

MÉMOIRE DE M2-MFA

PAR PAUL BRISSON

De l'homologie à la chirurgie : le dénouement est proche !

ENCADRÉ PAR MARCO GOLLA



Année Universitaire 2021-2022

Remerciements

Les cours du M2-MFA sont assez intenses et provoquent parfois des dérèglements de la motivation... Ainsi, je tiens à remercier sincèrement Marco Golla, mon directeur de mémoire, qui a su faire face à cette pathologie dont j'ai été frappé. Je le remercie d'être resté aussi disponible et à mon écoute tout au long de ce deuxième semestre. Enfin, je le remercie d'avoir piqué ma curiosité en me donnant un aperçu du monde très mystérieux de la topologie en basse dimension.

Je tiens également à remercier Gabriel Rivière et Erwan Brugallé pour les discussions sur mon orientation, parfois très courtes mais qui m'auront fait beaucoup réfléchir. Merci aussi pour tous leurs cours/td auxquels c'est toujours un plaisir d'assister.

L'enseignement dispensé par le Master M2-MFA est très riche et varié. Merci donc également à l'ensemble des enseignants-chercheurs de ce parcours.

Ce mémoire doit également beaucoup à Samantha Allen et Charles Livingston et à leur article *Twisting and unknotting operations*, dont les premières pages m'ont servi de support majeur.

Je remercie ma famille et aussi Alice pour ses conseils sages et moins sages... Merci aussi à Jacques de m'accompagner avec tant d'implication depuis huit ans déjà!

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	La torsion de Dehn	3
1.2	Objectifs du mémoire	5
2	Boite à outils	6
2.1	Un peu de chirurgie	6
2.2	Exemples	8
2.3	Aspect tri-dimensionnel de la chirurgie	11
2.4	Aspect quadridimensionnel de la chirurgie	14
3	Obstruction via l'homologie des revêtements ramifiés	15
3.1	En théorie	15
3.2	En pratique	19
4	Obstruction via la forme d'entrelacement	20
4.1	En théorie	20
4.2	En pratique	25
5	Conclusion	28
6	Bibliographie	29

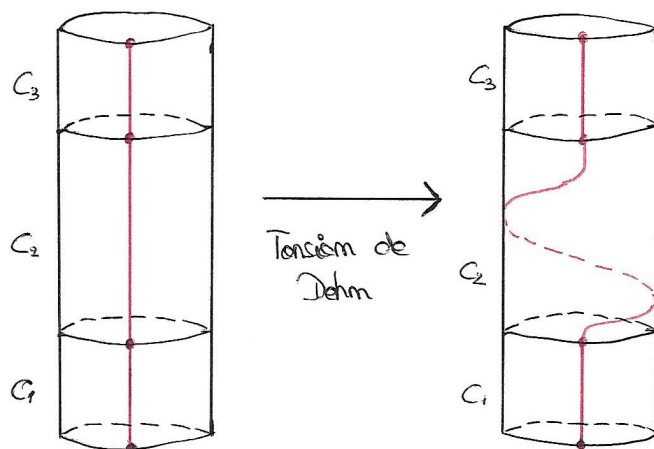
1 Introduction

Comment dénouer un nœud ? Avec un petit coup de ciseaux bien sûr ! Cependant, cela suppose d'avoir cet outil. Comment faire sans ? Quelles solutions avons-nous ?

En 1994, Ohyaïma^[2] se penche sur la question. Il montre alors qu'il est toujours possible de dénouer un nœud avec deux torsions de Dehn (en anglais, un « twist »). Mais qu'est-ce donc qu'une torsion de Dehn ?

1.1 La torsion de Dehn

Il est possible de la représenter ainsi :



Formellement cela conduit à :

Définition 1 Soit C un cylindre que l'on décompose en trois cylindres C_1, C_2 et C_3 . Considérons

$$\text{alors } tw : \begin{cases} C \rightarrow C \\ (e^{i\theta}, t) \mapsto (e^{i\theta+2\pi t}, t) \text{ si } (e^{i\theta}, t) \in C_2 \\ (e^{i\theta}, t) \mapsto (e^{i\theta}, t) \text{ sinon} \end{cases} .$$

Tout homéomorphisme isotope à tw est appelé une torsion de Dehn le long de γ , où γ est un méridien du cylindre C_2 .

Nous pouvons étendre cette définition à une surface F quelconque, mais nous n'utiliserons la torsion de Dehn que dans le cadre de la définition 1. Rappelons brièvement la définition d'un nœud.

Définition 2 Un nœud K est un ensemble de points de S^3 tel que l'on dispose d'un homéomorphisme $S^1 \rightarrow K \hookrightarrow S^3$. En généralisant, un entrelacs $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ est un ensemble de points de S^3 tel que l'on dispose d'un homéomorphisme $\bigsqcup_{i=1, \dots, n} S^1 \rightarrow L \hookrightarrow S^3$ où \bigsqcup signifie que l'union est disjointe.

Nous ne considérons dans ce mémoire que des nœuds qui ont un nombre fini de croisements (nous excluons ainsi les nœuds sauvages).

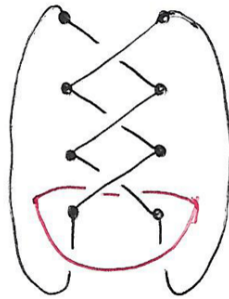
Rappelons également la définition du type de nœud d'un nœud :

Définition 3 Une transformation isotope d'un espace topologique X est la donnée d'une famille d'homéomorphismes $(h_t)_{0 \leq t \leq 1}$ telle que :

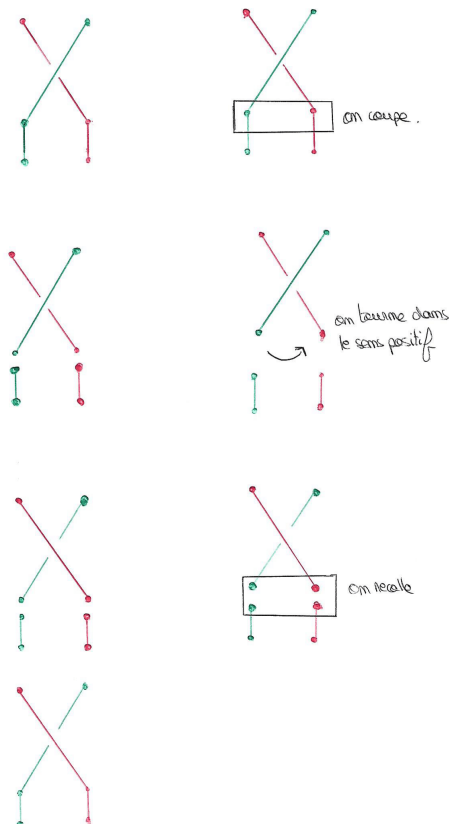
- $\forall 0 \leq t \leq 1, h_s : X \rightarrow X, h_0 = id_X.$
- $H : [0, 1] \times X \rightarrow X$ définie par $H(t, p) = h_t(p)$ est continue.

Nous dirons que deux nœuds sont du même type s'il existe une transformation isotope envoyant l'un sur l'autre.

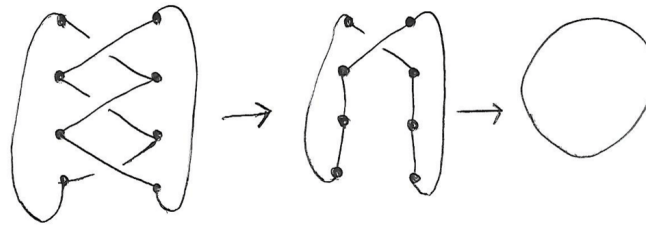
Expliquons à présent ce que nous entendons par dénouer un nœud avec une torsion de Dehn. Prenons ici l'exemple du nœud de trèfle.



Si nous réalisons une torsion de Dehn au niveau du cercle rouge, nous obtenons :



Cette torsion permet de dénouer le nœud en transformant un sur-croisement en sous-croisement.



Remarquons que nous avons fait un petit raccourci par rapport à la définition. En effet, nous n'avons pas évoqué le cylindre sur lequel se ... déroule la torsion ! Cependant, nous pouvons très bien imaginer que le nœud est « porté » sur un voisinage cylindrique du cercle rouge. Ainsi la torsion de Dehn est une opération locale.

Il y a deux informations associées à la torsion de Dehn que nous n'avons pas encore évoquées : le signe et le nombre d'entrelacements.

Le signe est $s = \pm 1$. Il permet d'encoder l'information du sens dans lequel on tourne.

Définition 4 *Lorsqu'une torsion de Dehn est effectuée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on dit qu'elle est positive ou de signe +1. Lorsqu'elle est effectuée dans le sens des aiguilles d'une montre, on dit qu'elle est négative ou de signe -1.*

Le nombre d'entrelacements de la torsion correspond quant à lui au nombre d'intersections du nœud avec le disque rouge délimité sur le schéma précédent par le cercle rouge.

Définition 5 *On définit le nombre d'entrelacements d'une torsion comme le nombre d'entrelacements du nœud K (celui qui subit la torsion) avec le nœud trivial (qui représente l'endroit où on effectue la torsion).*

Sur l'exemple précédent, nous avons donc effectué une torsion de Dehn de signe $s = 1$ et de nombre d'entrelacements 2.

Ainsi, une torsion de Dehn permet de changer le type de nœud d'un nœud.

1.2 Objectifs du mémoire

Si nous pouvons toujours dénouer un nœud avec deux torsions (Ohyama, 1994), est-il possible d'arriver au même résultat avec moins d'efforts encore ? Autrement dit, peut-on systématiquement dénouer un nœud avec une seule torsion ?

Malheureusement, la réponse est non, excepté dans certains cas. Beaucoup de questions se posent alors : quels types de nœud sont si « faciles » à dénouer ? Comment les repérer ? Quels sont les irréductibles nœuds qui résistent encore et toujours à la torsion unique ?

Ce mémoire ne prétend pas répondre à toutes ces questions. Néanmoins, il propose d'examiner quelques pistes. En effet, nous nous intéressons ici aux nœuds que l'on peut dénouer d'une seule torsion de signe s et de nombre d'entrelacements l (notée (s, l)) pour mieux identifier ceux qui n'ont pas cette propriété.

Nous allons voir que les nœuds qui se dénouent avec une seule torsion jouissent de propriétés remarquables. Celles-ci vont nous permettre de développer des obstructions, c'est-à-dire des outils pour repérer des nœuds qui ne peuvent pas être dénoués d'une seule torsion (s, l) .

Plus précisément, nous allons déterminer le premier groupe d'homologie d'un revêtement cyclique de degré d de la sphère S^3 ramifié sur K , où K est un nœud que l'on peut dénouer d'une seule torsion (s, l) . Nous caractériserons ensuite la forme d'intersection de ce revêtement cyclique en l'identifiant comme le bord d'une 4-variété.

2 Boite à outils

Présentons des pré-requis nécessaires pour attaquer le problème de la torsion unique.

2.1 Un peu de chirurgie

Dans le cadre de ce mémoire, la chirurgie est un outil essentiel. Le principe est le suivant : on plonge un nœud K dans S^3 , puis on l'épaissit (ce que nous pouvons faire car le nœud n'est pas sauvage). Cela signifie que nous disposons d'un voisinage tubulaire de K dans S^3 , appelons-le T . Topologiquement, il s'agit d'un tore plein, à savoir $D^2 \times S^1$. Retirons ensuite N à S^3 , puis recollons un (autre) tore solide. Cette opération peut sembler un peu étrange et toute la subtilité réside ici dans le terme « recoller ». En effet, il n'est pas garanti qu'après son passage dans la salle d'opération, S^3 soit toujours S^3 ...

Commençons par donner une définition formelle au terme « recoller ».

Définition 6 Soit N un voisinage tubulaire d'un nœud K vu dans S^3 . Étant donné un homéomorphisme $h : \partial(S^3 \setminus N) \rightarrow \partial T$, on peut construire l'espace $X = (S^3 \setminus N) \cup_h T = (S^3 \setminus N) \cup T / \sim$, où $x \sim y$ signifie $h(x) = y$. On dit alors que l'on a effectué une chirurgie le long de K .

Lorsque nous retirons N à S^3 , nous « ajoutons/créons » du bord. Ce bord coïncide avec celui de l'objet que nous avons retiré, à savoir un tore. C'est donc l'homéomorphisme de recollement h qu'il nous faut comprendre. Nous avons en fait la caractérisation suivante.

Proposition 1 h est entièrement déterminée (à isotopie près) par l'image d'un méridien

$$\mu = \partial \mathbb{D}^2 \times \{*\}.$$

□ *Démonstration :*

La clé est de voir qu'il est possible de recoller le bord du tore en deux étapes. Regardons le tore comme une boule sur laquelle est attachée une 2-anse, appelée plus communément une poignée. Pour cela, nous la décomposons en : $T \simeq B^3 \cup (D^2 \times I)$.



Puisque des 3-variétés homéomorphes sont également difféomorphes et que l'identification \simeq est un homéomorphisme, aucun choix n'entre en jeu à ce stade. Par ailleurs, cela justifie aussi le « à isotopie près » : composer h avec une isotopie ne change pas le type d'homéomorphisme au sens où nous obtiendrons deux variétés homéomorphes.

Commençons maintenant à recoller le tore.

La première étape consiste à recoller la 2-anse. Cela se fait via $h|_{\mathbb{I} \times \partial D^2}$. La deuxième étape consiste à recoller le reste, à savoir une boule. Oui mais le lemme d'Alexander stipule que tout homéomorphisme $f : S^2 \rightarrow S^2$ s'étend de manière unique en un homéomorphisme $F : B^3 \rightarrow B^3$. Donc à homéomorphisme près, cette deuxième étape est uniquement déterminée.

Finalement, le recollement n'est bien déterminé que par $h(\{*\} \times \partial D^2)$. Autrement dit, la variété finale ne dépend que de l'image d'un méridien !

■

Remarque 1 *Il y a cependant un choix que nous n'avons pas mentionné : le choix du voisinage tubulaire N . Heureusement pour nous, ce choix n'influence pas le résultat de la chirurgie. En effet, nous pouvons montrer que tout autre voisinage tubulaire N' est isotope à N .*

Nous allons maintenant faire un petit détour par l'algèbre pour donner une caractérisation simple de ce recollement. Puisque h est un homéomorphisme, il induit un isomorphisme entre les groupes d'homologie singuliers $H_*(\partial(S^3 \setminus N))$ et $H_*(T)$. Plus précisément, voici l'application qui va nous intéresser :

$$h_{1*} : \mathbb{Z}^2 \simeq H_1(T) \rightarrow H_1(\partial(S^3 \setminus N)) \simeq \mathbb{Z}^2$$

Choisissons une base pour $H_1(T)$, à savoir $([\mu_0], [\lambda_0])$, où μ_0 est un méridien et λ_0 une longitude de T . Pour $H_1(\partial(S^3 \setminus N))$, nous allons faire un choix de base bien particulier.

Nous disposons des deux inclusions suivantes : $i_1 : \partial(S^3 \setminus N) \hookrightarrow S^3 \setminus N$ et $i_2 : \partial(S^3 \setminus N) \hookrightarrow N$. Ces deux inclusions induisent des morphismes au niveau des groupes d'homologie.

Pour la première inclusion :

$$i_{1*} : \mathbb{Z}^2 \simeq H_1(\partial(S^3 \setminus N)) \rightarrow H_1(S^3 \setminus N) \simeq \mathbb{Z}.$$

En particulier, $\ker(i_{1*}) \simeq \mathbb{Z} = \langle [\lambda] \rangle$ (car i_{1*} n'est pas le morphisme nul : $i_{1*}(\mu) \neq 0$ où μ est un méridien) pour un unique λ à homologie près. De plus, nous savons que K borde une surface dans S^3 . Il s'agit de la fameuse surface de Seifert que nous noterons F . Mais alors, $(S^3 \setminus N) \cap F$ est encore une surface que nous noterons abusivement F . Nous obtenons enfin que $\partial F = \lambda$.

Pour la deuxième inclusion :

$$i_{2*} : \mathbb{Z}^2 \simeq H_1(\partial(S^3 \setminus N)) \rightarrow H_1(N) \simeq \mathbb{Z}.$$

De la même manière, $\ker(i_{2*}) \simeq \mathbb{Z} = \langle [\mu] \rangle$ pour un unique μ à homologie près. Nous pouvons également identifier μ comme le bord d'une surface, à savoir celle d'un disque méridien de $N \simeq T$.

Nous voilà en possession d'une « bonne » base pour $H_1(\partial(S^3 \setminus N))$, à savoir $([\lambda], [\mu])$.

Avec ces choix de base, nous pouvons écrire $h_{1*}(\mu_0) = p[\lambda] + q[\mu]$ où p, q sont des nombres premiers entre eux. Nous pourrions nous demander pourquoi ne pas prendre des nombres entiers non premiers entre eux, mais nous ne voulons pas détailler ce point ici pour simplifier notre étude.

Définition 7 *L'entier q/p s'appelle la pente de la chirurgie, et on parle de q/p -chirurgie le long de K . Nous noterons $S_{q/p}^3(K)$ la variété ainsi obtenue.*

Il est possible de généraliser : soit $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ un entrelacs et $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$ où $r_1 = \frac{q_1}{p_1}, \dots, r_n = \frac{q_n}{p_n}$ des instructions de chirurgie pour chacun des noœds L_i .

Nous noterons $S_{r_1, \dots, r_n}^3(L_1, \dots, L_n) = S_r^3(L)$ la 3-variété obtenue en réalisant simultanément l'opération de chirurgie sur chacun des facteurs.

Nous avons donc encodé l'information de recollement dans un nombre rationnel, ce qui est une véritable simplification. Regardons si nous pouvons en pratique réaliser des chirurgies.

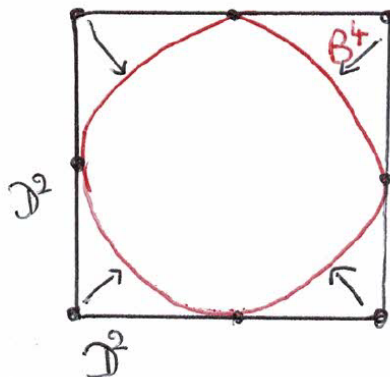
2.2 Exemples

Commençons par étudier le nœud trivial que nous noterons U (pour unknot en anglais). Nous avons la caractérisation importante suivante :

Proposition 2 *$S^3 \setminus N(U)$ est un tore solide.*

□ *Esquisse de démonstration :*

Montrons que $D^2 \times D^2$ se rétracte sur B^4 .



On définit une application de rétraction sur chaque rayon pour obtenir un homéomorphisme de $D^2 \times D^2$ sur B^4 . Finalement, en prenant le bord, il vient : $\partial B^4 \simeq (S^1 \times D^2) \cup (D^2 \times S^1)$. Il en résulte une décomposition de S^3 en deux tores solides de sorte que le méridien du premier soit une longitude du deuxième.

■

Remarque 2 *Plus généralement, le raisonnement précédent permet de montrer que $B^a \times B^b \simeq B^{a+b}$ et ainsi $S^{a+b-1} \simeq (B^a \times S^{b-1}) \cup (S^{a-1} \times B^b)$.*

Autrement dit, effectuer une chirurgie le long du nœud trivial revient à recoller deux tores solides le long de leur bord.

Théorème 1 *On a en particulier :*

$$S_0^3(U) \simeq S^2 \times S^1$$

$$S_{1/k}^3(U) \simeq S_\infty^1(U) \simeq S^3 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$S_{p/q}^3(U) = L(p, q) \text{ où } L(p, q) \text{ désigne l'espace lenticulaire.}$$

□ *Démonstration :*

Premier cas : $\frac{1}{0} = \infty$ -chirurgie

Rappelons que la chirurgie est complètement déterminée (à isotopie près) par l'image d'un méridien. Ici, un méridien est envoyé sur un méridien et pas de longitude. En observant que l'application identité convient comme application de recollement, on en déduit bien :

$$S_\infty^3(U) = S^3$$

Remarque 3 *Dans ce raisonnement, nous n'avons pas du tout utilisé le fait que l'on travaillait avec le nœud trivial. Nous avons donc montré qu'effectuer une ∞ -chirurgie le long d'un nœud K revenait à ne rien faire : $S_\infty^3(K) \simeq S^3$.*

En particulier, dans le cas d'un entrelacs : $S_{r_1, \infty}^3(L_1, L_2) \simeq S_{r_1}^3(L_1)$.

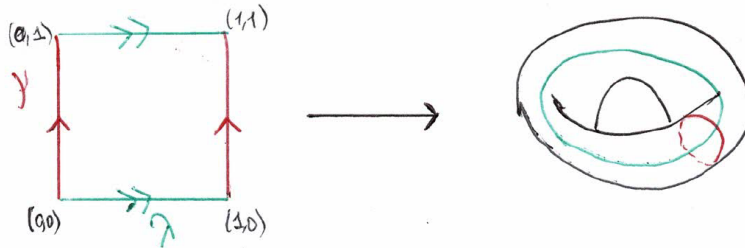
Deuxième cas : $\frac{1}{k}$ -chirurgie

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons à présent comment passer du cas ∞ au cas $\frac{1}{k}$. Considérons l'application linéaire donnée dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 par :

$$f_M : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{où } M = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f est un isomorphisme ($\det(M) = 1$) qui induit un homéomorphisme que nous noterons toujours $f : T^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq T^2$.

Prenons comme domaine fondamental le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ de sorte que $\{0\} \times [0, 1]$ correspond à un méridien du tore μ (en rouge) tandis que $[0, 1] \times \{0\}$ correspond à une longitude λ (en vert).



Ensuite, f descend au niveau homologique et induit en particulier l'isomorphisme de groupes suivant :

$$f_* : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 \simeq H_1(T^2) \longrightarrow H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z}^2 \\ [\sigma] \longmapsto [f\sigma] \end{cases}.$$

Choisissons une base (λ, μ) de $H_1(\mathbb{T}^2)$ qui correspond à celle du domaine fondamental comme sur le dessin ci-dessus.

Nous avons alors :

$$f_*[\lambda] = [f\lambda] = \left[M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda$$

et

$$f_*[\mu] = [f\mu] = \left[M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = k\lambda + \mu.$$

Autrement dit, dans la base (λ, μ) , f_* est également donnée par M . En composant f , un homéomorphisme, avec l'application identité, nous ne changeons pas le résultat de la chirurgie modulo le fait que l'instruction de chirurgie est différente : $[\mu] \xrightarrow{f_*} k \cdot [\lambda] + [\mu] \xrightarrow{id_*} k \cdot [\lambda] + [\mu]$.

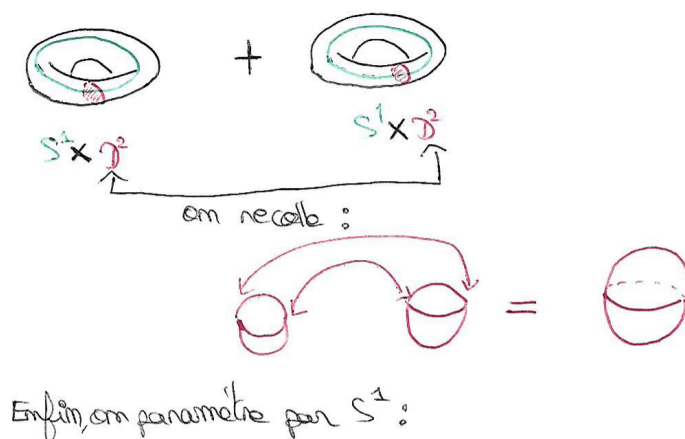
Puisque $S^3 \setminus N(U) \simeq T$, f s'étend en un homéomorphisme de $S^3 \setminus N(U)$. Ainsi, réaliser une ∞ -chirurgie le long du nœud trivial revient donc, en composant avec f , à réaliser une $\frac{1}{k}$ -chirurgie. Nous obtenons :

$$S^3 \simeq S^3_\infty(U) \simeq S^3_{\frac{1}{k}}(U)$$

Troisième cas : 0-chirurgie

Rappelons-nous que S^3 peut être vue comme le recollement de deux tores solides où le méridien du premier est une longitude du deuxième, et réciproquement. Ainsi, si nous regardons $S^3 \setminus N(U)$ comme un tore solide, un méridien de $N(U)$ est une longitude de $S^3 \setminus N(U)$.

Effectuer une $0 = \frac{0}{1}$ -chirurgie consiste à envoyer un méridien sur une seule longitude. Dès lors, notre opération consiste à coller ensemble deux tores solides le long de leur méridien :



Finalement, nous obtenons bien :

$$S_0^3(U) \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$$

Quatrième cas : $\frac{p}{q}$ -chirurgie

Le résultat d'une $\frac{p}{q}$ -chirurgie peut être l'une des définitions des espaces lenticulaires.

■

Lorsque K est un nœud quelconque, $S_{q/p}^3(K)$ n'est pas aussi facile à déterminer. Il existe cependant des astuces qui permettent de simplifier les instructions de chirurgie. Détaillons-les maintenant.

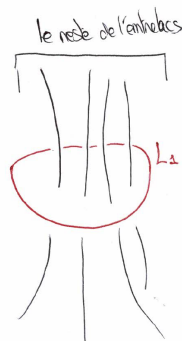
2.3 Aspect tri-dimensionnel de la chirurgie

Même si nous ne pouvons pas déterminer explicitement $S_{q/p}^3(K)$, sommes-nous capables de donner des conditions pour que deux 3-variétés construites par chirurgie soient les mêmes, c'est-à-dire pour que $S_r^3(L) \simeq S_{r'}^3(L')$?

Dans le cas favorable où nous disposons d'un homéomorphisme $h : S^3 \setminus L \rightarrow S^3 \setminus L'$ tel que l'image des instructions de chirurgie de L par h coïncide avec les instructions de chirurgie de L' (ce qui signifie $h_*(r) = r'$), alors $S_r^3(L) \simeq S_{r'}^3(L')$.

En pratique, nous n'allons pas chercher à prouver l'existence d'un tel homéomorphisme h . Nous allons plutôt partir d'un entrelacs muni d'instructions de chirurgie et essayer de simplifier ses instructions de chirurgie via un homéomorphisme « bien choisi ». Nous partons donc d'une 3-variété construite par chirurgie le long de l'entrelacs L . Nous lui appliquons un homéomorphisme défini sur $S^3 \setminus L$, ce qui nous assure d'obtenir la « même » 3-variété. Cette nouvelle 3-variété est construite à partir d'un entrelacs L' et d'instructions de chirurgie r' *a priori* différents. En choisissant astucieusement notre homéomorphisme, nous pouvons donc espérer simplifier les instructions de chirurgie r .

Voici la configuration particulière que nous allons étudier. Soit $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ un entrelacs muni d'instructions de chirurgie r_1, \dots, r_n où L_1 est le nœud trivial. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que L_1 est un cercle horizontal et que le reste de l'entrelacs traverse orthogonalement l'intérieur de ce cercle. Voici l'image qu'il vaut avoir en tête :



Alors le complémentaire d'un voisinage tubulaire de L_1 (qui contient le reste de l'entrelacs) est un tore solide. Faisons subir à ce tore solide une torsion de signe $s = \pm 1$:

Théorème 2 *Le nouvel entrelacs $L = L'_1 \cup \dots \cup L'_n$ muni des instructions de chirurgie*

$$\left(\frac{1}{s+\frac{1}{r_1}}, r_2 + s \cdot lk(L_2, L_1)^2, \dots, r_n + s \cdot lk(L_n, L_1)^2\right)$$

permet de construire la même 3-variété :

$$S_r^3(L) \simeq S_{r'}^3(L').$$

□ *Démonstration :*

Il s'agit de déterminer les nouvelles instructions de chirurgie.

Déterminons d'abord r'_1 dans le cas d'une torsion positive ($s = 1$). Au niveau de l'homologie, la torsion « méridionale » signifie (pour r_1) qu'un méridien est envoyé sur un méridien plus une longitude. Nous avons donc :

$$[\mu_1] \xrightarrow{r_1} a_1[\lambda] + b_1[\mu] \xrightarrow{\text{torsion}} a_1[\lambda] + b_1[\mu + \lambda] = (a_1 + b_1)[\lambda] + b_1[\mu]$$

La nouvelle instruction de chirurgie est donc $\frac{b_1}{a_1+b_1} = \frac{\frac{1}{\frac{a_1}{b_1}+1}}{1+\frac{1}{r_1}}$.

Si la torsion est négative ($s = -1$) :

$$[\mu_1] \xrightarrow{r_1} a_1[\lambda] + b_1[\mu] \xrightarrow{\text{torsion}} a_1[\lambda] + b_1[\mu - \lambda] = (a_1 - b_1)[\lambda] + b_1[\mu]$$

Nous en déduisons bien que le nouveau coefficient de chirurgie est $r'_1 = \frac{1}{-1+\frac{1}{r_1}}$.

Déterminons maintenant r'_2 . Cette fois-ci, la torsion est « longitudinale ». Attention, nous ne pouvons pas directement affirmer qu'une longitude est envoyée sur une longitude plus (ou moins) un méridien. En effet, L_2 peut traverser plusieurs fois l'intérieur du cercle (cf. dessin précédent) et le nombre de méridiens que nous ajoutons n'est plus aussi simple à déterminer.

Prenons λ_2 une longitude préférée de L_2 (lorsque nous effectuons une chirurgie, nous prenons toujours une longitude préférée !). En conséquence, nous avons $lk(L_2, \lambda_2) = 0$. Le nombre de méridiens que nous ajoutons est alors $s \cdot lk(L'_2, \lambda'_2)$ où $L'_2 = tw(L_2)$ et $\lambda'_2 = tw(\lambda_2)$. Qu'attendons-nous pour calculer $lk(L'_2, \lambda'_2)$?

Notons u le nombre de brins de L_2 qui traversent l'intérieur du cercle de bas en haut et d le nombre de brins qui le traversent de haut en bas. Après la torsion, qu'est devenu chaque brin ? Chaque brin a fait un tour autour de tous les autres.

Chaque brin qui traverse de bas en haut vient incrémenter le nombre d'entrelacements de $u - d$ (+1 avec tous les brins qui traversent de bas en haut, -1 avec tous les brins qui traversent de haut en bas). De la même manière, chaque brin qui traverse de haut en bas incrémente le nombre d'entrelacements de $d - u$. Nous en déduisons :

$$lk(L'_2, \lambda'_2) = u(u - d) + d(d - u) = (u - d)^2.$$

Oui mais $d - u$ n'est autre que $lk(L_1, L_2)$ au signe près. D'où $lk(L'_2, \lambda'_2) = lk(L_1, L_2)^2$. Finalement :

$$[\mu_2] \xrightarrow{r_2} a_2[\lambda] + b_2[\mu] \xrightarrow{\text{torsion}} a_2[\lambda + s \cdot lk(L_1, L_2)^2 \mu] + b_2[\mu] = a_2[\lambda] + (b_2 + s \cdot lk(L_1, L_2)^2)[\mu]$$

La nouvelle instruction de chirurgie est donc $r'_2 = s \cdot lk(L_1, L_2)^2 + r_2$.

Le raisonnement pour les autres instructions r_i ($i = 3, \dots, n$) est identique.

■

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 3 *Soit K un nœud que l'on peut dénouer avec une seule torsion (s, l) . Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n^3(K) \simeq S_{n+sl^2, s}^3(U_1, U_2)$$

où U_1, U_2 sont tous les deux dénoués.

□ *Démonstration :*

$$\begin{aligned} S_n^3(K) &\stackrel{*}{\simeq} S_{n, \infty}^3(K, U_2) && \text{car une instruction de chirurgie } \infty \text{ ne change pas la variété.} \\ &\simeq S_{n+sl^2, s}^3(U_1, U_2) && \text{car par hypothèse une torsion } (s, l) \text{ dénoue } K. \end{aligned}$$

■

Remarque 4 *Dans la preuve précédente, le $\stackrel{*}{\simeq}$ mérite une petite précision. Nous pouvons en effet toujours ajouter un nœud muni d'une instruction de chirurgie ∞ . Cependant, U_2 n'est pas « ajouté » au hasard. Par hypothèse, nous savons que l'on peut dénouer K avec une torsion. Il existe donc au moins un endroit où effectuer cette torsion pour justement dénouer K . L'ajout de U_2 , même accompagné d'une instruction de chirurgie ∞ , apporte donc une information cruciale : c'est « ici » qu'il faut réaliser la torsion pour dénouer K !*

Pour des valeurs de \mathbb{N} particulières, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Soit K un nœud qui peut être dénoué avec une seule torsion (s, l) . Alors :*

- $S_{-sl^2}^3(K) \simeq S_{0, s}^3(U_1, U_2)$ avec $lk(U_1, U_2) = l$.
- $S_{-sl^2-s}^3(K) \simeq S_{-s, s}^3(U_1, U_2) \simeq S_{sl^2+s}^3(J)$ pour un certain nœud J .

Ces deux derniers résultats sont pour nous d'une grande importance. En effet, ils fournissent ce que l'on appelle un diagramme de chirurgie des nœuds que nous pouvons dénouer d'une seule torsion (s, l) .

Définition 8 *Soit K un nœud que nous pouvons dénouer d'une seule torsion (s, l) . En vertu du théorème 3, nous avons $S_*^3(K) \simeq S_{*+sl^2, s}^3(U_1, U_2)$ où U_1 et U_2 sont triviaux. Alors dans ce cas, on dit que (U_1, U_2, s) est un diagramme de chirurgie pour K ou encore que U_1 représente K dans $S_s^3(U_2) \simeq S^3$.*

Remarque 5 *Il existe donc deux homéomorphismes ϕ et ψ tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \hookrightarrow & S_s^3(U_2) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \phi \\ K & \hookrightarrow & S^3 \end{array}$$

Même si le résultat d'une chirurgie est difficile à prévoir, nous connaissons théoriquement son premier groupe d'homologie :

Théorème 4 *Soit $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ un entrelacs muni d'instructions de chirurgie $r = (\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}) \in \mathbb{Q}^n$. Alors $H_1(S_r^3(L))$ est engendré par n méridiens μ_1, \dots, μ_n (μ_i correspond au méridien du voisinage tubulaire de L_i) avec les relations $p_i \cdot \mu_i + q_i \cdot \sum_{i \neq j} (lk(K_i, K_j) \cdot \mu_j) = 0$; où $i = 0, \dots, n$.*

□ *Esquisse de démonstration :*

La suite exacte longue relative de $(S^3, S^3 \setminus L)$ montre que $H_1(S^3 \setminus L, \mathbb{Z})$ est libre de rang n . Une base canonique est donnée par les méridiens μ_i . Cependant, le groupe libre $H_1(S^3 \setminus L, \mathbb{Z})$ a des relations. Intuitivement, puisque $S_r^3(L)$ est construit à partir de S^3 , les relations vont dépendre des instructions de chirurgie. Par exemple, lorsque nous effectuons la chirurgie r_1 , nous recollons un tore avec l’instruction $[\mu] \mapsto p_1 \cdot [\lambda] + q_1 \cdot [\mu]$. Ainsi, $p_1 \cdot [\lambda] + q_1 \cdot [\mu]$ correspond à un méridien qui borde un disque méridien. Finalement, $p_1 \cdot [\lambda] + q_1 \cdot [\mu]$ est le bord d’une surface, ce qui fournit bien la relation $p_1 \cdot [\lambda] + q_1 \cdot [\mu] = 0$.

Intéressons-nous maintenant à λ_1 . Celle-ci est le bord d’une surface de Seifert F_1 pour L_1 . Cependant, cette surface de Seifert est perforée par les autres composantes de l’entrelacs, à savoir L_2, \dots, L_n . Les composantes de bord qui résultent de cette perforation sont représentées par les méridiens $\pm\mu_j$. Par ailleurs, chaque L_j perfore algébriquement F_1 $lk(F_1, L_j)$ fois. Cela signifie que λ_1 et $\sum_{j \neq 1} lk(F_1, L_j)\mu_j = \sum_{j \neq 1} lk(L_1, L_j)\mu_j$ bordent ensemble une surface dans $S_r^3(L)$. Autrement dit, $\lambda_1 = \sum_{j \neq 1} lk(L_1, L_j)\mu_j$.

Le raisonnement pour les autres relations est identique.

■

2.4 Aspect quadridimensionnel de la chirurgie

Dans cette section, nous allons montrer qu’une 3-variété M obtenue par chirurgie à coefficients entiers peut être observée de la quatrième dimension du point de vue suivant. Le bord de la 4-variété obtenue à partir de la 4-boule en recollant des 2-anses fournit la même 3-variété ! Précisons tout cela.

Définition 9 Une 2-anse est un espace topologique homéomorphe à $D^2 \times D^2$ où

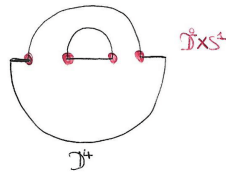
$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Définition 10 Soit B^4 la 4-boule. Étant donné des plongements (d’images disjointes)

$$h_i : D^2 \times S^1 \rightarrow \partial B^4,$$

nous pouvons construire l’espace $X = (B^4 \bigsqcup_{f_i} D^2 \times D^2) / \sim$, où $x \sim y$ signifie $x = h_i(y)$. On dit alors que l’on a collé des 2-anses sur la 4-boule.

Remarquons que nous ne pouvons pas attacher la 2-anse n’importe comment, au sens où l’attachement correspondant au tore solide du bord n’est pas arbitraire. *A priori*, nous avons deux paramètres (p, q) à choisir pour déterminer complètement l’attachement de ce tore. Cependant, nous sommes obligés de coller un méridien sur un méridien, comme l’atteste le schéma suivant :



Autrement dit, l'attachement de la 2-anse n'est déterminé que par un seul paramètre, à savoir p le nombre de longitudes. Cela nous donne une caractérisation particulière des chirurgies à coefficients entiers :

Théorème 5 *Soit $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ un entrelacs muni d'instructions de chirurgie $r = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$. Soit W la 4-variété obtenue en recollant n 2-anses disjointes sur la 4-boules le long de l'entrelacs L via les instructions de chirurgie $(\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n})$. Alors $\partial(W) \simeq S_r^3(L)$.*

□ *Esquisse de démonstration :*

Nous venons de voir qu'attacher une 2-anse via des plongements h_i revenait à faire une $\frac{1}{p}$ -chirurgie, que nous pouvons très bien effectuer le long d'un voisinage tubulaire de L_i . Regardons de plus près le bord de la 4-variété obtenue. Il s'agit de $[S^3 \setminus h_i(D^2 \times S^1)] \cup_{h_i} (S^1 \times D^2)$. Oui mais une longitude (resp un méridien) de $D^2 \times S^1$ est un méridien (resp. une longitude) de $S^1 \times D^2$. Cela revient donc bien à faire une $\frac{p}{1} = p$ -chirurgie, i.e. une chirurgie à coefficients entiers.

Réciproquement, toute chirurgie à coefficients entiers (q_1, \dots, q_n) peut être vue comme le bord de la 4-boule à laquelle sont attachées n 2-anses disjointes paramétrées par $(\frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_n})$.

■

3 Obstruction via l'homologie des revêtements ramifiés

3.1 En théorie

Théorème 6 *Soit K un nœud. Alors pour tout $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, il existe un revêtement cyclique de la sphère S^3 , de degré d , et ramifié sur K .*

□ *Démonstration :*

Nous reprenons ici la construction du cours « Branched covers in low dimensions » donné par Marco Golla en 2021/2022.

Nous commençons dans le cas où le revêtement est de degré fini. Soient $d \in \mathbb{N}$, K un nœud et N_K un petit voisinage tubulaire fermé de K . Considérons \hat{F} une surface de Seifert pour K .

Alors $\hat{F} \cap N_K$ est un anneau. Posons $F = \hat{F} \setminus \overset{\circ}{N}_K \subset S^3 \setminus \overset{\circ}{N}_K$, où $\overset{\circ}{N}_K$ désigne l'intérieur de N_K . En fait, F n'est pas une surface de Seifert pour K ... mais presque ! Même si nous avons pris de la distance par rapport à K , le bord de F peut être vu comme une copie de K projeté sur le bord du voisinage tubulaire N_K .

Considérons maintenant un voisinage fermé N_F de F tel que $N_F \simeq F \times [-1, 1]$. Posons alors $M_F = S^3 \setminus (N_K \cup N_F)$. Nous pouvons donc voir S^3 comme un puzzle en trois morceaux.

N_F et M_F sont toutes les deux des variétés à bord. Le bord de $N_F \simeq F \times [-1, 1]$ est composé de $F^+ \simeq F \times \{1\}$; $F^- \simeq F \times \{-1\}$ et de $F^{[-1,1]} \simeq \partial F \times [-1, 1]$. Le bord de M_F est composé de $E^+ \simeq F^+$, $E^- \simeq F^-$ et de $E^\partial \simeq \partial M_F \cap \partial N_K$.

Notre objectif est ici de construire un revêtement ramifié cyclique de degré d . Ainsi, considérons d copies de M_F et N_F : M_0, \dots, M_{d-1} et N_0, \dots, N_{d-1} (nous indexons les composantes via $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$). Pour chacune de ces copies, nous disposons d'un difféomorphisme qui identifie la copie à la pièce originale. Par exemple, pour M_i et N_j , nous disposons de difféomorphismes $h_i^{M_F} : M_i \rightarrow M_F$ et $h_j^{N_F} : N_j \rightarrow N_F$.

Il est temps d'assembler les pièces du puzzle. Nous allons coller ensemble d copies de M_F et N_F . Notre application de recollement n'est autre que :

$$h : \begin{cases} \bigsqcup_i (E_i^+ \cup E_i^-) \longrightarrow \bigsqcup_i (F_i^- \cup F_{i+1}^+) \\ x \longmapsto \begin{cases} (h_i^{N_F})^{-1}(h_i^{M_F}(x)) & \text{si } x \in E_i^- \\ (h_{i+1}^{N_F})^{-1}(h_i^{M_F}(x)) & \text{si } x \in E_i^+ \end{cases} \end{cases}$$

Posons : $\hat{Y} = (\bigsqcup_i (M_i \cup N_i)) / (x \sim h(x))$.

Nous venons de construire un revêtement de degré $d : \hat{Y} \rightarrow S^3 \setminus N_k$.

Rappelons que :

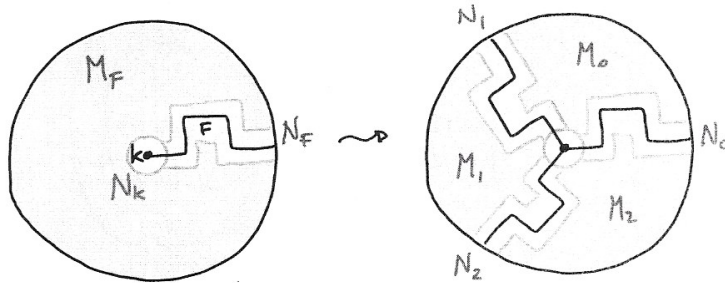
Lemme 1 *Le revêtement fini d'un tore est encore un tore.*

Remarquons qu'un longitude se relève en d longitudes disjointes tandis qu'un méridien du tore relevé fait d fois le tour du méridien du tore d'en bas. Maintenant, nous allons « boucher le trou » dans le relevé de $S^3 \setminus N_K$. Nous recollons un tore solide de sorte qu'un méridien coïncide avec l'image réciproque d'un méridien (au sens ensembliste). Ainsi le recollement est déterminé par $[\mu] \mapsto 1 \cdot [\mu]$. Nous sommes tentés d'y penser comme une ∞ -chirurgie, mais ce n'est pas le cas. En effet, ici le trou est déjà fait.

Notons Y la 3-variété ainsi obtenue.

Il s'agit maintenant de prolonger notre application en un revêtement ramifié sur K . Nous procédons de la manière suivante : $\begin{cases} D^2 \times S^1 \rightarrow D^2 \times S^1 \\ (z, t) \longmapsto (z^q, t) \end{cases}$.

Nous venons de construire un revêtement cyclique d'ordre d , ramifié sur K . Voici un exemple¹ pour $d = 3$:



Pour le cas $d = \infty$, nous faisons exactement le même raisonnement. La seule différence réside dans l'application de recollement h ainsi que dans le nombre de copies de M_F et N_F considérées. Ainsi, nous considérons « \mathbb{Z} » copies que nous indexons par $\dots\mathbb{Z}$. Au niveau de h la seule différence est le monde dans lequel vit i . Dans le cas de degré d fini, nous avons \bigsqcup_i avec $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Dans le cas infini, nous avons \bigsqcup_i avec $i \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, pour le revêtement infini, nous ne bouchons pas le trou.

■

1. Schéma réalisé par Marco Golla lors du cours « Branched covers in low dimensions »

Théorème 7 *Soit K un nœud. Notons $M_q(K)$ le revêtement cyclique de degré q de S^3 , ramifié sur K . Supposons que K peut être dénoué par une torsion (s, l) où l est divisible par q . Alors $H_1(M_q(K), \mathbb{Z})$ est généré par q éléments en tant que groupe. Si $l = 0$, $H_1(M_\infty(K), \mathbb{Z})$ est généré par un seul élément en tant que $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -module.*

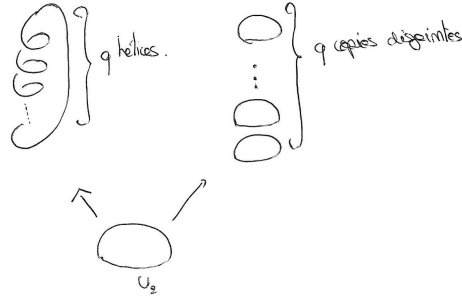
□ *Démonstration :*

Nous commençons par le cas du degré fini. Soit $q \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, nous disposons d'un diagramme de chirurgie pour $K : (U_1, U_2, s)$. Ce qui signifie que $(S^3, K) \simeq (S^3_s(U_1), U_2)$. À partir de ce diagramme de chirurgie, nous allons construire un diagramme de chirurgie pour le revêtement ramifié $\Sigma_q(K)$. Nous commençons par considérer le revêtement cyclique de degré q ramifié sur $U_1 : \Sigma_q(U_1) \rightarrow (S^3, U_1)$. En fait, puisque U_1 est le nœud trivial, le théorème 1 nous assure que $\Sigma_q(U_1) \simeq S^3$.

Sous certaines conditions, nous allons montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}_1 \subset S^3 \setminus N(\tilde{U}_2) & \xrightarrow{\text{faire } q \text{ fois ?-chirurgies}} & \Sigma_q(K) \\
 \downarrow \text{ramifié sur } U_1 & & \downarrow \text{ramifié sur } K \\
 U_1 \subset S^3 \setminus N(U_2) & \xrightarrow{\text{faire } s\text{-chirurgie}} & K \subset S^3
 \end{array}$$

Regardons maintenant $U_2 \hookrightarrow (S^3, U_1)$. Puisque U_2 est disjoint de U_1 , le relèvement de U_2 se traite avec la partie « honnête » du revêtement ramifié (celle où il n'y a pas de ramifications). Pour le relevé de U_2 nous avons par exemple ces deux possibilités (il y a des possibilités intermédiaires pour chaque diviseur de q) :



Via la topologie algébrique, nous disposons d'une application :

$$\Pi_1(U_2) \rightarrow \Pi_1(S^3 \setminus U_1) \rightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

Nous savons que le relèvement de U_2 est connexe dès lors que la composée des applications ci-dessus est surjective. Nous savons aussi que l'application $\mathbb{Z} \simeq \Pi_1(U_2) \rightarrow \Pi_1(S^3 \setminus U_1) \simeq \mathbb{Z}$ est donnée par $1 \mapsto l = lk(U_1, U_2)$. Nous en déduisons que le relèvement de U_2 est connexe dès lors que l est inversible modulo q . Donc en particulier, lorsque q divise l , le relèvement de U_2 n'est pas connexe et ainsi U_2 se relève en q nœuds triviaux.

Remarque 6 Si q est un nombre premier, alors le relèvement de U_2 n'est pas connexe si et seulement si q divise l .

Lorsque q divise l , nous pouvons donc relever U_2 en $q \cdot U_2$ et ensuite réaliser une certaine chirurgie sur chacun des relevés. Encore faut-il pouvoir réaliser cette chirurgie, c'est à-dire pouvoir relever la pente s . En fait, le même raisonnement montre que la pente γ se relève en q pentes dès lors que q divise $lk(\gamma, U_1) = lk(U_1, U_2) = l$.

A priori nous ne pouvons pas déterminer à l'avance le coefficient de chirurgie affecté à chacun des relevés des U_2 . Cependant par symétrie du revêtement (le revêtement est cyclique!), nous pouvons affirmer que toutes les chirurgies effectuées sur les relevés de U_2 ont le même coefficient.

En conclusion, nous avons bien montré (théorème 4) que dans le cas où q divise l , $\Sigma_q(K)$ est engendré par q éléments.

Traisons à présent le cas où $q = \infty$ et $l = 0$.

Nous faisons le même raisonnement. Nous obtenons que \tilde{U}_2 le relèvement de U_2 est connexe si et seulement si l est inversible modulo \mathbb{Z} . Or, nous connaissons bien les nombreux inversibles de \mathbb{Z} (que sont ± 1). Puisque $l = 0$, c'est que \tilde{U}_2 consiste en \mathbb{Z} copies de U_2 . Ensuite, nous effectuons une même chirurgie sur chacune de ces copies pour obtenir que $\Sigma_\infty(K)$ possède une infinité de générateurs en tant que groupe abélien.

Nous pouvons munir $\Sigma_\infty(K)$ d'une structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module via l'action de $\langle \tau \rangle$ sur $\Sigma_\infty(K)$ où τ est une translation. Si nous pensons à $\Sigma_\infty(K)$ comme un puzzle infini (cf. la construction du revêtement cyclique), nous pouvons voir τ comme la translation qui permet de passer d'une pièce à une autre pièce qui lui est adjacente. Dès lors, $H_1(\Sigma_\infty(K)) = \langle \tau \rangle$ en tant que $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module. ■

3.2 En pratique

Citons à présent quelques applications du théorème précédent. Rappelons-nous que dans le « bestiaire » des nœuds, il y a les nœuds premiers. Ces nœuds premiers sont aux nœuds ce que sont les nombres premiers aux entiers. Ainsi, tout nœud se décompose en une somme connexe de nœuds premiers. Appliquons l'obstruction que nous avons précédemment développée en regardant les revêtements cycliques de degré deux ramifiés sur les nœuds premiers.

Corollaire 2 *Considérons les nœuds premiers d'au plus douze croisements. Alors sept d'entre eux ne peuvent pas être dénoués d'une seule torsion $(s, 2k)$, où $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit de $12a_{554}$, $12a_{750}$, $12n_{553}$, $12n_{554}$, $12n_{555}$, $12n_{556}$ et $12n_{642}$.*

□ *Esquisse de démonstration :*

Nous pourrions calculer le nombre minimal de générateurs des premiers groupes d'homologie des revêtements cycliques de degré deux ramifiés sur les nœuds premiers d'au plus douze croisements. Nous trouverions alors que tous sont de degré deux, exceptés $12a_{554}, 12a_{750}, 12n_{553}, 12n_{554}, 12n_{555}, 12n_{556}$ et $12n_{642}$ qui ont un degré strictement supérieur à deux. Or, lorsque le degré du revêtement (ici 2) divise le nombre d'entrelacements (ici $2k$), le degré de $H_1(\Sigma_2(K))$ pour les nœuds que nous pouvons dénouer d'une torsion $(s, 2k)$ est deux. Donc $12a_{554}, 12a_{750}, 12n_{553}, 12n_{554}, 12n_{555}, 12n_{556}$ et $12n_{642}$ ne peuvent être dénoués d'une seule torsion $(s, 2k)$. ■

Remarque 7 *Il est légitime de se demander : est-ce que c'est un résultat satisfaisant ? Considérant le fait qu'il y a 2977 nœuds premiers d'au plus douze croisements le constat est forcément un peu mitigé...*

Cependant, rassurons-nous, pour les nœuds composés, nous obtenons des résultats plus robustes. Admettons le résultat suivant :

Corollaire 3 *Notons $T_{2,3}$ le nœud de trèfle. Alors :*

$$H_1(\Sigma_q(T_{2,3})) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } q \equiv 0 \pmod{6} \\ 0 & \text{si } q \equiv \pm 1 \pmod{6} \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \text{si } q \equiv \pm 2 \pmod{6} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } q \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$$

Nous avons alors :

Théorème 8 *Le nœud $mT_{2,3}$ ne peut pas être dénoué d'une seule torsion $(s, 2k)$ dès lors que $m > 2$.*

□ *Démonstration :*

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > 2$. Alors $H_1(\Sigma_2(mT_{2,3})) \simeq \bigoplus_{i=1, \dots, m} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et donc $H_1(\Sigma_2(mT_{2,3}))$ est engendré (au minimum !) par m éléments. Or, 2 divise $2k$ donc par le théorème 7 nous obtenons bien que $mT_{2,3}$ ne peut pas être dénoué d'une seule torsion $(s, 2k)$.
■

4 Obstruction via la forme d'entrelacement

4.1 En théorie

Rappelons comment est définie la forme d'entrelacements d'une 3-variété. Soit Y^3 une 3-variété fermée. Nous allons définir une application bilinéaire : $Tor(H_1(Y)) \otimes Tor(H_1(Y)) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Soient $a, b \in Tor(H_1(Y))$. Il existe donc $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \cdot a = n \cdot b = 0$.

En particulier, il existe un lacet α tel que $a = [\alpha]$. Donc, si nous prenons m copies de α , notées $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, il existe une surface compacte F_a telle que $\partial F_a = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_m$.

De la même manière, nous prenons $\beta \in b$ tel que $b = [\beta]$ et nous considérons n copies de β pour obtenir une surface compacte F_b telle que $\partial F_b = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_n$.

Définition 11 *La forme d'entrelacements de Y^3 est définie par :*

$$\lambda_{Y^3} : \begin{cases} Tor(H_1(Y)) \otimes Tor(H_1(Y)) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ (a, b) \mapsto \sharp(F_a \pitchfork F_b) \end{cases}$$

où le symbole \pitchfork signifie que l'intersection est transverse.

Remarquons que si la forme d'entrelacements est à valeur dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , c'est seulement pour qu'elle soit bien définie (i.e. qu'elle ne dépende pas du choix des représentants dans les différentes classes d'homologie). La forme d'entrelacements est bilinéaire et symétrique.

Rappelons à présent la définition de la forme d'intersection d'une 4-variété :

Définition 12 *Soit W une 4-variété. Nous appelons forme d'intersection de W la forme bilinéaire suivante :*

$$Q_W : \begin{cases} H_2(W) \times H_2(W) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ ([A], [B]) \longmapsto A \cdot B \quad \text{où } A \cdot B = \sharp(A \pitchfork B) \end{cases}$$

Faisons à présent le lien entre forme d'intersection, forme d'entrelacement et chirurgie :

Théorème 9 *Soit $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ un entrelacs orienté muni d'instructions de chirurgie $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$. Soit M la 3-variété (à isotopie près bien entendu !) obtenue après chirurgie : $M = S_r^3(L)$. Notons W la 4-variété associée (au sens du théorème 5). Supposons que M est une sphère d'homologie rationnelle. Alors dans des bases adaptées : la matrice représentant Q_W est une matrice de présentation pour $H_1(M)$ et Q_W^{-1} représente la forme d'entrelacements de M .*

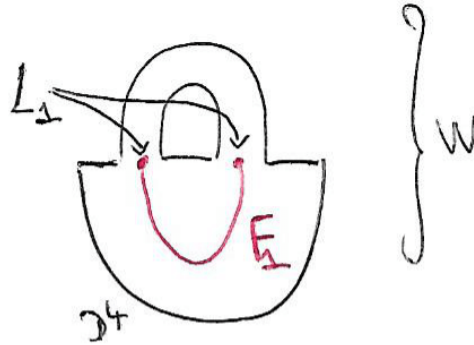
□ *Démonstration :*

Regardons la suite exacte longue en homologie relative associée à $(W, \partial W = M)$:

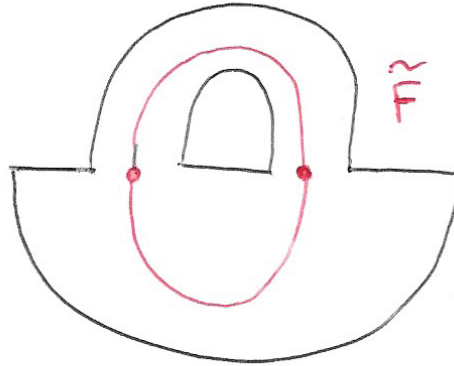
$$H_2(M) = 0 \longrightarrow H_2(W) \simeq \mathbb{Z}^n \xrightarrow{Q} H_2(W, M) \simeq \mathbb{Z}^n \xrightarrow{(1)} H_1(M) \xrightarrow{(2)} 0 = H_1(W)$$

Le point clé est que nous pouvons choisir des bases pour $H_2(W)$ et $H_2(W, M)$ de sorte que Q coïncide avec la matrice de la forme d'intersection de W : $Q = Q_W$.

Commençons avec $H_2(W)$. Considérons des surfaces de Seifert F_1, \dots, F_n associées à l'entrelacs L . Autrement dit, $\partial F_i = L_i$. Rappelons-nous que ces surfaces vivent dans $S^3 = \partial B^4$. Pouvons-les dans B^4 .



Complétons les surfaces F_i avec la co-âme de la 2-anse que nous recollons pour obtenir des surfaces fermées, que l'on note toujours F_i .



Nous disposons donc de n classes d'homologie $[F_1], \dots, [F_n] \in H_2(W)$ qui sont deux à deux non homologues (car les 2-anses associées sont deux à deux disjointes). Donc $([F_1], \dots, [F_n])$ forme une base de $H_2(W)$.

Pour $H_2(W, M)$, nous considérons des disques $E_i = \{*\} \times D^2$ pour chaque 2-anse (autrement dit une tranche de la co-âme de chaque tore).

Là encore nous disposons de n surfaces deux à deux non homologues dans $H_2(W, M)$, et donc d'une base de $H_2(W, M)$. Nous pouvons le prouver via l'algèbre linéaire. Pour cela considérons les applications linéaires

$$\psi_i : \begin{cases} H_2(W, M) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ [E, \partial E] \longmapsto [E, \partial E] \cdot F_i \end{cases} .$$

Elles sont linéairement indépendantes donc constituent une base de l'espace dual de $H_2(W, M)$. Par ailleurs $\psi_i([E_i, \partial E_i]) = 1$, donc $([E_1, \partial E_1], \dots, [E_n, \partial E_n])$ forme bien une base de $H_2(W, M)$.

Nous pouvons orienter les E_i de sorte que $[F_i] \cdot [E_i, \partial E_i] = 1$ (et donc plus généralement $[F_i] \cdot [E_j, \partial E_j] = \delta_{ij}$).

Dans ces bases, Q_W est représentée par une matrice carrée de taille $n \times n$ telle que

$$(Q_W)_{ij} = F_i \cdot F_j = F_i \cdot L_j = lk(L_i, L_j), \text{ si } i \neq j$$

$$(Q_W)_{ii} = r_i, \text{ si } i = j.$$

Nous avons par ailleurs, $Q(F_i) = \sum_{j=1, \dots, n} q_{ij} [E_j, \partial E_j]$ où $q_{ij} \in \mathbb{Z}$. Appliquons l'application linéaire ψ_k . Nous obtenons pour le terme de gauche :

$$\begin{aligned} \psi_k(Q(F_i)) &= Q(F_i) \cdot F_k \\ &= [F_i, \emptyset] \cdot F_k \\ &= F_i \cdot F_k \\ &= lk(L_i, L_k) \\ &= (Q_w)_{ik} \end{aligned}$$

Nous obtenons pour le terme de droite :

$$\begin{aligned} \psi_k\left(\sum_{j=1, \dots, n} q_{ij} [E_j, \partial E_j]\right) &= \sum_{j=1, \dots, n} q_{ij} \psi_k([E_j, \partial E_j]) \\ &= q_{ik} \end{aligned}$$

Finalement, la matrice représentant Q_W dans ces bases est bien une matrice de présentation pour $H_1(M)$.

Soient $[\alpha], [\beta] \in H_1(M)$. Remarquons que (1) est surjective (car la suite d'homologie relative est exacte et que (2) est l'application nulle). Donc il existe $[\tilde{A}]$ et $[\tilde{B}]$ qui sont envoyés respectivement sur $[\alpha]$ et $[\beta]$ par (1).

Puisque $H_1(M)$ est de torsion, il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \cdot [\alpha] = 0$ et $n \cdot [\beta] = 0$. Toujours par exactitude de notre suite d'homologie relative, nous en déduisons que $m \cdot [\tilde{A}], n \cdot [\tilde{B}] \in \text{Im}(Q)$. Il existe donc $[A], [B] \in H_2(W)$ tels que $Q[A] = [\tilde{A}]$ et $Q[B] = [\tilde{B}]$.

En particulier, $[A] = Q^{-1}[\tilde{A}]$ et $[B] = Q^{-1}[\tilde{B}]$. Remarquons au passage que nous pouvons inverser Q car M est une sphère d'homologie rationnelle (nous pouvons même montrer que Q est inversible dans \mathbb{Z} si et seulement si M est une sphère d'homologie entière).

Choisissons une base de $H_1(M)$. Nous savons que $H_1(M)$ est engendré par n éléments et que (1) est surjective, donc les images de la base de $H_2(W, M)$ forment un système de générateurs de $H_1(M)$. Équipons $H_1(M)$ de ce système de générateurs. Ainsi, au niveau vectoriel, nous avons

$$[\tilde{A}] = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \\ \vdots \\ \tilde{A}_i \\ \vdots \\ \tilde{A}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha$$

Nous allons maintenant commettre des abus de notation et noter A pour $[A]$. Nous confondrons A et sa notation vectorielle (les bases étant désormais fixées).

Nous avons alors :

$$\lambda_M(\alpha, \beta) = \frac{1}{mn} Q_W(A, B) = \frac{1}{mn} A^t Q B = \frac{1}{mn} (m \cdot Q^{-1} \tilde{A})^t Q n \cdot Q^{-1} \tilde{B} = \tilde{A}^t Q^{-1} \tilde{B} = \alpha^t Q^{-1} \beta$$

Ainsi, nous obtenons bien que Q^{-1} représente la forme d'entrelacements lk_M .

■

Faisons le lien avec les revêtements ramifiés :

Théorème 10 *Soit K un nœud que l'on peut dénouer d'une seule torsion (s, l) . Supposons que q divise l , alors le revêtement de degré q ramifié sur $K \Sigma_q(K)$ est donné par une chirurgie sur un entrelacs à q composantes. Dans des bases adaptées (les mêmes que le théorème précédent), la matrice de la forme d'intersection est donnée par la matrice $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq q}$ vérifiant :*

$$q_{ii} = r \quad \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket \quad \text{et} \quad q_{ij} = q_{ji} = lk(\tilde{L}_i, \tilde{L}_j) \quad \forall i \neq j.$$

où \tilde{L}_i désigne l'un des q relevés de U_2 dans la construction du revêtement ramifié de K .

□ *Démonstration :*

Sous ces hypothèses le théorème 7 s'applique. Plus précisément, rappelons-nous que dans la démonstration de ce dernier, nous avons prouvé l'existence de q générateurs en réalisant q fois la même chirurgie a . Nous pouvons donc voir $\Sigma_q(K)$ comme le bord de W où W est obtenue à partir de B^4 sur laquelle sont attachées q 2-anses avec chirurgie $\frac{1}{a} = r$.

Considérons maintenant l'entrelacs $L = \tilde{L}_1 \cup \dots \cup \tilde{L}_q$, nous sommes dans les hypothèses du théorème précédent. Dans la démonstration de celui-ci, nous avons vu que $Q_{ij} = lk(\tilde{L}_i, \tilde{L}_j)$ ce qui permet de conclure.

■

Pour le cas $q = 2$, nous avons en particulier le théorème suivant que nous admettons :

Théorème 11 *Soit K un nœud que l'on peut dénouer d'une seule torsion $(2k, s)$. Alors $\Sigma_2(K)$ est donné par une chirurgie sur un entrelacs à deux composantes. La matrice de la forme d'intersection est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

De plus, $|a^2 - b^2| = \det(K)$ et $a + k \equiv 1 \pmod{2}$.

Faisons à présent un petit détour par le plan projectif \mathbb{CP}^2 :

Proposition 3 *Considérons la 4-boule sur laquelle est attachée le long du nœud trivial une 2-anse avec coefficient de chirurgie $s = \pm 1$. On note W la 4-variété ainsi obtenue. Alors $s\mathbb{CP}^2 \setminus B^4 \simeq W$.*

□ *Esquisse de démonstration :*

Rappelons que \mathbb{CP}^2 est définie comme le quotient de $\mathbb{C}^3 \setminus (0, 0, 0)$ par l'action de \mathbb{C}^* , où \mathbb{C}^* agit par multiplication.

Rappelons aussi nos trois cartes préférées qui recouvrent \mathbb{CP}^2 : (U_1, ϕ_1) , (U_2, ϕ_2) et (U_3, ϕ_3) avec :

$$\begin{aligned} \phi_0 : & \begin{cases} U_0 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ [z_0 : z_1 : z_2] \longmapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) \end{cases} \\ \phi_1 : & \begin{cases} U_1 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ [z_0 : z_1 : z_2] \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}\right) \end{cases} \\ \phi_2 : & \begin{cases} U_2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ [z_0 : z_1 : z_2] \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Commençons par rappeler sur un exemple comment les cartes se recollent entre elles :

$$\phi_1 \phi_2^{-1} : \begin{cases} \phi_2(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\phi_2^{-1}} U_1 \cap U_2 \xrightarrow{\phi_1} \phi_1(U_1 \cap U_2) \\ (w, z) \longmapsto [w : 1 : z] \longmapsto (wz^{-1}, z^{-1}) \end{cases}$$

En réalité, nous n'allons pas utiliser ces cartes, mais plutôt :

$$\begin{aligned} V_0 &= \{|z_0| \geq |z_1| \text{ et } |z_0| \geq |z_2|\} \\ V_1 &= \{|z_1| \geq |z_0| \text{ et } |z_1| \geq |z_2|\} \\ V_2 &= \{|z_2| \geq |z_0| \text{ et } |z_2| \geq |z_1|\} \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\{(1 : z_1 : z_2) : z_1, z_2 \in \Delta\} = V_0 \subset U_0$$

où $\Delta = D^2$.

Observons aussi que $\mathbb{CP}^2 = V_0 \cup V_1 \cup V_2$. Nous avons également :

$$V_1 \cap V_2 = \{(z_0 : 1 : w) : z_0 \in \Delta \text{ et } w \in S^1\}$$

Donc en restreignant nos applications ϕ à ces nouvelles cartes, nous obtenons :

$$\phi_1 \phi_2^{-1} : \begin{cases} D^2 \times S^1 \longrightarrow D^2 \times S^1 \\ (w, z) \longmapsto (wz^{-1}, z^{-1}) \end{cases}$$

Cette application permet de recoller une 2-anse sur la 4-boule B^4 et ainsi d'obtenir W .

Remarque 8 *Pour la recoller, il faut faire un choix d'orientation qui est donné par le signe s .*

Pour obtenir \mathbb{CP}^2 , on remarque que $V_1 \cup V_2 = \mathbb{CP}^2 \setminus V_0 = \mathbb{CP}^2 \setminus \Delta \times \Delta$.

Or, par la proposition 3, $\Delta \times \Delta \simeq B^4$, ce qui permet de conclure.

■

De cette observation, nous pouvons prouver les deux résultats suivants que nous admettrons ici. Ils sont en fait une conséquence du théorème 3.1 de l'article de Kauffman et Taylor³.

Théorème 12 *Soit K un nœud que l'on peut dénouer d'une seule torsion ($s, l = 2k$). Alors :*

$$\sigma(K) = \sigma(N) - 2s + \frac{1}{2}sl^2$$

où N est le revêtement de degré 2 de $s\mathbb{CP}^2 \setminus B^4$ ramifié sur un disque Δ tel que $\partial\Delta = K$.

Corollaire 4 *Soit K un nœud que l'on peut dénouer d'une seule torsion ($s, l = 2k$). Alors $\Sigma_2(K)$ est le bord d'une 4-variété N telle que le deuxième nombre de Betti $b_2(N) = 2$. De plus :*

$$\sigma(N) = \sigma(K) + 2s(1 - k^2)$$

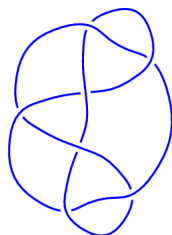
et la matrice de la forme d'intersection est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

La valeur de a est paire lorsque k est pair et a est impaire lorsque k est impair. Enfin, Q est définie négative, indéfinie, définie positive selon que $\sigma(K) + 2s - \frac{1}{2}sl^2$ vaut -2 , 0 ou 2 .

4.2 En pratique

Comme dans l'article de C. Livingston et S. Allen¹, prenons l'exemple du nœud -7_7 . Le voici² :



2. Extrait du site knotinfo

Admettons le résultat suivant :

Proposition 4 -7_7 est un nœud à deux ponts $B(21, 13)$. De plus $\Sigma_2(-7_7) \simeq L(21, 13)$, $\sigma(-7_7) = 0$ et $\det(-7_7) = \#(H_1(\Sigma_2(-7_7))) = 21$.

Montrons maintenant comment les obstructions de la section précédente permettent d'obtenir des informations.

Théorème 13 Le nœud -7_7 ne se dénoue pas d'une torsion unique $(1, 0)$.

□ *Démonstration :*

Raisonnons par l'absurde et supposons que nous pouvons dénouer -7_7 d'une torsion $(-1, 0)$.

Alors le théorème 10 s'applique et nous assure que dans des bases particulières, la matrice de la forme d'intersection est de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Par ailleurs d'après le résultat précédent $\det(-7_7) = 21$.

Pour identifier a et b , il s'agit de résoudre l'équation $a^2 - b^2 = 21$ que nous pouvons ré-écrire $(a - b)(a + b) = 3 \times 7$. En utilisant le fait que 3 et 7 sont premiers, une disjonction de cas permet d'obtenir deux choix possibles pour les coefficients de la matrice Q :

$$\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Appliquons encore une fois le théorème 10 : la forme d'entrelacement est ici représentée par Q^{-1} . Nous avons donc deux choix possibles ici :

$$\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Puisque $\#(H_1(\Sigma_2(-7_7))) = 21$ et qu'il n'y a à isomorphisme de groupe près qu'un seul groupe abélien de 21 éléments, nous en déduisons que $H_1(\Sigma_2(-7_7)) \simeq \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

Remarquons que a et 21 sont premiers entre eux pour $a \in \{5, 11\}$. Donc, dans les deux cas le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ représente un générateur de $H_1(M)$ (puisque dans les deux cas il représente un élément d'ordre 21). En notant λ la forme d'entrelacement, nous avons :

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{a}{21}$$

Tout élément de $H_1(\Sigma_2(-7_7))$ s'écrit $k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi l'ensemble des auto-intersections des éléments qui engendrent $H_1(\Sigma_2(-7_7))$ est donné par

$$\lambda\left(k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = k^2 \frac{a}{21}$$

où cette fois k est premier avec 21 puisque nous regardons les éléments d'ordre 21.

Après avoir fait les calculs dans les deux cas, nous trouvons deux ensembles d'auto-intersection : $\{2, 8, 11\}$ pour $a = 11$ et $\{5, 17, 20\}$ pour $a = 5$.

Oui mais en tant que variété orientée, nous savons que $\Sigma_2(-7_7) \simeq L(21, 13)$ a une forme d'entrelacement donnée par

$$\lambda_{L(21,13)}(x, y) = -\frac{13}{21}xy$$

Remarque 9 *Nous pouvons montrer que modulo une identification, $\lambda_{L(p,q)} = -\frac{q}{p}xy$ où p et q sont premiers.*

De la même manière, nous déterminons alors l'ensemble des auto-intersections de éléments générateurs de $\Sigma_2(-7_7)$ et nous trouvons $\{10, 13, 19\}$.

Ce dernier ensemble ne coïncide pas avec les deux ensembles trouvés précédemment, ce qui constitue une contradiction.

■

5 Conclusion

Nous avons donc présenté deux méthodes qui permettent de repérer des nœuds que nous ne pouvons pas dénouer d'une seule torsion (s, l) .

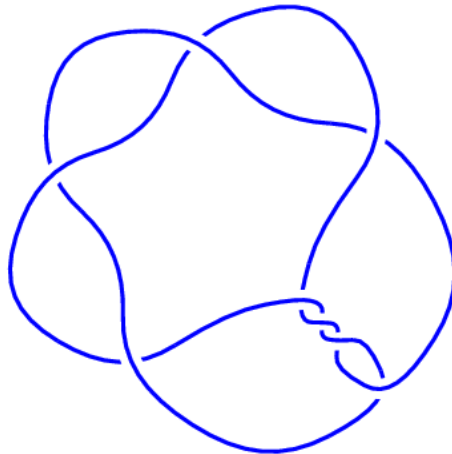
La première est basée sur la chirurgie et les revêtements cycliques ramifiés Σ_q . Si un nœud K peut être dénoué d'une seule torsion (s, l) , alors $H_1(\Sigma_q(K))$ (en tant que groupe) est engendré par q éléments dans le cas où q divise l . Ainsi, si nous sommes capables de déterminer $H_1(\Sigma_q(K))$, alors nous pouvons éventuellement prouver que l'on ne peut pas dénouer K d'une seule torsion (s, l) . Il pourrait être intéressant de développer un algorithme qui fournit le nombre de générateurs de $H_1(\Sigma_q(K))$.

Remarquons par ailleurs que dans cette première méthode, le signe de la torsion n'intervient pas. Par exemple, si un nœud peut être dénoué d'une torsion $(1, l)$, mais pas d'une torsion $(-1, l)$, alors cette méthode ne permet pas de prouver qu'une torsion $(-1, l)$ ne dénoue pas le nœud.

La deuxième obstruction que nous avons développé est quant à elle un peu plus fine car elle permet de faire cette distinction. Partant d'un nœud K que nous pouvons dénouer d'une torsion (s, l) , nous associons une 4-variété W à K . Nous caractérisons alors algébriquement cette forme d'intersection, et plus particulièrement dans le cas d'un revêtement de degré 2.

Dans l'article de Samantha Allen et Charles Livingston¹, d'autres invariants (plus techniques) sont ensuite présentés. Il pourrait être intéressant d'approfondir ces invariants.

Néanmoins, il n'existe pas encore une méthode systématique pour déterminer si un nœud peut oui ou non être dénoué d'une torsion (s, l) ³. De plus, plusieurs conjectures restent encore non démontrées, voici l'une d'entre elles : « Tout nœud composé que l'on peut dénouer d'une seule torsion (s, l) est la somme de deux nœuds premiers ». L'aventure n'est donc pas finie !



3. Par exemple, pour le nœud 8_3 dont l'image est extraite de knotinfo, nous ne savons pas si nous pouvons le dénouer d'une torsion $(-1, 2)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, 2)$.

6 Bibliographie

Références

- [1] Samantha Allen et Charles Livingston, *Unknotting with a single twist*. L'Enseignement Mathématique 66 (2020) 541 – 589, arXiv :2005.10717
- [2] Yoshiyuki Ohyama , *Twisting and unknotting operations*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 7 (1994), no. 2, 289305.MR1297516
- [3] Louis H. Kauffman et Laurence R. Taylor *Signature of links* Trans. Amer. Math. Soc. 216 (1976), 351365. MR388373
- [4] Marco Golla, *Branched Covers in Low Dimensions* Cours du deuxième semestre du M2MFA, Université de Nantes (2021/2022).
- [5] Dale Rolfsen, *Knots And Links*. AMS Chelsea Publishing 1990.
- [6] W.B Raymond Lickorish, *An Introduction to Knot Theory* Springer 1997.
- [7] Nicolas Saveliev, *Lectures on the Topology of 3-Manifolds* Walter De Gruyter, 1999.
- [8] Kunio Murasugi, *Knot theory and its applications* Birkhäuser, 1996.
- [9] Robert E.Gompf, Andràs I.Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus* AMS, 1999.
- [10] Allen Hatcher, *Algebraic Topology* Cambridge University Press, 2002.
- [11] KnotInfo : Table of Knots.
<https://knotinfo.math.indiana.edu/index.php?isdesktop=1>.
Ce site recense de nombreux types de nœud, parfait pour les curieux !

Image de la page de garde : <https://thumbs.dreamstime.com/z/le-magicien-ou-cr%C3%A9e-l-illustration-plate-magique-de-vecteur-d-isolement-sur-blanc-imagination-personnage-dessin-anim%C3%A9-barbu-dans-147941222.jpg>