbb{R}) = \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$
2. $Cl(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{H}$
3. $Cl(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
4. *Si $V$ est un espace hilbertien, alors $Cl(V) \cong Cl_0(V \oplus \mathbb{R})$. En particulier $Cl_0(\mathbb{R}^4) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.*

Citons à présent une propriété importante de l'algèbre de Clifford :

**Proposition.** *Si $f : V \to A$ est une application linéaire à valeur dans une $\mathbb{R}$-algèbre associative avec unité telle que*

$$\forall \ v \in V, f(v) \cdot f(v) = -\|v\|^2 1\,,$$

*alors $f$ s'étend de façon unique en un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\tilde{f} : Cl(V) \to A$. De plus, $Cl(V)$ est l'unique $\mathbb{R}$-algèbre associative avec cette propriété à isomorphisme d'algèbres près.*

*Éléments de preuve.* Toute application linéaire $f : V \to A$ s'étend en un unique morphisme d'algèbre $\bar{f} : T(V) \to A$. La propriété que doit posséder $f$ implique alors que $\bar{f} = 0$ sur $\mathcal{I}(V)$, ce qui montre que $\bar{f}$ passe au quotient en un morphisme d'algèbres $\tilde{f} : Cl(V) \to A$ et achève ainsi la première partie de la preuve.
Pour la seconde partie : supposons que C est une autre algèbre associative avec unité satisfaisant cette propriété, avec le plongement $i : V \hookrightarrow C$. Alors, l'isomorphisme de $V \subset Cl(V)$ dans $i(V) \subset C$ fournit un isomorphisme d'algèbres de $Cl(V)$ dans $C$. □

*Remarque.*

1. On peut alors considérer l'automorphisme $\varepsilon : Cl(V) \to Cl(V)$ qui étend l'application $v \mapsto -v$ de $V$. De l'identité $\varepsilon^2 = Id$ découle la décomposition en sous-espaces propres :

$$Cl(V) = Cl_0(V) \oplus Cl_1(V),$$

où $Cl_i(V) = \{\varphi \in Cl(V) \mid \varepsilon(\varphi) = (-1)^i \varphi\}$, et on peut voir que $Cl_0(V)$ est une sous-algèbre de $Cl(V)$.

2. On peut définir un lien entre $T(V)$ et $Cl(V)$. En effet, l'existence d'une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduation sur $Cl(V)$ provenant de celle de $T(V)$ induit une décomposition naturelle $\sigma\colon Cl(V) \to \Lambda^\star(V)$ définie par

$$\sigma(re_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k) = re_1 \cdots e_k \,,$$

pour tout élément primitif (i.e. un élément de $\Lambda^\star(W) \subset \Lambda^\star(V)$, où $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de dimension k, càd de la forme ci-dessus). En utilisant cet isomorphisme, on peut définir une multiplication de $Cl(V)$ sur $\Lambda^\star(V)$. Cette nouvelle loi produit est donnée par :

$$v.(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) = v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k - v\angle(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) \,,$$

où $\angle$ est l'opération de contraction de formes différentielles :

$$v\angle(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\langle v,v_i\rangle v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v_i} \wedge \cdots \wedge v_k.$$

On verra qu'une constante pourra apparaître dans cette expression pour des raisons de normalisation dans le cas des surfaces complexes et kählériennes.

## 1.2 : Le groupe *Spin(V)*

On introduit $Cl^{\times}(V) \equiv \{v \in V \mid \exists\ v^{-1} \in V,\ v.v^{-1} = v^{-1}v = 1\}$ le sous-groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'algèbre de Clifford $Cl(V)$. On définit alors :

**Definition.**
- $Pin(V)$ est le sous-groupe de $Cl^{\times}(V)$ généré par les éléments $v \in V$ vérifiant $\|v\|^2 = 1$ (dits unitaires).
- $Spin(V) \equiv Pin(V) \cap Cl_0(V)$.

*Remarque.* On a une écriture plus explicite et équivalente de ces deux groupes en supposant fixée la base de $V$ :

1. - $Pin(V) = \{v_1 \cdots v_k \in Cl(V) \mid \forall\ j,\ \|v_j\| \in \{-1{,}1\}\}$
   - $Spin(V) = \{v_1 \cdots v_k \in Pin(V) \mid k \text{ is even}\}$
2. Par la suite on pourra noter $Pin(n)$ et $Spin(n)$ dès lors que $V$ sera de dimension réelle $n$.

La proposition suivante fournit un critère supplémentaire pour déterminer le groupe *Spin* :

**Proposition.** *L'action par conjugaison :*

$$Spin(V) \times Cl(V) \to Cl(V),\ (\varphi\,, v) \mapsto \varphi v \varphi^{-1},$$

*qui préserve la structure d'algèbre de $Cl(V)$ ainsi que sa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation, induit une représentation :*

$$Spin(V) \to Aut(Cl(V)),\ \varphi \mapsto (v \mapsto \varphi v \varphi^{-1}).$$

*L'image de cette représentation consiste en les automorphismes de $Cl(V)$ qui préservent $V \subset Cl(V)$ ainsi que son orientation :*

$$Im = \{\phi \in Aut(Cl(V)) \mid \phi(V) = V,\ \phi_{|V} \in SO(V)\}.$$

*Ceci induit une application naturelle $Spin(V) \to SO(V)$ qui est surjective et de noyau $\{\pm 1\}$. De plus, si $dim(V) \geq 3$, alors le noyau coïncide avec le centre de $Spin(V)$ et l'application réalise le revêtement universel à deux feuillets de $SO(V)$.*

**Corollaire.** *Si $V$ est de dimension finie $n$, alors $Spin(V)$ est un groupe de Lie compact de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Son algèbre de Lie est la même que celle de $SO(n)$ (i.e. l'espace des matrices antisymétriques $n \times n$ à coefficients réels).*

*Remarque.* Ceci est la conséquence de résultats de théorie des groupes de Lie.

**Exemple** (Le point de vue quaternionique)**.** *Soit $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$, la sphère unité quaternionique. La multiplication $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ induit une structure de groupe sur $\mathbb{S}^3$. On considère alors l'action de $\mathbb{S}^3$ sur $\mathbb{H}$ par conjugaison :*

$$\begin{cases} \mathbb{S}^3 \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ (\alpha\,, \lambda) \mapsto \alpha\lambda\alpha^{-1} \end{cases}.$$

*Cette action préserve la norme et laisse invariant $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$. Dès lors, elle laisse également invariant le complémentaire orthogonal de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}$ ($Im(\mathbb{H})$). Un calcul direct permet de montrer que l'action d'un quaternion unité différent de $\pm 1$, $\alpha$, par conjugaison sur $\mathbb{H}$ préserve $\mathbb{C}\alpha$ et son orthogonal $\mathbb{C}\alpha j$. Sur le premier plan complexe, la conjugaison par $\alpha$ résulte en une action triviale, et sur le second, elle correspond à une rotation d'angle $2\theta$, où $\theta$ est l'angle formé entre $\alpha$ et $1$. Dès lors, on voit que l'action par conjugaison de $\alpha$ sur $Im(\mathbb{H})$ laisse invariante la droite tangente au cercle générée par $\alpha$ et qu'elle agit par rotation d'angle $2\theta$ sur le complémentaire orthogonal de la droite.*
*On a donc prouvé que toute rotation de $Im(\mathbb{H})$ appartient à l'image de la représentation*

$$\mathbb{S}^3 \to SO(Im(\mathbb{H})) \cong SO(3).$$

*Le noyau de cette représentation étant $\mathbb{S}^3 \cap \mathbb{R} = \{\pm 1\}$, on a construit le groupe réalisant le revêtement à deux feuillets de $SO(3)$ et on l'a identifié avec $\mathbb{S}^3$.*

*Maintenant, on a vu que $Cl(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, et $Cl_0(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H} \overset{diag}{\hookrightarrow} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Donc, par définition, $Spin(3) = Pin(3) \cap Cl_0(\mathbb{R}^3) \cong Pin(3) \cap \mathbb{H}$. Or, $dim(Spin(3)) = 3$, d'où*

$$Spin(3) \cong \mathbb{S}^3 < \mathbb{H}.$$

*Montrons que* $\mathbb{S}^3 \overset{diff}{\cong} SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{C},\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$.

*Soit* $\varphi : \mathbb{C}^2 \overset{diff}{\cong} \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{C}) \overset{diff}{\cong} \mathbb{R}^8,\ (\alpha\,,\beta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$. *La restriction de* $\varphi$ *à* $\mathbb{S}^3$ *est un plongement de* $\mathbb{S}^3$ *dans une sous-variété compacte de* $M_2(\mathbb{C})$ *:*

$$\varphi(\mathbb{S}^3) = SU(2).$$

*Donc,* $\mathbb{S}^3 \overset{diff}{\cong} SU(2)$ *en tant que variété. On en déduit par ailleurs que* $SU(2)$ *est simplement connexe et que* $Spin(3) \cong \mathbb{S}^3 \cong SU(2)$.

*On recouvre également* $Spin(4)$ *en considérant l'application suivante :*

$$\phi : SU(2) \times SU(2) \to SO(4),\, (q_+,q_-) \mapsto (x \mapsto q_+ x q_-^{-1}),$$

*qui est un revêtement à deux feuillets de* $SO(4)$ *; et donc, comme* $SU(2) \times SU(2)$ *est simplement connexe, le revêtement universel de* $SO(4)$*. On a ainsi :*

$$Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2).$$

## 1.3 : Complexification et représentations

Dans cette partie, lorsqu'on écrira $n$, on signifiera toujours $n \in \{3,4\}$ (même si les définitions et théorèmes énoncés se généralisent aux autres dimensions), et on notera

$$\mathcal{C}_n^{\mathbb{C}} = Cl(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

le complexifié de $Cl(V)$ lorsque $V$ est de dimension $n$.
On a vu que $Cl(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{H}$, donc $Cl(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$. On peut alors définir une application

$$\mathbb{H} \to \mathbb{C}[2],\, \alpha + j\beta \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

où $\mathbb{C}[2]$ est l'algèbre des matrices complexes $2 \times 2$ ; et où on écrit les éléments de $\mathbb{H}$ sous la forme $x + jy$ pour $x,y \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. On remarque alors que cette matrice correspond à l'action de $\alpha + j\beta$ par multiplication à gauche sur $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$. On obtient alors en complexifiant un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}[2].$$

On a ainsi obtenu une identification de $Cl(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}$ avec $\mathbb{C}[2]$.

**Lemme.**
- *Si $V$ est de dimension 3, alors*

$$\mathcal{C}_3^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}[2] \oplus \mathbb{C}[2] \cong End(\mathbb{C}^2) \oplus End(\mathbb{C}^2);$$

- *Si $V$ est de dimension 4, alors*

$$\mathcal{C}_4^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}[2] \otimes \mathbb{C}[2] \cong End(\mathbb{C}^2) \otimes End(\mathbb{C}^2) \cong End(\mathbb{C}^4).$$

*Remarque.* On notera par la suite $S_{\mathbb{C}}^n := \mathbb{C}^{2^k}$ lorsque $n \in \{2k, 2k+1\}$ (en particulier, on voit que $S_{\mathbb{C}}^{2k} = S_{\mathbb{C}}^{2k+1}$). On appellera ses éléments les $n$-spineurs complexes. Et on aura donc toujours le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{2k}^{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{C}_{2k+1}^{\mathbb{C}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
End(S_{\mathbb{C}}^{2k}) \arrow[r, "\varphi:\, A \mapsto (A,A)"'] & End(S_{\mathbb{C}}^{2k+1}) \oplus End(S_{\mathbb{C}}^{2k+1})
\end{tikzcd}$$

À partir de ces identifications, on peut en déduire des représentations de $\mathcal{C}_3^{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{C}_4^{\mathbb{C}}$, notées $\Delta_n$ :

$$\Delta_3 : \mathcal{C}_3^{\mathbb{C}} \overset{\sim}{\to} End(S_{\mathbb{C}}^3) \oplus End(S_{\mathbb{C}}^3) \overset{pr_1}{\to} End(S_{\mathbb{C}}^3);$$
$$\Delta_4 : \mathcal{C}_4^{\mathbb{C}} \overset{\sim}{\to} End(S_{\mathbb{C}}^4),$$

où $pr_1$ est la projection sur le premier facteur. Ces représentations induisent alors par restrictions des représentations de $Spin(3)$ et $Spin(4)$ (on rappel que $Spin(n) \subset Cl(V) \subset Cl(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) :

$$\Delta_{3|_{Spin(3)}} : Spin(3) \to Aut(S_{\mathbb{C}}^3);$$
$$\Delta_{4|_{Spin(4)}} : Spin(4) \to Aut(S_{\mathbb{C}}^4).$$

On peut donc à compter de maintenant considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^n \subset Cl(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}_n^{\mathbb{C}} \overset{\Delta_n}{\to} End(S_{\mathbb{C}}^n)$ comme des endomorphismes de $S_{\mathbb{C}}^n$ et définir une multiplication de Clifford vecteurs-spineurs, i.e. une application linéaire :

$$\mu : \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} S_{\mathbb{C}}^n \to S_{\mathbb{C}}^n, (x \otimes \varphi) \mapsto \Delta_n(x)(\varphi).$$

Par la suite, on notera plus simplement $x \cdot \varphi$ au lieu de $\mu(x \otimes \varphi)$ pour simplifier les notations. On peut ensuite étendre cette multiplication en un morphisme

$$\begin{aligned} \mu : \Lambda(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} S_{\mathbb{C}}^n &\to S_{\mathbb{C}}^n \\ (\omega^k \otimes \varphi) &\mapsto \omega^k \cdot \varphi = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k} \cdot \varphi, \end{aligned}$$

où $e_{i_\alpha} \cdot \varphi$ est la multiplication vecteur-spineur définie ci-dessus. En remarquant que $\omega_{\mathbb{C}} := -e_1 e_2 e_3 e_4$ appartient au centre de $Cl_0(\mathbb{R}^4)$ et que $Spin(4) \subset Cl_0(\mathbb{R}^4)$, on voit que $\omega_{\mathbb{C}}$ appartient aussi au centre de $Spin(4)$, puis que l'endomorphisme

$$f = \Delta_4(\omega_{\mathbb{C}}) : S_{\mathbb{C}}^4 \to S_{\mathbb{C}}^4$$

est un automorphisme de $Spin(4)$-représentations, i.e.

$$\forall\, (g\,, \varphi) \in Spin(4) \times S_{\mathbb{C}}^4,\ f(\Delta_4(g)\varphi) = \Delta_4(g) \cdot f(\varphi).$$

De plus, ayant $(\omega_{\mathbb{C}})^2 = 1$, $f$ est une involution et induit une décomposition en sous-espaces propres :

$$S^4_{\mathbb{C}} = S^{4,+}_{\mathbb{C}} \oplus S^{4,-}_{\mathbb{C}},$$

où $S^{4,\pm}_{\mathbb{C}} = \{\varphi \in S^4_{\mathbb{C}} \mid f(\varphi) = \pm\varphi\}$. Ces deux espaces sont chacun de dimension complexe 2, et ils vérifient :

$$\mu : \; \mathbb{R}^4 \otimes_{\mathbb{R}} S^{4,\pm}_{\mathbb{C}} \to S^{4,\mp}_{\mathbb{C}}.$$

Les endomorphismes $e_i \cdot e_j \colon S^{4,+}_{\mathbb{C}} \to S^{4,+}_{\mathbb{C}}$ induits par la multiplication de Clifford possèdent les représentations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} e_1e_2 = e_3e_4 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ e_1e_3 = -e_2e_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_1e_4 = e_2e_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour finir, $\Delta : Spin(n) \to GL(S^n_{\mathbb{C}})$ étant une représentation d'un groupe compact dans un espace vectoriel complexe, il existe un produit hermitien sur $S^n_{\mathbb{C}}$ qui préserve la structure $Spin(n)$. En fait, il existe même un produit hermitien $\langle . \, , . \rangle$ sur $S^n_{\mathbb{C}}$ qui vérifie la condition :

$$\forall \, (x \, , \varphi \, , \psi) \in \mathbb{R}^n \times S^n_{\mathbb{C}} \times S^n_{\mathbb{C}}, \; \langle x \cdot \psi \, , \varphi \rangle + \langle \psi \, , x \cdot \varphi \rangle = 0.$$

La représentation spin $\Delta : Spin(n) \to GL(S^n_{\mathbb{C}})$ est unitaire par rapport à ce produit scalaire ($Im(\Delta) \subset U(S^n_{\mathbb{C}})$). En fait, elle est spéciale unitaire :

$$\Delta : Spin(n) \to SU(S^n_{\mathbb{C}}).$$

*Démonstration.* Considérer $f : Spin(n) \to \mathbb{S}^1$, $f(g) = det(\Delta(g))$ ; par simple connexité de $Spin(n)$, il y a un unique relevé de $f$ au revêtement universel de $\mathbb{S}^1$ : $F : Spin(n) \to \mathbb{R}$ : il vérifie en autre $f(g) = e^{2\pi i F(g)}$ ; étant également un morphisme de groupes de Lie et $Spin(n)$ étant compact, $F(Spin(n))$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ qui est contenu dans un interval borné de $\mathbb{R}$, ce qui implique que $F \equiv 0$ et donc que $f(g) \equiv 1$. $\square$

## 1.4 : Le groupe $Spin^{\mathbb{C}}(V)$

L'algèbre de Clifford complexifiée $\mathcal{C}_n^{\mathbb{C}}$ contient le groupe $Spin(n)$ mais aussi le groupe $\mathbb{S}^1$. Ensemble, ces deux groupes en génèrent un nouveau que l'on nomme $Spin^{\mathbb{C}}(n)$. Étant donné que $Spin(n) \cap \mathbb{S}^1 = \{-1,1\}$, on a :

**Lemme.**

$$Spin^{\mathbb{C}}(n) = (Spin(n) \times \mathbb{S}^1)/\{\pm 1\} = Spin(n) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^1.$$

Les éléments de $Spin^{\mathbb{C}}(n)$ sont les classes d'équivalences $[g,z] = \{(g,z),(-g,-z)\}$. Ce qui nous amène, en notant $\lambda : Spin(n) \to SO(n)$ le revêtement universel à deux feuillets de $SO(n)$, à :

**Proposition.** *L'application*

$$p : Spin^{\mathbb{C}}(n) \to SO(n) \times \mathbb{S}^1,\ [g\,,z] \mapsto (\lambda(g)\,,z^2)$$

*réalise le revêtement universel à deux feuillets de $SO(n) \times \mathbb{S}^1$ par $Spin^{\mathbb{C}}(n)$.*

*Remarque.* L'action par conjugaison de $Spin(n)$ sur $Cl(\mathbb{R}^n)$ s'étend en une action par conjugaison de $Spin^{\mathbb{C}}(n)$ sur $Cl(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$ qui préserve $Cl(\mathbb{R}^n) \subset Cl(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$ et dont l'image coïncide avec celle de l'action par conjugaison de $Spin(n) : SO(n)$. En particulier, le noyau de cette action est $\{\pm 1\} \times_{\{\pm 1\}} \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1$. De plus, on note que $Spin(n) \cong Spin(n) \times_{\{\pm 1\}} \{\pm 1\} \subset Spin^{\mathbb{C}}(n)$.

**Exemple.** $Spin^{\mathbb{C}}(4) = Spin(4) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^1 \cong (SU(2) \times SU(2)) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) = \{(A,B) \in U(2) \times U(2) \mid det(A) = det(B)\}$.

# Chapitre 2 : Les fibrés spinoriels et opérateur de Dirac

## 2.1 : Fibrés spinoriels et fibrés de Clifford

**Definition.** Soit $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2 muni d'un produit scalaire. Soit $P \to X$ un $SO(V)$-fibré principal [a]. On dit que $P$ admet une structure $Spin(V)$ lorsqu'il existe un $Spin(V)$-fibré principal $\tilde{P}$ qui réalise un revêtement à deux feuillets équivariant de $P$.

*a.* Pour plus de précisions concernant les fibrés principaux, lire l'appendix n°2.

**Lemme.** *Le $SO(V)$-fibré principal $P \to X$ admet une structure spin si et seulement si sa seconde classe de Stiefel-Whitney vaut zéro, i.e. $H^2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ni w_2(P) = 0$.*

*Remarque.* Il y a plusieures autres manières équivalentes de reformuler cette condition :

1. $d_2 : H_2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_1(SO(V); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est triviale ;
2. Si $X$ est un CW-complexe de dimension au moins 2 avec pour 2-squelette $X_2$, $\pi_{|X_2} : X_2 \to X$ est triviale.

**Exemple.** *On a vu précédemment que $Spin(3) \cong SU(2) \cong \mathbb{S}^3$ et $Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$. On peut alors expliciter une action de $Spin(4)$ sur $\mathbb{S}^3$ :*

$$Spin(4) \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3,\ ((\varphi\,,\psi)\,,x) \mapsto \varphi x \psi^{-1}.$$

*Le groupe d'isotropie $Spin(3)$ pour cette action s'identifie alors à la diagonale $diag(SU(2))$ de $SU(2) \times SU(2)$. Dès lors, on voit que $\mathbb{S}^3$ correspond à l'espace homogène $SU(2) \times SU(2)/diag(SU(2))$, et a fortiori, qu'on peut munir $\mathbb{S}^3$ d'une structure spin canonique $Spin(\mathbb{S}^3)$ dont la projection est donnée par*

$$Spin(\mathbb{S}^3) = SU(2) \times SU(2) = Spin(4) \to \mathbb{S}^3,\ (\varphi\,,\psi) \mapsto \varphi\psi^{-1}\,.$$

*On note qu'il s'agit précisément de la restriction de l'action précédente à $Spin(4) \times \{1\}$, où $1 \in \mathbb{S}^3$.*

*Il y a deux trivialisations naturelles de $Spin(\mathbb{S}^3)$ qui émergent :*

$$\Phi_+ \colon Spin(\mathbb{S}^3) = Spin(4) \to \mathbb{S}^3 \times Spin(3),\, (\varphi\,,\psi) \mapsto (\varphi\psi^{-1}\,,\varphi)\,;$$
$$\Phi_- \colon Spin(\mathbb{S}^3) = Spin(4) \to \mathbb{S}^3 \times Spin(3),\, (\varphi\,,\psi) \mapsto (\varphi\psi^{-1}\,,\psi)\,.$$

*On note alors que la représentation complexe unitaire spinorielle*

$$\Delta_3 \colon Spin(3) \to U(S^3_{\mathbb{C}})$$

*induit un fibré spinoriel sur $\mathbb{S}^3$ :*

$$\boldsymbol{S}(\mathbb{S}^3) := Spin(4) \times_{\Delta_3} S^3_{\mathbb{C}}.$$

*Puis, en identifiant $\Delta_3$ avec la représentation naturelle de $SU(2)$ sur $\mathbb{C}^2$, on déduit des applications $\Phi_+$ et $\Phi_-$ deux trivialisations de $\boldsymbol{S}(\mathbb{S}^3)$ :*

$$\phi_+ \colon \boldsymbol{S}(\mathbb{S}^3) = Spin(4) \times_{\Delta_3} S^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{C}^2,\, [(\varphi\,,\psi)\,,v] \mapsto (\varphi\psi^{-1}\,,\varphi v)\,;$$
$$\phi_- \colon \boldsymbol{S}(\mathbb{S}^3) = Spin(4) \times_{\Delta_3} S^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{C}^2,\, [(\varphi\,,\psi)\,,v] \mapsto (\varphi\psi^{-1}\,,\psi v)\,,$$

*on appelle la première trivialisation "$\Delta^+$-trivialisation", et la seconde "$\Delta^-$-trivialisation".*

*Remarque.* Soit $P \to X$, le $SO(4)$-fibré des repères associé au fibré tangent de la variété Riemannienne X. Étant donné que $SO(4)$ agit à gauche sur $Cl(\mathbb{R}^4)$, on peut associer à $P$ le fibré de Clifford suivant :

$$Cl(P) := P \times_{SO(4)} Cl(\mathbb{R}^4).$$

Ce fibré ne nécessite aucune structure spin ou spin$^{\mathbb{C}}$ pour être défini. On peut bien sûr également définir la version complexe de ce fibré :

$$Cl(P) \otimes \mathbb{C} = P \times_{SO(4)} (Cl(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}).$$

Une fois de plus, ce fibré se décompose sous la forme $Cl(P) = Cl_0(P) \oplus Cl_1(P)$ ; et comme l'élément volume introduit plus haut $\omega_{\mathbb{C}}$ est invariant sous l'action de $SO(4)$, il suit qu'il détermine une section de $Cl(P)$ de carré égal à 1. Cette section produit une décomposition du complexifié :

$$Cl(P) \otimes \mathbb{C} = (Cl(P) \otimes \mathbb{C})^+ \oplus (Cl(P) \otimes \mathbb{C})^-.$$

Dans le cas où il existerait une structure spin, et dans celui où il existe une structure spin$^{\mathbb{C}}$ (toujours le cas pour nous), ces fibrés de Clifford agissent sur le fibré spinoriel. Soit $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(\tilde{P}) \to X$ le fibré spinoriel complexe associé à $\tilde{P}$ (une structure Spin (resp. Spin$^{\mathbb{C}}$) de $P$). On a une action par conjugaison de $Spin(4)$ (resp. $Spin^{\mathbb{C}}(4)$) sur $Cl(\mathbb{R}^4)$. La multiplication de Clifford de $Cl(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}$ sur $\mathbf{S}(\mathbb{R}^4)$ commute avec cette action :

$$\forall\ (\lambda\,,\sigma\,,\alpha) \in (Cl(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}) \times \mathbf{S}(\mathbb{R}^4) \times Spin(4)\ (\text{resp. } Spin^{\mathbb{C}}(4)),\ (\alpha\lambda\alpha^{-1}) \cdot (\alpha\sigma) = \alpha(\lambda \cdot \sigma).$$

Il suit que cette multiplication de Clifford s'étend en une action

$$(Cl(P) \otimes \mathbb{C}) \otimes \mathbf{S}(\tilde{P}) \to \mathbf{S}(\tilde{P}),$$

qui s'identifie sur chaque fibre à la mutiliplication de Clifford usuelle. On peut aussi noter que la restriction de cette action à $Cl_0(P) \otimes \mathbb{C}$ préserve la décomposition $\mathbf{S}(\tilde{P}) = \mathbf{S}^+(\tilde{P}) \oplus \mathbf{S}^-(\tilde{P})$, et que la restriction de cette action à $Cl_1(P) \otimes \mathbb{C}$ échange les deux composantes de la décomposition.
Maintenant, comme $X$ est une variété Riemannienne, on peut identifier le fibré tangent et cotangent à l'aide de la métrique, puis, en choisissant sur un espace tangent $T_xX$ une base orthonormale $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, on peut décrire la multiplication de Clifford de la 1-forme complexe $\alpha$ sur le spineur $s$ en le point $x$ par :

$$\alpha \cdot s(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha(e_i) e_i \cdot s(x).$$

Nous allons à présent aborder le cas des fibré $Spin^{\mathbb{C}}$.

**Definition.** Une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ pour la 4-variété orientée connexe $X$ munie du $SO(4)$-fibré principal des repères $P \to X$, est la donnée d'un $Spin_4^{\mathbb{C}}$-fibré principal $\tilde{P} = P_{Spin_4^{\mathbb{C}}} \to X$ de sorte qu'il existe un revêtement à deux feuillets équivariant entre $\tilde{P}$ et $P$.

*Remarque.*

- On rappelle que $Spin_4$ et $\mathbb{S}^1$ sont deux sous-groupes de $Spin_4^{\mathbb{C}}$. Dès lors, si le fibré des repères $P \to X$ admet une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ $\tilde{P}$, alors $\tilde{P}/\mathbb{S}^1$ est un $(Spin_4/\{\pm 1\} = SO(4))$-fibré principal isomorphe (en tant que fibré principal) à $P$, et $L := \tilde{P}/Spin_4$ est un $(\mathbb{S}^1/\{\pm 1\} = \mathbb{S}^1)$-fibré principal au dessus de $X$. De plus, ces morphismes produisent un revêtement à deux feuillets $\tilde{P} \to P \tilde{\times} L$ (où $\tilde{\times}$ est un produit fibré).
- En introduisant l'application $\alpha \colon \begin{cases} Spin_4^{\mathbb{C}} & \to \mathbb{S}^1 \\ (A,B) & \mapsto det(A) \end{cases}$, on obtient un fibré $L := \tilde{P} \times_\alpha \mathbb{C}$ en droites complexes associé à la structure $Spin^{\mathbb{C}}$ (c'est un $\mathbb{S}^1 = U(1)$-fibré principal). On l'appelle le fibré déterminant de la structure $Spin^{\mathbb{C}}$. On remarque par ailleurs que si $E := \tilde{P} \times_{U(2)} \mathbb{C}^2$, alors $\Lambda^2(E) = \tilde{P} \times_{det} \mathbb{C} = \tilde{P} \times_\alpha \mathbb{C} = L$. On peut donc également voir $L$ comme le fibré déterminant canonique du fibré vectoriel $E$ (i.e. sa puissance extérieure maximale).

- Il peut être montré, dans le cas où $X$ est une 4-variété kählérienne, que si $P'$ est une autre structure $Spin^{\mathbb{C}}$ que $\tilde{P}$ sur le fibré des repères $P$, alors :

  $$P' = \tilde{P} \otimes Q\,,$$

  pour un certain $U(1)$-fibré principal $Q \to X$. En admettant ce résultat et en notant $L = det(P')$ et $L_0 = det(Q)$, il suit nécessairement que :

  $$\begin{aligned}\mathbf{S}^+(P') &= \mathbf{S}^+(\tilde{P}) \otimes L_0 = \Lambda^0(X; L_0) \oplus \Lambda^{0,2}(X; L_0)\\ \mathbf{S}^-(P') &= \mathbf{S}^-(\tilde{P}) \otimes L_0 = \Lambda^{0,1}(X; L_0)\,.\end{aligned}$$

  De plus, on doit avoir :

  $$det(P') = K_X^{-1} \otimes L_0^2\,,$$

  d'où la relation :

  $$L_0^2 = K_X \otimes L\,.$$

Soient $\upsilon^{\pm}\colon Spin_4^{\mathbb{C}} \to U(2)$ les deux projections déterminées par $Spin_4^{\mathbb{C}} \subset U(2) \times U(2)$. On définit $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}^{\pm} = P_{Spin_4^{\mathbb{C}}} \times_{\upsilon^{\pm}} \mathbb{C}^2$. Ils sont appelés respectivement fibré spinoriel positif et négatif de la structure $Spin^{\mathbb{C}}$ (ce sont des $U(2)$-fibrés principaux). Leurs sections sont appellées respectivement spineurs positifs et négatifs. On remarque que leurs fibrés déterminant $det(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}^{+})$ et $det(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}^{-})$ sont isomorphes au sens des fibrés principaux au fibré déterminant de la structure $Spin^{\mathbb{C}}$.

En fait, on peut réaliser $TX$, $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}^{+}$ et $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}^{-}$ plus concrètement en introduisant successivement :

$$\begin{aligned}\rho_0\colon Spin_4^{\mathbb{C}} &\to Aut(\mathbb{H}), [q_1\,, q_2\,, z] \mapsto (h \mapsto q_1 h \bar{q_2})\\ \rho^+\colon Spin_4^{\mathbb{C}} &\to Aut(\mathbb{H}), [q_1\,, q_2\,, z] \mapsto (h \mapsto q_1 h z)\\ \rho^-\colon Spin_4^{\mathbb{C}} &\to Aut(\mathbb{H}), [q_1\,, q_2\,, z] \mapsto (h \mapsto q_2 h z)\,.\end{aligned}$$

En effet, ces représentations fournissent les isomorphismes de fibrés principaux suivants :

$$\begin{aligned}P_{Spin_4^{\mathbb{C}}} \times_{\rho_0} \mathbb{H} &\cong TX\\ P_{Spin_4^{\mathbb{C}}} \times_{\rho^+} \mathbb{H} &\cong \mathbf{S}^+\\ P_{Spin_4^{\mathbb{C}}} \times_{\rho^-} \mathbb{H} &\cong \mathbf{S}^-\,.\end{aligned}$$

Dès lors : $TX \otimes \mathbb{C} \cong Hom_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^+\,, \mathbf{S}^-)$. La multiplication de Clifford peut donc être adaptée au cadre des sections de ces fibrés :

$$\mu\colon \Gamma(X; TX \otimes \mathbf{S}^+) \to \Gamma(X; \mathbf{S}^-)\,.$$

## 2.2 : Connexion sur un fibré spinoriel

Soient $(X^4, g)$ une 4-variété riemannienne connexe orientée munie d'un $SO(4)$-fibré principal $P \to X$ et $\tilde{P} \to X$ le fibré $Spin^{\mathbb{C}}$ associé. On sait qu'il existe une unique connexion, notée $\nabla$, métrique ($Z.g(X,Y) = g(\nabla_Z(X),Y) + g(X,\nabla_Z(Y))$ pour tout triplet de champs de vecteurs $(X,Y,Z)$) et sans-torsion ($\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X,Y]$ pour tout couple de champs de vecteurs $(X,Y)$) sur le fibré tangent appelée connexion de Levi-Civita. Vue comme une connexion sur le $SO(4)$-fibré principal tangent cependant, c'est une 1-forme à valeur dans $Lie(SO(4)) = \mathfrak{so}(4)$ :

$$Z : TP \to \mathfrak{so}(4) .$$

En introduisant une connexion $A \colon TL \to Lie(U(1)) \cong i\mathbb{R}$ sur $L$ : le $U(1)$-fibré déterminant associé à la structure $Spin^{\mathbb{C}}$, on obtient une connexion sur $P \tilde{\times} L$ :

$$Z \times A \colon T(P \tilde{\times} L) \to \mathfrak{so}(4) \oplus i\mathbb{R} ,$$

où $\tilde{\times}$ est un produit fibré.
Cette connexion se relève alors par le revêtement à deux feuillets $\pi \colon \tilde{P} \to P \tilde{\times} L$ en une connexion $\widetilde{Z \times A}$ sur $\tilde{P}$ de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} T(\tilde{P}) \arrow[r, "\widetilde{Z \times A}"] \arrow[d, "d\pi"] & \mathfrak{spin}_4^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(4) \oplus i\mathbb{R} \arrow[d, "p_\star"] \\ T(P \tilde{\times} L) \arrow[r, "Z \times A"] & \mathfrak{so}(4) \oplus i\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

où $p_\star$ est la différentielle du revêtement à deux feuillets $p \colon Spin_4^{\mathbb{C}} \to SO(4) \times \mathbb{S}^1$.
On peut identifier les sections du fibré spinoriel $\mathbf{S} = \tilde{P} \times_\Delta S_{\mathbb{C}}^4$ avec les applications lisses $\psi \colon \tilde{P} \to S_{\mathbb{C}}^4$ vérifiants :

$$\forall \, (p \, , g) \in \tilde{P} \times Spin_4^{\mathbb{C}}, \, \psi(p \cdot g) = \Delta(g^{-1}) \cdot \psi(p) .$$

Cela nous permet alors d'introduire une différentielle dépendant de la connexion $\widetilde{Z \times A}$ sur l'espace des sections de $\mathbf{S}$, appelée différentielle absolue, définie par :

$$D^A \psi = d\psi + \Delta_\star(\widetilde{Z \times A})\psi .$$

Cette différentielle nous permet alors de définir une dérivée covariante sur le fibré spinoriel

$$\nabla^A \colon \Gamma(\mathbf{S}) \to \Gamma(T^\star X \otimes \mathbf{S}) .$$

Un $X \in \Gamma(TX)$ peut également être envisagé tel une fonction lisse $X\colon \tilde{P} \to \mathbb{R}^4$ vérifiant $\forall\,(p\,,g) \in \tilde{P} \times SO(4)$, $X(p \cdot g) = \lambda(g^{-1}) \cdot X(p)$ car le fibré tangent $TX$ est un fibré vectoriel associé au fibré principal $\tilde{P}$. La multiplication de Clifford $X \cdot \psi$ est alors donnée par une fonction

$$X \cdot \psi\colon \tilde{P} \to S^4_{\mathbb{C}},\, p \mapsto X(p) \cdot \psi(p)\,,$$

où $\cdot$ est la multiplication vecteurs-spineurs, de sorte que

$$\begin{aligned} D^A(X \cdot \psi) &= d(X \cdot \psi) + \Delta_\star(\widetilde{Z \times A})(X \cdot \psi) \\ &= dX \cdot \psi + X \cdot d\psi + \Delta_\star(\widetilde{Z \times A})(X \cdot \psi)\,. \end{aligned}$$

Transformons $\Delta_\star(\widetilde{Z \times A})(X \cdot \psi)$ algébriquement. Pour ce faire, on insert un vecteur $t \in T(\tilde{P})$ de sorte que $\widetilde{Z \times A}(t) = (y\,, is) \in \mathfrak{so}(4) \oplus i\mathbb{R}$ :

$$\Delta_\star(\widetilde{Z \times A}(t))(X \cdot \psi) = (y + is) \cdot X \cdot \psi = y \cdot X \cdot \psi + X \cdot (is\psi)\,.$$

Or, $y \in \mathfrak{so}(4)$ et $X \in \mathbb{R}^4$, donc on a dans l'algèbre de Clifford $C_4$ :

$$y \cdot X = X \cdot y + \lambda_\star(y)(X)\,,$$

où $\lambda_\star$ est la différentielle de $\lambda\colon Spin_4 \to SO(4)$. Et comme $\lambda_\star(y) = Z(d\pi(t))$, on a

$$\Delta_\star(\widetilde{Z \times A})(X \cdot \psi) = X \cdot (\Delta_\star(\widetilde{Z \times A})\psi) + (\lambda_\star(Z)X) \cdot \psi\,.$$

On aboutit donc à la formule :

$$\begin{aligned} D^A(X \cdot \psi) &= (dX + \lambda_\star(Z)X) \cdot \psi + X \cdot (d\psi + \Delta_\star(\widetilde{Z \times A})\psi) \\ &= (\nabla X) \cdot \psi + X \cdot (D^A\psi) \end{aligned}$$

où $\nabla$ est la dérivée covariante issue de la connexion de Levi-Civita usuelle sur le fibré des repères.

*Remarque.* On a les deux identités suivantes (que l'on ne démontre pas) :

$$\begin{aligned} \nabla^A_Y(X \cdot \psi) &= X \cdot (\nabla^A_Y\psi) + (\nabla_Y X) \cdot \psi \\ X \cdot \langle \psi\,, \psi_1 \rangle &= \langle \nabla^A_X \psi\,, \psi_1 \rangle + \langle \psi\,, \nabla^A_X \psi_1 \rangle \end{aligned}$$

La première résultant d'un calcul direct et la seconde du fait que la représentation $\Delta$ est unitaire par rapport au produit $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$.

Écrivons une formule locale pour cette dérivée covariante. Soit $e\colon U \subset X \to P$ une section locale du fibré des repères. $e$ est donc constituée d'une base orthonormale

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)$$

de champs de vecteurs définis sur $U$. La 1-forme de connexion $Z$ devient localement

$$Z^e = e^\star(Z)\colon TU \to \mathfrak{so}(4)$$

et est donnée par

$$Z^e = \sum_{1\leq i<j\leq 4} \omega_{ij} E_{ij}$$

où $\{E_{ij}\}$ est la base usuelle des matrices antisymétriques $4\times 4$ (dont chaque élément est une matrice écrite dans la base $(e_1,e_2,e_3,e_4)$), et $\omega_{ij} = g(\nabla e_i\,, e_j)$ ($g$ étant la métrique de $X$).
Similairement, si on fixe une section locale $s\colon U \to L$ du fibré en droites complexes associé à la structure $Spin_4^{\mathbb{C}}$, on obtient une 1-forme locale de connexion

$$A^s = s^\star(A)\colon TU \to i\mathbb{R}\,.$$

On note que $e \times s$ est une section locale de $P \tilde{\times} L$. Soit $\widetilde{e \times s}$ le relevé par $\pi\colon \tilde{P} \to P\tilde{\times}L$ de cette section locale. Étant donné la forme locale :

$$\begin{aligned}
(\widetilde{e \times s})^\star(p_\star(\widetilde{Z \times A})) &= (\widetilde{e \times s})^\star \pi^\star(Z \times A)\\
&= (\pi \circ (e \times s))^\star(Z \times A)\\
&= (Z^e\,, A^s)\\
&= (\sum_{i<j} w_{ij} E_{ij}\,, A^s)\,,
\end{aligned}$$

et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & T(\tilde{P}) \arrow[r, "\widetilde{Z\times A}"] \arrow[dd, "d\pi"] & \mathfrak{spin}_4^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(4) \oplus i\mathbb{R} \arrow[dd, "p_\star"] \\
T(U) \arrow[ur, "d(\widetilde{e\times s})"] \arrow[dr, "d(e\times s)"'] & & \\
 & T(P\tilde{\times}L) \arrow[r, "Z\times A"] & \mathfrak{so}(4) \oplus i\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

on obtient la formule locale suivante :

$$\widetilde{Z \times A}^{\widetilde{e\times s}} = (\frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j\,, \frac{1}{2}A^s)\,.$$

Il suit que suivant $\widetilde{e \times s}$, la section locale $\psi \in \Gamma(U; \mathbf{S})$ peut être décrite par une fonction $\psi \colon U \to \Delta_4$, et sa dérivée covariante est déterminée par le formule locale :

$$\nabla^A \psi = d\psi + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j \psi + \frac{1}{2} A^s \psi \,.$$

A priori, on possède une connexion naturelle sur $\tilde{P}$ grâce à la connexion de Levi-Civita. A contrario, le choix de la connexion $A$ sur le fibré en droites $L$ paraît complètement arbitraire. Ce faisant, nous allons décrire quelque peu l'impact de ce choix sur la résultante connexion.
Si $A$ et $A'$ sont deux connexions sur $L$, leur différence est une 1-forme à valeurs dans $i\mathbb{R}$ (i.e. $A - A' = i\eta$ pour $\eta \in \Omega^1(X; \mathbb{R})$). D'où :

$$\nabla^A_X \psi - \nabla^{A'}_X \psi = \frac{1}{2} i\eta(X)\psi \,.$$

En introduisant le concept de transformation de jauge, on recouvre alors l'entièreté de ces différences.

**Definition.** Une transformation de jauge est une application $f \colon L \to L$ décrite par une fonction $\mu_f \colon X \to \mathbb{S}^1$ :

$$\forall\, p_1 \in L,\, f(p_1) = p_1 \cdot \mu_f(\pi(p_1)) \,,$$

où $\pi \colon L \to X$ est la projection du fibré en droites complexes et le $\cdot$ décrit l'action de $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ sur le fibré. On note l'ensemble des $\mu_f$ produisant de telles transformations $f$ : $\mathcal{G}(L)$.

Si $f$ une telle transformation. Alors, $f^\star(A)$ est donnée par

$$f^\star(A) = A + \pi^\star \mu_f^\star(\Theta) \,,$$

où $\Theta = \frac{dz}{z}$ (c'est la forme de Mauer-Cartan sur $U(1) = \mathbb{S}^1$). Et donc :

$$\nabla^{f^\star(A)}_X \psi - \nabla^A_X \psi = 2 \frac{d\mu_f(X)}{\mu_f} \cdot \psi \,.$$

On note que l'on recouvre bien toutes les 1-formes à valeurs imaginaires pures $i\eta(X)$ obtenue comme différence de deux opérateurs $\nabla$ en résolvant l'EDO

$$d\mu_f(X) = i\mu_f(X)\eta(X) \,.$$

L'intérêt de ces transformées et qu'elles constituent un groupe pour la loi de composition des applications et que l'on pourra donc quotienter certains ensembles par l'action de ce groupe lorsque cela se montrera pertinent... (cf partie sur les équations de Seiberg-Witten)

On achève cette discussion sur les connexions des fibrés spinoriels en décrivant brièvement les formes locales des 2-formes de courbure de nos fibrés $P$ et $L$ :

$$\begin{aligned} R = \Omega^Z &= \sum_{i<j} \Omega_{ij} E_{ij} \colon TP \times TP \to \mathfrak{so}(4) \\ F_A = \Omega^A &= dA \colon TL \times TL \to i\mathbb{R} \end{aligned}$$

*Remarque.* On note que si $f$ est une transformation de jauge et $A$ est une connexion sur $L$, alors :

$$F_{f^\star(A)} = F_A = dA\,.$$

Autrement dit, la 2-forme différentielle de courbure $F_A$ est invariante par transformation de jauge (nous ne prouvons pas ce résultat qui résulte de calculs en forme locale, cf [2] et [3]).

## 2.3 : Opérateur de Dirac

**Definition.** On appelle opérateur de Dirac, l'opérateur différentiel elliptique du premier ordre suivant :

$$D_A = \mu \circ \nabla^A \colon \Gamma(\mathbf{S}) \to \Gamma(T^\star X \otimes \mathbf{S}) = \Gamma(TX \otimes \mathbf{S}) \to \Gamma(\mathbf{S}) \,,$$

où $\mu$ est la multiplication de Clifford, et où on a identifié $T^\star X$ et $TX$ localement via la métrique $g$.
Si $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est une base $g$-orthonormée locale du fibré tangent $TX$, alors on peut écrire la forme locale suivante pour l'opérateur de Dirac :

$$D_A = \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot \nabla^A_{e_i} \,.$$

*Remarque.*

- La forme locale de l'opérateur de Dirac ne dépend pas de la $g$-base orthonormale choisie.
- L'opérateur est elliptique car son symbole est la multiplication de Clifford :

$$\sigma(D_A)(X) \colon \mathbf{S} \to \mathbf{S}, \, \psi \to X \cdot \psi \,.$$

En effet, ceci est une conséquence du développement local suivant :

$$\begin{aligned} D_A(f \cdot \psi) &= \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot \nabla^A_{e_i}(f \cdot \psi) \\ &= \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot \{df(e_i)(\psi) + f \nabla^A_{e_i}\psi\} \\ &= grad(f) \cdot \psi + f D_A(\psi) \,. \end{aligned}$$

- L'opérateur de Dirac est auto-adjoint pour le produit scalaire $L^2$ induit par le produit hermitien

$$\langle D_A\psi \,, \psi_1 \rangle_{L^2} = \langle \psi \,, D_A\psi_1 \rangle_{L^2} \,.$$

- Si $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$ est la décomposition mentionnée dans la partie précédente, alors $D_A = D_A^+ \oplus D_A^-$ avec $D_A^\pm \colon \Gamma(\mathbf{S}^\pm) \to \Gamma(\mathbf{S}^\mp)$.

- Sous un changement de connexion sur $L$, disons $A' = A + i\alpha$, l'opérateur de Dirac se comporte comme suit :

$$D_{A'} = D_{A+i\alpha} = D_A + \frac{i}{2}\alpha \cdot ()$$

où $\cdot$ correspond à la multiplication de Clifford par une forme différentielle.

- Si on note $\kappa$ la courbure scalaire de la variété riemannienne $(X\,, g)$ et $F_A$ la forme de courbure associée au fibré déterminant de la structure $Spin^{\mathbb{C}}$ muni d'une connexion $A$, on obtient alors une formule qui se montrera utile plus tard (Weitzenböck) :

$$D_A^2\psi = (\nabla^A)^\star \nabla^A(\psi) + \frac{\kappa}{4}\psi + \frac{F_A}{2} \cdot \psi\,,$$

# Chapitre 3 : Les équations de Seiberg-Witten et les espaces de modules

## 3.1 : Faits généraux

Nous rentrons à présent dans le vif du sujet : les équations de Seiberg-Witten sur une 4-variété Riemannienne compacte sans bord et orientée.

Dans le cadre que l'on s'est fixé pour cette partie, il est clair par ce qui précède que notre 4-variété $X$ admet une structure $Spin^{\mathbb{C}}$, notons-la $\tilde{P}$, associée au fibré des repères $P \to X$. On note également $L$ le fibré déterminant de $\tilde{P}$. On rappelle que la structure Hermitienne des fibrés spinoriels $\mathbf{S}^{\pm}(\tilde{P})$ induit une structure hermitienne sur $L$. Pour une connection $A$ sur $L$ et un champ spinoriel $\psi \in \Gamma(\mathbf{S}^{+}(\tilde{P}))$, les équations de Seiberg-Witten prennent la forme :

$$
\begin{aligned}
&F_A^+ = q(\psi) := \psi \otimes \psi^\star - \frac{|\psi|^2}{2} Id \\
&D_A(\psi) = D_A^+(\psi) = 0
\end{aligned}
$$

où $F_A^+$ est la partie auto-duale (cf appendix théorie de Hodge) de la 2-forme de connexion associée à $A$. Il est intéressant de noter qu'on peut voir $q(\psi)$ comme un élément de $\Omega^2(X; i\mathbb{R})$. En effet, puisque l'on peut identifier l'algèbre réelle de Clifford de $\mathbb{R}^4$ avec le matrices complexes $2 \times 2$ de la forme

$$
\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}
$$

alors un éléments $\lambda$ de $End_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^{+}(\tilde{P}))$ est également un élément de l'algèbre réelle de Clifford s'il satisfait les conditions suivantes : $Tr(\lambda) \in \mathbb{R}$, et $\lambda^\star + \lambda = Tr(\lambda) Id$. Comme $Tr(q(\psi)) = 0$ et $q(\psi) = q(\psi)^\star$, le résultat est clair.

On s'intéresse alors à l'espace des $L_2^2$-configurations de ces équations, c'est-à-dire l'espace

$$
C(\tilde{P}) := \mathcal{A}_{L_2^2}(det(\tilde{P})) \times L_2^2(\mathbf{S}^{+}(\tilde{P}))\,,
$$

où $\mathcal{A}_{L_2^2}(L)$ est l'ensemble des $L_2^2$-connexions hermitiennes unitaires sur le fibré déterminant $L$, et où $L_k^2(V)$ est l'espace des $L_k^2$-sections de V (cf [3] pour les définitions détaillées des Sobolev dans ce cadre).

On introduit alors l'application de Seiberg-Witten :

$$SW : \left\{ \begin{array}{l} C(\tilde{P}) \to L^2_1((\Lambda^2_+ T^\star X \otimes i\mathbb{R}) \oplus \mathbf{S}^-(\tilde{P})) \\ (A\,,\psi) \mapsto (F^+_A - q(\psi)\,, D^+_A(\psi)) \end{array} \right.$$

L'introduction de cette application nous permet alors d'envisager les solutions des équations de Seiberg-Witten comme les éléments de l'image réciproque $SW^{-1}(0)$. Un des soucis majeurs de cette application est qu'elle n'est pas injective. En effet, le groupe de jauge $\mathcal{G}(L)$ défini précédemment (qui est de dimension infinie...) agit sur $C(\tilde{P})$ de la façon suivante :

$$f \cdot (A\,,\psi) = (f^\star(A) = A + 2\frac{df}{f}\,,\frac{\psi}{f})\,.$$

On a vu que

$$\nabla^{f^\star(A)}_X \psi - \nabla^A_X \psi = 2\frac{df(X)}{f} \cdot \psi\,,$$

ce qui fournit l'égalité suivantes pour les opérateurs de Dirac $D_A$ et $D_{f^\star(A)}$ :

$$D_{f^\star(A)} - D_A = \frac{1}{f} grad(f) \cdot \psi\,.$$

Ce qui nous conduit à :

$$\begin{aligned} D_{f^\star(A)}(\frac{\psi}{f}) &= D_A(\frac{\psi}{f}) + \frac{1}{f} grad(f) \cdot (\frac{\psi}{f}) \\ &= \frac{1}{f} D_A(\psi) - \frac{1}{f^2} grad(f) \cdot \psi + \frac{1}{f^2} grad(f) \cdot \psi \\ &= \frac{1}{f} D_A(\psi)\,. \end{aligned}$$

Dès lors, si $(A\,,\psi)$ est une solution des équations de Seiberg-Witten, alors il en est de même pour $(f^\star(A)\,,\frac{\psi}{f})$. Les équations de Seiberg-Witten sont donc jauge-invariantes.

## 3.2 : Compacité de l'espace des modules

L'invariance par transformation de jauge fait donc transparaître que $SW^{-1}(0)$ n'est pas compact pour des topologies raisonnables. On considère alors son quotient par le groupe de jauge :

$$\mathfrak{M}_L := SW^{-1}(0)/\mathcal{G}(L)\,.$$

On souhaiterait montrer que cet espace est compact pour la topologie $L^2$. Pour ce faire, on commence par établir une $C^0$-majoration pour les spineurs positifs solutions aux équations de Seiberg-Witten. Notons $\kappa$ la courbure scalaire de notre 4-variété riemannienne compacte $(X\,,g)$. S'il existe un $x_{max} \in X$ pour lequel $x \mapsto |\psi(x)|^2$ atteint son maximum, on doit avoir $\Delta|\psi(x_{max})|^2 \geq 0$. Parallèlement, en rappelant que pour un spineur positif on a $F_A \cdot \psi = F_A^+ \cdot \psi$, on voit que :

$$\begin{aligned}
\Delta|\psi|^2 &= 2\langle(\nabla^A)^\star\nabla^A\psi\,,\psi\rangle - 2\langle\nabla^A\psi\,,\nabla^A\psi\rangle \leq 2\langle(\nabla^A)^\star\nabla^A\psi\,,\psi\rangle \\
&= 2(\langle-\frac{\kappa}{4}\psi\,,\psi\rangle - \frac{1}{2}\langle F_A\psi\,,\psi\rangle) = -\frac{\kappa}{2}|\psi|^2 - \langle F_A^+\psi\,,\psi\rangle \\
&= -\frac{\kappa}{2}|\psi|^2 - \langle q(\psi)\psi\,,\psi\rangle = -\frac{\kappa}{2}|\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4\,.
\end{aligned}$$

Dès lors, si $|\psi(x_{max})|^2 > 0$, alors $0 \leq -\frac{\kappa(x_{max})}{2} - \frac{1}{2}|\psi(x_{max})|^2$, d'où

$$|\psi(x_{max})|^2 \leq \kappa_X^-\,,$$

où $\kappa_X^- := max(\{-\kappa(x) \mid x \in X\} \cup \{0\})$, ce qui conclut.

Ensuite, on développe quelques autres inégalités pour les solutions des équations de Seiberg-Witten.

**Proposition.**

- $|F_A^+ = q(\psi)| \leq \frac{\kappa_X^-}{2}$
- $\|F_A^+\|_{L^2}^2 \leq \frac{(\kappa_X^-)^2}{4} vol(X)$
- $\|\nabla^A(\psi)\|_{L^2}^2 \leq \frac{(\kappa_X^-)^2}{4} vol(X)$

*Remarque.* La dernière inégalité provient de la formule de Weitzenböck appliquée à une solution :

$$0 = (D_A^+)^2(\psi) = (\nabla^A)^\star \nabla^A(\psi) + \frac{\kappa}{4}\psi + \frac{|\psi|^2}{4} ,$$

dont on prend le produit $L^2$ avec $\psi$ :

$$\|\nabla^A(\psi)\|^2_{L^2} + \frac{\langle \kappa\psi , \psi\rangle_{L^2}}{4} + \frac{\|\psi\|^4_{L^4}}{4} .$$

On montre alors que toute solution aux équations de Seiberg-Witten est jauge-équivalente à une solution lisse.

*Démonstration.* L'outil principal de ce raisonnement est la technique d'"eliptic bootstapping". On fixe une connexion $A_0$ sur $L$, et on suppose que $(B , \phi)$ est une solution des équations de Seiberg-Witten. On sait qu'il existe une 1-forme à valeurs réelles $b$ telle que $ib = B - A_0 \in L^2_2(T^\star X)$. En utilisant la décomposition de Hodge de $\Omega^1(X)$, on peut écrire :

$$b = b_0 + df + d^\star\beta ,$$

où $b_0$ est la partie harmonique de $b$, $f \in L^2_3(X)$ et $\beta \in L^2_3(\Lambda^2 T^\star X)$.

On définit alors $\gamma := \exp(\frac{i}{2}f)$, puis

$$(A , \psi) := \gamma \cdot (B , \phi) = (A_0 + ia , \exp(\frac{-i}{2}f)\phi) ,$$

où $a = b_0 + d^\star\beta$. On note que $d^\star a = 0$. On peut alors réécrire les équations de Seiberg-Witten (stables par transformation de jauge) en utilisant la règle de transformation de l'opérateur de Dirac :

$$\begin{cases} D^+_{A_0}(\psi) = -\frac{i}{2}a \cdot \psi \\ i(da)^+ = q(\psi) - F^+_{A_0} \end{cases}$$

On note qu'initialement on a : $a,\psi \in L^2_2$. Cela implique donc, d'après les théorèmes de plongement de Sobolev, que $a,\psi \in L^p$ pour tout $p \in ]1,\infty[$. Cela implique que $a\cdot\psi \in L^p$ pour tout $p \in ]1,\infty[$, puis, par la première équation ci-dessus, que $D^+_{A_0}\psi \in L^p$ pour tout $p \in ]1,\infty[$. Il suit que $\psi \in L^p_1$ pour tout $p \in ]1,\infty[$. Grâce aux inégalités de Hölder et de Sobolev, on en déduit alors que $q(\psi) \in L^p_1$ pour tout $p \in ]1,\infty[$. En utilisant alors l'ellipticité de l'opérateur $d^+ + d^\star \colon \Omega^1(X) \to \Omega^2_+(X) \oplus \Omega^0(X)$, et en combinant la seconde équation ci-dessus avec la relation $d^\star a = 0$, on obtient :

$$\forall\, p \in ]1,\infty[,\ (d^+ + d^\star)a \in L^p_1 .$$

En invoquant les résultats de régularité elliptique pour l'opérateur $d^+ + d^\star$, on obtient $a \in L_2^4$, ce qui implique immédiatement :

$$\forall\, p \in ]1{,}\infty[,\ \frac{i}{2} a \cdot \psi = D^+_{A_0}(\psi) \in L_1^p\,,$$

et donc

$$\forall\, p \in ]1{,}\infty[,\ \psi \in L_2^p\,.$$

Il ne reste plus alors qu'à réitérer l'argument à l'infini. □

Nous sommes alors en mesure de prouver notre résultat de $L^2$-compacité.

*Démonstration.* Soit $K_L = K = \{\omega \in \Lambda^2(X) \mid d\omega = 0,\ [\omega]_{dR} = c_1(L)\}$ (où $c_1(L)$ est la première classe de Chern du fibré $L$). Soit $\omega_{harm}$ l'unique forme harmonique dans $K$ (son existence et son unicité proviennent de la théorie de Hodge). Étant donné que la forme de courbure $F_A$ est invariante par transformation de jauge, on peut définir l'application :

$$P\colon \mathfrak{M}_L \to K,\ [A\,,\psi] \mapsto F_A\,.$$

1. Montrons que $P(\mathfrak{M}_L) \subset K$ est un sous-ensemble compact pour la toplogie $L^2$.
   Supposons que $(A\,,\psi) \in SW^{-1}(0)$. On commence par écrire la forme de courbure différemment selon la théorie de Hodge :

   $$F_A = F_A^+ + F_A^- = \omega_{harm} + d\eta\,,$$

   où $\eta$ est une 1-forme que l'on choisit dans le complémentaire orthogonal de $im(d^0) \oplus \mathcal{H}^1$ dans $\Gamma(\Lambda^1)$ (où $d^0 = d\colon \Lambda^0 \to \Lambda^1$, et $\mathcal{H}^k$ est l'ensemble des $k$-formes harmoniques). On cherche alors à majorer $\nabla^A\psi$ en norme $L^2$. On rappelle que l'on a :

   $$\Delta|\psi|^2 = 2\langle(\nabla^A)^\star\nabla^A\psi\,,\psi\rangle - 2\langle\nabla^A\psi\,,\nabla^A\psi\rangle$$

   et

   $$\int_X \Delta|\psi|^2 = 0\,.$$

   On obtient alors une $L^2$-majoration pour $\nabla^A$ :

   $$\begin{aligned}\|\nabla^A\psi\|^2_{L^2} &= \int_X \left(-\frac{\kappa}{2}|\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4\right)\\ &\leq \int_X \left(-\frac{\kappa}{2}\right)|\psi|^2 \leq \int_{\kappa<0}\left(-\frac{\kappa}{2}\right)|\psi|^2\\ &\leq \int_{\kappa<0}\left(-\frac{\kappa}{2}(\kappa_X^-)\right) =: C_1(\kappa) = C_1\,.\end{aligned}$$

De plus,

$$d^\star F_A^+ = -\star d \star (F_A + \star F_A) = -\star d \star F_A = d^\star F_A\,,$$
$$d^\star F_A^- = -\star d \star (F_A - \star F_A) = -\star d \star F_A = d^\star F_A\,,$$

d'où : $d^\star F_A = 2d^\star F_A^+ = 2d^\star q(\psi)$. On peut alors calculer $2d^\star q(\psi)$ :

$$2d^\star q(\psi) = -2(\langle \psi\,, \nabla^A \psi\rangle - \langle \nabla^A \psi\,, \psi\rangle)\,,$$

ce qui, par les majorations établies précédemment, conduit à :

$$\|d^\star F_A\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C}_2 \|\psi\|_{L^2}^2 \|\nabla^A \psi\|_{L^2}^2 \leq C_2\,.$$

Dès lors, étant donné que $F_A = \omega_{harm} + d\eta$, on a : $\|d^\star d\eta\|_{L^2}^2 \leq C_2$. Et comme $\eta$ a été choisie dans le complémentaire orthogonal de $im(d^0)$ (i.e. $d^\star \eta = 0$), on obtient : $\|\Delta\|_{L^2}^2 \leq C_2$. Le spectre de $\Delta$ étant discret et $\eta$ étant également élément du complémentaire orthogonal à $\mathcal{H}^1$, on a aussi : $\|\eta\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C}_3 \|\Delta\eta\|_{L^2}^2$. Donc, pour résumer :

$$\|\eta\|_{L^2}^2 \leq C_3\,, \text{ et } \|\Delta\eta\|_{L^2}^2 \leq C_2\,.$$

Cela signifie donc que l'ensemble de telles 1-formes $\eta$ est borné dans l'espace de Sobolev $H^2_{sob}(\Lambda^1(X))$. On utilise alors la continuité de l'application

$$d\colon H^2_{sob}(\Lambda^1(X)) \to H^1_{sob}(\Lambda^2(X))$$

pour justifier que l'ensemble des $d\eta$ (i.e. l'ensemble des $F_A$ dans l'image de $P\colon \mathfrak{M}_L \to K$) est borné dans $H^1_{sob}(\Lambda^2(X))$, et on achève ce point de démonstration en utilisant le théorème de Rellich qui stipule que l'application

$$H^1_{sob}(\Lambda^2(X)) \to L^2(\Lambda^2(X))$$

est un plongement compact, ce qui nous donne bien que $P(\mathfrak{M}_L) \subset K$ est un sous-ensemble compact pour la $L^2$-topologie.

2. On introduit l'application $\bar{P}\colon \mathfrak{M}_L \to \mathcal{A}(det(\tilde{P}))/\mathcal{G}(\tilde{P})$, $[A\,,\psi] \mapsto [A]$, et on utilise le théorème de Weyl pour justifier que $\bar{P}(\mathfrak{M}_L) \subset \mathcal{A}(det(\tilde{P}))/\mathcal{G}(\tilde{P})$ est un sous-ensemble compact.

   Ce dernier fournit que l'application
   $$\mathcal{A}(det(\tilde{P})) \to K,\, A \mapsto F_A$$
   est un fibration avec fibres compactes $Pic(X) = H^1(X;\mathbb{R})/H^1(X;\mathbb{Z})$. Et puisque le diagramme suivant commute :
   $$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}_L \arrow[rr, "\bar{P}"] \arrow[dr, "P"'] & & \mathcal{A}(det(\tilde{P}))/\mathcal{G}(\tilde{P}) \arrow[dl] \\ & K & \end{tikzcd}$$
   alors le fait que l'inclusion $P(\mathfrak{M}_L) \subset K$ soit compacte implique que $\bar{P}(\mathfrak{M}_L) \subset \mathcal{A}(det(\tilde{P}))/\mathcal{G}(\tilde{P})$ l'est également.

3. Il ne reste plus qu'à voir que $\mathfrak{M}_L$ est $L^2$-compact. Mais cela est quasiment immédiat par la théorie des espaces de Hilbert. En effet, pour un élément $[A] \in \mathcal{A}(det(\tilde{P}))/\mathcal{G}(\tilde{P})$ fixé, la préimage $\bar{P}^{-1}([A]) \subset \mathfrak{M}_L$ consiste en les solutions du problème
   $$\begin{cases} D_A\psi = 0 \\ max\{|\psi(x)| \mid x \in X\} \leq \kappa_X^- \end{cases}$$
   ce qui correspond à une boule fermée et bornée dans un espace vectoriel de dimension fini.

$\square$

## 3.3 : Résultats de lissité

On commence par expliquer pourquoi le quotient $\mathcal{B}(\tilde{P}) := C(\tilde{P})/\mathcal{G}(L)$ contient une variété hilbertienne.
On dit qu'une configuration $(A\,,\psi)$ est réductible lorsque $\psi = 0$ et irréductible sinon. Dès lors, le complémentaire de l'ensemble des classes d'équivalences des configurations réductibles sous l'action du groupe de jauge, noté $\mathcal{B}^{\star}(\tilde{P})$, est une variété hilbertienne. Ce fait provient de la propriété essentielle liée à l'action du groupe $\mathcal{G}(L)$ suivante :

**Proposition.** *Pour tout $(A\,,\psi) \in C(\tilde{P})$, il existe un voisinage ouvert de $(A\,,\psi)$ dans $C(\tilde{P})$ ainsi qu'une sous-variété hilbertienne fermée $S$ plongée $C^{\infty}$-ment dans cet ouvert et invariante sous l'action du stabilisateur de $(A\,,\psi)$ de sorte que l'application*

$$S \times_{Stab(A\,,\psi)} \mathcal{G}(L) \to C(\tilde{P})$$

*soit un difféomorphisme sur un voisinage de l'orbite de $(A\,,\psi)$. On dit que l'action de $\mathcal{G}(L)$ sur $C(\tilde{P})$ admet des tranches locales.*

On s'intéresse alors à la lissité de l'espace de modules des équations de Seiberg-Witten. Tout comme pour la compacité, il y a une obstruction à ce qu'il soit une variété lisse. En fait, il devient nécessaire de considérer les espaces des modules des équations de Seiberg-Witten perturbées $\mathfrak{M}(\tilde{P},h)$, où la perturbation, qui se traduit par l'ajout d'une 2-forme auto-adjointe (au sens de Hodge) à valeurs imaginaires pures $ih \in \Omega^2_+(X; i\mathbb{R})$ dans l'équation de courbure, est vue tel un paramètre à faire varier dans l'application :

$$\underline{SW}\colon \begin{cases} C_4(\tilde{P}) \times L^2_3(\Lambda^2_+ T^{\star}X \otimes \mathbb{R}) \to L^2_3((\Lambda^2_+ T^{\star}X \otimes i\mathbb{R}) \oplus \mathbf{S}^-(\tilde{P})) \\ (A\,,\psi\,,h) \mapsto (F_A^+ - q(\psi) - ih\,, D_A(\psi)) \end{cases}$$

On remarque que l'on choisit $h$ dans $L^2_3$, cela provient de la nécessité d'obtenir des inégalités similaires à celles dérivées dans la partie précédente, et qu'on a remplacé $C(\tilde{P})$ par $C_4(\tilde{P})$, l'ensemble des $L^2_4$-configurations. Cela permet d'assurer que la théorie des opérateurs elliptiques (faisant fonctionner nos arguments de "bootstrapping") reste applicable. Ce faisant, nous feront agir à présent $\mathcal{G}_5(L)$, le groupe des $L^2_5$-transformations de jauge, au lieu de $\mathcal{G}(L)$ sur ces nouvelles équations.

Dans ce nouveau contexte, notre théorème central devient :

**Théorème.** *Soit $(X\,,g)$ une 4-variété Riemannienne vérifiant $b_2^+(X) > 0$. Alors, pour un choix générique de perturbation $h \in \Lambda_+^2 T^\star X$, on a, pour toute structure $Spin^{\mathbb{C}}$ $\tilde{P}$ sur $X$, que l'espace des modules $\mathfrak{M}(\tilde{P}, h)$ est une sous-variété compacte de $\mathcal{B}^\star(\tilde{P})$.*

On sépare les cas des solutions réductibles et irréductibles. On entame cette discution avec celui des solutions irréductibles.

**Lemme.** $\forall\,(A\,,\psi\,,h) \in \underline{SW}^{-1}(0)$, $\psi \neq 0 \implies D\underline{SW}_{(A\,,\psi\,,h)}$ *est surjective.*

*Démonstration.* On commence par détailler la différencielle en nous plaçant dans les hypothèses du lemme :

$$D\underline{SW}_{(A\,,\psi\,,h)} = \begin{pmatrix} d^+ & -Dq_\psi & -i \\ \cdot\frac{1}{2}\psi & D_A & 0 \end{pmatrix}$$

où $d^+$ est la composition entre l'opérateur $d$ et la projection sur la partie autoduale (théorie de Hodge), $\cdot$ est la multiplication de Clifford, et $Dq_\psi(\phi)$ est donnée par :

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} q(\psi + t\phi) = \psi \otimes \phi^\star + \phi \otimes \psi^\star - Re(\langle \psi\,, \phi \rangle) Id\,.$$

La restriction de cette différentielle à la composante $h$ réalise une surjection sur le premier facteur de l'image. On montre alors que la projection sur le second facteur de l'image de la restriction de la différentielle à l'espace tangent de $C_4(\tilde{P})$

$$\pi_2 \circ D\underline{SW}|_{L_4^2((T^\star X \otimes i\mathbb{R}) \oplus \mathbf{S}^+(\tilde{P}))}$$

est surjective. Cette composition coïncide avec l'application

$$G\colon (a\,, \eta) \mapsto D_A(\eta) + \frac{1}{2} a \cdot \psi\,.$$

Soit $\lambda \in L_3^2(\mathbf{S}^-(\tilde{P}))$. On cherche à montrer que le complémentaire orthogonal de l'image de $G$ est trivial, dès lors, supposons que $\lambda \in Im(G)^{\perp_{L^2}}$ et $\lambda \neq 0$. Notre première hypothèse nous fournit immédiatement que $\lambda \in Im(D_A)^{\perp_{L^2}}$, d'où, comme $D_A = D_A^\star$ :

$$\lambda \in Ker(D_A\colon \mathbf{S}^-(\tilde{P}) \to \mathbf{S}^+(\tilde{P}))$$

La regularité elliptique de l'opérateur de Dirac implique que $\lambda$ ne peut pas s'annuler sur un ouvert de $X$. Similairement, comme $\psi \in Ker(D_A)$ et $\psi \neq 0$, alors $\psi$ ne peut s'annuler sur aucun un ouvert de $X$. Maintenant, comme $\lambda$ et $\psi$ sont continue, on choisit une petite boule ouverte $U$ sur $X$ centrée en un point $x_0$ avec $\lambda(x_0) \neq 0 \neq \psi(x_0)$. On réduit alors la boule de sorte que $\lambda$ et $\psi$ sont presque constantes sur cette boule pour un certain système de coordonnées. Dès lors,

$$\exists\, a \in T^\star_{x_0}X \,/\, Re(\langle a \cdot \psi(x_0)\,,\lambda(x_0)\rangle) > 0\,.$$

En étendant $a$ sur $U$ via une trivialisation locale du fibré cotangent, on obtient :

$$a \in \Omega^1(U) \text{ telle que } \forall\, x \in U,\, Re(\langle a(x) \cdot \psi(x)\,,\lambda(x)\rangle) > 0\,.$$

Une fonction plateau lisse nous permet alors d'étendre $a$ à $X$ tout entier de sorte que

$$\int_X Re(\langle a(x) \cdot \psi(x)\,,\lambda(x)\rangle) dv_g > 0$$

Cela signifie que $\lambda$ n'est pas $L^2$-orthogonale à $G(2a,0)$, ce qui constitue une contradiction avec notre hypothèse. Dès lors, $Im(G)^{\perp_{L^2}}$ est trivial et donc $G$ est surjective. Ceci complète la preuve. $\square$

On obtient alors :

**Proposition.** *Soit $(X\,,g)$ une 4-variété Riemannienne fermée et orientée munie d'une structure Spin$^{\mathbb{C}}$ fixée $\tilde{P}$. Alors, l'espace des modules paramétré des solutions irréductibles*

$$\mathcal{PM}^\star(\tilde{P}) := \{([A\,,\psi]\,,h) \mid F_A^+ = q(\psi) + ih\,, D_A(\psi) = 0\} \subset \mathcal{B}^\star(\tilde{P}) \times L^2_3(\Lambda^2_+ T^\star X)$$

*est une sous-variété lisse.*

*Démonstration.* D'après notre précédent lemme, l'espace

$$\widetilde{\mathcal{PM}}^\star(\tilde{P}) := \{(A\,,\psi\,,h) \mid F_A^+ = q(\psi) + ih\,, D_A(\psi) = 0\} \subset C_4^\star(\tilde{P}) \times L^2_3(\Lambda^2_+ T^\star X)\,,$$

où $C_4^\star(\tilde{P})$ est l'ensemble des $L^2_4$-configurations irréductibles, est une sous-variété lisse. En quotientant par l'action du groupe $\mathcal{G}_5(L)$ (qui est libre puisque l'on se restreint aux solutions irréductibles), on obtient bien une nouvelle fois une sous-variété lisse. $\square$

Puis, en utilisant le petit théorème de Sard (cf [3], p.101) : on obtient que pour un choix générique $h \in \Lambda^2_+ T^\star X$, l'espace $\mathfrak{M}^\star(\tilde{P},h)$ est une sous-variété lisse de $\mathcal{B}^\star_4(\tilde{P})$.

On discute alors du cas des solutions réductibles. C'est maintenant que l'hypothèse $b_2^+(X) > 0$ se revèle primordiale.

**Proposition.** *Supposons que $b_2^+(X) > 0$. On fixe alors la structure $Spin^{\mathbb{C}}$ de sorte que la première classe de Chern associée à son fibré déterminant ne soit pas torsion. Alors, pour une métrique générique sur $X$, les équations de Seiberg-Witten n'admettent aucune solution réductible.*
*De plus, pour toute structure $Spin^{\mathbb{C}}$, s'il n'y a aucune solution réductible aux équations de Seiberg-Witten, alors pour toute perturbation suffisamment petite, il n'y a pas de solution réductible aux équations perturbées, et pour toute métrique et pour une perturbation générique, il n'existe pas de solution réductible.*

*Démonstration.* Une solution réductible aux équations de Seiberg-Witten n'est rien d'autre que la donnée d'une connexion anti-auto-duale sur le fibré déterminant de la structure $Spin^{\mathbb{C}}$ et un champ spinoriel identiquement nul. Toute connexion anti-auto-duale possède une courbure qui correspond à une 2-forme harmonique dont la classe de cohomologie associée vaut $\frac{2\pi}{i}c_1(L)$. Pour que cette forme soit anti-auto-duale, il est nécessaire qu'elle soit orthogonale à l'ensemble des 2-formes harmoniques auto-duales. D'après un argument trouvable dans [5] p.91, si $c_1(L) \in H^2(X;\mathbb{R})$ est non nulle, alors cette condition se traduit en une condition fermée sur la $b_2^+(X)$-codimension de l'espace des métriques riemanniennes sur $X$.
Pour n'importe quelle métrique, une solution réductible aux équations de Seiberg-Witten vérifie

$$F_A^+ = ih\,.$$

Si la projection orthogonale de $h$ sur les 2-formes harmoniques auto-duales ne vaut pas la projection de $2\pi c_1(L)$ sur l'espace des 2-formes harmoniques auto-duales, alors il n'existe aucune solution vérifiant l'équation $F_A^+ = ih$. Les deux dernières assertions sont alors immédiates. $\square$

On obtient donc naturellement notre résultat dans le cas réductible (puisqu'il n'y a pas de telles solutions...) :

**Corollaire.** *Soit $(X\,, g)$ une 4-variété Riemannienne lisse, fermée et orientée, avec $b_2^+(X) > 0$. Alors, pour un choix générique $h \in \Lambda_+^2 T^\star X \otimes \mathbb{R}$, l'espace des modules $\mathfrak{M}(\tilde{P},h)$ des équations perturbées de Seiberg-Witten est une sous-variété lisse de $\mathcal{B}^\star(\tilde{P})$.*

*Remarque.* On peut de nouveau montrer que cet espace des modules est compact. La démonstration étant très similaire à celle du cas sans perturbation, on esquisse simplement l'idée.
On possède l'équation suivante dans le cas perturbé :

$$0 = (\nabla^A)^\star \nabla^A(\psi) + \frac{\kappa}{4}\psi + \frac{|\psi|^2}{4}\psi + ih \cdot \psi\,.$$

On peut alors prendre le produit hermitien avec $\psi$, et on évalue l'expression en une valeur maximale $x_0$ de $|\psi|$ :

$$0 \geq \frac{\kappa(x_0)}{4}|\psi(x_0)|^2 + \frac{|\psi(x_0)|^4}{4} + Re(\langle ih(x_0) \cdot \psi(x_0)\,, \psi(x_0)\rangle)\,.$$

la norme du dernier terme de cette expression vaut au plus $|h(x_0)||\psi(x_0)|^2$ . Donc, soit $\psi(x_0) = 0$, auquel cas $\psi$ est identiquement nulle, soit

$$0 \geq \frac{\kappa(x_0)}{4} + \frac{|\psi(x_0)|^2}{4} - |h(x_0)|\,.$$

Si $\psi$ n'est pas identiquement nulle, cela implique que

$$|\psi(x_0)|^2 \leq 4|h(x_0)| - \kappa(x_0)\,.$$

D'où la borne $C^0$ pour les solutions des équations perturbées :

$$|\psi(x)|^2 \leq max(max\{4|h(y)| - \kappa(y) \mid y \in X\}\,, 0)\,.$$

On obtient également une nouvelle borne $L^2$ pour $\nabla^A(\psi)$ en prenant le produit scalaire $L^2$ avec $\psi$ dans l'équation ci-dessus :

$$\|\nabla^A(\psi)\|^2_{L^2} + \frac{\kappa}{4}\|\psi\|^2_{L^2} + \|\psi\|^4_{L^4} + \langle ih\psi\,, \psi\rangle_{L^2} = 0\,,$$

on obtient bien la majoration désirée car $\kappa$, $\psi$ et $h$ sont bornées. On procède alors par "bootstrapping" pour montrer que les solutions sont bornées dans $L^2_l$ pour tout $l$, et donc que l'espaces des modules des équations perturbées est compact.

On obtient alors un corollaire via la théorie des opérateurs de Fredholm (on renvoie à [3] pour les détails) :

**Corollaire.** *Supposons que $b_2^+(X) > 0$. On fixe une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ sur $X$, que l'on note $\tilde{P}$. Alors, il existe un ouvert dense $U(\tilde{P}) \subset L^2_3(\Lambda^2_+ T^\star X \otimes \mathbb{R})$ tel que pour tout $h \in U(\tilde{P})$, l'espace des modules des équations perturbées $\mathfrak{M}(\tilde{P}, h)$ possède uniquement des solutions irréductibles et constitue une sous-variété lisse compacte de $\mathcal{B}^\star(\tilde{P})$.*

On achève cette discution sur la lissité en esquissant la preuve de notre théorème directeur (p.33) :

*Démonstration.* Soit $\tilde{P}$, une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ sur $X$ fixée. On considère $U^{\infty}(\tilde{P})$, l'intersection de l'ouvert $U(\tilde{P}) \subset L^2_3(\Lambda^2_+ T^\star X \otimes \mathbb{R})$, donné par le corollaire précédent, avec l'espace des formes lisses. Le corollaire nous fournit alors que $U^{\infty}(\tilde{P})$ est un ouvert dense de l'ensemble des 2-formes lisses auto-duales sur $X$, et la conclusion de notre théorème tient pour $\tilde{P}$ et tout $h \in U^{\infty}(\tilde{P})$.
Soit alors $U^{\infty}$ l'intersection prise sur l'ensemble des structures $Spin^{\mathbb{C}}$ $\tilde{P}$ de tous les $U^{\infty}(\tilde{P})$. Il peut être montré qu'il n'existe qu'un nombre fini à isomorphisme près de structures $Spin^{\mathbb{C}}$ différentes pour lesquelles la dimension formelle de l'espace de modules est positive et ce dernier est non-vide (cf remarque suivante) ; et comme $U^{\infty}(\tilde{P})$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de $\tilde{P}$, alors $U^{\infty}$ est un $G_\delta$-dense sous-espace de l'ensemble des 2-formes lisses auto-duales. La conclusion de notre théorème est donc valable pour tout $h \in U^{\infty}$. □

*Remarque.* On détaille un peu le résultat utilisé plus haut sur le nombre de structures $Spin^{\mathbb{C}}$ à isomorphisme près. Si $(A\,,\psi)$ est une solution des équations de Seiberg-Witten (standards) en laquelle la dimension formelle est positive, i.e.

$$c_1(L)^2 - (2\chi(X) + 3\sigma(X)) \geq 0\,,$$

où : $c_1(L)$ est la première classe de Chern du fibré déterminant $L$ ; la notation $c_1(L)^2$ signifie que l'on considère l'image par la forme d'intersection de $c_1(L)$ avec elle-même ; $\chi(X)$ est la charactéristique d'Euler de $X$ ; $\sigma(X)$ est la signature de $X$. Cette formule trouve son origine dans le complexe elliptique suivant :

$$L^2_3(X; i\mathbb{R}) \xrightarrow{(2d\,,\,-(\cdot)\psi)} L^2_2((T^\star X \otimes i\mathbb{R}) \oplus \mathbf{S}^+(\tilde{P})) \xrightarrow{DSW_{(A\,,\,\psi)}} L^1_2((\Lambda^2_+ T^\star X \otimes i\mathbb{R}) \oplus \mathbf{S}^-(\tilde{P}))$$

qui se décompose en deux sous-complexes elliptiques plus petits d'où on extirpe (au moyen du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer) cette "dimension formelle" (pour plus de précisions voir [1] p.65). Par construction de la première classe de Chern, on a $c_1(L)^2 = \frac{1}{4\pi^2}(\|F_A^+\|^2_{L^2_2} - \|F_A^-\|^2_{L^2_2})$. Dès lors, l'hypothèse de positivité de la dimension formelle implique que la classe de cohomologie représentée par la forme $\frac{i}{2\pi}F_A$ appartient à un compact dans $H^2(X;\mathbb{R})$. Puisque cette classe doit être dans le cohomologie à valeurs entières, il n'y a donc qu'un nombre fini de possibilité pour le choix de $c_1(L)$. Et comme il n'y a qu'un nombre fini de structures $Spin^{\mathbb{C}}$ à isomorphisme près ayant une certaine première classe de Chern fixée, le résultat suit.

## 3.4 : Invariant de Seiberg-Witten

*Remarque.*

1. Il est possible d'orienter l'espace des modules en choisissant une orientation pour $H^0(X;\mathbb{R})$, $H^1(X;\mathbb{R})$, et $\mathcal{H}^2_+(X;\mathbb{R})$ (cf [1] p.95-98).
2. On a vu que l'on pouvait identifier $\mathcal{G}(L)$ avec $(\mathbb{S}^1)^X$ (l'espace des applications du cercle à valeurs dans $X$). Parallèlement, on note que $C^\star(\tilde{P})$ est un ouvert contractile de l'espace affine contractile $C(\tilde{P})$ sur lequel l'action $(\mathbb{S}^1)^X \circlearrowright C^\star(\tilde{P})$ est libre avec tranches locales. Dès lors, l'espace $\mathcal{B}^\star(\tilde{P})$ classifie le groupe $(\mathbb{S}^1)^X$. Par suite, il existe un $\mathbb{S}^1$-fibré principal universel au-dessus de $\mathcal{B}^\star(\tilde{P})$ dont la première classe de Chern est le générateur de $H^2(\mathcal{B}^\star(\tilde{P});\mathbb{Z})$. Si on fixe un point base $x \in X$, et si on note $\mathcal{G}^0(L)$ le sous-groupe de $\mathcal{G}(L)$ constitué des transformations de jauge qui stabilisent la fibre au-dessus de $x$, alors
$$\mathcal{B}^0(\tilde{P}) := C^\star(\tilde{P})/\mathcal{G}^0(L)$$
est l'espace total du fibré universel en cercle au-dessus de $\mathcal{B}^\star(\tilde{P})$.

### Cas $b_2^+(X) > 1$

On suppose que $(X\,,g)$ est une 4-variété Riemannienne munie d'une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ $\tilde{P}$ avec $b_2^+(X) > 1$. On fixe une orientation sur $H^1(X;\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{H}^2_+(X;\mathbb{R})$ de sorte d'en obtenir une sur $\mathfrak{M}(\tilde{P},h)$ pour un choix générique $h \in \Lambda^2_+T^\star X$. Soit $\mu \in H^2(\mathcal{B}^\star(\tilde{P});\mathbb{Z})$, la première classe de Chern du fibré universel en cercle (cf deuxième point de la remarque précédente). On définit l'invariant de Seiberg-Witten dans ce cas comme suit :
$$\mathbf{sw}(\tilde{P}) := \begin{cases} \int_{\mathfrak{M}(\tilde{P},h)} \mu^d \text{ si la dimension formelle est paire et vaut } 2d \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

*Remarque.*

1. La parité de la dimension formelle $d(L) = \frac{c_1(L)^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X)}{4}$ coïncide avec celle du nombre $b_1(X) - b_2^+(X) - 1$.
2. $\mathbf{sw}(\tilde{P})$ ne dépend pas du représentant choisi dans la classe d'isomorphisme de $\tilde{P}$ en tant que structure $Spin^{\mathbb{C}}$. On obtient donc une application :
$$\mathbf{sw}\colon S(X) \to \mathbb{Z},\, \tilde{P} \mapsto SW(\tilde{P})\,,$$
où $S(X)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes des structures $Spin^{\mathbb{C}}$ de $X$. Elle est bien définie, est un invariant, et est identiquement nulle sauf en un nombre fini d'éléments de $S(X)$.

3. L'hypothèse $b_2^+(X) > 1$ permet de rendre $\mathbf{sw}(\tilde{P})$ indépendant des choix de la métrique $g$ et de la perturbation $h$ (cf [1] et [3]).

## Cas $b_2^+(X) = 1$

On procède comme pour le cas $b_2^+(X) > 1$ avec une difficulté supplémentaire : il existe une sous-variété de l'espace des métriques Riemanniennes sur $X$ (que l'on notera $Met(X)$) de codimension 1 dont les éléments admettent des solutions réductibles aux équations de Seiberg-Witten. On commence par un lemme :

**Lemme.** *Soit $g \in Met(X)$ un choix de métrique générique. Alors, pour toute structure $Spin^{\mathbb{C}}$, il existe une solution réductible $[A\,,0]$ aux équations de Seiberg-Witten si et seulement s'il existe une 2-forme harmonique auto-duale orthogonale au sens du produit cup à la première classe de Chern de fibré en cercle associé à la structure $Spin^{\mathbb{C}}$.*

*Démonstration.* On sait qu'il existe une solution réductible aux équations de Seiberg-Witten si et seulement s'il existe une connexion anti-auto-duale sur $L$ (le fibré en droites complexes associé à $\tilde{P}$). La courbure d'une telle connexion est donc une 2-forme harmonique anti-auto-duale. Une telle 2-forme existe si et seulement si $c_1(L)$ est orthogonale sous le produit cup à l'espace des 2-formes harmoniques auto-duales. Cet espace étant de dimension 1, le résultat suit. □

On a donc également la contraposée suivante : s'il existe une 2-forme $g$-auto-duale non nulle et non orthogonale à $c_1(L)$, alors il n'existe aucune solution réductible aux équations de Seiberg-Witten. Dès lors, pour une perturbation générique suffisamment petite $h$, $\mathfrak{M}(\tilde{P},h)$ sera une variété lisse compacte. On peut alors définir l'invariant de Seiberg-Witten comme précédement (attension, cette fois il dépend complètement du choix de la métrique) :

$$\mathbf{sw}_g(\tilde{P}) = \begin{cases} \int_{\mathfrak{M}(\tilde{P},h)} \mu^{d/2} \text{ si } dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}^\star(\tilde{P})) \in 2\mathbb{N} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

On a ainsi un invariant sur $X \times E$, où $E$ est la composante connexe du sous-espace de $Met(X)$ contenant les métriques Riemanniennes admettant une 2-formes harmoniques auto-duales non-orthogonales à $c_1(L)$. On peut alors montrer que lorsque $H_1(X;\mathbb{R}) = 0$, la valeur de l'invariant ne dépend plus que du signe de l'évaluation de la 2-forme d'intersection entre un élément de $E$ et $c_1(L)$. Cela signifie que pour chaque métrique fixée $g$, il n'existe que 2-valeurs possibles pour $\mathbf{sw}_g(\tilde{P})$.

*Remarque.* On peut en fait établir une formule entre ces deux valeurs. Pour ce faire on note que l'application

$$\begin{cases} Met(X) \to P(H^2(X;\mathbb{R})) \\ g \mapsto \Lambda^2_{+_g} T^\star X \end{cases}$$

où $P(H^2(X;\mathbb{R}))$ est l'ensemble des lignes dans $H^2(X;\mathbb{R})$, est une submersion. En fixant une orientation sur $\mathcal{H}^2_+(X;\mathbb{R})$, on obtient alors, pour toute métrique sans solution réductible aux équations de Seiberg-Witten, l'existence d'une unique 2-forme harmonique auto-duale de norme 1 dans la composante positive de $\mathcal{H}^2_+(X;\mathbb{R})$. On la note $\omega^+(g)$. Dans ce cadre, on obtient alors le théorème suivant :

*Théorème. Soit $X$ une 4-variété lisse, fermée, et orientée, telle que $b_2^+(X) = 1$ et $H_1(X;\mathbb{R}) = 0$. On fixe une structure Spin$^{\mathbb{C}}$ $\tilde{P} \to X$ telle que $c_1(L) \neq 0$, et une orientation sur $\mathcal{H}^2_+(X;\mathbb{R})$. On pose également :*

$$\mathcal{R}_\pm := \{g \in Met(X) \mid \pm\,\omega^+(g) \cdot c_1(L) > 0\}\,.$$

*Alors, pour toute métrique $g \in \mathcal{R}' := \mathcal{R}_+ \amalg \mathcal{R}_-$, $\boldsymbol{sw}_g(\tilde{P})$ est bien défini. De plus,*

$$\boldsymbol{sw}|_{\mathcal{R}'}(\tilde{P})\colon \mathcal{R}' \to \mathbb{Z},\, g \mapsto \boldsymbol{sw}_g(\tilde{P})$$

*est constante sur $\mathcal{R}_+$ et sur $\mathcal{R}_-$, on note $\boldsymbol{sw}_\pm(\tilde{P})$ dans ce cas. Dès que la dimension formelle de l'espace des modules $\mathfrak{M}(\tilde{P})$ est paire, on a également la formule suivante :*

$$\boldsymbol{sw}_+(\tilde{P}) = \boldsymbol{sw}_-(\tilde{P}) - (-1)^{d/2}\,.$$

La preuve de ce résultat repose sur un argument de transversalité ainsi que sur des résultats issus du caractère elliptique de certains opérateurs, dont l'opérateur de Dirac (cf [1] p.108).

## 3.5 : Cas Kählérien

Nous avons jusqu'alors obtenu un invariant. Il reste alors à savoir s'il s'agit d'un invariant qui peut être calculé dans des situations intéressantes. Nous allons donc pour motiver cette construction approfondir quelque peu le cas des surfaces kählériennes compactes qui présente l'avantage de déboucher sur des formules explicites pour cet invariant.

### Description explicite des équations de Seiberg-Witten dans le cas d'une surface kählérienne compacte

**Definition.** On dit que la 4-variété $X$ est kählérienne lorsqu'elle est munie d'une métrique riemannienne $g$ et d'une structure presque complexe $g$-orthogonale et $\nabla$-parallèle $J\colon TX \to TX$ (où $\nabla$ est la connexion de Levi-Civita).
De manière équivalente, on dit que la variété complexe $X$ est kählérienne lorsqu'elle est munie d'une métrique hermitienne $h$ vérifiant $d(-Im(h)) = 0$ (i.e. la 2-forme $-Im(h)$ est fermée).

Dans la discussion qui va suivre, on supposera que $X$ est une 4-variété kählérienne (on se placera dans le cadre de la première définition).

La structure presque complexe vérifie $J^2 = -1$, on peut donc décomposer $T_{\mathbb{C}}X := TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ en somme de sous-espaces propres :

$$T_{\mathbb{C}}X = T_{\mathbb{C}}^{1,0}X \oplus T_{\mathbb{C}}^{0,1}X\,.$$

On note $\pi^{1,0}$ et $\pi^{0,1}$ les projections correspondantes, et on remarque que la première projection est $\mathbb{C}$-linéaire. Cette décomposition induit une bigraduation sur $\Lambda^\star(T_{\mathbb{C}}X)$. En définissant une action de $TX$ sur la sous-algèbre $\Lambda^\star T_{\mathbb{C}}^{1,0}X$ par

$$v \cdot (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^t) = \sqrt{2}(\pi^{1,0}(v) \wedge \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^t - \pi^{1,0}(v) \angle \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^t)\,,$$

où

$$\pi^{1,0}(v) \angle \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^t = \sum_{i=1}^{t} (-1)^{i-1} \langle \alpha^i\,, \pi^{1,0}(v) \rangle \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\alpha^i} \wedge \cdots \wedge \alpha^t)\,,$$

et où le crochet est le produit hermitien sur $T_{\mathbb{C}}X$ ($\mathbb{C}$-linéaire en le premier facteur) qui étend le produit scalaire issu de $g$, on peut en déduire une action sur le complexifié du fibré de Clifford $Cl(P) \otimes \mathbb{C}$ car l'action vérifie la formule :

$$v \cdot (v \cdot (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^t)) = -|v|^2 (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^t).$$

En utilisant le plongement de $U(2)$ dans $Spin^{\mathbb{C}}(4)$ obtenu comme relevé de l'application $U(2) \to SO(4) \times \mathbb{S}^1$, $A \mapsto (A\,, det(A))$, on peut identifier l'action de $U(2)$ sur $\Lambda^\star T^{1,0}_{\mathbb{C}} X$ avec l'action naturelle de $U(2)$ sur $\Lambda^\star(T_{\mathbb{C}}X)$. Avec cette identification et en notant $\tilde{P}$ la structure $Spin^{\mathbb{C}}$ naturelle de $X$, dont le fibré déterminant en droites complexes est isomorphe à $K_X^{-1} = \Lambda^{0,2}X = \Lambda^2 T_{\mathbb{C}}X$ (l'inverse du fibré en droites canonique de $X$), on peut alors identifier le fibré spinoriel complexe associé avec $\Lambda^\star T_{\mathbb{C}}X$, et a fortiori :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^+_{\mathbb{C}}(\tilde{P}_J) &= \Lambda^{0,0}X \oplus \Lambda^{0,2}X = \Lambda^0 T_{\mathbb{C}}X \oplus \Lambda^2 T_{\mathbb{C}}X\,; \\ \mathbf{S}^-_{\mathbb{C}}(\tilde{P}_J) &= \Lambda^{0,1}X = \Lambda^1 T_{\mathbb{C}}X\,, \end{aligned}$$

où $\tilde{P}_J$ est la structure $Spin^{\mathbb{C}}$ induite par la structure presque complexe.

*Idée de démonstration.* La structure presque complexe et la métrique Riemannienne induisent l'existence d'un $U(2)$-fibré principal $Q_{U(2)} \to X$ et un isomorphisme de fibrés principaux entre $Q_{U(2)} \times_{U(2)} SO(4)$ et le fibré $P_{SO(4)}$ des repères de $X$. On pose $\tilde{P}_J = Q_{U(2)} \times_{U(2)} Spin^{\mathbb{C}}(4)$, en utilisant le plongement de $U(2)$ dans $Spin^{\mathbb{C}}_4$. On a $\tilde{P}_J/\mathbb{S}^1 = Q_{U(2)} \times_{U(2)} SO(4)$, où la représentation $U(2) \to SO(4)$ est la représentation triviale. $\tilde{P}_J$ est une structure $Spin^{\mathbb{C}}$. Son fibré déterminant en droites complexes est $\tilde{P}_J/Spin(4) = Q_{U(2)} \times_{U(2)} \mathbb{S}^1$ via l'application déterminant $U(2) \to \mathbb{S}^1$. Donc $\tilde{P}_J$ a le même fibré déterminant que $Q_{U(2)}$, qui est bien l'inverse du fibré déterminant $\Lambda^{2,0}Q^\star_{U(2)} = \Lambda^{0,2}Q_{U(2)}$. Trouver les sous-espaces propres de $\omega_{\mathbb{C}}$ permet alors d'achever la preuve. $\square$

En remarquant que $\Lambda^\star(T_{\mathbb{C}}X)^{1,0}$ est $\mathbb{C}$-linéairement isomorphe à $\Lambda^{0,\star}T^\star_{\mathbb{C}}X$, on peut réécrire les identifications précédentes :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^+(\tilde{P}) &= \Lambda^{0,0}T^\star_{\mathbb{C}}X \oplus \Lambda^{0,2}T^\star_{\mathbb{C}}X\,; \\ \mathbf{S}^-(\tilde{P}) &= \Lambda^{0,1}T^\star_{\mathbb{C}}X\,. \end{aligned}$$

Décrivons maintenant l'action des formes différentielles de $\Omega^i(X;\mathbb{R})$ sur $\mathbf{S}(\tilde{P}_J)$. Pour ce faire, on utilise la métrique sur $X$ de sorte à identifier $\Omega^i(X;\mathbb{R})$ avec l'ensemble des sections de $\Lambda^i TX$, que l'on identifie à son tour à un sous-ensemble de $Cl(\mathbb{R}^4)$ (on avait discuté de l'isomorphisme d'algèbre entre l'algèbre extérieure et celle de Clifford).

Dès lors, on définit la multiplication de Clifford par $\omega = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k$ sur $Cl(\mathbb{R}^4)$, où $\alpha^k$ est orthonormale en chaque point, comme la composition des multiplications de Clifford par les 1-formes $\alpha^j$ :

$$\alpha^j \cdot \nu = \sqrt{2}(\pi^{0,1}(a^j) \wedge \nu - \pi^{0,1}(a^j) \angle \nu).$$

En identifiant le fibré déterminant en droites complexes avec $K_X^{-1} = \Lambda^2 T_{\mathbb{C}} X = \Lambda^{0,2} X$, et en notant que la structure complexe sur $X$ détermine une structure holomorphe, i.e. une (0,1)-connexion sur $K_X^{-1}$, alors, l'existence d'une métrique hermitienne sur $K_X^{-1}$ (fournie par la métrique $g$) implique celle d'une unique connexion hermitenne $A$ sur $K_X^{-1}$ qui est compatible avec la structure holomorphe (i.e. la partie (0,1) de $A$ correspond à la (0,1)-connexion holomorphe). Autrement dit, dans ce nouveau cadre, le choix de la connexion $A$ n'a plus à être arbitraire.

On est alors en mesure d'écrire une nouvelle forme locale pour $D_A$. Soient $\sigma \in \Lambda^{0,k} T_{\mathbb{C}}^{\star} X$ (on rappelle qu'à présent on identifie $\mathbf{S}(\tilde{P})$ avec $\Lambda^{0,\star} T_{\mathbb{C}}^{\star} X$) et $(z_1 \,, z_2)$ un système de coordonnées holomorphes autour d'un point $p \in X$, tel que $z_1 = x_1 + i x_2$ et $z_2 = x_3 + i x_4$. On note $e_i$ le vecteur tangent unitaire en $p$ dans la direction $x_i$. Étant donné que $X$ est kählérienne, la métrique est localement standard jusqu'à l'ordre 2. Dès lors, $A$ correspond à la connexion produit au point fixé, et $\nabla_{e_i} = \partial_i$. D'où la formule suivante dans la trivialisation :

$$D_A(\sigma)(p) = \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot \partial_i(\sigma)(p)\,.$$

En écrivant la forme locale de la multiplication de Clifford, on obtient une forumle encore plus précise :

$$D_A(\sigma)(p) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^{4} \pi^{0,1}(dx_i) \wedge \partial_i(\sigma)(p) - \pi^{0,1}(dx_i) \angle \partial_i(\sigma)(p).$$

En remarquant alors que $\pi^{0,1}(dx_{2k-1}) = \frac{d\bar{z}_k}{2}$ et $\pi^{0,1}(dx_{2k}) = i\frac{d\bar{z}_k}{2}$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
D_A(\sigma)(p) =& \sqrt{2} \sum_{k=1}^{2} d\bar{z}_k \wedge \frac{1}{2}(\partial_{2k-1}(\sigma)(p) + i\partial_{2k}(\sigma)(p)) \\
& - \sqrt{2} \sum_{i=1}^{4} \pi^{0,1}(dx_i) \angle \partial_i(\sigma)(p) \\
=& \sqrt{2} \sum_{k=1}^{2} d\bar{z}_k \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\sigma) - \sqrt{2} \sum_{i=1}^{4} \pi^{0,1}(dx_i) \angle \partial_i(\sigma)(p) \\
=& \sqrt{2} \sum_{k=1}^{2} d\bar{z}_k \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\sigma) - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{2} (d\bar{z}_k) \angle \frac{1}{2}(\partial_{2k-1}(\sigma)(p) - i\partial_{2k}(\sigma)(p)) \\
=& \sqrt{2} \left( \bar{\partial}(\sigma)(p) - \sum_{k=1}^{2} d\bar{z}_k \angle \frac{\partial}{\partial z_k}(\sigma)(p) \right) \\
=& \boxed{\sqrt{2}(\bar{\partial}(\sigma)(p) + \bar{\partial}^{\star}(\sigma)(p))}\,.
\end{aligned}$$

On a aussi vu qu'une autre structure $Spin^{\mathbb{C}}$ $\tilde{P}$ diffère de la structure naturelle $\tilde{P}_J$ d'un $U(1)$-fibré principal $Q \to X$. Notons $L_0$ le fibré déterminant associé à $Q$. Alors, les fibrés spinoriels positif et négatif sont donnés par :

$$\mathbf{S}^+(\tilde{P}) = \mathbf{S}^+(\tilde{P}_J)\otimes L_0 = \Lambda^0(X; L_0)\oplus\Lambda^{0,2}(X; L_0)\mathbf{S}^-(\tilde{P}) = \mathbf{S}^-(\tilde{P}_J)\otimes L_0 = \Lambda^{0,1}(X; L_0)\,.$$

La multiplication de Clifford par une 1-forme est une nouvelle fois donnée par la formule précédente. De plus, on a la relation suivante entre les fibrés déterminant :

$$L := det(\tilde{P}) = K_X^{-1} \otimes L_0^2\,.$$

Dès lors, la donnée d'une connexion $A$ sur le fibré $L$ est équivalent à celle d'une connexion $A_0$ sur le fibré $L_0$ via la relation :

$$(A_0)^2 = A_{K_X} \otimes A\,,$$

où $A_{K_X}$ est la connexion hermitienne holomorphe sur $K_X$. L'opérateur de Dirac associé à la connexion $A$ sur $L$ est alors donné par

$$\sqrt{2}(\bar{\partial}_{A_0} + \bar{\partial}^\star_{A_0})\colon \Omega^0(X; L_0) \oplus \Omega^{0,2}(X; L_0) \to \Omega^{0,1}(X; L_0)\,,$$

qui correspond au couplage de l'opérateur $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^\star)$ avec la dérivée covariante $\nabla_{A_0}$ sur $L_0$. On peut alors réécrire la première équation de notre problème de Seiberg-Witten. Soit $\psi = (\alpha\,, \beta) \in \Omega^0(X; L_0) \oplus \Omega^{0,2}(X; L_0)$. L'équation devient :

$$\sqrt{2}(\bar{\partial}_{A_0}(\alpha) + \bar{\partial}^\star_{A_0}(\beta)) = 0\,.$$

Il nous reste à décrire l'équation de courbure. Soit $\omega$ la forme de Kähler sur $X$. C'est une 2-forme réelle auto-duale de type (1,1) qui ne s'annule jamais. On a alors la décomposition suivante :

$$\Omega^2_+(X; \mathbb{C}) = \Omega^0(X; \mathbb{C}) \cdot \omega \oplus (\Omega^{2,0}(X; \mathbb{C}) \oplus \Omega^{0,2}(X; \mathbb{C}))\,.$$

Dès lors :

$$\Omega^2_+(X; i\mathbb{R}) = \Omega^0(X; i\mathbb{R}) \cdot \omega \oplus \{\mu - \bar{\mu} \mid \mu \in \Omega^{0,2}(X; \mathbb{C})\}\,.$$

Ce qui nous permet d'écrire la partie auto-duale de la 2-forme de courbure de notre équation sous la forme :

$$F_A^+ = if\omega + \mu - \bar{\mu}\,,$$

où $f$ est une fonction à valeurs réelles et $\mu$ est une (0,2)-forme à valeurs complexes.

Pour un système de coordonnées holomorphes centrées en un point en lequel la métrique kählérienne est standard jusqu'à l'ordre 2, on a que $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\,,\,\frac{1}{2}d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2\,,\,\frac{1}{2}dz_1\wedge dz_2\}$ est une base de $\Lambda^2_+(T^\star_{\mathbb{C}}X)$. En utilisant alors notre isomorphisme induit par la multiplication de Clifford de $\Lambda^2_+(T^\star_{\mathbb{C}}X)$ sur $End(\mathbf{S}^+(T^\star_{\mathbb{C}}X))\cong\mathbb{C}[2]$, on obtient dans la base unitaire $\{1\,,\,\frac{1}{2}d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2\}$ de $\mathbf{S}^+(T^\star_{\mathbb{C}}X)$ :

$$\begin{aligned}\omega &\longleftrightarrow \begin{pmatrix}-2i & 0\\ 0 & 2i\end{pmatrix}\\ \frac{1}{2}d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\\ \frac{1}{2}dz_1\wedge dz_2 &\longleftrightarrow -\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}^\star = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\,.\end{aligned}$$

Parallèlement, il est clair que la matrice représentant l'endomorphisme $q(\psi)$ est

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(|\alpha|^2-|\beta|^2) & \alpha\bar{\beta}\\ \bar{\alpha}\beta & \frac{1}{2}(|\beta|^2-|\alpha|^2)\end{pmatrix}\,.$$

En remarquant que l'identification ci-dessus envoie la 2-forme

$$\frac{i}{4}(|\alpha|^2-|\beta|^2)\omega+\frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta})\in i\Lambda^2_+(T^\star_{\mathbb{C}}X)$$

sur la matrice de $q(\psi)$, on obtient donc :

$$F_A^+=if\omega+\mu-\bar{\mu}=\frac{i}{4}(|\alpha|^2-|\beta|^2)\omega+\frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta})$$

et l'équation de courbure devient le système :

$$\left\{\begin{array}{l}(F_A^+)^{1,1}=\frac{i}{4}(|\alpha|^2-|\beta|^2)\omega\\ (F_A^+)^{0,2}=\frac{\bar{\alpha}\beta}{2}\end{array}\right.\,.$$

## Description de l'espace des modules

On peut introduire le degré du fibré déterminant $L$ associé à la structure $Spin^{\mathbb{C}}$ $\tilde{P}$ :

$$deg(L) = \int_X c_1(L) \wedge \omega \,.$$

À partir de cette définition du degré, on obtient un critère de simplification des équations en fonction de son signe :

**Lemme.** *On fixe une solution $(A\,,\psi)$ aux équations de Seiberg-Witten dans notre cadre kählérien avec $\psi = (\alpha\,,\beta)$. On a alors :*

$$\begin{aligned} deg(L) \geq 0 &\implies \alpha = 0 \\ deg(L) \leq 0 &\implies \beta = 0\,. \end{aligned}$$

De ce résultat découle deux corollaires concernant la structure de l'espace des modules des équations de Seiberg-Witten :

**Corollaire.** *Si $deg(L) \leq 0$ (resp. $deg(L) \geq 0$), alors toute solution aux équations de Seiberg-Witten consiste en une connexion holomorphe hermitienne $A$ sur $L$ et une section holomorphe $\alpha$ de $L_0$ (resp. $\beta$ de $L_0^{-1}$) vérifiant*

$$(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4}|\alpha|^2\omega \;\; (resp. \;\; = \frac{-i}{4}|\beta|^2\omega)\,.$$

*Deux telles paires $(A\,,\alpha)$ et $(A'\,,\alpha')$ (resp. $(A\,,\beta)$ et $(A'\,,\beta')$) déterminent le même point dans l'espace des modules si et seulement s'il exite un isomorphisme holomorphe hermitien entre $L_A$ et $L_{A'}$ tel que l'isomorphisme induit $L_0 \to L_0$ (resp. $L_0^{-1} \to L_0^{-1}$) envoie $\alpha$ sur $\alpha'$ (resp. $\bar{\beta}$ sur $\bar{\beta}'$).*

Le résultat suivant nous montre alors que lorsque le degré est non nul, alors tout couple composé d'une structure holomorphe sur $L$ et d'une section holomorphe de $L_0$ détermine un point dans l'espace des modules :

**Lemme.** *Fixons une connexion hermitienne holomorphe $A$ sur $L$, et une section holomorphe non identiquement nulle $\alpha$ (par rapport à la structure holomorphe définie sur $A_0$) de $L_0$. Si deg$(L) < 0$, alors il existe une autre structure hermitienne $h'$ sur $L$ telle que*

$$(F_{A'}^{+})^{1,1} = \frac{i}{4}(|\alpha|_{h'}^2)\omega\,,$$

*où $A'$ est la connexion $h'$-hermitienne qui définit la même structure holomorphe que $A$ sur $L$, et $|.|_{h'}$ est la norme issue de la structure hermitienne induite sur $L_0$ par $h'$.*

Étant donné que deux strucutres hermitiennes sur $L$ sont isomorphes via un automorphisme de fibrés linéaires complexes de $L$, on obtient une description complète de notre espace des modules :

**Corollaire.** *On fixe une paire $(\bar{\partial}_L\,,\alpha_0)$ constituée d'une structure holomorphe sur $L$ et d'une section holomorphe non identiquement nulle de $L_0$, et on suppose que deg$(L) < 0$. Alors, il existe une solution $(A\,,\alpha)$ aux équations de Seiberg-Witten vérifiant les propriétés du lemme précédent et telle que*

1. *$A$ détermine une structure holomorphe sur $L$ isomorphe à $\bar{\partial}_L$ ,*
2. *il existe un isomorphisme holomorphe entre les strucutres déterminées par $A$ et $\bar{\partial}_L$ qui envoie $\alpha$ sur $\alpha_0$.*

*Une telle solution est unique à transformation de jauge près. De cette façon, toute paire $(\bar{\partial}_L\,,\alpha_0)$ détermine un point dans l'espace des modules $\mathfrak{M}(\tilde{P})$. Tous les points de $\mathfrak{M}(\tilde{P})$ sont obtenus de cette manière. De plus, deux couples $(\bar{\partial}_L\,,\alpha_0)$ et $(\bar{\partial}'_L\,,\alpha'_0)$ déterminent le même point dans $\mathfrak{M}(\tilde{P})$ si et seulement si les structures holomorphes sur $L$ sont isomorphes et l'isomorphisme induit $L_0 \to L_0$ envoie les sections holomorphes sur des multiples scalaires.*

*Remarque.*

1. Un résultat complètement analogue existe pour le cas $deg(L) > 0$ (cf [1], p.117-118).
2. Le cas $deg(L) = 0$ est assez simple : toute solution aux équations se doit d'être de la forme $(A\,,0)$ avec $A$ une connexion anti-auto-duale sur $L$ et $0$ le spineur trivial. Dès lors, $\mathfrak{M}(\tilde{P})$ s'identifie à l'ensemble des classes de jauge-équivalence des connexions anti-auto-duale sur $L$.

## Invariant de Seiberg-Witten pour une surface kählérienne

On achève cette partie avec l'évaluation de l'application de Seiberg-Witten dans le cas d'une surface kählérienne.

**Proposition.**

1. *Si $deg(K_X) < 0$, alors toutes les solutions aux équations de Seiberg-Witten sont réductibles.*
2. *Soit $P_X$ la strucutre $Spin^{\mathbb{C}}$ induite par la structure presque complexe. Si $deg(K_X) > 0$, alors $\boldsymbol{sw}(\tilde{P}_X) = \pm 1$ (où l'invariant est calculé par rapport à la métrique kählérienne fixée).*

*Remarque.* Le signe de l'invariant peut être déterminé avec des considérations liées à l'orientation (cf [1] p.121-122).

*Démonstration.*

1. **Cas** $deg(K_X) < 0$ **pour une structure** $Spin^{\mathbb{C}}$ $\tilde{P}$ **quelconque**.
   On sépare la preuve en deux sous-cas :
   1.1. **Cas** $deg(L) \leq 0$ **:**
   D'après l'un des lemmes de la sous-partie précédente, cette hypothèse nous assure que $\beta = 0$ et $\alpha$ est une section holomorphe de $L_0$ dans la solution $\psi = (\alpha\,, \beta)$. Si $\alpha \neq 0$, alors $deg(L_0) \geq 0$. Mais comme $deg(L_0^{\otimes 2} = K_X \otimes L) < 0$, alors $\alpha = 0$, et donc $\psi = 0$.
   1.2. **Cas** $deg(L) \geq 0$ **:**
   D'après l'un des lemmes de la sous-partie précédente, cette hypothèse nous assure que $\alpha = 0$ et $\bar{\beta}$ est une section holomorphe de $K_X \otimes L_0^{-1}$ dans la solution $\psi = (\alpha\,, \beta)$. Si $\beta \neq 0$, alors $deg(K_X \otimes L_0^{-1}) \geq 0$. Mais comme $deg((K_X \otimes L_0^{-1})^{\otimes 2} = K_X \otimes L^{-1}) < 0$, alors $\beta = 0$, et donc $\psi = 0$.

   Cela achève la preuve de la première assetion.

2. **Cas** $deg(K_X) > 0$ **pour la structure** $Spin^{\mathbb{C}}$ $\tilde{P}_X$ **issue de la structure presque complexe**.
Étant donné que le fibré $L$ de $\tilde{P}_X$ s'identifie au fibré $K_X^{-1}$, alors $deg(L) < 0$. On mentionne également que $\tilde{P}_X$ est la structure $Spin^{\mathbb{C}}$ pour laquelle $L_0$ est le fibré lisse en droites complexes trivial. Soit $(A\,,\alpha)$ une solution des équations de Seiberg-Witten sur $\tilde{P}_X$. La structure holomorphe sur $L_0$ induite par la connexion $A_0$ possède une section holomorphe non-triviale $\alpha$ qui se doit d'être une section non-nulle partout puisque le fibré $L_0$ est trivial. Dès lors, elle est constante. Donc $\mathfrak{M}(\tilde{P}_X)$ est réduit à un point. On montre par la suite que ce point est lisse en utilisant les différentielles en jeu dans le complexe elliptique associé à $(A\,,\alpha)$ :

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X;i\mathbb{R}) \xrightarrow{D_1} \begin{array}{c} \Omega^1(X;i\mathbb{R}) \\ \oplus \\ \Omega^0(X;\mathbb{C}) \oplus \Omega^{0,2}(X;\mathbb{C}) \end{array} \xrightarrow{D_2} \begin{array}{c} \Omega^2_+(X;i\mathbb{R}) \\ \oplus \\ \Omega^{0,1}(X;\mathbb{C}) \end{array} \longrightarrow 0$$

où

$$D_1(if) = \begin{pmatrix} 2idf \\ -if\cdot\alpha \end{pmatrix},$$

et

$$D_2\begin{pmatrix} i\lambda \\ (a\,,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^+(i\lambda) - \frac{i}{2}Re(a\bar{\alpha})\omega + \frac{1}{2}(\alpha\bar{b} - \bar{\alpha}b) \\ \sqrt{2}(\bar{\partial}(a) + \bar{\partial}^\star(b)) + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^{0,1}(i\lambda)\cdot\alpha \end{pmatrix}.$$

Comme $\alpha$ est une section constante non nulle, il est clair que le noyau de $D_1$ est trivial. Étudions alors le noyau de $D_2$. On va montrer que ce dernier est inclus dans l'image de $D_1$. Pour ce faire, on commence par éluder les hypothèses nécessaires et suffisantes pour appartenir à ce noyau. Soit $(i\lambda\,,(a\,,b)) \in Ker(D_2)$. En appliquant l'opérateur $\bar{\partial}$ à la deuxième coordonnées de $D_2\begin{pmatrix} i\lambda \\ (a\,,b) \end{pmatrix}$, et en observant que $\bar{\partial}^2 = 0$ et $\bar{\partial}(\alpha) = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\bar{\partial}(\pi^{0,1}(i\lambda))\cdot\alpha + \bar{\partial}\bar{\partial}^\star(b) = 0\,.$$

La première coordonnée s'annulant également, on a :

$$\bar{\partial}(\pi^{0,1}(i\lambda)) = d(i\lambda)^{0,2} = \frac{\bar{\alpha}b}{2}\,,$$

d'où :

$$\frac{1}{4}|\alpha|^2 b + \bar{\partial}\bar{\partial}^\star(b) = 0\,.$$

On prend alors le produit-$L^2$ avec $b$ de cette expression, et on obtient :

$$\frac{1}{4}\|\bar{\alpha}b\|^2_{L^2} + \|\bar{\partial}^\star(b)\|^2_{L^2} = 0 \implies \bar{\alpha}b = 0 \implies b = 0\,.$$

On écrit $a = (u + iv)\alpha$ pour deux fonctions réelles lisses $u$ et $v$. Notre objectif étant de prouver l'inclusion $Ker(D_2) \subset Im(D_1)$, on peut sans perte de généralité étudier $(i\lambda\,, (u + iv)\alpha) + D_1(iv) = (i(\lambda + 2dv)\,, u\alpha)$ (car $D_2 \circ D_1 = 0$). On écrit alors $i(\lambda+2dv) = \bar{\xi} - \xi$ pour un $\xi \in \Omega^{0,1}(X;\mathbb{C})$, et on a :

$$D_2 \begin{pmatrix} \bar{\xi} - \xi \\ u\alpha \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \sqrt{2}\bar{\partial}(u) \cdot \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\xi} \cdot \alpha = 0 \\ d^+(\bar{\xi} - \xi) = (\partial\bar{\xi} - \bar{\partial}\xi)^+ = \frac{i|\alpha|^2}{2} u\omega \end{cases}$$

la première équation nous donne $\bar{\xi} = -2\bar{\partial}(u)$, et la seconde devient alors équivalente à

$$8\Delta(u) + u = 0\,.$$

Étant donné que $\Delta$ ne possède que des valeurs propres positives ou nulles, on obtient que $u = 0$. Dès lors, on voit que $\bar{\xi} = \xi = 0$, d'où $i\lambda = -2idv$ et $a = iv$. Puisque

$$D_1(-iv) = \begin{pmatrix} -2idv \\ iv\alpha \end{pmatrix}$$

on a bien démontré l'inclusion $Ker(D_2) \subset Im(D_1)$. Cela signifie donc que le $H^1$ du complexe elliptique est trivial ($Ker(D_2) = Im(D_1)$ et $H^1(complexe) = Ker(D_2)/Im(D_1)$). Il ne nous reste plus alors qu'à déterminer le $H^2$ du complexe. L'indice de ce complexe vaut

$$\frac{K_X^2 - (2\chi(X) + 3\sigma(X))}{4}\,,$$

et la variété étant kählérienne, il est égal à zéro. Puisque $H^0 = H^1 = 0$, on en déduit que le $H^2$ est également trivial. Cela signifie donc bien que l'unique point de l'espace de modules est lisse et donc que l'invariant de Seiberg-Witten de $\tilde{P}_X$ vaut $\pm 1$.

$\square$

*Remarque.* On peut montrer dans le cas des surfaces algébriques minimales de type général qu'en les équippant de n'importe quelle métrique kählérienne, l'invariant de Seiberg-Witten de $\tilde{P}_X$ vaut toujours $\pm 1$ (en fait, il vaut même précisément 1).

# Conclusion

Nous avons donc expliciter la construction de l'invariant de Seiberg-Witten et l'avons évalué sur les surfaces kählériennes. Il est important de noter qu'il existe une généralisation de cette théorie produisant des résultats un peu plus faible sur les variétés symplectiques, développée notamment par Clifford Henry Taubes (cf [6], [7], [8]).

# Appendix 1 : théorie de Hodge en dimension 4

Soit $(M^4,g)$ une 4-variété Riemannienne fermée, réelle et orientée. On note sa forme volume $vol$. On peut considérer $\langle . , . \rangle$, le produit scalaire dual associé à $g$ sur $T^\star M$ (défini de sorte que chaque cobase associée à une base $g$-orthonormée (positive) locale est $\langle . , . \rangle$-orthonormée (positive)), et ainsi définir l'opérateur de Hodge $\star_g = \star : \Omega^k(M) \to \Omega^{4-k}(M)$ ($k \in \{1,2,3,4\}$) par la formule :

$$\alpha \wedge \star\beta = g(\alpha,\beta)vol.$$

On peut par ailleurs l'étendre à $\Omega^k(M) \otimes \mathbb{C}$ par linéarité. Maintenant, si $\{e_1,...,e_4\}$ est une base $g$-orthonormée positive locale de $TM$, on peut considérer sa base $g$-duale associée $\{e^1,...,e^4\}$ qui est une base $\langle . , . \rangle$-orthonormée positive locale de $T^\star M$, on peut alors énumérer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\star(e^2) = -e^1 \wedge e^3 \wedge e^4 \\
&... \\
&\star(e^1 \wedge e^3) = -e^2 \wedge e^4 \\
&... \\
&\star(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) = e^4 \\
&... \\
&\star(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4) = 1.
\end{aligned}$$

En particulier, on voit que $\star^2_{|_{\Lambda^k(M)}} = (-1)^{k(4-k)} Id$. On en déduit une décomposition naturelle de $\Omega^2(M)$ en sous-espaces propres de $\star$ :

$$\Omega^2(M) = \Omega^2_+(M) \oplus \Omega^2_-(M),$$

où $\Omega^2_\pm(M)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $\pm 1$. On remarque par ailleur qu'une 2-forme quelconque $\alpha$ se décompose ainsi :

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \star\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha - \star\alpha)$$

(on voit bien que $\star(\alpha \pm \star\alpha) = \star\alpha \pm \star^2\alpha = \star\alpha \pm \alpha$, car $\star^2_{|_{\Lambda^2(M)}} = Id$). On peut également introduire à l'aide de l'opérateur $\star$ un produit scalaire $L^2$ sur $\Omega^k(M)$ :

$$\mathcal{G}(\alpha,\beta) := \int_M \langle \alpha , \beta \rangle vol = \int_M \alpha \wedge \star\beta.$$

Il s'agit d'une forme bilinéaire symmétrique définie positive sur $\Omega^k(M)$.

*Démonstration de la symmétrie.*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\beta,\alpha) &= \int_M \beta\wedge\star\alpha = (-1)^{k(4-k)}(\int_M \star\star\beta\wedge\star\alpha)\\ &= (-1)^{k(4-k)}(-1)^{k(4-k)}(\int_M \star\alpha\wedge\star\star\beta) = \int_M \langle\star\alpha\,,\,\star\beta\rangle vol\\ &= \int_M \langle\alpha\,,\beta\rangle vol = \mathcal{G}(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

□

On introduit alors un opérateur $d^\star : \Omega^{k+1}(M)\to\Omega^k(M)$, qui est l'adjoint formel ($\mathcal{G}(d.,.) = \mathcal{G}(.,d^\star.)$) de l'opérateur différentiel $d : \Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$, défini par la formule :

$$d^\star = -\star d\star.$$

De ce nouvel opérateur émerge la notion d'opérateur de Laplace-Beltrami :

$$\Delta : \Omega^k(M)\to\Omega^k(M),\ \alpha\mapsto dd^\star\alpha + d^\star d\alpha.$$

Cet opérateur est auto-adjoint, au sens où $\mathcal{G}(\Delta(\alpha),\beta) = \mathcal{G}(\alpha,\Delta(\beta))$, et il vérifie une relation de compatitibilité avec $\star$ :

$$\forall\,\alpha\in\Omega^k(M),\ \star\Delta(\alpha) = \Delta(\star\alpha).$$

On gagne ainsi la notion de forme harmonique : $\alpha$ est dite harmonique lorsque $\Delta(\alpha) = 0$, ce qui se produit si et seulement si $d\alpha = d^\star\alpha = 0$.

*Démonstration.* On montre le résultat pour une forme $\alpha$ non nulle.

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) = 0 &\iff \int_M \langle\Delta(\alpha)\,,\alpha\rangle vol = 0\\ &\iff \mathcal{G}(dd^\star\alpha,\alpha) + \mathcal{G}(d^\star d\alpha,\alpha) = 0\\ &\iff \mathcal{G}(d^\star\alpha,d^\star\alpha) + \mathcal{G}(d\alpha,d\alpha) = 0\\ &\iff \begin{cases} d\alpha = 0\\ d^\star\alpha = 0\end{cases}.\end{aligned}$$

□

On conclut cet aparte sur la théorie de Hodge en énonçant un de ses théorèmes principaux

**Théorème.** *Si on pose $\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha\in\Omega^k(M)\mid\Delta(\alpha) = 0\}$, alors :*

1. $\forall\,k$, $dim(\mathcal{H}^k(M)) < \infty$ ;
2. $\forall\,k$, $\Omega^k(M) = d(\Omega^{k-1})\oplus d^\star(\Omega^{k+1})\oplus\mathcal{H}^k(M)$.

**Proposition.** *On a :*

$$\forall\, k,\, H^k_{dR}(M;\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^k(M).$$

*Démonstration.* Soit $\alpha$ une $k$-forme fermée. Pour $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$, on pose

$$\nu(t) := \mathcal{G}(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta).$$

Dès lors que $\mathcal{G}(\alpha,\alpha)$ est un minimum local dans la classe d'équivalence $[\alpha] \in H^k(M)$ pour $\mathcal{G}(.,.)$, alors :

$$\forall\, \beta \in \Omega^{k-1}(M),\, \nu'(0) = 2\mathcal{G}(\alpha, d\beta) = 2\mathcal{G}(d^\star\alpha, \beta) = 0,$$

car $\mathcal{G}(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta)$ admet un minimum local en $t = 0$ par hypothèse. Il suit que sous cette hypothèse, $d^\star\alpha = 0$, et donc $\alpha$ est harmonique. Réciproquement, si $\alpha$ est harmonique, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\alpha + d\beta, \alpha + d\beta) &= \mathcal{G}(\alpha,\alpha) + \mathcal{G}(d\beta, d\beta) + 2\mathcal{G}(\alpha, d\beta)\\ &= \mathcal{G}(\alpha,\alpha) + \mathcal{G}(d\beta, d\beta) \geq \mathcal{G}(\alpha,\alpha),\end{aligned}$$

avec équalité si et seulement si $d\beta = 0$. On vient de démontrer le résultat suivant : une $k$-forme fermée $\alpha$ est harmonique si et seulement si $\mathcal{G}(\alpha,\alpha)$ est un minimum local dans la classe $[\alpha] \in H^k(M)$ pour $\mathcal{G}(.,.)$. Grâce à notre réciproque, on voit même que sous réserve d'existence, cette forme harmonique est unique dans sa classe d'équivalence. Nous allons à présent utiliser sans démontrer l'existence d'une telle forme. Par adjointé formelle, on a : $\mathcal{G}(ker(d), im(d^\star)) = \mathcal{G}(ker(d^\star), im(d)) = 0$. Soit $\alpha$, une $k$-forme fermée. En utilisant la décomposition vu précédemment de $\Omega^k(M)$, on écrit : $\alpha = d\beta + d^\star\gamma + \mu$. On voit alors successivement :

$$0 = \mathcal{G}(d\alpha, \gamma) = \mathcal{G}(\alpha, d^\star\gamma) = \mathcal{G}(d^\star\gamma, d^\star\gamma) \implies d^\star\gamma = 0,$$

puis :

$$[\alpha] = [d\beta + \mu] = [\mu],$$

ce qui, par l'existence et l'unicité d'un tel $\mu$ dans $[\alpha]$, fournit l'isomorphisme requis. $\square$

*Remarque.* Les lecteurs.trices intéressés.es sont invités.es à aller consulter [4].

# Appendix 2 : fibrés principaux et connexions

**Definition.** On appelle $G$-fibré principal tout quadruplet $(P,\pi,X;G)$ vérifiant :

1. $P$ est un espace topologique sur lequel $G$ agit librement à droite en tant que groupe de Lie ;
2. $\pi : P \to X$ est une surjection continue vérifiant :
   - $\forall\ (p_1,p_2) \in P \times P,\ \pi(p_1) = \pi(p_2) \iff \exists\ g \in G,\ p_1.g = p_2$ ;
   - $\forall\ x \in X,\ \exists\ U \subset X$ ouvert / $x \in U,\ \exists\ \phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ /

$$\phi_U(p) = (\pi(p),\varphi_U(p)),$$

   où $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to G$ vérifie $\forall\ (p,g) \in P \times G,\ \varphi_U(p.g) = \varphi_U(p).g$.

**Exemple.**

1. *Si $G$ est un groupe de Lie et $H$ en est un sous-groupe fermé, alors $(G,\pi,G/H;H)$, où $\pi : G \to G/H$ est la projection naturelle, est un $H$-fibré principal.*
2. *Si $M^n$ est une variété lisse de dimension $n$, en définissant respectivement*

$$L_x(M^n) := \{(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_n}) \in T_xM^n \mid det(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_n}) \neq 0\},$$

*puis*

$$L(M^n) := \bigcup_{x \in M^n} L_x(M^n),$$

*alors $(L(M^n),\pi,M^n;GL(n,\mathbb{R}))$ est un $GL(n,\mathbb{R})$-fibré principal, où l'action à droite de $GL(n,\mathbb{R})$ est donnée par*

$$(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_n}).\begin{pmatrix} A_{11} & ... & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{v_i} A_{i1},...,\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{v_i} A_{in}).$$

**Definition.** Soit $(P\,,\pi\,,X\,;\,G)$ un $G$-fibré principal. Si $F$ est un espace topologique sur lequel le groupe topologique $G$ agit à gauche, alors en définissant une action à droite sur $P \times F$ par

$$(P \times F) \times G \to P \times F,\ ((p\,,f)\,,g) \mapsto (p\,,f).g = (p.g\,,g^{-1}.f),$$

on peut former le quotient de $P \times F$ par cette action afin d'optenir un fibré de fibre $F$ :

$$(P_F = P \times_G F = (P \times F)/G\,,\tilde{\pi}\,,X\,;\,F),$$

où $\tilde{\pi} : P_F \to X$, $[p\,,f] \mapsto \tilde{\pi}([p\,,f]) = \pi(p)$.

**Théorème.** *Soient $P \xrightarrow{\pi} X$ un $G$-fibré principal et $P_F \xrightarrow{\pi_F} X$ un fibré de fibre $F$ associé. L'ensemble des section de $P_F$ est alors en bijection avec les applications lisses $G$-équivariantes de $P$. Autrement dit, on a la bijection suivante :*

$$\{\sigma{:}X{\to}P_F \mid \pi_F{\circ}\sigma{=}id_X\}{\longleftrightarrow}\{\phi{:}\ P{\to}F \mid \forall\ (g\,,p){\in}G{\times}X,\ \phi(p{\cdot}g){=}g^{-1}{\cdot}\phi(p)\}$$
$$(\sigma{:}\ X{\to}P_F){\longrightarrow}(\phi_\sigma{:}\ P{\to}F,\ p{\mapsto}\mathfrak{i}_p^{-1}(\sigma(\pi(p))))$$
$$(\sigma_\phi{:}\ X{\to}P_F,\ x{\mapsto}[p\,,\phi(p)]){\longleftarrow}(\phi{:}\ P{\to}F)$$

*où dans la dernière assignation $p \in \pi^{-1}(x)$, et où $\mathfrak{i}$ est l'application définie ci-après dans la discussion suivante.*

**Definition.** Deux $G$-fibrés principaux $(P\,,\pi\,,X\,;\,G)$ et $(P_1\,,\pi_1\,,X\,;\,G)$ de même base et avec le même groupe de structure sont dits isomorphes lorsqu'il existe un homéomorphisme $f : P \to P_1$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & P_1 \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et vérifiant :

$$\forall\ (p,g) \in P \times G,\ f(p.g) = f(p).g.$$

*Remarque.* Les actions dans la dernière condition de cette définition n'ont aucune raison de coïncider.

Nous allons maintenant introduire la notion de connexion sur les fibrés principaux. Notons d'abord que chaque élément $A \in T_1G \cong Lie(G)$ induit un champ de vecteurs $X^A$ sur $P$ défini par :

$$\forall\, (p\,, f) \in P \times C^\infty(P;\mathbb{R}),\, X_p^A f := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p.\exp(tA))\,.$$

On obtient ainsi un morphisme d'algèbres de Lie :

$$\mathfrak{i} : T_1G \to \Gamma(TP),\, A \mapsto X^A\,,$$

où on a équipé $\Gamma(TP)$ du commutateur des champs de vecteurs comme crochet de Lie.

**Definition.** Soit $P \xrightarrow{\pi} X$ un $G$-fibré principal au-dessus d'une variété lisse. Pour $p \in P$, on pose $V_pP = ker(\pi_\star) \subset T_pP$. On appelle cet espace le sous-espace vertical en $p$ de $T_pP$. On appelle connexion du fibré $P$ toute famille $\{H_p\}_{p\in P}$ de sous-espaces telle que $\forall\, p \in P$, $H_pP \subset T_pP$ est choisi de sorte que :

(a) $H_pP \oplus V_pP = T_pP\,;$

(b) $(.g)_\star(H_pP) = H_{p.g}P\,;$

(c) l'unique décomposition $T_pP \ni X = hor(X) + ver(X)$ fournisse deux champs de vecteurs lisses : $hor(X)$ et $ver(X)$, que l'on appelle respectivement partie horizontale et partie verticale de $X$.

*Remarque.*

- Les conditions (a) et (b) se regroupent en un terme générique : on dit que $\{H_p\}_{p\in P}$ est une distribution horizontale lisse de $P$. Le $(.g)_\star$ signifie que l'on considère l'action à droite de $g \in G$ comme un difféomorphisme (l'étoile représentant le poussé en avant).
- Pour un $p \in P$ fixé, $\mathfrak{i}_p(T_1G) = V_pP$. Donc, comme $\mathfrak{i}_p$ est une application linéaire injective, elle réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $T_1G = Lie(G)$ et $V_pP$.
- La forme $\omega_p$: $\begin{cases} T_pP & \to T_1G \\ X & \mapsto \omega_p(X) := \mathfrak{i}_p^{-1}(Ver(X)) \end{cases}$ est appelée 1-forme de connexion car elle permet de retrouvée la connexion $\{H_p\}$ au sens où $H_p = ker(\omega_p)$.

- La 1-forme de connexion possède les propriétés suivantes :
  (a) $\forall\,(p\,,A) \in P \times T_1G$, $\omega_p(X^A) = A$
  (b) $\forall\,(p\,,X\,,g) \in P \times T_pP \times G$, $((\cdot g)^\star\omega)_p(X) = (Ad_{g^{-1}})_\star(\omega_p(X))$
  Où $Ad_g\colon\ : G \to G,\, h \mapsto ghg^{-1}$ et $(Ad_g)_\star : T_1G \to T_1G$.
  (c) $\omega$ est lisse comme composée d'applications lisses.

Il est important de noter que si l'on fixe une connexion sur un $G$-fibré principal $P$, alors, dès qu'il existe une représentation linéaire $G \to V$, on obtient une connexion induite sur le fibré vectoriel $E = P \times_G V$. Une autre façon de comprendre ce type de connexion serait de l'appréhender comme une dérivée covariante

$$\nabla : \Omega^0(X;E) \to \Omega^1(X;E)$$

qui serait $\mathbb{R}$-linéaire, et qui vérifierait :

$$\forall\,(f\,,\sigma) \in C^\infty(X;\mathbb{R}) \times \Omega^0(X;E),\ \nabla(f \cdot \sigma) = f \cdot \nabla(\sigma) + df \otimes \sigma.$$

Construisons cette dérivée covariante. Soient $\sigma$ une section locale de $E$ proche de $x \in X$, et $\tau \in T_xX$. On choisit une courbe locale lisse $\gamma$ sur $X$ de sorte que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = \tau$. On relève alors $\gamma$ en une courbe horizontale $p(t)$ dans $P$ (i.e. dont chaque vecteur tangent est horizontal). Dès lors, on peut écrire $\sigma_{|_{E_{|\gamma}}} = [p(t),v(t)]$, pour une certaine fonction lisse $v(t)$ à valeurs dans $V$. On définit alors :

$$\nabla(\sigma)(\tau) = [p,\, \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}].$$

*Remarque.* La notion de dérivée covariante est assez pratique à utiliser cependant elle ne permet pas toujours de retrouver la connexion du fibré principal sous-jacent.

Il ne nous reste alors plus qu'à étendre $\nabla$ en une application :

$$\nabla\colon \Omega^i(X;E) \to \Omega^{i+1}(X;E)$$

avec la formule

$$\nabla(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^{deg(\omega)}\omega \wedge \nabla(\sigma)$$

pour toute i-forme différentielle $\omega$ et toute section $\sigma$ de E.

Terminons cette discution avec la forme locale de ces objets. Soit $P \to X$ un $G$-fibré principal muni d'une connexion $\omega \in \Omega^1(P; Lie(G))$. Soit $P_U$ une trivialisation locale de $P$ que l'on appréhende telle une section locale $\sigma_0 : U \to P_U$. On peut alors tirer en arrière par cette section la 1-forme $\omega$, et on obtient $\sigma_0^\star(\omega) \in \Omega^1(U; Lie(G))$. Dans les cas qui nous intéressent, l'algèbre de Lie est connue, ce qui nous permet de mieux décrire encore cette 1-forme. Par exemple, lorsque $G = SO(4)$, l'algèbre de Lie est l'ensemble des matrices carrées $4 \times 4$ anti-symétriques. Dès lors, $\sigma_0^\star(\omega) = (\tilde{\omega}_{i,j})$ est une 1-forme à valeurs dans les matrices anti-symétriques.
Décrivons à présent les "changements de sections". Soit $\sigma : U \to P_U$ une autre section locale. Alors, il existe une application lisse $g : U \to G$ telle que $\sigma(u) = \sigma_0(u)g(u)$ sur $U$, et on a :

$$\sigma^\star(\omega)(u) = g(u)^{-1}\sigma_0^\star(\omega)(u)g(u) + g(u)^{-1}dg(u).$$

À présent, supposons que l'on ait une représentation $\rho : G \to GL(V)$. On possède alors naturellement une représentation $d\rho : Lie(G) \to End(V)$. Dès lors, si $E = P \times_G V$ est le fibré vectoriel associé à cette représentation, et si $E_U = U \times V$ est la trivialisation induite d'une trivialisation $P_U$, alors la dérivée covariante adopte la forme :

$$\nabla : \Omega^0(U; V) \to \Omega^1(U; V),\, \sigma \mapsto d\rho(\tilde{\omega})(\alpha) + d\alpha\,,$$

lorsque $\sigma(u) = (u,\alpha(u))$ est l'expression locale de la section locale $\sigma$ sur $U$, avec $\alpha : U \to V$ lisse.

# Références


[1] John W. Morgan, "The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds", Princeton University Press (1996), numéro pages : 38, 39, 40, 41, 48, 49

[2] Thomas Friedrich, "Dirac Operators in Riemannian Geometry", Graduate Studies in Mathematics vol.25 (2000), numéro pages : 23

[3] Liviu I. Nicolaescu, "Notes on Seiberg-Witten Theory", Graduate Studies in Mathematics vol.28 (2000), numéro pages : 23, 26, 35, 37, 40

[4] Claire Voisin, "Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe", SMF (2004), numéro pages : 55

[5] C.Taubes, "Self-dual connexions on non-self-dual four-manifolds", J. Differ. Geom. (1982), numero pages : 36

[6] C.Taubes, "The Seiberg-Witten invariant and symplectic forms", Math. Res. Letters 1 (1994), numero pages : 52

[7] C.Taubes, "More constraints on symplectic manifolds from Seiberg-Witten equations", Math. Res. Letters 2 (1995), numero pages : 52

[8] C.Taubes, "The Seiberg-Witten and Gromov invariants", Math. Res. Letters 2 (1995), numero pages : 52