UNIVERSITÉ DE NANTES

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
UMR 6629 - Nantes

Système de Vlasov Poisson

Rapport de Stage

Présenté et soutenu par :

Sarah SERHAL

Master 2 en mathématiques fondamentales et appliquées

sarah.serhal@etu.univ-nantes.fr

Encadrants

Frédéric HERAU Mehdi BADSI

1er juillet 2022

Remerciment

Pour commencer, je tiens à remercier le Centre Henri Lebesgue en particulier son responsable nantais M.Benoit Grébert de m'avoir choisi comme une lauréate pour la bourse d'excellence Lebesgue,et m'ont donné la chance d'étudier à l'étranger qui a été une expérience optimale car elle m'a ouvert la porte à de nombreuses opportunités. Je souhaite également exprimer mes remerciements à mes deux encadrants de stage, M. Frédéric Hérau et M.Mehdi Badsi pour leur aide, et leurs conseils tout au long de mon stage.
Je tiens également à remercier mes professeurs de l'Université de Nantes et Rennes.
Enfin, je tiens à remercier l'amour de ma famille et de mes amis.Rien de tout cela n'aurait pu se produire sans le soutien indispensable qu'ils m'ont apporté pendant mes études.

Table des matières

1 Introduction

L'équation de Vlasov - Poisson est l'une des équations qui régit l'évolution d'un système de particules. Plus précisément, elle modélise les comportements des particules avec des interactions a longue portée.Les deux principaux types d'interaction sont la répulsion électrostatique de particules de même charge dans le plasma et l'attraction gravitationnelle des étoiles dans une galaxie.
Du point de vue des équations aux dérivées partielles, il s'agit d'une équation aux dérivées partielles non-linéaires.
Le système de Vlasov-Poisson qu'on va étudier a la forme suivante :

$$\begin{aligned} & f_t + v.\nabla_x f + \gamma E.nabla_v f = 0 \quad (x, v \in \mathbb{R}^3), \\ & \rho(t,x) = \int f dv, \\ & E(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(x-y)\rho(t,y)dy}{|x-y|^3} = \nabla_x u, \\ & avec\ \Delta u = \rho\ et\ u = -\frac{1}{4\pi r} * \rho \quad (r \equiv |x|),, \\ & f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{aligned} \tag{1}$$

avec

$$\gamma = \begin{cases} 1\ pour\ des\ problèmes\ de\ types\ plasma\ (interaction\ répulsive) \\ -1\ pour\ des\ problèmes\ de\ types\ gravitationnels\ (interaction\ attractive) \end{cases}$$

Le but de mon stage est d'étudier le problème de Cauchy de système de Vlasov poisson afin d'arriver à montrer l'existence locale et globale de la solution pour certaines données. On commence par montrer des propriétés et préliminaires pour ce système.
Commençons premièrement par la méthode des caractéristiques afin de démontrer que la solution est constante le long de ces caractéristiques.
Deuxièmement on va montrer qu'il y a conservation de l'énergie totale des particules,avec des estimations sur les énergies cinétique et potentielle.
Troisièmement on va passer à des estimations sur E et sa dérivée. Quatrièmement on va montrer l'existence locale de la solution par une construction d'une solution approximative. Et finalement nous allons montrer l'existence globale de la solution grâce à tout ce qui précède et grâce au théorème de Schaefer qu'on va démontrer aussi.En effet le fait de montrer le théorème de schaefer joue aussi un rôle très grand pour montrer que le support de f est compact.

2 La méthode de caractéristiques

On considère ici le problème général suivant

$$\partial_t u + a(t,x).\nabla_x u = 0 \qquad 0 < t < T, \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

Cette équation est appelée équation de transport et on suppose que

$$a :]0,T[\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \tag{3}$$

est suffisamment régulière.
Soit $t \geq 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^3$. On appelle caractéristique pour (2) une solution $s \longmapsto \mathrm{x}(s,t) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ et telle que

$$\frac{d\mathrm{x}}{ds} = a(s,\mathrm{x}(s)) \ et \ \mathrm{x}(t,t) = x \tag{4}$$

Théorème 1. *Soit $N \in \mathbb{R}^+$ Considérons $a \in C([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ différentiable en x avec $\partial_x a \in C([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ et il existe $K > 0$ tel que*

$$\forall t \in]0,T[, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \qquad |a(t,x)| \leq \kappa(1+|x|) \tag{5}$$

alors pour tout $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique caractéristique définie sur $s \in [0,T]$ et telle que $\mathrm{x}(t,t) = x$. On la note $\mathrm{x}(s,t,x)$ et on a

$$\mathrm{x} \in C^1([0,T]_s \times [0,T]_t \times \mathbb{R}^N_x)$$

et par ailleurs $\partial_s\partial_x x$ et $\partial_x\partial_s x$ existent, sont continues sur $[0,T]_s \times [0,T]_t \times \mathbb{R}^N_x$

Démonstration. On peut voir le référent[1] □

Proposition 1. *Sous les hypothèses du Théorème 1 on a :*

i $\forall\ s,t,r \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \mathrm{x}(t,s,\mathrm{x}(s,r,x)) = \mathrm{x}(t,r,x)$

ii $\forall s,t \in [0,T]$ *l'application* $x \mapsto \mathrm{x}(s,t,x)$ *est* C^1 *difféomorphisme de* $\mathbb{R}^N$ *d'inverse* $\mathrm{x}(t,s,.)$

iii *Le Jacobien* $J(s,t,x) := det(\nabla_x \mathrm{x}(s,t,x))$ *vérifie* $J > 0$

et $\frac{\partial J}{\partial s}(s,t,x) = (div_x.a)(s,\mathrm{x}(s,t,x))J(s,t,x)$

Démonstration. Le point **i** vient de la définition de x et de l'unicité du problème de Cauchy
Pour le point **ii**, il suffit de prendre $r = t$ et on obtient le résultat, la régularité découlant du théorème précédent.
Pour le point **iii** On rappelle d'abord qu'un résultat de géométrie différentielle classique assure que la différentielle au point $X \in GL_N(\mathbb{R})$ du déterminant est donnée par

$$D_X \det(H) = \det(X)\,\mathrm{Tr}\left(X^{-1}H\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\,\mathrm{Com}(X)H\right)$$

où ${}^t\,\mathrm{Com}(X)$ est la transposée de la comatrice de X.
Cela implique ici en prenant $X = \partial_x \mathbf{x}(s,t,x)$ que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial s}(s,t,x) &= \mathrm{Tr}\left({}^t\,\mathrm{Com}\left(\partial_x \mathbf{x}(s,t,x)\right) \quad \partial_s \partial_x \mathbf{x}(s,t,x)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left({}^t\,\mathrm{Com}\left(\partial_x \mathbf{x}(s,t,x)\right) \quad \partial_x [a(s,\mathbf{x}(s,t,x))]\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left({}^t\,\mathrm{Com}\left(\partial_x \mathbf{x}(s,t,x)\right) \quad \partial_x a(s,\mathbf{x}(s,t,x)) \quad \partial_x \mathbf{x}(s,t,x)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\partial_x a(s,\mathbf{x}(s,t,x)) \quad \partial_x \mathbf{x}(s,t,x)^t\,\mathrm{Com}\left(\partial_x \mathbf{x}(s,t,x)\right)\right) \\
&= \det\left(\partial_x \mathbf{x}(s,t,x)\right) \mathrm{Tr}\left(\partial_x a(s,\mathbf{x}(s,t,x))\right) \\
&= J(s,t,x) \quad \left(\partial_x . a\right)(s,\mathbf{x}(s,t,x))
\end{aligned} \tag{6}$$

De plus comme $J(t,t,x) = 1$ alors on obtient $J > 0$ □

Remarque 1. *Si $\nabla_x.a = 0$ alors $J = 1$*

Proposition 2. *Le flot caractéristique satisfait l'équation suivante :*

$$\partial_t \mathrm{x}(s,t,x) + a(t,x).\nabla_x \mathrm{x}(s,t,x) = 0 \tag{7}$$

Démonstration. On dérive $\mathrm{x}(t,s,\mathrm{x}(s,r,x) = \mathrm{x}(t,r,x)$ par rapport à s , on obtient :

$$\begin{gathered}
\partial_s \mathrm{x}(t,s,\mathrm{x}(s,r,x)) + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s}(s,r,x)\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}(t,s,\mathrm{x}(s,r,x)) = 0 \\
\partial_s \mathrm{x}(t,s,\mathrm{x}(s,r,x)) + a(s,\mathrm{x}(s,t,x))\nabla_x \mathrm{x}(t,r,x) = 0
\end{gathered}$$

On prend dans la formule précédente $r = s$ et échangeant le rôle entre t and s on obtient

$$\partial_t \mathrm{x}(s,t,x) + a(t,x)\nabla_x \mathrm{x}(s,t,x) = 0 \text{ car } \mathrm{x}(t,t,x) = x)$$

□

Théorème 2. *(Existence et unicité de la solution.)*
Sous les hypothèses du Théorème 1 on a :

Supposons que $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^3$ alors il existe une unique solution $u \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ de (2) de donnée initiale $u(0,x) = u_0$ et u est donnée par

$$u(t,x) = u_0(\mathrm{x}(0,t,x))$$

Démonstration. Pour montrer premièrement que $u(t,x) = u_0(\mathrm{x}(0,t,x)$ est une solution, on multiplie (7) du proposition 2 par $\nabla_x u_0(\mathrm{x}(0,t,x))$
On obtient Alors

$$\nabla_x u_0(\mathrm{x}(0,t,x))\frac{d\mathrm{x}}{dt}(s,t,x) + a(t,x)\left(\nabla_x u_0(\mathrm{x}(0,t,x))\nabla_x \mathrm{x}(s,t,x)\right) = 0$$

Pour $s = 0$, on aura

$$\nabla_x u_0(\mathrm{x}(0,t,x))\frac{d\mathrm{x}}{dt}(0,t,x) + a(t,x)\left(\nabla_x u_0(\mathrm{x}(0,t,x))\nabla_x \mathrm{x}(0,t,x)\right) = 0$$

Ce qui conduit à avoir

$$\frac{d}{dt}\left(u_0(\mathrm{x}(0,t,x))\right)+a(t,x)\frac{d}{dx}\left(u_0(\mathrm{x}(0,t,x))\right)=0$$

Et par conséquence $u_0(\mathrm{x}(0,t,x)$ est une une solution. Réciproquement, Soit $u \in C^1$ une solution de (2)pour tout (t_0, x_0) ,on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left[u\left(s,\mathrm{x}\left(s,t_0,x_0\right)\right)\right] &= \partial_t u\left(s,\mathrm{x}\left(s,t_0,x_0\right)+\nabla_x u\left(s,\mathrm{x}\left(s,t_0,x_0\right)\right)\partial_s \times \left(s,t_0,x_0\right)\right. \\ &= \partial_t u\left(s,\mathrm{x}\left(s,t_0,x_0\right)\right)+\nabla_x u\left(s,\mathrm{x}\left(s,t_0,x_0\right)\right)a\left(s,x\left(s,t_0,x_0\right)\right. \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que $u\left(s,\mathrm{x}\left(s,t_0,x_0\right)\right)=u_0\left(\mathrm{x}\left(0,t_0,x_0\right)\right)$ pour tout $s \leq$
Posons maintenant $x=\mathrm{x}(s,t_0,x_0)$,on obtient alors que

$$u(s,x)=u_0\left(\mathrm{x}\left(0,t_0,\mathrm{x}(t_0,s,x)\right)\right)=u_0(\mathrm{x}(0,s,x))$$

d'après la proposition 1 les parties (i) et (ii) □

On travaille maintenant sur le système de Vlasov Poisson.

Théorème 3. *Supposons $E \in \mathcal{C}\left([0,T]\times\mathbb{R}^3\right)$ différentiable, telle que $\partial_x E \in \mathcal{C}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$ et*

$$\forall t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad |E(t,x)| \leq \kappa(1+|x|)$$

alors pour tout $f_0 \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^{2d}\right)$, il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}^1\left([0,T]\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\right)$ à l'équation (1) pour donnée initiale $f(0,.)=f_0$, et f est donnée par

$$f(t,x,v)=f_0(\mathrm{x}(0,t,x,v),\mathrm{v}(0,t,x,v))$$

où $(\mathrm{x},\mathrm{v}) \in \mathcal{C}^1$ est la caractéristique passant par (x,v) au temps t.

Démonstration. Il faut juste appliquer les théorèmes 1 et 2 à l'equation de Vlasov. Notons que les caractéristiques sont les solutions de

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathrm{x}}{ds}=\mathrm{v} \qquad \mathrm{x}(t,t,x,v)=x \\ &\frac{d\mathrm{v}}{ds}=\gamma E \qquad \mathrm{v}(t,t,x,v)=v\end{aligned} \tag{8}$$

Et donc

$$f(t,x,v)=f_0(\mathrm{x}(0,t,x,v),\mathrm{v}(0,t,x,v))$$

□

Remarque 2. *On peut conclure que $\|f\|_\infty=\|f_0\|_\infty$*
Et Si $f_0 \geq 0$ alors$f \geq 0$.

3 Préservation de la mesure

Le changement de variable $(x,v) \longmapsto (\mathrm{x}(s,t,x,v), \mathrm{v}(s,t,x,v))$ préserve la mesure pour chaque s et $t \in \mathbb{R}$

Démonstration. 1 Il suffit d'utiliser la proposition 1 et que $(v, \gamma E)$ est à divergence nulle. $\square$

Corollaire 1. *Montrons la conservation dans norme L^p. Pour$f_0 \geq 0$ et par changement de variables,on a*
$\|f\|_p = (\iint |f_0(\mathrm{x},\mathrm{v})(0,t,x,v)|^p dv\ dx)^{\frac{1}{p}} = \|f_0\|_p$ *car la jacobienne est égale à 1*

4 Énergie

4.1 Conservation de l'énergie

On définit $\frac{1}{2}\int |v|^2 f\ dv$ comme étant l'énergie cinétique du système de particules et $\frac{1}{2}\int |E|^2 dx$ comme étant l'énergie potentielle.
Le but de cette partie est de montrer que l'énergie totale notée E_{totale} qui est égale à la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle est constante au cours du temps.

Donc notre but est de montrer que,

$$\frac{1}{2}\iint |v|^2 f dv dx + \frac{1}{2}\int |E|^2 dx = c \tag{9}$$

et donc il suffit de montrer,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f dx dv + \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^3} |E|^2 dx\right) = 0 \tag{10}$$

Supposons que f régulière et à support compact.
Afin de calculer la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique,on commence par multiplier (1) par $|v|^2$ et on intègre par rapport à $dxdv$.

On obtient,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \partial_t f dx dv + \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |v|^2 v.\nabla_x f dx dv + \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \gamma |v|^2 E.\nabla_v f = 0 \tag{11}$$

Ce qui donne

$$\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t,x,v) dx dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |v|^2(-v.\nabla_x f - \gamma E.\nabla_v f) dx dv \tag{12}$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 v.\nabla_x f dxdv \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^3}(\int_{\mathbb{R}^3} \nabla_x |v|^2 v f dx)dv) = 0 \; car\; c'est\; une\; divergence.$$

Par une intégration par partie de

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2(-\gamma E.\nabla_v f)dxdv$$

on obtient

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t,x,v)dxdv = -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \nabla_v.(\gamma f E)dxdv \tag{13}$$

Et maintenant par une intégration par partie de

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \nabla_v.(\gamma f E)dxdv$$

On aura

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t,x,v)dxdv = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \nabla_v.|v|^2.\gamma f E dxdv \tag{14}$$

Donc on obtient

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t,x,v)dxdv = 2\gamma \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} v f E dxdv \underset{\text{Fubini}}{=} 2\gamma \int_{\mathbb{R}^3} E \left(\int_{\mathbb{R}^3} v f dv\right) dx \tag{15}$$

Posons maintenant

$$j = \int_{\mathbb{R}^3} v f dv$$

On en conclue que

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t,x,v)dxdv = 2\gamma \int_{\mathbb{R}^3} E.j dx \tag{16}$$

Maintenant calculons la dérivée par rapport au temps de l'énergie potentiel. On note $u_t = \partial u$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} |E|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|E|^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^3} E.E_t dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u.\nabla u_t dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} u\Delta u_t dx = -\int_{\mathbb{R}^3} u\rho_t dx = -\int_{\mathbb{R}^3} u \left(\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f dv\right) dx\end{aligned} \tag{17}$$

(car on a par définition de l'équation de Vlasov Poisson que $E = \nabla u$ et $\rho = \Delta u$)

Mais on remarque que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \partial_t f dv &= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} v.\nabla_x f dv - \int\limits_{\mathbb{R}^3} \gamma E.\nabla_v f dv \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} v.\nabla_x f dv - \int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla_v.(\gamma E f) dv\end{aligned} \tag{18}$$

Donc

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \partial_t f dv = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla_v \gamma E f dv \tag{19}$$

parce que $\int_{\mathbb{R}^3} v.\nabla_x f dv = 0$ car c'est une divergence.
Alors on obtient

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \partial_t f dv = -\nabla x. \int\limits_{\mathbb{R}^3} v f dv = -\nabla x.j \tag{20}$$

Finalement et par une intégration par partie de $\int_{\mathbb{R}^3} u(\nabla_x.j)dx$ on en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |E|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3} u(\nabla_x.j)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} (\nabla_x u.j)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} E.jdx \tag{21}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |E|^2 dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} E.jdx \tag{22}$$

D'où en combinant l'équation[16] avec l'équation[22] on aura que

$$\begin{aligned}\frac{dE_{totale}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t,x,v) dx dv + \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^3} |E|^2 dx\right) \\ &= \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^3} E.jdx - \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^3} E.jdx = 0\end{aligned} \tag{23}$$

On en conclut finalement que l'énergie totale est conservée au cours du temps.

4.2 Bornitude de l'énergie

Le but de cette partie est de montrer que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont chacunes bornées par une constante. On remarque deux cas :
Cas 1 :
Si $\gamma = 1$ On peut directement borner les deux énergies car c'est la somme de deux quantités positives qui sont égales à une constante,et comme l'énergie est préservée,on peut conclure.
Cas 2 :
Si $\gamma = -1$.Afin de borner chacune des énergies,on va premièrement essayer de majorer

l'énergie potentielle par l'énergie cinétique.Ensuite, on va en déduire que l'énergie cinétique est bornée et par conséquence l'énergie potentielle aussi. Afin de faire cette preuve, on a besoin de la proposition et du théorème suivants :

Théorème 4. ***Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev***
Soient $q, r \in p, \infty|$ et $0 < \alpha < N$ tels que $1/q + \alpha/N = 1 + 1/p$. Soit $f \in L^q$, alors il existe $C > 0$ tel que la fonction

$$h : x \mapsto \int \frac{f(y)}{|x-y|^a} dy$$

vérifie l'inégalité $\| h| |_{L^p} \leq C||f||_{L^q}$

Théorème 5. ***(Inégalité d'interpolation)***
Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ et supposons que $r, q, p \in [1, +\infty]$ et $\theta \geq 0$tel que : $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{P} + \frac{1-\theta}{q}$alors $\|\varphi\|_r \leq \|\varphi\|_p^\theta \ \|\varphi\|_q^{1-\theta}$

Montrons maintenant que l'énergie potentielle est majorée par l'énergie cinétique. On sait que,

$$E(t, x) = \nabla_x u = \frac{1}{4\pi} \frac{x}{|x|^3} * \rho \tag{24}$$

Donc

$$\|E(t, x)\|_2 = c \left\| \frac{x}{|x|^3} * \rho \right\|_2 \leq c \left\| \frac{|x|}{|x|^3} * \rho \right\|_2 \leq c \left\| r^{-2} * \rho \right\|_2 \quad avec\ r = |x| \tag{25}$$

En utilisant maintenant **l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev** en prenant $\alpha = 2$,$p = 2$ et $N = 3$,(voir Théorème 4)
On en déduit que

$$\|E(t, x)\|_2 \leq c\|\rho(t)\|_{\frac{6}{5}} \tag{26}$$

Maintenant,en utilisant **l'inégalité d'interpolation**
en prenant $r = \frac{6}{5}, P = 1, q = \frac{5}{3}$ et $\theta = \frac{7}{12}$(Voir Théorème 5)
On obtient

$$\|E(t, x)\|_2 \leq c\|\rho(t)\|_{\frac{6}{5}} \leq c\|\rho(t)\|_1^{\frac{7}{12}} \quad \|\rho(t)\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{12}} \tag{27}$$

Mais comme il y a préservation de la mesure, et d'après la méthode des caractéristiques ,on en déduit que $\|\rho\|_1$est bornée. Donc

$$\|E(t, .)\|_2 \leq c\|\rho(t)\|_{\frac{6}{5}} \leq c\|\rho(t)\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{12}} \tag{28}$$

Il faut maintenant majorer $\|\rho(t)\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{12}}$ de l'équation (28) .On sait que

$$
\begin{aligned}
\rho(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)dv \\
&\leq \int_{|v|<R} fdv + \frac{1}{R^2}\int_{|v|>R} |v|^2 fdv \\
&\leq \|f\|_\infty \int_{|v|<R} dv + R^{-2}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 fdv \\
&\leq \frac{4\pi}{3}\|f_0\|_\infty R^3 + R^{-2}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 fdv
\end{aligned}
\tag{29}
$$

.

On a utilise la conservation de la norme L^∞ de f
On choisit maintenant $R > 0$ de sorte qu'on pourrai combiner les deux termes de la dernière inégalité ensembles, dans le but de pouvoir faire une majoration.

Donc on prend

$$R^3 = R^{-2}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 fdv \tag{30}$$

On en déduit que

$$R = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 fdv\right)^{\frac{1}{5}} \tag{31}$$

Alors de l'inégalité (29) on aura

$$\rho(t,x) \leq cR^3 = c\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 fdxdv\right)^{\frac{3}{5}} \tag{32}$$

On en conclue alors de (32) que

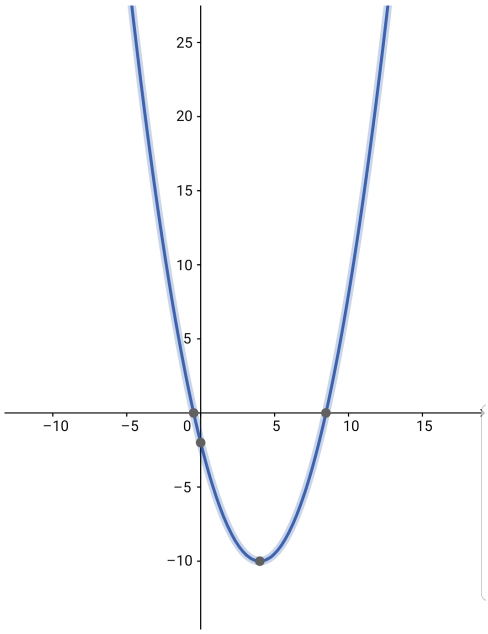
$$\|\rho(t)\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{3}} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t,x)^{\frac{5}{3}}dx \leq c'\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 fdxdv\right) \tag{33}$$

Et finalement en utilisant (28) et (32),on obtient

$$
\begin{aligned}
\|E(t,.)\|_2 &\leq c''\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 fdxdv\right)^{\frac{3}{5}\times\frac{5}{12}} \\
&= c''\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 fdxdv\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Si on pose $0 \leq X = \left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} v^2 f(t,x,v)dvdx\right)^{1/2}$
On obtient d'après l'inégalité précédente et en utilisant la conservation de l'énergie que

$$\frac{1}{2}X^2 - (c'')^2\, X \leq C$$



Courbe approximative de X

Donc on en déduit que X est bornée.
On en conclue finalement que

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f dvdx \leq \text{constante} \tag{35}$$

et

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |E|^2 dx \leq \text{constante} \tag{36}$$

Remarque 3. *On a* $\|\rho(t)\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{3}{5}} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t,x)^{\frac{5}{3}} dx \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f dxdv\right)$

Donc, on en déduit que $\|\rho(t)\|_{\frac{5}{3}} \leq C$

5 Estimations sur le champs

Montrons que

$$\|E(t)\|_\infty \leq c\|\rho(t)\|_\infty^{\frac{4}{9}} \|\rho(t)\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{9}} \tag{37}$$

Pour montrer cette inégalité on va rappeler de l'inégalité de Hölder

Proposition 3. ***Inégalité de Hölder***
Soient $p, q,$ *et* $r \in [1,\infty]$ *tels que* $1/p + 1/q = 1 + \frac{1}{r}$. *soient* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$, *alors* $f * g \in L^r$ *et on a* $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$

Démonstration. On peut faire des intégrales classiques. □

Soit $R > 0$

$$4\pi|E(t,x)| = \left|\nabla_x \frac{1}{|x|}\rho\right| \leq c \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2}\rho(y)dy$$
$$= c\int_{|x-y|<R} \frac{\rho(y)}{|x-y|^2}dy + c\int_{|x-y|>R} \frac{\rho(y)}{|x-y|^2}dy \tag{38}$$

On va utiliser l'inégalité de Hölder pour la dernière égalité (Voir la proposition 3)
Pour le premier terme, on prend $p = \infty$ et $q = 1$. Pour le deuxième terme,on prend $\frac{5}{3}$ et $q = \frac{5}{2}$ Donc on aura :

$$|E(t,x)| \leq c\|\rho(t)\|_\infty \int_{|x-y|<R} \frac{1}{|x-y|^2}dy + c\|\rho(t)\|_{5/3} \left(\int_{|x-y|>R} \frac{dy}{|x-y|^{(2\times\frac{5}{2})}}\right)^{\frac{2}{5}}$$
$$\leq c\|\rho\|_\infty \int_{|y|<R} \frac{1}{|y|^2}dy + c\|\rho(t)\|_{\frac{5}{3}} \left(\int_{|y|>R} \frac{dy}{|y|^5}\right)^{\frac{2}{5}}$$
$$\leq c\|\rho\|_\infty \int_0^R \frac{r^2}{r^2}dr + C\|\rho(t)\|_{\frac{5}{3}} \left(\int_R^\infty \frac{r^2}{r^5}dr\right)^{\frac{2}{5}} \quad \textit{(en utilisant les coordonnées sphériques)}$$
$$\leq c\|\rho\|_\infty R + c\|\rho\|_{\frac{5}{3}} \left(\int_R^\infty r^{2-5}dr\right)^{\frac{2}{5}}$$
$$\leq c\|\rho\|_\infty R + c\|\rho\|_{\frac{5}{3}}(R^{-2})^{\frac{2}{5}}$$
$$\leq c\|\rho\|_\infty R + c\|\rho\|_{\frac{5}{3}} R^{-\frac{4}{5}} \tag{39}$$

On choisit maintenant R tel que

$$\|\rho\|_\infty R = \|\rho\|_{\frac{5}{3}} R^{-\frac{4}{5}} \tag{40}$$

On aura donc

$$R = \|\rho\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{9}}.\|\rho\|_\infty^{-\frac{5}{9}}$$

On en déduit finalement que

$$|E(t,x)| \leq c\|\rho\|_\infty R \leq c\|\rho\|_\infty.\|\rho\|_\infty^{-\frac{5}{9}}\|\rho\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{9}}$$
$$\leq c\|\rho\|_\infty^{\frac{4}{9}}\|\rho\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{9}} \tag{41}$$

Donc $|E(t,x)| \leq c\|\rho\|_\infty^{\frac{4}{9}}\|\rho\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{9}}$ Ce qu'il faut démontrer

6 Estimations sur les dérivées de champs

Soit $0 \leq \rho \in L^1$ lipshitizienne. On pose Lip ρ la constante lipchitizienne de ρ. Then for $0 < d \leq R$,Alors

$$\left|\frac{\partial E}{\partial x_k}(t,x)\right| \leq c(1+\ln R/d)) \sup_{|y-x|\leq R} \rho(t,y) + cd \text{ Lip } \rho(t,.) + cR^{-3}\|\rho(t)\|_1 \tag{42}$$

Démonstration. On remarque par une dérivation classique et en utilisant la lipshitizienne de ρ que

$$-\frac{\partial E^k}{\partial x_i}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} (\rho(t,y) - \rho(t,x)) \frac{3(y_i - x_i)(y_k - x_k)dy}{r^5} \tag{43}$$

avec $r = |y - x|$
On a deux cas,lorsque $i = k$ et $i \neq k$.Mais pour les deux cas, on a la même démonstration pour faire les estimations.
On va étudier donc seulement le cas $i = k$. On remarque que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E^k}{\partial x_k}(t,x) &= -\frac{1}{3}\rho(t,x) + \frac{1}{4\pi}\int_{|y-x|\leq d} (\rho(t,y) - \rho(t,x)) \left(\frac{3(y_k - x_k)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}d\right) dy \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi}\int_{d\leq|y-x|\leq R} \rho(t,y) + \frac{1}{4\pi}\int_{|y-x|\geq R} \rho(t,y)\right)\left(\frac{3(y_k - x_k)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) dy \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E^k}{\partial x_k}(t,x) &= -\frac{1}{3}\rho(t,x) + \frac{1}{4\pi}\int_{|y-x|\leq d} (\rho(t,y) - \rho(t,x)) \left(\frac{3(y_k - x_k)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}d\right) dy \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi}\int_{d\leq|y-x|\leq R} \rho(t,y) + \frac{1}{4\pi}\int_{|y-x|\geq R} \rho(t,y)\right)\left(\frac{3(y_k - x_k)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) dy \end{aligned} \tag{45}$$

.
Pour le second terme,en utilisant le fait que ρ est lipshitz et en utilisant le changement en coordonnées sphériques en y en remarque que

$$\text{const.} \quad (\text{Lip}\rho(t,.)).\int_{|y-x|\leq d} \frac{dy}{r^2} \leq cd.\text{Lip}\rho(t,.) \tag{46}$$

Pour le troisième terme et le quatrième termes,on utilise juste le changement en coordonnées sphériques en y et on obtient donc

$$\text{const.} \quad \|\rho(t)\|_\infty \int_{d\leq|y-x|\leq R} \frac{dy}{r^3} = c\|\rho(t)\|_\infty \int_d^R \frac{dr}{r} = c\ln\frac{R}{d}.\|\rho(t)\|_\infty \tag{47}$$

Et

$$\text{const.} \quad R^{-3}\|\rho(t)\|_1 \tag{48}$$

□

Corollaire 2. *On Supppose que* $\|\rho\|_\infty \leq c_T < \infty$ *on* $t \leq T$*,et on définit*

$$ln^* s = \begin{cases} s & 0 \leq s \leq 1 \\ 1 + \ln s & s > 1 \end{cases} \tag{49}$$

Alors

$$\sup_x |D_x E(t,x)| \leq c_T \left(1 + ln^*(\sup_x |D_x \rho|)\right) \tag{50}$$

Démonstration. On remplace Lip_ρ par $sup_x|D_x\rho|$, et on prend $=\frac{1}{\cdot \; sup_x|D_x\rho|}$. □

Remarque 4. *On suppose que le support de* f *pour un temps fini et inclu dans une boule de rayon* $Q(t)$ *alors*

$$\rho(t) = \int f(t)dv = \int_{|v|\leq Q(t)} f dv \leq cQ(t)^3 \tag{51}$$

Et donc en utilisant (37) et (51) On a

$$\|E\|_\infty \leq c\|\rho\|_\infty^{4/9} \leq c_1 Q(t)^{4/3} \tag{52}$$

7 Existence locale et unicité de la solution

On définit maintenant $Q(t) := 1+\sup\{|v|$;il existe x$\in \mathbb{R}^3$,s $\in [0,t]$ tel que $f(s,x,v) \neq 0\}$ de sorte que f peut être continue sur $[0,T]$(T arbitraire) pour la condition

$$Q(t) \leq \|f_0\|_\infty^{2/3} \|f_0\|_1^{1/3} T \; avec \; 0 \leq t \leq T$$

On note $c := c(f_0) = \|f_0\|_\infty^{2/3} \|f_0\|_1^{1/3}$
Le but d'arriver à prouver l'existence locale de la solutions est de construire une solution approximative qui vérifie le système de Vlasov Poisson(1) et montrer que cette solution converge vers une solution régulière qui vérifie le système de Vlasov-Poisson.
Afin de faire cela on va passer par plusieurs étapes :
Premièrement on va définir une solution approximative.
Deuxièment on va monter qu'il existence une solution approximative régulière qui vérifie un système proche de (1).
Troisièment,on va faire quelques estimations qui aident à montrer la convergence de cette solution approximative.

7.1 Existence

7.1.1 Définition :Solution approximative

On définit une solution approximative comme étant la suite des fonctions f_n de classe C^1 définie sur $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\begin{cases} \partial_t f_{n+1} + v \cdot \nabla_x f_{n+1} + \gamma E_n \cdot \nabla_v f_{n+1} = 0 \\ E_n(t,x) = -\nabla_x u_n \\ u_n(t,x) = \int \frac{\rho_n(y)}{|x-y|} dy \\ \rho_n(t,x) = \int f_n dv \\ f_{n+1}(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{53}$$

On suppose que f_0 est de classe C^1 à support compact

7.1.2 Existence d'une solution approximative

Proposition 4. *Soit $f_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ alors il existe une solution approximative régulière qui vérifie le système approximatif (53)*

Démonstration. Supposons que $f_n \in C(\mathbb{R}^+; C_c^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ satisfait le système approximatif (53)

Comme l'application $(t,(x,v)) \mapsto (v, \gamma E_n(t,x))$ est uniformément lipshitizienne par rapport (x,v) et continue en temps, alors d'après le théorème de Cauchy lipshitiz,les solutions du systèmes suivant t

$$\begin{cases} \dot{X}_{n+1}(s;t,x,v) = V_{n+1}(s,t,x,v) \\ \dot{V}_{n+1}(s;t,x,v) = \gamma E_n(s, X_{n+1}(s;t,x,v)) \end{cases}$$

avec les conditions $(X_{n+1}(t;t,x,v), V_{n+1}(t;t,x,v)) = (x,v)$,existent, sont uniques et régulières

On définit

$$f_{n+1}(t,x,v) := f_0(X_{n+1}(0;t,x,v), V_{n+1}(0;t,x,v)) \tag{54}$$

Montrons que f_{n+1} satisfait aussi le système approximative(53) et que f_{n+1} est de classe C^1

D'après(54),on remarque que f_{n+1} **est de classe** $C^1([0,T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.
Montrons maintenant qu'elle satisfait le système approximatif(53)

On remarque que $\frac{d}{ds}f_{n+1}\left(s, X_{n+1}(s;t,x,v), V_{n+1}(s;t,x,v)\right)$=0 alors f_{n+1} **satisfait le système approximatif** car

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds}f_{n+1}\left(s, X_{n+1}(s;t,x,v), V_{n+1}(s;t,x,v)\right) \\
&= \partial_t f_{n+1}(t,x,v) + \dot{X}_{n+1}(t;t,x,v)\cdot\nabla_x f_{n+1}(t,x,v) + \dot{V}_{n+1}(t;t,x,v)\cdot\nabla_v f_{n+1}(t,x,v) \\
&= \partial_t f_{n+1}(t,x,v) + v\cdot\nabla_x f_{n+1}(t,x,v) + \gamma E_n(t,x)\cdot\nabla_v f_{n+1}(t,x,v)
\end{aligned}
\tag{55}
$$

□

7.1.3 Estimations

On définit

$$
\begin{aligned}
Q_n(t) &= 1+\sup\left\{|v| :\ \textit{il existe } x\in\mathbb{R}^3 \textit{ et } s\in[0,t] \textit{telque} f_n(s,x,v)\neq 0\right\} \\
&= 1+\sup\left\{|V_n(s,0,x,v)| :\ \textit{il existe } x\in\mathbb{R}^3 \textit{ et } s\in[0,t] \textit{tel que} f_0(s,x,v)\neq 0\right\}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Lemme 1. *1.Soit $T>0$ tel que $T<(cQ_0)^{-1}$ avec $c=\|f_0\|_\infty^{\frac{2}{3}}\|f_0\|_1^{\frac{1}{3}}$alors pour tout $t\leq T$,on a*

$$1+\|\nabla_x E_n(t)\|_\infty \leq C$$

avec C indépendante de n
2. On a $Q_n(t)\leq\frac{Q_0}{1-cQ_0 t}$

Démonstration. 1. On sait d'après (50) que

$$\|\nabla_x E_{n+1}(t)\|_\infty \leq 1+\ln^+\|\nabla_x\rho_{n+1}(t)\|_\infty \tag{57}$$

Alors majorons maintenant $|\nabla_x\rho_{n+1}(t,x)|$
Pour $0\leq s\leq t$,on a d'après la partie de l'existence de la solution approximative [(54)

$$|\nabla_x\rho_{n+1}(t,x)| = \left|\int\nabla_x\left[f_0\left(X_{n+1}(0;t,x,v), V_{n+1}(0;t,x,v)\right)\right]dv\right| \tag{58}$$

Et comme f_0 est à support compact et de classe de classe C^1 alors on obtient que

$$
\begin{aligned}
|\nabla_x\rho_{n+1}(t,x)| &= \left|\int\nabla_x\left[f_0\left(X_{n+1}(0;t,x,v), V_{n+1}(0;t,x,v)\right)\right]dv\right| \\
&\leq \|\nabla_{x,v}f_0\|_\infty\int\left(|\nabla_x X_{n+1}(0;t,x,v)|+|\nabla_x V_{n+1}(0;t,x,v)|\right)dv
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Maintenant majorons $|\nabla_x X_{n+1}(s;t,x,v)|+|\nabla_x V_{n+1}(s;t,x,v)|$

On remarque que $\nabla_x X_n(t,t,x,v) = \nabla_x x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $\nabla_x V_n(t,t,x,v) = \nabla_x v = 0$
Alors on a pour $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} |\nabla_x X_{n+1}(s;t,x,v)| &= |\nabla_x X_n(t,t,x,v) + \int_s^t \nabla_x V_{n+1}(s';t,x,v)\, ds'| \\ &\leq |\nabla_x X_n(t,t,x,v)| + \left| \int_s^t \nabla_x V_{n+1}(s';t,x,v)\, ds' \right| \\ &\leq \sqrt{3} + \int_s^t |\nabla_x V_{n+1}(s';t,x,v)|\, ds' \end{aligned} \tag{60}$$

Et

$$\begin{aligned} |\nabla_x V_{n+1}(s;t,x,v)| &= \left| \nabla_x v + \int_s^t \nabla_x \left[E_n\left(s', X_{n+1}(s';t,x,v)\right)\right] ds' \right| \\ &= \left| \int_s^t \nabla_x X_{n+1}(s';t,x,v) \cdot \nabla_x E_n(s',t,x,v)\, ds' \right| \\ &\leq \int_s^t \left| \nabla_x X_{n+1}(s';t,x,v)' \cdot \nabla_x E_n(s',t,x,v) \right| ds' \\ &\leq \int_s^t |\nabla_x X_{n+1}(s';t,x,v)| \cdot \|\nabla_x E_n(s')\|_\infty\, ds' \end{aligned} \tag{61}$$

En combinant (60) et (61),on obtient

$$\begin{aligned} &|\nabla_x X_{n+1}(s;t,x,v)| + |\nabla_x V_{n+1}(s;t,x,v)| \\ &\leq \sqrt{3} + \int_s^t |\nabla_x V_{n+1}(s';t,x,v)| ds' + \|\nabla_x E_n(s')\|_\infty \cdot \int_s^t |\nabla_x X_{n+1}(s';t,x,v)| ds' \\ &\leq \sqrt{3} + \int_s^t (1 + \|\nabla_x E_n(s')\|_\infty)\left(|\nabla_x X_{n+1}(s';t,x,v)|\right) \\ &\qquad + (1 + \|\nabla_x E_n(s')\|_\infty)\left(|\nabla_x V_{n+1}(s';t,x,v)|\right) ds' \\ &\leq \sqrt{3} + \int_s^t (1 + \|\nabla_x E_n(s')\|_\infty)\left(|\nabla_x X_{n+1}(s';t,x,v)| + |\nabla_x V_{n+1}(s';t,x,v)|\right) ds' \end{aligned} \tag{62}$$

En utilisant maintenant la lemme de Grönwall sur (62),on aura

$$|\nabla_x X_{n+1}(s;t,x,v)| + |\nabla_x V_{n+1}(s;t,x,v)| \leq \sqrt{3} e^{\int_s^t \left(1 + \|\nabla_x E_n(s')\|_\infty\right) ds'} \tag{63}$$

En utilisant maintenant (63) et (59),on peut trouver une constant $c = c\,(f_0)$tel que

$$\|\nabla_x \rho_{n+1}(t)\|_\infty \leq c e^{\int_0^{t'} \left(1 + \|\nabla_x E_n(s)\|_\infty\right) ds}. \tag{64}$$

En utilisant l'inégalité précédente et d'après (50), on a alors

$$\|\nabla_x E_{n+1}(t)\|_\infty \leq c \int_s^t (1 + \|\nabla_x E_n(s)\|_\infty)\, ds \tag{65}$$

Donc

$$1 + \|\nabla_x E_{n+1}(t)\|_\infty \leq c \left[1 + \int_s^t (1 + \|\nabla_x E_n(s)\|_\infty)\, ds\right] \tag{66}$$

On en conclue finalement, par récurrence et en supposant sans perte de généralité que $\sup_{s\in[0,T]} (1 + \|\nabla_x E_0(s)\|_\infty) \leq c$ on aura

$$1 + \|\nabla_x E_n(t)\|_\infty \leq ce^{c(t-s)} \leq ce^{cT} \leq C \tag{67}$$

2. Pour $n = 0$,on remarque que pour $t \leq T$ on a $Q_0(t) \equiv Q_0 \leq Q_0/\left(1 - cQ_0 t\right)$. Supposons que la proposition est vrai pour l'ordre n c'est a dire $Q_n(t) \leq \frac{Q_0}{1-cQ_0 t}$ for $t \leq T$.et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$
D'après[52] on a

$$\|\rho_n(t)\|_\infty \leq Q_n^3(t)\, \|f_0\|_\infty\,,$$

Alors on utilisant l'inégalité précédente et d'après (37),on obtient

$$\|E_n(t)\|_\infty \leq \|\rho_n(t)\|_\infty^{2/3} \|\rho_n(t)\|_1^{1/3} \leq Q_n^{3\times\frac{2}{3}}(t)\, \|f_0\|_\infty^{2/3} \|f_0\|_1^{1/3} \leq Q_n^2(t)\, \|f_0\|_\infty^{2/3} \|f_0\|_1^{1/3}$$

On a par hypothèse que $c := \|f_0\|_\infty^{2/3} \|f_0\|_1^{1/3}$ alors $\|E_n(t)\|_\infty \leq cQ_n^2(t)$.
Donc on a

$$\begin{aligned}
|V_{n+1}(t;0,x,v)| &= \left|v + \int_0^t \gamma E_n\left(s, X_{n+1}(s;0,x,v)\right) ds\right| \\
&\leq |v| + \int_0^t \|E_n(s)\|_\infty\, ds \\
&\leq Q_0 + c\int_0^t Q_n^2(s) ds
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(t) &\leq Q_0 + c\int_0^t Q_n^2(s) ds \\
&\leq Q_0 + c\int_0^t \left(\frac{Q_0}{1-cQ_0 s}\right)^2 ds = \frac{Q_0}{1-cQ_0 t}
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3. *Soit $T > 0$ alors pour tout $t \leq T$ on a*

$$\|\rho_n(t)\|_\infty \leq cQ_n^3(t) \leq C, \quad \|E_n(t)\|_\infty \leq Q_n^2(t) \leq C$$

7.1.4 Convergence de solution approximative

Pour montrer la convergence de cette suites de solutions approximatives,on va montrer que cette solution est de Cauchy dans l'espace des fonctions continues qui est complet par

rapport à la norme infinie.
Ensuite,pour assurer la régularité de la limite, on va utiliser le fait que les caractéristiques approximatives sont aussi convergentes et que la solution approximative est constante tout au long de ces caractéristiques.

Lemme 2. *On pose $Q(t) \leq c\, T$*

i Pour $0 \leq s \leq t \leq T$ et $n \geq 1$,on a

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\|_\infty \leq c \int_s^t \|E_n(s) - E_{n-1}(s)\|_\infty \, ds \tag{68}$$

ii Pour $s \leq T$ et $n \geq 1$,on a

$$\|E_n(s) - E_{n-1}(s)\|_\infty \leq c\, \|f_n(s) - f_{n-1}(s)\|_\infty \tag{69}$$

Démonstration. **i)** Soient t, x, v fixés. On sait par définition de f_{n+1} que

$$|f_{n+1}(t,x,v) - f_n(t,x,v)| = |f_0\left(X_{n+1}(0;t,x,v), V_{n+1}(0;t,x,v)\right) - f_0\left(X_n(0;t,x,v), V_n(0;t,x,v)\right)| \tag{70}$$

Mais f_0 est C^1 par hypothèse alors on obtient

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(t,x,v) - f_n(t,x,v)| &= |f_0\left(X_{n+1}(0;t,x,v), V_{n+1}(0;t,x,v)\right) - f_0\left(X_n(0;t,x,v), V_n(0;t,x,v)\right)| \\
&\leq c\, |X_{n+1}(0;t,x,v) - X_n(0;t,x,v)| + |V_{n+1}(0;t,x,v) - V_n(0;t,x,v)| \\
&= g_{n+1}(0)
\end{aligned} \tag{71}$$

avec

$$g_{n+1}(s) := |X_{n+1}(s;t,x,v) - X_n(s;t,x,v)| + |V_{n+1}(s;t,x,v) - V_n(s;t,x,v)| \tag{72}$$

Pour arriver maintenant à montrer (68),il suffit de montrer que

$$\sup_{s\in[0,t]} g_{n+1}(s) \leq c \int_s^t \|E_n(s) - E_{n-1}(s)\|_\infty \, ds \tag{73}$$

avec $0 \leq s \leq t \leq T$ On a

$$\begin{aligned}
X_n(s;t,x,v) &= x + \int_s^t V_n\left(s';t,x,v\right) ds' \\
V_n(s;t,x,v) &= v + \int_s^t \gamma E_{n-1}\left(s', X_n\left(s';t,x,v\right)\right) ds'
\end{aligned}$$

Alors

$$|X_{n+1}(s;t,x,v) - X_n(s;t,x,v)| \leq \int_s^t |V_{n+1}\left(s';t,x,v\right) - V_n\left(s';t,x,v\right)| \, ds' \tag{74}$$

Et

$$|V_{n+1}(s;t,x,v)-V_n(s;t,x,v)| \leq \int_s^t \left|E_n\left(s',X_{n+1}\left(s';t,x,v\right)\right)-E_{n-1}\left(s',X_n\left(s';t,x,v\right)\right)\right|ds'$$
$$\leq \int_s^t \left(\left|E_n\left(s',X_{n+1}\right)-E_n\left(s',X_n\right)\right|+\left|E_n\left(s',X_n\right)-E_{n-1}\left(s',X_n\right)\right|\right)ds'$$
$$\leq \int_s^t \left(\left\|\nabla_x E_n\left(s'\right)\right\|_\infty \left|X_{n+1}\left(s'\right)-X_n\left(s'\right)\right|+\left\|E_n\left(s'\right)-E_{n-1}\left(s'\right)\right\|_\infty\right)ds' \tag{75}$$

En combinant maintenant les deux inégalités (74) et (75) , on aura donc

$$g_{n+1}(s) \leq \int_s^t \left|V_{n+1}\left(s';t,x,v\right)-V_n\left(s';t,x,v\right)\right|ds' + \int_s^t \left\|\nabla_x E_n\left(s'\right)\right\|_\infty \left|X_{n+1}\left(s'\right)-X_n\left(s'\right)\right|d'$$
$$+\int_s^t \left\|E_n\left(s'\right)-E_{n-1}\left(s'\right)\right\|_\infty ds'$$

$$\leq \int_s^t \left(1+\left\|\nabla_x E_n\left(s'\right)\right\|_\infty\right)\left(\;\left|X_{n+1}-X_n\left(s';t,x,v\right)\right|+\left|V_{n+1}-V_n\left(s';t,x,v\right)\right|\right)ds'$$
$$+\int_s^t \left\|E_n\left(s'\right)-E_{n-1}\left(s'\right)\right\|_\infty ds' \text{(on obtient cette inégalité en utilisant la lemme2)}$$

$$\leq \int_s^t a\left(s'\right)g_{n+1}\left(s'\right)ds' + \int_s^t \left\|E_n\left(s'\right)-E_{n-1}\left(s'\right)\right\|_\infty ds' \tag{76}$$

avec $a(s) := 1+\|\nabla_x E_n(s)\|_\infty$ qui est majoré uniformément
Donc on aura finalement que

$$g_{n+1}(s) \leq \int_s^t a\left(s'\right)g_{n+1}\left(s'\right)ds' + \int_s^t \left\|E_n\left(s'\right)-E_{n-1}\left(s'\right)\right\|_\infty ds' \tag{77}$$

Il faut maintenant majorer$\int_s^t a\left(s'\right)g_{n+1}\left(s'\right)ds'$ par $\int_s^t \left\|E_n\left(s'\right)-E_{n-1}\left(s'\right)\right\|_\infty ds'$

Pour cela on multiplie (77) par $a(s)e^{-\int_1^t a(s')ds'}$
On a alors

$$g_{n+1}(s)\,a(s)e^{-\int_1^t a(s')ds'} \leq a(s)e^{-\int_1^t a(s')ds'}\int_s^t a\left(s'\right)g_{n+1}\left(s'\right)ds' + a(s)e^{-\int_1^t a(s')ds'}\int_s^t \left\|E_n\left(s'\right)-E_{n-1}\left(s'\right)\right\|_\infty \tag{78}$$

Mais on remarque

$$g_{n+1}(s)\,a(s)e^{-\int_1^t a(s')ds'} - a(s)e^{-\int_1^t a(s')ds'}\int_s^t a\left(s'\right)g_{n+!}\left(s'\right)ds' = -\frac{d}{ds}\left(e^{-\int_i^t a(s')ds'}\int_s^t a\left(s'\right)g_{n+1}\left(s'\right)ds'\right) \tag{79}$$

Alors

$$-\frac{d}{ds}\left(e^{-\int_i^t a(s')ds'}\int_s^t a(s')\,g_{n+1}(s')\,ds'\right)\leq a(s)e^{-\int_1^{t} a(s')ds'}\int_s^t \|E_n(s')-E_{n-1}(s')\|_\infty\,ds \tag{80}$$

On intègre maintenant (80) par rapport à s' entre s et t. On sait de plus d'après lemme 1 que $a(s)\leq c$ alors $e^{\int_1^t a(s')ds'}\leq e^{T\sup_{s\in[0,t]} a(s)}\leq e^{Tc}\leq C$

On en déduit alors que

$$\int_s^t a(s')\,g(s')\,ds'\leq C\int_s^t \|E_n(s')-E_{n-1}(s')\|_\infty\,ds' \tag{81}$$

Et finalement on a le résultat

$$g_{n+1}(s)\leq C\int_s^t \|E_n(s')-E_{n-1}(s')\|_\infty\,ds' \tag{82}$$

ii) On remarque d'après (37) que

$$\|E_n(t)-E_{n-1}(t)\|_\infty\leq c\,\|\rho_n(t)-\rho_{n-1}(t)\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{9}}\,\|\rho_n(t)-\rho_{n-1}(t)\|_\infty^{\frac{4}{9}} \tag{83}$$

On remarque aussi que

$$\|\rho_n(t)-\rho_{n-1}(t)\|_\infty\leq c\max((Q_n)^3,(Q_{n-1})^3)\|f_n(t)-f_{n-1}(t)\|_\infty\,\|f_n(t)-f_{n-1}(t)\|_\infty \tag{84}$$

Car d'après lemme1, on a démontré que $Q_n$est bornée
De plus en utilisant (3) on en déduit que

$$\|E_n(t)-E_{n-1}(t)\|_\infty\leq c\,\|f_n(t)-f_{n-1}(t)\|_\infty \tag{85}$$

□

On en déduit alors que

Corollaire 4. *On a*

1. *f_n converge vers une une fonction f dans $C\left([0,T]\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\right)$*
2. *Pour $s\leq T$ et $n\geq 1$,on a pour chaque (t,x,v), la suite d'application*

$$s\mapsto(X_n(s;t,x,v),V_n(s;t,x,v))$$

converge dans $C^1([0,T],\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ et sa limite (X,V) satisfait

$$\begin{aligned}\frac{dX(s;t,x,v)}{ds}&=V(s;t,x,v)x\\ \frac{dV(s;t,x,v)}{ds}&=\gamma E(s,X(s;t,x,v))\end{aligned} \tag{86}$$

Démonstration. **1)** D'après les parties **i** et **ii** du lemme 2,on en déduit que

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\|_\infty \leq c \int_s^t \|f_n(s') - f_{n-1}(s')\|_\infty \, ds' \tag{87}$$

Et maintenant par récurrence et en majorant $t - s$ par T, on obtient

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\|_\infty \leq \frac{cT^n}{n!} \sup_{s\in[0,t]} (\|f_1(t) - f_0(t)\|_\infty) \tag{88}$$

Alors f_n est une suite de Cauchy dans $C([0,T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ qui est complet pour la norme infinie.Alors cette suite approximative converge vers une limite f dans $C([0,T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$

2) On note $X(s) = X(s;t,x,v)$ et $V(s) = (s;t,x,v)$ On a d'après (82) et d'après la partie **i** de la lemme 2 que

$$\sup_{s\in[0,T]} g_{n+1}(s) \leq c\,\|E_n(s) - E_{n-1}(s)\|_\infty \leq c\,\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$$

Alors

$$|X_{n+1}(s) - X_n(s)| + |V_{n+1}(s) - V_n(s)| \leq c\,\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$$

Alors la convergence des caractéristiques (X_n et V_n) dans $C([0,T], \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ est satisfaites d'après la convergence de f_n.
Il reste à montrer que cette limite est dans $C^1([0,T], \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.Il suffit donc de montrer que $(\dot{X}_n(s)\ ,\ \dot{V}_n)$ converge dans $C([0,T], \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.
On remarque que

$$\left\|\dot{X}_{n+1} - \dot{X}_n\right\|_\infty = \|V_{n+1} - V_n\|_\infty$$

Alors $\dot{X}_n$ converge dans $C([0,T], \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ d'après la convergence de V_n
Pour $\dot{V}_n$, on sait que

$$\left\|\dot{V}_{n+1} - \dot{V}_n\right\|_\infty \leq |E_n\left(s', X_{n+1}\left(s';t,x,v\right)\right) - E_{n-1}\left(s', X_n\left(s';t,x,v\right)\right)|$$

Alors

$$\begin{aligned}\left\|\dot{V}_{n+1} - \dot{V}_n\right\|_\infty &\leq \left(|E_n\left(s', X_{n+1}\right) - E_n\left(s', X_n\right)|\right) + \left(|E_n\left(s', X_n\right) - E_{n-1}\left(s', X_n\right)|\right) \\ &\leq \|\nabla_x E_n\left(s'\right)\|_\infty \left||X_{n+1}\left(s'\right) - X_n\left(s'\right)|\right| + \|E_n\left(s'\right) - E_{n-1}\left(s'\right)\|_\infty\end{aligned} \tag{89}$$

□

Remarque 5. *Alors $\dot{V}_n$ converge dans $C([0,T], \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$d'après la convergence de E_n et X_n*

On définit V la limite de V_n ,X la limite de X_n et E la limite de E_n Et finalement en passant à la limite de

$$\begin{cases} \dot{X}_{n+1}(s;t,x,v) = V_{n+1}(s,t,x,v) \\ \dot{V}_{n+1}(s;t,x,v) = \gamma E_n\left(s, X_{n+1}(s;t,x,v)\right) \end{cases}$$

on aura que

$$\dot{X}(s) = V(s), \quad \dot{V}(s) = \gamma E(s, X(s))$$

7.1.5 Existence et régularité de la solution

Proposition 5. *Soitf_n une solution approximative,alors, Alors, il existe une constante $T = T(f_0)$ tel que la limite f de $f_n$est une solution classique du problème de Cauchy de système de Vlasov-Poisson*

Démonstration. On prend $T = (\|f_0\|_\infty^{\frac{2}{3}} \|f_0\|_1^{\frac{1}{3}} Q_0)^{-1}$ Soient t, x, v fixés On pose $X(s, t, x, v)$ et $V(s, t, x, v)$ les limites respectives de $X_n(s, t, x, v)$ et $V_n(s, t, x, v)$. Alors

$$\begin{aligned} f(t, x, v) = \lim_{n\to\infty} f_n(t, x, v) &= \lim_{n\to\infty} f_0\left(X_n(0; t, x, v), V_n(0; t, x, v)\right) \\ &= f_0(X(0; t, x, v), V(0; t, x, v)) \end{aligned} \tag{90}$$

Comme f_0 et (X, V) sont de classe C^1 alors f l'est aussi. On remarque de plus que

$$0 = \left| \frac{d}{ds} f(s, X(s; t, x, v), V(s; t, x, v)) \right|_{s=t}$$

Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} f\left(s, X(s; t, x, v), V(s; t, x, v)\right) \\ &= \partial_t f(t, x, v) + \dot{X}(t; t, x, v) \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \dot{V}(t; t, x, v) \cdot \nabla_v f(t, x, v) \\ &= \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \gamma E(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) \end{aligned} \tag{91}$$

Donc f satisfait le système de Vlasov Poisson □

7.2 Unicité

On suppose que f et g de classe C^1 sont deux solutions classiques du problème de Cauchy de système de Vlasov Poisson.
Montrons que f=g
D'après les parties **i** et **ii** du lemme2,on obtient

$$\|f(t) - g(t)\|_\infty \lesssim \int_0^t \|f(s) - g(s)\|_\infty \, ds$$

Par la lemme de Gronwall,on en déduit que $f = g$.D'où l'unicité

8 Existence globale de la solution

Le but de cette partie que T peut être prolonger vers l'infini.
Soit $T > 0$.On rappelle que $Q(t) = 1 + \sup\{|v| : \textit{ il existe } x \in \mathbb{R}^3, s \in [0,t], f(s,x,v) \neq 0\}$ de sorte que f est continue sur [0,T] sous la condition $Q(t) \leq \|f_0\|_\infty^{\frac{2}{3}}\|f_0\|_1^{\frac{1}{3}}T$ pour tout $t \leq T$

Proposition 6. *Soient $T > 0$ et f de classe C^1 une solution classique du problème de Cauchy de système de Vlasov Poisson.*
Si $Q(T) < \infty$, alors f est prolongée en une solution classique d'intervalle de temps plus grand

Démonstration. On va utiliser le résultat de l'existence local sur un nouveau problème. On va prendre une nouvelle solution $\hat{f}$ avec une nouvelle condition initiale $\hat{f}(0,x,v) := f(t_0,x,v)$ avec $t_0 < T$. On remarque premièrement que la norme par rapport à la condition initiale ne change pas car on a déjà démontré qu'il y a préservation de la mesure.Donc la constante c est indépendante de choix de condition initiale.De plus d'après la monotonie de Q,on peut remarquer aussi que $Q(T)^{-1} < Q(t_0)^{-1}$,
Et donc la condition $T = (\|f_0\|_\infty^{\frac{2}{3}}\|f_0\|_1^{\frac{1}{3}}Q_0)^{-1}$ est indépendante de choix de condition initiale.Il dépend seulement de $Q(T)$
De plus, dans la proposition précédente,on a montré que la longueur de l'intervalle de temps T pour que la solution existe est donné par $T = (\|f_0\|_\infty^{\frac{2}{3}}\|f_0\|_1^{\frac{1}{3}}Q_0)^{-1}$qui d'après ce qui précède dépends seulement en $Q(T)$.Alors si on nomme la longueur de l'intervalle de temps pour l'existence de $\hat{f}$ par $\hat{T}$,on remarque que pour appliquer le théorème de l'existence local pour $\hat{f}$,il suffit de prendre $\hat{T} < \|f_0\|_\infty^{\frac{2}{3}}\|f_0\|_1^{\frac{1}{3}}Q(T))^{-1}$ qui ne dépend ni de condition initiale ni de nouveau t_0 choisi.
Montrons maintenant que la solution peut être prolongeable sur un temps plus grand que T.
Si on prend par exemple $t_0 = T - \frac{1}{4}\hat{T}$ on peut construire une nouvelle solution dans $C^1(\ [0, t_0 + \hat{T}] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\ )$ en joigant les deux solutions $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ et $\hat{f} \in C^1([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ □

Corollaire 5. *La solution classique du problème de Cauchy de système de Vlasov Poison $f \in C^1\left([0,T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)$avec la condition initiale f_0,satisfaisant que $Q(t) \leq h(t)$ avec h est une fonction continue $h : [0, \infty[\to [0, \infty[$*

Démonstration. Le but et de démontrer que $T = \infty$
Alors,on suppose que f de classe C^1 sur $[0.T_{max}] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ avec $T_{max} < \infty$ est la solution maximale de donnée initiale f_0.Comme Q est bornée sur $[0, T_{max}]$,alors on peut appliquer la proposition précédente 6,qui contredit que f est maximal sur $[0, T_{max}]$.Alors $T = \infty$ □

9 Théorème de Schaefer

Soit $0 \leq f_0 \in C_c^1$ .Alors le problème de Cauchy de système de Vlavov Poisson admet une unique solution globale de classe C^1et pour tout $p > \frac{33}{17}$,il existe une constante c_p tel que

$$Q(t) \leq c(1+t)^p \quad \forall t \leq T$$

Afin de faire ,on va utiliser les estimations ci-dessous. Soient $P \leq Q(t), R > 0, \Delta = \frac{P}{4}(c_1 Q^{\frac{4}{3}}(t))^{-1}$

9.1 The Good,Bad and Ugly set

On pose $\bar{X}(s)$et $\bar{V}(s)$les caractéristiques fixes de

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{X}}{ds} &= \bar{V} \\ \frac{d\bar{V}}{ds} &= \gamma E \end{aligned} \tag{92}$$

avec $f(t, \bar{x}(t), \bar{v}(t)) \neq 0$
On pose $y = X(s,t,x,v); w = V(s,t,x,v)$ On utilise la notation notation

$$X(s) := X(s;t,x,v) \text{ and } V(s) := V(s;t,x,v)$$

Le but de cette partie est de borner l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{t-\Delta}^{t} |E(s,\bar{X}(s))| ds \leq\ & c \int_{t-\Delta}^{t} \iint \frac{f(s,y,w)}{|y-\bar{X}(s)|^2} dw dy ds \\ &= c \int_{t-\Delta}^{t} \iint \frac{f(t,x,v)}{|X(s)-\bar{X}(s)|^2} dv dx ds \end{aligned}$$

$(d'après\ la\ préservation\ de\ la\ mesure)$

Afin de s'éloigner des singularités ,on va diviser le domaine d'intègration en 3 partie.

$$G = \{(s,x,v), t-\Delta < s < t\ et(\ |v| < P\ ou\ |v-\bar{v}(t)| < P)\} \tag{93}$$

$$\begin{aligned} B = \{(s,x,v), t-\Delta < s < t\ et\ |v| > P\ et\ |v-\bar{v}(t)| > P \\ et\ \Big(|X(s,t,x,v) - \widehat{X}(s) < R|v|^{-3} \\ ou\ |X(s,t,x,v) - \bar{X}(s)| < R|v-\bar{v}(t)|^{-3}\Big)\} \end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned} U = \{(s,x,v), t-\Delta < s < t\ et\ |v| > P \\ et\ |v-\bar{v}(t)| > P\ et \\ |X(s,t,x,v) - \bar{X}(s)| > R|v|^{-3} \\ et\ |X(s,t,x,v) - \bar{X}(s)| > R|v-\bar{v}|^{-3}\} \end{aligned} \tag{95}$$

The Good Set

on va montrer que

$$\iiint_G \frac{f(t,x,v}{\left|\bar{X}(s)-X(s,t,x,v)\right|^2} dvdxds \quad < \quad cP^{\frac{4}{3}}\Delta \tag{96}$$

The Bad Set

on va montrer que

$$\iiint_G \frac{f(t,x,v}{\left|\bar{X}(s)-X(s,t,x,v)\right|^2} dvdxds \quad < \quad cr\ln\frac{4Q(t)}{P}\Delta \tag{97}$$

The Ugly Set

on va montrer que

$$\iiint_G \frac{f(t,x,v}{\left|\bar{X}(s)-X(s,t,x,v)\right|^2} dvdxds \quad < \quad \frac{C}{R} \tag{98}$$

Afin de prouver (96), (97), et (98),on va passer premièrement par quelques observation qu'on va les utiliser dans la preuve.

Remarque 6. *Montrons que* $|V(s,t,x,v)-v| \leq \frac{P}{4}$ *et que*

$$\left|\bar{V}(s)-\bar{v}(t)\right| \leq \frac{P}{4}$$

On sait d'après les caractéristiques que

$$|V(s)-v| = \left|\int_s^t E\ ds'\right| \tag{99}$$

Alors pour tout $s \in [t-\Delta, t]$ *on a*

$$\begin{aligned} |V(s,t,x,v)-v| &\leq \|E\|_\infty.\Delta \\ &\leq \Delta c_1 Q(t)^{\frac{4}{3}} (d'après [52]) \\ &\leq \frac{P}{4}(c_1 Q(t)^{\frac{4}{3}})^{-1} c_1 Q(t)^{\frac{4}{3}} \\ &\leq \frac{P}{4} \end{aligned} \tag{100}$$

On a donc

$$|v(s,t,x,v)-v| \leq \frac{P}{4} \tag{101}$$

Et de la même manière on montre

$$\left|\bar{V}(s)-\bar{v}(t)\right| \leq \frac{P}{4} \tag{102}$$

Remarque 7. *1. Si $|v| < P$ et d'après l'équation [101] alors*

$$|v(s,t,x,v)| < |v| + \frac{P}{4} < P + P = 2P \tag{103}$$

2. Si $\left|v - \bar{V}(t)\right| < P$, alors,

$$\begin{aligned} |V(s,t,x,v) - \bar{v}(s)| &= \left|V(s,t,x,v) - v + v - \bar{v}(t) + \bar{v}(t) - \bar{V}(s)\right| \\ &\leq |V(s,t,x,v) - v| + |v - \bar{v}(t)| + \left|\bar{v}(t) - \bar{V}(s)\right| \\ &< \frac{P}{4} + P + \frac{P}{4} < \frac{P}{2} + P < 2P \end{aligned} \tag{104}$$

Pour la dernière inégalité,on obtient le premier terme d'après [101] ,le deuxième terme par hypothèse et le troisième terme d'après [102]

3. Si $|v| > P$alors $\frac{|v|}{2} \leq |v| - \frac{|v|}{4} \leq |v| - \frac{P}{4} \leq |V(s,t,x,v)|$(d′après[101])
Mais $|V(s,t,x,v)|v + \frac{P}{4}$
Alors on en déduit que si $|v| > P$ alors

$$\frac{|v|}{2} \leq |v| - \frac{|v|}{4} \leq |v| - \frac{P}{4} \leq |V(s,t,x,v)| \leq v + \frac{P}{4} \leq 2|v| \tag{105}$$

4. Si $|v - \bar{v}(t)| > P$ alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|v - \bar{v}(t)| &= |v - \bar{v}(t)| - \frac{1}{2}|v - \bar{v}(t)| \\ &\leq |v - \bar{v}(t)| - \frac{P}{2} \\ &= |v - \bar{v}(t)| - \frac{P}{4} - \frac{P}{4} \\ &\leq |v - \bar{v}(t)| - |V(s,t,x,v) - v| - \left|\bar{V}(s) - \bar{v}(t)\right| \ (\textit{d'après (101) et (102)}) \\ &\leq \left|V(s,t,x,v) - \bar{V}(s)\right| \\ &= \left|V(s,t,x,v) - v + v + \bar{v}(t) - \bar{v}(t) - \bar{V}(s)\right| \\ &\leq |V(s,t,x,v) - v| + \left|\bar{V}(s) - \bar{v}(t)\right| + |v - \bar{v}(t)| \\ &\leq \frac{P}{4} + \frac{P}{4} + |v - \bar{v}(t)|((\textit{d'après (101) et (102)}) \\ &\leq \frac{|v - \bar{v}(t)|}{4} + \frac{|v - \bar{v}(t)|}{4} + |v - \bar{v}(t)| \ (\textit{par hypothèse }) \\ &\leq 2|v - \bar{v}(t)| \end{aligned} \tag{106}$$

Montrons maintenant les trois estimations :

The Good : preuve de (96)

On va montrer que sur le Good set on a,

$$\begin{aligned} I_G &= \iiint\limits_G \frac{f(t,x,v)}{\left|\bar{X}(s) - X(s,t,x,v)\right|^2} \\ &= \iiint\limits_G \frac{f(s,y,w)dydwds}{\left|y - \bar{X}(s)\right|^2} \end{aligned} \tag{107}$$

(d'après la partie du préservation de la mesure)
Comme $(s,x,v) \in G$ et d'après(103) et (104),alors on a $|w| < 2P$ ou $\left|w - \bar{V}(s) < 2P\right|$
Donc on obtient,

$$I_G = \int\limits_{t-\Delta}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{|w|<2P ou \left|w-\bar{V}(s)\right|<2P} \frac{f(s,y,w)dwdyds}{\left|\bar{X}(s) - y\right|^2} = \int\limits_{t-\Delta}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\bar{\rho}(s,y)}{\left|\bar{X}(s) - y\right|^2} \tag{108}$$

Avec $\quad \bar{P}(s,y) = \int_{|w|<2P ou \left|w-\bar{V}(s)\right|<2P} \; f(s,y,w)dw$
Donc

$$\left\|\bar{P}(s)\right\|_\infty \leq \|f\|_\infty \frac{4\pi}{3}.(2P)^3 \leq \|f_0\|_\infty \frac{4\pi}{3}.(2P)^3 \leq c\ P^3 \tag{109}$$

Comme $\bar{\rho} \leq \rho$ alors $\|\bar{\rho}(s)\|_{\frac{5}{3}} \leq \|\bar{\rho}(s)\|_{\frac{5}{3}}$ et par (37) Alors on en déduit finalement que

$$\int \frac{\bar{\rho}(x,y)}{\left|y - \bar{X}(s)\right|^2} dy \leq C \ \ \|\bar{\rho}(s)\|_\infty^{\frac{4}{9}} \ \ \|\bar{\rho}(s)\|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{9}} \tag{110}$$

Donc

$$I_G \leq \Delta C P^{\frac{4}{3}} \tag{111}$$

Montrons maintenant l'estimation pour Bad set En utilisant (105) et (106)

$$\iiint\limits_{B} \frac{f(t,x,v)}{\left|X(s,t,x,v)-\bar{X}(s)\right|^2}\,dv\,dx\,ds$$
$$= \iiint\limits_{B} \frac{f(t,x,v)}{\left|y-\bar{X}(s)\right|^2}\,dw\,dy\,ds$$
$$\leq \int\limits_{t-\Delta}^{t}\int_{\frac{1}{2}P<w<2Q(t)}\int_{\left|y-\bar{X}(s)\right|<8R|w|^{-3}} \frac{f(t,x,v)}{\left|y-\bar{X}(s)\right|^2}\,dw\,dy\,ds$$
$$+\int\limits_{t-\Delta}^{t}\int_{\frac{1}{2}P<\left|w-\bar{V}(s)\right|<2Q(t)}\int_{\left|y-\bar{X}(s)\right|} < 8R\left|w-\bar{V}(s)\right|^{-3}\frac{f(t,x,v)}{\left|y-\bar{X}(s)\right|^2}\,dw\,dy\,ds$$
$$\leq C\int\limits_{t-\Delta}^{t}\int_{\frac{1}{2}P<w<2Q(t)}\left(\int\limits_{0}^{8R|w|^{-3}}|y|^{-2}dy\right)\,dw\,ds\;+\int\limits_{t-\Delta}^{t}\int_{\frac{1}{2}P<\left|w-\bar{V}(s)\right|<2Q(t)}\left(\int\limits_{0}^{8R\left|w-\bar{V}(s)\right|^{-3}}|y|^{-2}dy\right)\,dw\,ds$$
$$\leq C\int\limits_{t-\Delta}^{t}\int_{\frac{1}{2}P<w<2Q(t)}4\pi 8R|w|^{-3}\,dw\,ds+\int\limits_{t-\Delta}^{t}\int_{\frac{1}{2}P<\left|w-\bar{V}(s)\right|<2Q(t)}4\pi 8R\left|w-\bar{V}(s)\right|^{-3}\,dw\,ds$$
$$\leq cR\Delta\ln\left(\frac{4Q(t)}{P}\right) \tag{112}$$

Remarque 8.

Estimation de L'Ugly set (98)
La principale difficulté est que $\left|y-\bar{X}(s)\right|^{-2}$ n'est pas intégral suivant y dans la région où $|y|$ est assez grande.Nous voulons alors minorer le vecteur position $\left|X(s)-\bar{X}(s)\right|$.

Lemme 3. *(Minorer le vecteur position)*
Si v satisfait $|v-\bar{v(t)}|\geq P$, alors il existe $s_0\in[t-\Delta,t]$tel que

$$|X(s)-\bar{X}(s)|\geq\frac{1}{4}|v-\bar{v(t)}|\,|s-s_0|$$

pour tout $s\in[t-\Delta,t]$ et $x\in\mathbb{R}^3$

Démonstration. On pose $Z(s):=X(s)-\bar{X}(s)$
Afin de prouver la lemme,on va comparer Z(s) avec une approximation linéaire. On remarque premièrement que
$\dot{Z}(s)=V(s)-\bar{V}(s)$Alors
$\ddot{z}(s)=\dot{V}(s)-\dot{\bar{V}}(s)=\gamma\left(E(s,X(s),V(s))-E(s,\bar{X}(s),\bar{V}(s))\right)$
On définit $\bar{Z}(s):=Z(s_0)+\dot{Z}(s_0)(s-s_0)$ une approximation linéaire de sorte que $s_0\in[t-\Delta,t]$ tel que $|Z(s_0)|$ est minimal

Remarque 9. *On remarque que*

$$\begin{aligned}\left|\ddot{Z}(s)\right| &= \left|\ddot{Z}(s)-\ddot{\bar{Z}}(s)\right| \\ &= \left|\bar{V}(s)-V(s)\right| \\ &\leq \left|\bar{V}(s)\right|+|V(s)| \\ &\leq 2\|E\|_\infty \leq cQ(t)^{\frac{4}{3}}\end{aligned} \tag{113}$$

Alors en utilisant cette remarque et la formule de Taylor pour $Z(s)$autour de s_0,on en déduit que

$$\begin{aligned}\left|Z(s)-\bar{Z}(s)\right| &= \left|\frac{\ddot{Z}(c)}{2}(s-s_0)^2\right| \\ &\leq cQ(t)^{\frac{4}{3}}(s-s_0)^2 \\ &\leq cQ(t)^{\frac{4}{3}}|s-s_0||s-s_0| \\ &\leq cQ(t)^{\frac{4}{3}}\Delta|s-s_0| \\ &\leq c\varphi(t)^{\frac{4}{3}}\frac{\varphi(t)}{4c\varphi(t)^{\frac{4}{3}}}|s-s_0| \\ &\leq \frac{1}{4}P|s-s_0| \\ &\leq \frac{1}{4}\left|\frac{v-\bar{v}(t)}{4}\right||s-s_0|\end{aligned} \tag{114}$$

De plus on remarque que

$$\begin{aligned}\left|\bar{Z}(s)\right|^2 &\geq |Z(s_0)|^2+\left|\dot{Z}(s_0)(s-s_0)\right|^2 \\ &\geq 0+\left|\dot{Z}(s_0)\right|^2|s-s_0|^2 \\ &\geq \left|\frac{v-\bar{v}(t)}{4}\right|^2|s-s_0|^2\end{aligned} \tag{115}$$

Car d'après (106),on a

$$\left|\dot{Z}(s)\right| = \left|V(s,t,x,v)-\bar{V}(s)\right| \geq \frac{1}{2}\left|v-\bar{V}(t)\right| \tag{116}$$

Donc on déduit finalement d'après (114) et (115) que

$$\begin{aligned}|Z(s)| &\geq \left|\bar{Z}(s)\right|-\left|Z(s)-\bar{Z}(s)\right| \\ &\geq \left|\frac{v-\bar{v}(t)}{2}\right||s-s_0|-\frac{|v-\bar{v}(t)||s-s_0|}{4} \\ &= \frac{|v-\bar{v}(t)|}{4}|s-s_0|\end{aligned} \tag{117}$$

□

Donc on a pu trouver finalement une bonne inférieur du vecteur positon.
Maintenant revenons à montrer l'estimation de l'Ugly set(98)
On définit des fonctions

$$\sigma_i : \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}_t, \quad i = 1, 2 \tag{118}$$

tel que

$$\begin{aligned} \sigma_1(r) :&= \begin{cases} r^{-t} & si\ r \geq (R|v|^{-3})^2 \\ (R|v|^{-3})^2 & sinon \end{cases} \\ \sigma_2(r) :&= \begin{cases} r^{-1} & si\ r \geq (R|v-\bar{v}(t)|^{-3})^2 \\ (R|v-\bar{v}(t)|^{-3})^2 & sinon \end{cases} \end{aligned} \tag{119}$$

Soit

$$\not\Vdash := \begin{cases} 1 & si\ (s,x,v) \in U \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{120}$$

Alors d'après la décroissance de σ_i et la minoration du vecteur position de la lemme précédente on a

$$\frac{\not\Vdash_U(s,x,v)}{|Z(s)|^2} \leq \sigma_i(|Z(s)|^2) \leq \frac{1}{16}|v-\bar{v}(t)|^2|s-s_0|^2 \tag{121}$$

Pour $i = 1, 2$ et $s \in [t-\Delta, t]$
Alors

$$\int\limits_{t-\Delta}^{t} |Z(s)|^{-2}\not\Vdash_U(x,s,v)ds \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_i(\frac{1}{16}|v-\bar{v}(t)|^2|s-s_0|^2 ds = 2\int\limits_{0}^{\infty} \sigma_i\left(\frac{v-\bar{v}(t)}{4}r\right)^2 dr \tag{122}$$

Posons $\frac{v-\bar{v}(t)}{4} = \eta$ Donc $2\int_0^\infty \sigma_i\left(\frac{v-\bar{v}(t)}{4}r\right)^2 dr = 8\int_0^\infty \frac{\sigma_i(\eta^2)d\eta}{v-\bar{v}(t)|^2}$
Maintenant calculons $\int_0^\infty \sigma_i(\eta^2)\,d\eta$ pour $i = 1$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \sigma_1(\eta^2)d\eta = \int\limits_{0}^{R|v|^{-3}} \left(R|v|^{-3}\right)^{-2} d\eta + \int\limits_{R|v|^{-3}}^{\infty} \eta^{-2} = 2\left(R|v|^{-3}\right)^{-1} \tag{123}$$

De même

$$\int_0^\infty \sigma_2(\eta^2)d\eta = 2\left(R|v-\bar{v}(t)|^{-3}\right)^{-1}$$

Don on en déduit que

$$\int\limits_{t-\Delta}^{t} |z(s)|^{-2}\not\Vdash(s,x,v)ds = \begin{cases} 16|v-\bar{v}(t)|^{-1}(R|v|^{-3})^{-1} & i=1 \\ 16|v-\bar{v}(t)|^{-1}(R|v-\bar{v}(t)|^{-}3)^{-1} & i=2 \end{cases}$$

Alors

$$\int\limits_{t-\Delta}^{t} |z(s)|^{-2}\mathbb{1}(s,x,v)ds \leq (\frac{16|v-\bar{v}(t)|^{-1}}{R}(\min|v|,|v-\bar{v}(t))^3 \leq 16R^{-1}|v|2$$

Donc finalement et d'après la bornitude de l'énergie cinétique(voir(35)),on a

$$\iiint\limits_{U} \frac{f(t,x,v)}{\left|X(s,t,x,v)-\bar{X}(s)\right|^2}\,dv\;dx\;ds \leq cR^{-1}\iint f(t,x,v)|v|^2dv\;dx \leq CR^{-1}$$

9.2 Preuve du théorème de Schaefer

On pose $\Delta = \min t, \frac{1}{4c^1}Q^{\frac{-4}{3}}(t).Q^{\frac{4}{11}}(t)$ On remarque que

$$|\bar{V}(t)-\bar{V}(t-\Delta)| \leq \int\limits_{t-\Delta}^{t} \left|E(s,\bar{X}(s))\right|ds$$

Afin de borner la vitesse,on a besoin de borner l'intégrale.
Pour cela on a besoin de des estimation faite dans la partie précédente. Alors d'après (96),(97) et (98) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta}\int_{t-\Delta}^{t}\left|E(s,\bar{X}(s)\right|ds &\leq c\left(P^{4/3}+R\ln\frac{4Q(t)}{P}+\frac{1}{R\Delta}\right)\\ &\leq c\left(P^{4/3}+R\ln\frac{4Q(t)}{P}+R^{-1}.P^{-1}Q^{4/3}(t)\right)\end{aligned}\tag{124}$$

Afin de combiner les trois termes ensembles on prend $P=Q^{4/11}(t);\; R=Q^{16/33}(t)\ln\frac{4Q(t)}{P}^{-1/2}$.
Then

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta}\int_{t-\Delta}^{t}\left|E(s,\bar{X}(s)\right|ds \leq c\Bigg(&Q(t)^{16/33}+Q(t)^{16/33}.\ln^{1/2}\frac{4Q(t)}{Q^{4/11}(t)}\\ &+Q(t)^{4/3-4/11-16/33}\ln^{1/2}\frac{4Q(t)}{Q^{4/11}(t)}\Bigg)\\ \leq{}& cQ(t)^{16/33}\ln^{1/2}Q(t)\end{aligned}\tag{125}$$

Alors

$$|\bar{V}(t)-\bar{V}(t-\Delta)| \leq cQ(t)^{16/33}\ln^{1/2}Q(t)$$

Alors pour tout $\varepsilon>0$,il existe $c=c(\varepsilon)>0$ tel que

$$|\bar{V}(t)-\bar{V}(t-\Delta)| \leq cP^{16/33+\varepsilon}(t)\Delta \tag{126}$$

Comme $Q(t)$ est croissante ,alors il existe $T^* \in (0,T)$tel que

$$\Delta = \left\{\begin{array}{ll} t & t \leq T^* \\ \frac{1}{4c}Q^{\frac{-32}{33}} & t > T^* \end{array}\right.$$

Fixons $t \in (T^*, T)$, on definit

$$t_0 = t$$
$$t_{i+1} = t_i - \Delta(t_i).$$

Comme $\Delta(t)$ est décroissante, alors il existe k tel que

$$t_k < T^* \leq t_{k-1} < t_{k-2} < \cdots < t_1 < t_0 = t.$$

Alors en utilisant (126),on aura

$$\begin{aligned}\left|\bar{V}(t) - \bar{V}(t_k)\right| &\leq \sum_{i=1}^{k} \left|\bar{V}(t_{i-1}) - \bar{V}(t_i)\right| \\ &\leq cP^{16/33+e}(t) \sum_{i=1}^{k} (t_{i-1} - t_i) \\ &\leq cP^{16/33+e}(t)t.\end{aligned}$$

Comme la constante est indépendante de choix des caractéristiques($\bar{X}$ et $\bar{V}$)et que $Q(t)$ est croissante,alors on en déduit que pour tout $\delta > 0$,il existe $c = c(\delta) > 0$ tel que

$$Q(t) \leq c(1+t)^{33/17+\delta}, \quad \forall t \in [0, T]$$

D'où la démonstration du théorème de Schaefer.

10 Conclusion

Donc on a pu montrer que Q est majorée par une fonction continue sur $[0, \infty]$et alors pour la section de l'existence locale, on peut maintenant dire qu'on a le support de f que l'on a déjà supposé borné est bornée et donc toutes les estimations faites et supposées avant sont vraies et on peut donc directement montrer l'existence locale de la solution. De plus en utilisant la section précédente,on peut déduire finalement que la solution du problème de Cauchy de système de Vlasov-Poisson existe globalement.

Bibliographie

[1] Claude Zuily and Herve Queffele. *Elements d'analyse pour l'agrégation.* 1996.

[2] J.Batt. Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics. pages 342–364, 1977.

[3] Robert T.Glassey. *The cauchy problem in kinetic theory,Siam.* 1996.

[4] Schaeffer. Global existence of smooth solutions to the vlasov poisson system in three dimensions. page 1313–1335, 1991.

[5] Francois Bouchut, Francois Golse, and Mario Pulvirenti. *Kinetic Equationns Ans Asymptotic Theory.* 2000.

[1] [2] [3] [4] [5]

On a aussi utilisé des cours et des notes en ligne.En particulier un cours de master 2 en équations cinétiques pour "M.Frédéric Herau", des notes et des cours en lignes.