M2 Mathématiques fondamentales et appliquées
Année 2021-2022

Projet de recherche
Processus de Lévy et Processus de Branchement

Par :
Clément Lamoureux

Sous la direction de M. Chaumont

Table des matières

Ce mémoire traitera d'une étude sur les processus de branchement continu avec et sans immigration. Ces processus sont des cas particuliers de processus de Markov, et même de processus de Feller. Nous commenceront par donner les définitions et premières propriétés de ces processus dans la première partie. Ensuite, lors de la deuxième partie, nous étudierons plus en détails les processus de Lévy, ainsi que les processus de Lévy sans saut négatifs, qui sont étroitement liés au processus de branchement, par le transformation de Lamperti que nous évoquerons lors de la troisième partie. Enfin dans la dernière partie, nous citons des résultats tels que ceux sur les temps d'atteinte des processus de branchement avec immigration, qu'on peut trouver dans l'article de Duhalde, Foucart et Ma [3].

1 Définitions sur les processus de Markov et de Lévy

1.1 Processus de Markov

Dans cette première partie, nous allons donner la définition d'un processus de Markov, en rappelant d'abord la définition d'un processus stochastique. On considérera tout au long de ce projet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ l'ensemble des réels muni de sa tribu borélienne.

On notera $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables f bornées, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera $\mathcal{C}_0^n(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui tendent vers 0 en l'infini.

On dira qu'un ensemble $X = (X_t, t \geqslant 0)$ est un processus stochastique indexé par $\mathbb{R}_+$, à valeur dans $\mathbb{R}$ si pour tout $t \geqslant 0$, l'application $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application mesurable. Pour $\omega \in \Omega$, on appellera l'application qui à $t \mapsto X_t(\omega)$ trajectoire du processus X.

Si on considère $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ une filtration de $\mathcal{F}$ (famille croissante de tribu pour l'inclusion), alors on dira que X est adapté si pour tout $t \geqslant 0$, l'application $\omega \mapsto X_t(\omega)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Si la filtration n'est pas précisé, on parlera de celle défini par $\forall t \geqslant 0, \mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leqslant t)$, où σ désigne la tribu engendrée.

Pour les définitions suivantes des processus de Markov, on s'appuiera sur le livre de Blumenthal et Getoor [2].

Définition 1.1. On dit qu'un processus X est un processus de Markov adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ si X est adapté, et si pour tout $t \geqslant 0$, étant donné X_t, $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(X_s, s \geqslant t)$ sont indépendantes.

Théorème 1.2. *Soit X un processus stochastique adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$. Alors X est un processus de Markov si, et seulement si, pour tout $s \leqslant t$, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a*

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s)$$

Définition 1.3. X vérifie la propriété de Markov forte si pour tout temps d'arrêt T, si conditionnellement à $\{T < \infty\}$, le processus $(X_{T+t} - X_T, t \geqslant 0\}$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$ [1] et a pour loi P.

1. Ici $\mathcal{F}_T$ désigne la tribu engendrée par T qui est composée de tout les ensembles A tels que $\{T \leqslant t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geqslant 0$.

Définition 1.4. On dit qu'un processus de Markov X est homogène en temps si pour $t, s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in A | X_s = x) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_0 = x)$$

On va maintenant donner une nouvelle définition des processus de Markov, qui fait appelle aux fonctions de transition.

Définition 1.5. La fonction $P_{s,t}(x, A)$ définie pour $0 \leqslant s < t < \infty$, pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est appelée fonction de transition de Markov si

- $A \mapsto P_{s,t}(x, A)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout t, s et x
- $x \mapsto P_{s,t}(x, A)$ est mesurable pour tout t, s et A
- si $0 \leqslant u < s < t$, alors

$$P_{u,t}(x, A) = \int P_{u,s}(y, A) P_{s,t}(x, dy) \tag{1.1}$$

pour tout x et A.

.

-Pour tout $A \in \mathcal{B}$, $Q(\cdot, A)$ est $\mathcal{B}$-mesurable sur S.

La propriété 1.1 est appelée relation de Chapman-Kolmogorov.

Définition 1.6. Une fonction de transition de Markov est dite homogène en temps si il existe une fonction $P_t(x, A)$ définie pur $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $P_{s,t}(x, A) = P_{t-s}(x, A)$ pour $0 \leqslant s < t$, $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque 1.7. Pour un processus de Markov homogène en temps, l'équation de Chapman-Kolmogorov devient alors

$$P_{s+t}(x, A) = \int P_t(y, A) P_s(x, dy) \tag{1.2}$$

Ainsi en ayant défini ce qu'une une fonction de transition de Markov, on peut définir autrement ce qu'est un processus de Markov :

Définition 1.8. Soit $X = (X_t, t \geqslant 0)$ un processus stochastique à valeur dans $\mathbb{R}$, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, et soit $P_{s,t}(x, A)$ une fonction de transition de Markov. On dit alors que X est un processus de Markov avec fonction de transition $P_{s,t}(x, A)$ si pour $0 \leqslant s < t$ et $f \in b\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s)) = P_{s,t}(X_s, f) \tag{1.3}$$

où $P_{s,t}(x, f) = \int f(y) P_{s,t}(x, dy)$

Remarque 1.9. On parlera de processus de Markov homogène en temps lorsque dans la définition précédente on pourra remplacer $P_{s,t}(x, A)$ par $P_t(x, A)$ une fonction de transition homogène en temps, et que 1.3 deviendra

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s)) = P_t(X_s, f)$$

pour $s, t \geqslant 0$ et $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

Pour un processus de Markov homogène en temps, pour la première définition, on peut définir pour $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P_t(x, A) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_0 = x) =: \mathbb{P}_x(X_t \in A)$$

et ainsi pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée on peut poser

$$P_t(x, f) := P_t f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t)) := \mathbb{E}(f(X_t + x))$$

Ainsi, on peut remarquer que P_t ainsi défini correspond bien à la définition de la fonction de transition de Markov de X. À l'inverse, on peut montrer qu'étant donné une fonction de transition de Markov sur $\mathbb{R}$, ainsi qu'une loi initiale ν, on peut construire un unique processus de Markov à valeur dans $\mathbb{R}$, ayant pour fonction de transition P_t et pour loi initiale ν.

Montrons que P_t ainsi défini respecte bien l'équation de Chapman-Kolmogorov. En conditionnant par X_s et en utilisant la propriété de Markov on a

$$\begin{aligned}
P_{t+s}(x, A) &= \mathbb{P}(X_{t+s} \in A | X_0 = x) \\
&= \int \mathbb{P}(X_{t+s} \in A | X_s = y, X_0 = x) P_s(x, dy) \\
&= \int \mathbb{P}(X_{t+s} \in A | X_s = y) P_s(x, dy) \\
&= \int \mathbb{P}(X_t \in A | X_0 = y) P_s(x, dy) \\
&= \int P_t(y, A) P_s(x, dy) \\
&= P_s(P_t)(x, A)
\end{aligned}$$

Notons que comme ce résultat est vrai pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on peut noter que par convergence monotone et linéarité on aura pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x)$$

et donc l'équation de Chapman-Kolmogorov est vérifée si, et seulement si la famille d'opérateur $(P_t, t \geqslant 0)$ sur $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est un semi-groupe.

Ainsi si on considère la fonction de transition P_t comme une famille d'opérateur $(P_t, t \geqslant 0)$, on a alors un semi-groupe associé au processus de Markov.

On va maintenant donné la définition d'un processus tué, opération qui permet d'envoyer un processus à un certain état.

Définition 1.10. Soit X un processus de Markov, et ζ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}_+$. On appelle processus tué le processus $\bar{X}$ définit par

$$\overline{X_t}(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{si } t < \zeta(\omega) \\ \delta & \text{si } t \geqslant \zeta(\omega) \end{cases}$$

On fera référence à δ comme l'état cimetière, et δ sera égal à $+\infty$ quand on travaillera avec des processus à valeur dans $\mathbb{R}_+$.

1.2 Processus de Feller

Dans cette partie, nous allons donner la définition et quelques propriétés d'une classe spéciale de processus de Markov qui sont les processus de Feller. On les caractérise grâce au semi-groupe associé au processus de Markov.

Définition 1.11. Si le semi-groupe $(P_t, t \geqslant 0)$ vérifie pour $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$

1. Pour $t \geqslant 0$, $P_t f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$
2. $\lim_{t\to 0} ||P_t f - f||_\infty = 0$

alors le processus X est appelé processus de Feller.

Définition 1.12. Si X est un processus de Feller et que son semi-groupe est $(P_t, t \geqslant 0)$, on peut définir le générateur infintésimal L du semi-groupe pour les fonctions $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ telles que la limite suivante existe

$$Lf = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t}$$

et on note $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

On peut trouver les résultat suivants dans le livre de O.Kallenberg [4]

Proposition 1.13. *Un semi-groupe de Feller est uniquement déterminé par son générateur.*

Théorème 1.14. *Soit $(P_t, t \geqslant 0)$ le semi-groupe d'un processus de Feller. Pour $f \in D(L)$, $P_t f$ est dérivable et*

$$\frac{d}{dt} P_t f = P_t L f$$

On a le lemme suivant qui nous sera utile pour la suite

Lemme 1.15. *Soit $(P_t, t \geqslant 0)$ le semi-groupe d'un processus de Feller $(X_t, t \geqslant 0)$. Soit $f \in \mathcal{D}(L)$ telle que pour un $\lambda > 0$, $Lf = \lambda f$. Alors la famille $(e^{-\lambda t} f(X_t), t \geqslant 0)$ est une $\mathbb{P}_x$−martingale.*

Démonstration. Par le Théorème 1.14, on voit que pour $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto P_t f(x)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{d}{dt}(P_t f)(x) = \lambda P_t f(x)$. Ainsi on trouve que $P_t f(x) = f(x) e^{\lambda t}$. On a

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda t} f(X_t) | \mathcal{F}_s) = e^{-\lambda t} \mathbb{E}_{X_s}(f(X_{t-s})) = e^{-\lambda t} e^{\lambda(t-s)} f(X_s)$$

□

1.3 Processus de Lévy

Définition 1.16. Un processus stochastique $X = (X_t \ , \ t \geqslant 0)$, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un processus de Lévy (issu de 0) si il satisfait les propriétés suivantes :

1. Les trajectoires de X sont continues à droite avec limites à gauche (càdlàg) P-presque-sûrement,
2. $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$,

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_n$, les variables aléatoire $\{X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$ sont indépendantes,
4. Pour tous $t \geqslant s \geqslant 0$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ a même loi que X_{t-s}.

Si un processus vérifie 3. et 4. on dit qu'il est à accroissements indépendants et stationnaires.

Si X est un processus de Lévy, pour chaque $t \geqslant 0$, la loi de X_t est infiniment divisible.

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + ... + (X_t - X_{t(n-1)/n}) \tag{1.4}$$

Par la propriété d'accroissements indépendants et stationnaires, on peut déduire que X_t est à loi infiniment divisible. Posons $\Psi_t(\theta) = -\log(E(e^{i\theta X_t}))$. Ainsi , par 1.4, on a :

$$m\Psi_1(\theta) = \Psi_m(\theta) = n\Psi_{\frac{m}{n}}(\theta)$$

Et donc pour tout $t \in \mathbb{Q}_+$:

$$\Psi_t(\theta) = t\Psi(\theta)$$

où $\Psi := \Psi_1$. Par la continuité à droite des trajectoires de X, on déduit que cette dernière égalité reste vraie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Cette dernière égalité nous dit qu'on peut avoir la fonction caractéristique de toutes les variables aléatoires d'un processus de Lévy, juste avec la connaissance de la fonction caractéristique de X_1. Comme X_1 est à loi infiniment divisible, par la formule de Lévy-Khintchine, on peut écrire :

$$\Psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x 1_{(|x|<1)})\Pi(dx)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geqslant 0$, et Π est la mesure de Lévy, supportée sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\ \Pi(dx) < \infty$$

Un tel ψ s'appelle exposant caractéristique, et on a pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \geqslant 0$

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X_t}) = e^{-t\Psi(\theta)} \tag{1.5}$$

Proposition 1.17. *Un processus de Lévy X est un processus de Markov.*

Démonstration. On peut observer que tout processus de Lévy est un processus de Markov, en effet, soit X un processus de Lévy, on note pour $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, $P_t f(x) = E_x(f(X_t)) = E(f(X_t + x))$ alors comme les accroissements de X sont indépendants et stationnaires on a pour $0 < s \leqslant t$

$$\begin{aligned} P_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_t + x)) = \mathbb{E}(f(X_{t+s} - X_s + x)) &= \mathbb{E}(f(X_{t+s} - X_s + x)|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(f(X_{t+s} - X_s + x)|X_s) \end{aligned}$$

On peut remplacer x par n'importe quelle variable aléatoire $\mathcal{F}_s$ mesurable. En remplaçant x par X_s, on obtient bien la propriété de Markov. De plus on a

$$P_t f(X_s) = \mathbb{E}(f(X_{t+s}))$$

qui montre alors la propriété de semi-groupe :

$$P_s P_t f(x) = \mathbb{E}(P_t f(X_s + x)) = \mathbb{E}(f(X_{t+s} + x)) = P_{t+s} f(x)$$

□

Proposition 1.18. *Un processus de Lévy X vérifie la propriété de Markov forte.*

Démonstration. Soit T un temps d'arrêt fini p.s. Si $T = c$ est une constante, alors on utilise la propriété de Markov, ainsi si T prends ses valeurs dans un ensemble discret le résultat est toujours vrai. Pour prouver le résultat pour un temps d'arrêt arbitraire T, on utilise le fait que la suite de temps d'arrêt $T_n = 2^{-n}\lfloor 2^n T + 1 \rfloor$ est une suite décroissante de temps d'arrêt à valeur dans un ensemble discret qui converge vers T. Le résultat vient alors de la continuité à droite des processus de Lévy.

□

Proposition 1.19. *Un processus de Lévy X est un processus de Feller.*

Démonstration. Soit $f \in C_0^2(\mathbb{R})$. Comme f est bornée, par convergence dominée, $P_t f(x) = E(f(X_t + x))$ est continue. Comme f tend vers 0 en $\pm\infty$, on a bien $P_t f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, comme f est uniformément continue, et comme sous $\mathbb{P}$, $X_t \longrightarrow 0$ quand $t \to 0$, on a bien $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(X_t + x) - f(x)| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. On conclut alors par convergence dominée que $P_t f - f$ tend vers 0 uniformément. □

1.4 Exemples de processus de Lévy

On peut donner des exemples fondamentaux de processus de Lévy, les processus suivants seront définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Le processus de Poisson sur $\mathbb{R}$: On considère μ_λ la distribution de Poisson de paramètre λ, c'est à dire pour $k \in \mathbb{N}$: $\mu_\lambda(\{k\}) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. Alors un processus de Poisson $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ est un processus de Lévy tel que pour $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt. Pour obtenir l'expression de ψ, l'exposant caractéristique, on est alors amené à calculer $E(e^{i\theta N_t})$. On trouve :

$$E(e^{i\theta N_t}) = \sum_{k\geqslant 0} e^{i\theta k}\mu_{\lambda t}(\{k\}) = e^{-\lambda t(1-e^{i\theta})}$$

On a alors $\Psi(\theta) = \lambda(1 - e^{i\theta})$ et $a = 0$, $\sigma = 0$, $\Pi = \lambda\delta_1$, où δ_a est la mesure de Dirac en $\{a\}$.

Un autre processus de Lévy que l'on construit à partir ce celui là est le processus de Poisson composé :

On considère N un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, indépendante de N et de loi de distribution F, qui n'a pas d'atome en 0. Alors, le processus de Poisson composé X est défini par :

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i \ , \quad t \geqslant 0$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un processus de Lévy. Pour $s < t$ on a :

$$X_t - X_s = \sum_{i=N_s+1}^{N_t} \xi_i$$

Qui suit la même loi que X_{t-s} et est bien indépendant de X_s par la propriété des ξ_i. De plus, comme le processus $\{N_t, t \geqslant 0\}$ est càdlàg, il en est de même pour $\{X_t, t \geqslant 0\}$. Si on veut calculer ψ, il suffit alors de calculer $\mathbb{E}(e^{i\theta \sum_{i=1}^{N} \xi_i})$ où N suit la même loi que N_1. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{i\theta \sum_{i=1}^{N} \xi_i}) &= \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{N=n\}} e^{i\theta \sum_{i=1}^{n} \xi_i}) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}(e^{i\theta \xi_1})^n \\
&= \sum_{n \geqslant 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} (\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} F(dx))^n \\
&= e^{-\lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x}) F(dx)}
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient $\Psi(\theta) = \lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x}) F(dx)$

Un autre exemple important de processus de Lévy est le mouvement brownien. Il suffit de rappeler sa définition pour se rendre compte qu'il s'agit d'un processus de Lévy.

Définition 1.20. Le processus $B = \{B_t, t \geqslant 0\}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est un mouvement brownien si :

1. Les trajectoires de B sont P-presque-sûrement continues.
2. $P(B_0 = 0) = 1$.
3. Pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $B_t - B_s$ a la même distribution que B_{t-s}.
4. Pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $B_t - B_s$ est indépendant de $\{B_u, u \leqslant s\}$.
5. Pour $t > 0$, B_t suit une loi normale centré de variance t.

On peut également considérer le mouvement brownien avec drift linéaire, qui est le processus $X_t = \gamma t + s B_t$,où $s \geqslant 0$, et B est un mouvement brownien standard. On vérifie facilement que X reste un processus de Lévy. On peut également montrer que pour $t > 0$

$$\mathbb{E}(e^{i\theta B_t}) = e^{-\frac{1}{2} t \sigma^2}$$

De plus comme sB_t a même loi que $B_{s^2 t}$, on peut calculer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{i\theta X_t}) &= e^{i\theta\gamma t} \mathbb{E}(e^{i\theta s B_t}) \\
&= e^{i\theta\gamma t - \frac{1}{2} t s^2 \theta^2} \\
&= e^{-t(-i\theta\gamma + \frac{1}{2} s^2 \theta^2)}
\end{aligned}$$

pour avoir $\Psi(\theta) = s^2\theta^2/2 - i\theta\gamma$.

Ces deux types de processus, le processus de Poisson composé et le mouvement brownien avec drift, jouent un rôle important dans l'étude des processus de Lévy en vertu du théorème suivant, le théorème de décomposition de Lévy-Itô :

Théorème 1.21. Décomposition de Lévy-Itô *Soient $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et Π une mesure concentrée sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\ \Pi(dx) < \infty$$

Alors il existe un espace de probabilité sur lequel trois processus de Lévy indépendants $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ et $X^{(3)}$ sont définis, où $X^{(1)}$ est un mouvement brownien avec drift, $X^{(2)}$ est un processus de Poisson composé, et $X^{(3)}$ est une martingale de carré intégrable, avec un nombre de saut presque-sûrement dénombrables, de longueurs plus petit que 1, et en posant $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$, l'exposant caractéristique de X est celui d'un processus de Lévy de triplet (a, σ, Π).

On peut noter que dans cette décomposition, les sauts de $X^{(2)}$ et $X^{(3)}$ sont reliés à Π, la mesure de Lévy. Par exemple, si $\Pi(-\infty, 0) = 0$, le processus de Lévy X n'aura pas de saut négatif. De plus, si on ajoute les conditions $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\ \Pi(dx) < \infty$, $\sigma = 0$ et $a + \int_{(0,1)} x\Pi(dx) \leqslant 0$, alors le processus X est ce qu'on appelle un subordinateur, c'est un processus croissant. Si on a juste la condition $\Pi(-\infty, 0) = 0$ mais que le processus n'est pas croissant, on parlera de processus spectralement positif(processus sans saut négatif).

1.5 Générateur d'un processus de Lévy

On considère dans cette partie X un processus de Lévy, et Ψ son exposant caractéristique. Comme on vient de le voir, c'est également un processus de Feller, on considère alors $(P_t, t \geqslant 0)$ son semi-groupe, ainsi que L son générateur de domaine $\mathcal{D}$. On va voir dans cette partie que grâce l'exposant caractéristique d'un processus de Lévy, on peut donner une expression formelle de son générateur.

Pour cela, on considère une autre famille d'opérateur linéaire $(R_\lambda, \lambda > 0)$, appelés opérateurs résolvants, associé à la transformée de Laplace de $(P_t, t \geqslant 0)$, défini par :

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(P_t f)(x)dt$$

pour $f \in C_0^2(\mathbb{R})$.

Grâce au Théorème 1.14 et à une intégration par partie, on peut voir que pour $f \in \mathcal{D}$ on a

$$\lambda R_\lambda f = f + R_\lambda L f \ . \tag{1.6}$$

On définit la transformée de Fourier d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ par

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g(x)dx \ .$$

On a alors pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, en utilisant la propriété 1.5 de l'exposant caractéristique

$$\begin{aligned}
\widehat{R_\lambda f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} R_\lambda f(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \int_0^\infty e^{-\lambda t}(P_t f)(x)dtdx \\
&= E\bigg(\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty e^{-i(x-X_t)\xi} e^{-\lambda t} f(x)dtdx\bigg) \\
&= \widehat{f}(\xi) \int_0^\infty E(e^{iX_t\xi}) e^{-\lambda t} dt \\
&= \widehat{f}(\xi) \int_0^\infty e^{-t\Psi(\xi)} e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{1}{\Psi(\xi) + \lambda} \widehat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

Alors en appliquant Fourier dans 1.6 pour les fonctions $f \in \mathcal{D}$ tels que $Lf \in L^1(\mathbb{R})$ on a pour $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lambda \widehat{R_\lambda f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{R_\lambda(Lf)}(\xi)$$

et en utilisant le calcul précédent on trouve

$$\widehat{Lf}(\xi) = -\Psi(\xi)\widehat{f}(\xi) \tag{1.7}$$

ainsi si $f \in \mathcal{S}$, l'espace de Schwartz, comme la transformée de Fourier est un isomorphisme sur $\mathcal{S}$ et comme $\psi(\xi) = O(\xi^2)$ quand $|\xi| \to \infty$, la formule 1.7 nous donne $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. Pour $f \in \mathcal{S}$, on peut alors appliquer l'inversion de Fourier à 1.7 et avoir

$$Lf(x) = -af'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \int_{\mathbb{R}} \bigg(f(x+y) - f(x) - 1_{|y|<1} y f'(x) \bigg) \Pi(dy) \tag{1.8}$$

On peut montrer que cette formule s'étend pour les fonctions $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions deux fois dérivables qui tendent vers 0 en l'infini(cf. Bertoin [1]).

1.6 Fonctionnelles multiplicatives des processus de Markov

Nous allons dans cette section, introduire un objet important dans les processus de Markov, les fonctionnelles multiplicatives. Au long de cette section, X désignera un processus de Markov, et on notera $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leqslant t)$.

Définition 1.22. On appelle $(\theta_t)_{t\geqslant 0}$ la famille des opérateurs de transition, tels que pour $s, t \geqslant 0$:

$$X_s \circ \theta_t = X_{s+t}$$

Définition 1.23. On dit que $(M_t, t \geqslant 0)$ est une fonctionnelle multiplicative de X si

1. $M_t \in \mathcal{F}_t$, pour $t \geqslant 0$.

2. $M_{t+s} = M_t(M_s \circ \theta_t)$, pour $t, s \geqslant 0$.

3. $0 \leqslant M_t(\omega) \leqslant 1$, pour $t \geqslant 0$ et $\omega \in \Omega$.

On peut donner un exemple d'une telle famille, dont on se servira dans la suite. On considère v une fonction mesurable et positive sur $\mathbb{R}$, et on pose

$$M_t = \exp\Big(- \int_0^t v(X_s)ds \Big)$$

On voit directement que le point 1. de la définition est vérifié, ainsi que le point 3. puisque v est positive. Pour le point 2. on écrit

$$\begin{aligned} M_{t+s} &= \exp\Big(- \int_0^{t+s} v(X_u)du \Big) \\ &= \exp\Big(- \int_0^{t} v(X_u)du \Big) \exp\Big(- \int_t^{t+s} v(X_u)du \Big) \\ &= M_t \exp\Big(- \int_0^{s} v(X_{u+t})du \Big) \\ &= M_t(M_s \circ \theta_t) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi bien défini une fonctionnelle multiplicative.

On considère $(M_t, t \geqslant 0)$ une fonctionnelle multiplicative, et on définit pour $t \geqslant 0$ et pour f mesurable bornée à valeur dans $\mathbb{R}_+$

$$Q_t f(x) = \mathbb{E}_x(M_t f(X_t)) \tag{1.9}$$

La famille d'opérateur linéaire $(Q_t, t \geqslant 0)$ définit ainsi un semi-groupe, en effet on a

$$\begin{aligned} Q_{t+s} f(x) &= \mathbb{E}_x(M_{t+s} f(X_{t+s})) \\ &= \mathbb{E}_x(M_s(M_t \circ \theta_s) f(X_t \circ \theta_s)) \\ &= \mathbb{E}_x(M_s \mathbb{E}_{X_s}(M_t f(X_t)) \\ &= \mathbb{E}_x(M_s Q_t f(X_s)) \\ &= Q_s Q_t f(x) \end{aligned}$$

On considère maintenant X un processus de Feller, $(P_t, t \geqslant 0)$ son semi-groupe, et L son générateur de domaine $\mathcal{D}$. On considère v une application mesurable positive et on pose pour $t \geqslant 0$

$$A_t = \int_0^t v(X_s)ds \ , \ M_t = e^{-A_t} \ .$$

Comme on l'a montré auparavant, M est une fonctionelle multiplicative, qui induit une fonction de transition de Markov (homogène en temps). On considère alors $\bar{X}$ le processus stochastique (de Markov) tel que pour $f \in C_b(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E}_x(f(\overline{X_t})) = \mathbb{E}_x(M_t f(X_t)) =: Q_t f(x)$$

qui a pour semi-groupe $(Q_t, t \geqslant 0)$. On va alors montrer le résultat suivant qui se trouve dans [7]

Théorème 1.24. *$\bar{X}$ est un processus de Feller. De plus, le domaine de son générateur L^v est $\mathcal{D}$, et pour $f \in \mathcal{D}$ on a*

$$L^v f(x) = Lf(x) - v(x)f(x) \ . \tag{1.10}$$

Démonstration. On va juste montrer ici, que le générateur du processus $\bar{X}$ est bien L^v. On peut commencer par reformuler 1.10 en terme d'opérateur résolvant qui donne

$$R_\lambda^v = R_\lambda - R_\lambda v R_\lambda^v \tag{1.11}$$

où $(R_\lambda^v, \lambda \geqslant 0)$ est la famille des résolvante associé à $(Q_t, t \geqslant 0)$.

Soit f une fonction de $C_0^0(\mathbb{R})$

$$R_\lambda f(x) - R_\lambda^v f(x) = \mathbb{E}_x(\int_0^\infty e^{-\lambda t - A_t} f(X_t)(e^{A_t} - 1)dt$$

en utilisant le fait que $e^{A_t} = 1 + \int_0^t v(X_s)e^{A_s}ds$ on a

$$\begin{aligned} R_\lambda f(x) - R_\lambda^v f(x) &= \mathbb{E}_x\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t - A_t} f(X_t)dt \int_0^t v(X_s)e^{A_s}ds\Big) \\ &= \mathbb{E}_x\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t - A_{u+s}} f(X_{u+s})du \int_0^\infty v(X_s)e^{A_s}ds\Big) \end{aligned}$$

avec le changement de variable $(t, s) \mapsto (u, s)$ où $u = t - s$. On a alors

$$\begin{aligned} R_\lambda f(x) - R_\lambda^v f(x) &= \mathbb{E}_x\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda s} v(X_s)ds \int_0^\infty e^{-\lambda u - A_{u+s}} f(X_{u+s})du\Big) \\ &= \mathbb{E}_x\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda s} v(X_s) R_\lambda^v f(X_s)ds\Big) \\ &= R_\lambda v R_\lambda^v f(x) \end{aligned}$$

□

2 Propriétés sur les processus de Lévy

2.1 Comportement en l'infini

Pour le comportement des processus de Lévy en l'infini, on peut différencier trois cas distincts, qui nous sont donnés par le théorème suivant

Théorème 2.1. *Soit X un processus de Lévy.*

1. *Si* $\int_1^\infty t^{-1}\mathbb{P}(X_t \geqslant 0)dt < \infty$, *alors*

$$\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty \quad \mathbb{P}.p.s$$

on dit alors que le processus drift vers $-\infty$

2. *Si* $\int_1^\infty t^{-1}\mathbb{P}(X_t \leqslant 0)dt < \infty$, *alors*

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \infty \quad \mathbb{P}.p.s$$

on dit alors que le processus drift vers $+\infty$

3. *Si les deux intégrales précédentes divergent, alors*

$$\limsup_{t\to\infty} X_t = -\liminf_{t\to\infty} X_t = \infty \quad \mathbb{P}.p.s$$

on dit alors que le processus oscille.

Remarque 2.2. On note que cette liste est exhaustive, car

$$\int_1^\infty t^{-1}\mathbb{P}(X_t \geqslant 0)dt + \int_1^\infty t^{-1}\mathbb{P}(X_t \leqslant 0)dt \geqslant \int_1^\infty t^{-1}dt = \infty \tag{2.1}$$

et donc au moins une des deux intégrales diverge.

2.2 Processus sans saut négatif

On s'intéresse dans cette partie au processus de Lévy sans saut négatif. On considère alors un processus de Lévy X dont sa mesure de Lévy est supportée dans $[0,\infty)$, en excluant le cas des subordinateurs. On va montrer dans un premier temps que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) < \infty\ . \tag{2.2}$$

Pour ça on introduit le temps d'arrêt $T_a := \inf\{t \geqslant 0, X_t \leqslant a\}$. Par l'absence de saut négatif, sur l'évenement $\{T_a < \infty\}$, on a $X_{T_a} = a$ P-presque sûrement. On considère maintenant un temps exponentiel $\tau(q)$ de paramètre $q > 0$, et en utilisant la propriété de de Markov et la propriété de la loi exponentielle on trouve pour $a, b < 0$

$$\mathbb{P}(T_{a+b} < \tau(q)) = \mathbb{P}(T_a < \tau(q))\mathbb{P}(T_b < \tau(q))$$

On pose $I_{\tau(q)} = \inf_{s\in[0,\tau(q)[} X_s$ et ainsi comme pour $a < 0$

$$\mathbb{P}(I_{\tau(q)} < a) = \mathbb{P}(T_a < \tau(q))$$

donc

$$\mathbb{P}(-I_{\tau(q)} > -a) = \mathbb{P}(T_a < \tau(q))$$

on déduit que $-I_{\tau(q)}$ suit une loi exponentielle. On note $\phi(q)$ son paramètre. Comme $-I_{\tau(q)}$ converge en probabilité vers 0 quand $q \to \infty$, alors $\phi(q) \to \infty$ quand $q \to \infty$ et pour tout $\lambda > 0$, on peut trouver un q assez grand tel que $\phi(q) > \lambda$. En remarquant que

$$\int_0^\infty q e^{-qt} \mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) dt = \mathbb{E}(e^{-\lambda X_{\tau(q)}}) \leqslant \mathbb{E}(e^{-\lambda I_{\tau(q)}})$$

où le dernier terme de l'inégalité est fini dès que $\phi(q) > \lambda$. On a alors l'implication $\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) < \infty$ est fini presque partout pour la mesure de Lebesgue. Comme la fonction $t \mapsto \mathbb{E}(e^{-\lambda X_t})$ est continue, car X_t presque sûrement continue en t, on a bien 2.2.

À partir d'un processus de Lévy X sans saut négatif, on peut fabriquer un subordinateur (tué), celui des temps d'atteinte. On considère T_x le temps d'atteinte de $-x$, pour $x \geqslant 0$, par le processus X :

$$T_x = \inf\{t \geqslant 0, X_t \leqslant -x\} \ .$$

Si pour un $x_0 \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{t \geqslant 0, X_t \leqslant -x_0\}$ est vide (alors il l'est pour tout $x \geqslant x_0$) , on tue le processus T en l'envoyant vers $+\infty$ pour tout $x > x_0$. Il est clair que comme X ne possède pas de saut négatif, le processus T_x est continu et croissant. Reste à montrer qu'il s'agit bien d'un processus de Lévy. En appliquant la propriété de Markov forte au processus X avec le temps d'arrêt T_x, on trouve que le processus $X_{T_x+t} - X_{T_x} = X_{T_x+t} - x$ a même loi que le processus X, et est indépendant de $\sigma(X_t, t \leqslant T_x)$. En considérant T'_y le temps d'atteinte du processus $X_{T_x+t} - X_{T_x}$ et en remarquant que $T'_y + T_x = T_{x+y}$ donc $T'_y = T_{x+y} - T_x$, on conclut que le processus $(T_x, x \geqslant 0)$ est un processus de Lévy (tué) donc un subordinateur (tué).

On introduit ce qu'on appelle l'exposant de Laplace ψ de X, défini par

$$\psi(\lambda) = -\Psi(i\lambda) = -a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(0,\infty)} \Big(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x 1_{x<1}\Big)\Pi(dx). \tag{2.3}$$

On a maintenant l'identité

$$\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big) = e^{t\psi(\lambda)} \tag{2.4}$$

qui est bien défini pour $\lambda \geqslant 0$. On remarque que $\psi : [0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ est une fonction strictement convexe, telle que $\lim_{\lambda\to\infty} \psi(\lambda) = \infty$ (car $\mathbb{P}(X_1 < 0) > 0$). On note $\phi(0)$ la plus grande racine de l'équation $\psi(\lambda) = 0$ (qui existe car au moins 0 est toujours solution).
Ainsi, $\psi : [\phi(0),\infty) \to [0,\infty)$ réalise une bijection d'inverse que l'on notera ϕ.

Théorème 2.3. *Le subordinateur tué T a pour exposant de Laplace $-\phi$.*

Remarquons qu'en remplaçant λ par $\phi(\lambda)$ dans 2.4 pour $\lambda > 0$ on a

$$\mathbb{E}\big(e^{-\phi(\lambda)X_t}\big) = e^{t\lambda} \tag{2.5}$$

Comme les accroissement de X sont indépendants et stationnaires, on peut montrer que le processus $(e^{-\lambda t}e^{-\phi(\lambda)X_t}, t \geqslant 0)$ est une martingale. En effet pour $t \geqslant s \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(e^{-\lambda t}e^{-\phi(\lambda)X_t}|\mathcal{F}_s\big) &= e^{-\lambda t}\mathbb{E}\big(e^{-\phi(\lambda)X_t}e^{-\phi(\lambda)X_s}e^{\phi(\lambda)X_s}|\mathcal{F}_s\big) \\
&= e^{-\lambda t}e^{-\phi(\lambda)X_s}E\big(e^{-\phi(\lambda)(X_t-X_s)}|\mathcal{F}_s\big) \\
&= e^{-\lambda t}e^{-\phi(\lambda)X_s}E\big(e^{-\phi(\lambda)X_{t-s}}\big) \\
&= e^{-\lambda s}e^{-\phi(\lambda)X_s}
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème d'arrêt à cette martingale, au temps d'arrêt borné $T_x \wedge t$, on a

$$\mathbb{E}\big(e^{-\lambda T_x \wedge t} e^{-\phi(\lambda) X_{T_x \wedge t}}\big) = 1.$$

On remarque que sur l'ensemble $\{T_x < \infty\}$, $-\phi(\lambda) X_{T_x \wedge t} - \lambda T_x \wedge t$ converge vers $-\phi(\lambda)x - \lambda T_x$ quand $t \to \infty$, et sur l'ensemble $\{T_x = \infty\}$, cette quantité tend vers $-\infty$. De plus comme

$$-\phi(\lambda) X_{T_x \wedge t} - \lambda T_x \wedge t \leqslant -\phi(\lambda) X_{T_x \wedge t} \leqslant x\phi(\lambda) \tag{2.6}$$

on peut utiliser la convergence dominée pour avoir

$$1 = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda T_x \wedge t} e^{-\phi(\lambda) X_{T_x \wedge t}}, T_x < \infty\big) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\big(e^{-\lambda T_x} e^{-\phi(\lambda) x}, T_x < \infty\big)$$

et donc obtenir

$$\mathbb{E}\big(e^{-\lambda T_x}, T_x < \infty\big) = e^{-\phi(\lambda) x}$$

Ainsi, $-\phi$ est l'exposant de Laplace du subordinateur T.

3 Processus de Branchement

3.1 Introduction des processus de branchement continu

On considère $Y = (Y_t, t \geqslant 0)$ un processus de Markov fort, à valeur dans $[0, +\infty]$. On dit que Y est un processus de branchement continu (CSBP), si ses trajectoires sont càdlàg, et que leur loi respectent la propriété de branchement suivante :

$$\mathbb{E}_{x+y}(e^{-\theta Y_t}) = \mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) \mathbb{E}_y(e^{-\theta Y_t}) \tag{3.1}$$

Pour $\theta, t \geqslant 0$ et $x, y \geqslant 0$. Ici, la famille de probabilité $(\mathbb{P}_x, x \geqslant 0)$ vérifie $\mathbb{P}_x(Y_0 = x) = 1$, et $\mathbb{E}_x$ désigne l'opérateur d'espérance associé à P_x. On peut montrer grâce à la propriété de branchement que pour tout $t \geqslant 0$, Y_t est à loi infiniment divisible. En effet, pour $t \geqslant 0$ et $\theta \geqslant 0$, en appliquant 3.1 n fois à $x \geqslant 0$ on a :

$$\mathbb{E}_{nx}(e^{-\theta Y_t}) = (\mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}))^n \tag{3.2}$$

Maintenant en prenant $x = m/n$,

$$(\mathbb{E}_{m/n}(e^{-\theta Y_t}))^n = \mathbb{E}_m(e^{-\theta Y_t}) = (\mathbb{E}_1(e^{-\theta Y_t}))^m$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{Q}$ $x \geqslant 0$:

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) = \mathbb{E}(e^{-\theta Y_t})^x \tag{3.3}$$

Posons $u_t(\theta) = -\log \mathbb{E}(e^{-\theta Y_t})$, on a par 3.3 :

$$x u_t(\theta) = -\log \mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) \ , \quad x \in \mathbb{Q}^+ \tag{3.4}$$

Le but maintenant est de montrer que cette égalité reste vraie pour $x \in \mathbb{R}$. Pour cela il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto -\log \mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t})$ est continue. Pour cela montrons déjà qu'elle

admet des limites à gauche et à droite :
Pour $0 \leqslant z < y$, on a par 3.1 :

$$\mathbb{E}_z(e^{-\theta Y_t}) \leqslant \mathbb{E}_y(e^{-\theta Y_t}) \tag{3.5}$$

ce qui implique que $\mathbb{E}_{x-}(e^{-\theta Y_t})$ existe en tant que limite à gauche, et est inférieure à $\mathbb{E}_{x+}(e^{-\theta Y_t})$ qui existe aussi comme limite à droite. Par 3.4, ces limites sont les mêmes, et donc on a bien pour $x > 0$:

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) = e^{-xu_t(\theta)}$$

Théorème 3.1. *Pour $t, \theta \geqslant 0$, on considère $u_t(\theta)$ l'exposant de Laplace d'un CSBP. Alors u est dérivable en t, et satisfait :*

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}(\theta) + \psi(u_t(\theta)) = 0 \ , \quad u_0(\theta) = \theta \tag{3.6}$$

avec pour $\lambda \geqslant 0$, $\psi(\lambda) = -q - a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x 1_{\{x<1\}}\Pi(dx)$, où $q \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$ et Π est une mesure supportée en $(0, \infty)$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \ \Pi(dx) < \infty$$

On appelle cette fonction ψ le mécanisme de branchement. Par la discussion qui suit 1.21, on a pour $\lambda \geqslant 0$, $\psi(\lambda) = \log E(e^{-\lambda X_1})$, où X_1 est un processus spectralement positif ou un subordinateur, qui peuvent être tués, par l'ajout de q dans le mécanisme de branchement, à un temps exponentiel indépendant de paramètre q. Par l'étude de ces processus de Lévy sans saut négatifs, on sait que ψ est une fonction convexe, infiniment dérivable sur $(0, \infty)$ et que $\psi(\infty) < 0$ dans le cas où X est un subordinateur, et $\psi(\infty) = \infty$ dans les autres cas.

Remarquons qu'on peut caractériser u comme unique solution de

$$-\int_{\theta}^{u_t(\theta)} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} = t \tag{3.7}$$

où, en prenant $t = 0$, on récupère bien l'information $u_0(\theta) = \theta$.

On a une caractérisation de ces processus de branchement qui établit un lien étroit entre les processus de branchement et les processus de Lévy sans saut négatif, qu'on peut citer ici, et qu'on peut trouver dans [5]

Théorème 3.2. *(*Représentation de Lamperti*) Soit ψ un mécanisme de branchement. Soit X un processus de Lévy sans saut négatif, tué (avec état cimetière $+\infty$) à un temps exponentiel indépendant de paramètre $q \geqslant 0$, et tel que $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1})$. On définit $\tau_0^- = \inf\{t > 0, X_t < 0\}$, et pour $t \geqslant 0$*

$$\theta_t = \inf\left\{s > 0, \int_0^s \frac{du}{X_u} > t\right\} \quad et \quad Y_t = X_{\theta_t \wedge \tau_0^-}$$

alors sous la probabilité $\mathbb{P}_x$, $x \geqslant 0$, Y est un processus de branchement continu avec mécanisme de branchement ψ et valeur initiale $Y_0 = x$.

À l'inverse, si Y est un processus de branchement de mécanisme ψ, tel que $Y_0 = x \geqslant 0$, si on définit

$$X_t = Y_{\varphi_t}$$

où

$$\varphi_t = \inf\left\{s > 0, \int_0^s Y_u du > t\right\}$$

alors X est processus de Lévy sans saut négatif qui part de $X_0 = x$, qui est arrêté dès la première entrée dans $(-\infty, 0)$ et tué à un temps exponentiel de paramètre $q \geqslant 0$. Si P désigne la loi de X sous la condition $X_0 = 0$, alors $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1}), \lambda \geqslant 0$.

3.2 Conservativité et temps de vie

On va maintenant étudier la conservativité du processus

Définition 3.3. On dit qu'un processus stochastique $Y = (Y_t, t \geqslant 0)$ est conservatif si pour $t > 0$, $\mathbb{P}(Y_t < \infty) = 1$.

En terme de trajctoire, le processus est conservatif s'il n'explose pas vers $+\infty$ en un temps fini.

Dans notre cas on a

$$\mathbb{P}_x(Y_t < \infty) = \lim_{\theta \downarrow 0} \mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) = \lim_{\theta \downarrow 0} e^{-x u_t(\theta)}$$

et alors le processus sera conservatif si, et seulement si, $\lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta) = 0$. Remarquons qu'en reprenant 3.7, pour δ suffisamment petit on peut écrire

$$\int_\theta^\delta \frac{d\xi}{\psi(\xi)} - \int_{u_t(\theta)}^\delta \frac{d\xi}{\psi(\xi)} = -t$$

Comme la partie de droite de l'égalité ne dépend pas de θ, on a en faisant tendre θ vers 0 que $\lim_{\theta \downarrow 0} u_t(\theta) = 0$ si et seulement si $\int_{0+} \frac{d\xi}{|\psi(\xi)|} = \infty$. On a alors directement le résultat suivant

Théorème 3.4. *Le processus Y associé au mécanisme de branchement ψ est conservatif si, et seulement si,*

$$\int_{0+} \frac{d\xi}{|\psi(\xi)|} = \infty$$

On va maintenant étudier ce qu'on appelle l'extinction du processus de branchement. On note dans le cas où le processus est tué, ζ son temps de vie. On considère $T_0 := \inf\{t \geqslant 0, Y_t = 0\}$. Par la propriété de branchement on peut voir que $\mathbb{P}_0 = \delta_0$ et donc par la propriété de Markov, pour $s \geqslant 0$, si $Y_t = 0$ alors $Y_{t+s} = 0$. L'extinction du processus Y correspond à l'évènement $\{T_0 < \zeta\} = \{\exists t \geqslant 0, Y_t = 0\}$. On posera $p(x) = \mathbb{P}_x(T_0 < \zeta)$. On peut montrer que comme pour la conservativité, on peut caractériser la probabilité d'extinction grâce à ψ, le mécanisme de branchement. Pour le théorème suivant, on exclura le cas des subordinateurs, auquel cas le processus n'est jamais absorbé en 0. Rappelons alors que pour les autres cas, on a $\psi(\infty) = \infty$.

Théorème 3.5. *Soit Y un processus de branchement de mécanisme ψ, alors $p(x) > 0$ si, et seulement si,*

$$\int^{\infty} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} < \infty$$

et dans ce cas, si on pose $\phi(0) := \sup\{\xi \geqslant 0, \psi(\xi) = 0\}$, la plus grande racine de ψ, alors $p(x) = e^{-\phi(0)x}$ pour $x > 0$.

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que :

$$e^{-xu_t(\theta)} = \mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) = \mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t} 1_{\{Y_t > 0\}}) + \mathbb{E}_x(1_{\{Y_t = 0\}})$$

Alors en notant $u_t(\infty) := \lim_{\theta \to \infty} u_t(\theta)$ on a quand $\theta \to \infty$:

$$e^{-xu_t(\infty)} = \mathbb{P}_x(Y_t = 0) \tag{3.8}$$

Comme on l'a déjà remarqué, on a pour $t, s \geqslant 0$, $\{Y_t = 0\} \subseteq \{Y_{t+s} = 0\}$ on a alors pour $x > 0$:

$$\mathbb{P}_x(Y_t = 0) \uparrow p(x) \tag{3.9}$$

quand $t \to \infty$, et ainsi, $p(x) > 0$ si et seulement si il existe un $t > 0$, tel que $u_t(\infty) < \infty$. On fixe maintenant $t > 0$, et on écrit 3.7 comme :

$$\int_{u_t(\theta)}^{\theta} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} = t \tag{3.10}$$

Supposons que $u_t(\infty) < \infty$, alors comme t est fixé, si $\theta \to \infty$ on doit avoir

$$\int^{\infty} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} < \infty$$

On voit également que si cette dernière condition est respectée, comme $t > 0$ on doit obligatoirement avoir $u_t(\infty) < \infty$. On a bien l'équivalence $u_t(\infty) < \infty$ si et seulement si $\int^{\infty} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} < \infty$. Supposons maintenant que cette condition est vérifiée. On a :

$$\int_{u_t(\infty)}^{\infty} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} = t$$

Quand $t \uparrow \infty$, l'intégrale de gauche doit alors diverger. Par 3.8 et 3.9, on a $u_t(\infty) \downarrow -x^{-1} \log(p(x))$ quand $t \uparrow \infty$. Ainsi quand $t \uparrow \infty$, $u_t(\infty)$ décroît vers la plus grande valeur c telle que l'intégrale $\int_c^{\infty} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} < \infty$ diverge. Comme la fonction ψ est lisse et convexe, cette valeur correspond à la plus grande racine de cette fonction,$\phi(0)$. On a alors $p(x) = e^{-x\phi(0)}$. □

Remarque 3.6. Dans le cas où la condition $\int^{\infty} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} < \infty$ est vérifiée, si on ajoute de plus les hypothèses $\psi'(0+) \geqslant 0$ et $\psi(0) = 0$ (le processus n'est pas tué), comme ψ est convexe, elle n'aura pas d'autre racine que 0, et ainsi l'extinction aura lieu presque sûrement. De plus on aura la décroissance de $u_t(\lambda)$ vers 0 quand $t \to \infty$.

4 Processus de branchement avec immigration

4.1 Définitions et propriétés

Nous allons dans cette section introduire un nouveau type de processus markovien (homogène en temps) à valeur dans $\mathbb{R}_+$, les processus de branchement avec immigration (abrégés en CBI). Ces processus sont également càdlàg et de Feller.

Dans le cas d'un simple processus de branchement Y, on a vu que ses lois pouvaient être caractérisées par :

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta Y_t}) = e^{-xu_t(\theta)}$$

où u est déterminée par ψ. Maintenant, si X est un processus CBI, ses lois seront déterminées par deux fonctions, ψ et ϕ :

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta X_t}) = \exp\left(-xu_t(\theta) - \int_0^t \phi(u_s(\theta))ds\right) \tag{4.1}$$

où u est caractérisée comme dans le Théorème 3.1, et où pour $\lambda \geqslant 0$:

$$\phi(\lambda) = b\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda u})\nu(du)$$

avec $b \geqslant 0$ et ν est une mesure supportée en $(0, \infty)$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x)\ \nu(dx) < \infty$$

On appelle ψ le mécanisme de reproduction et ϕ le mécanisme d'immigration. Comme les lois de X sont déterminées par ces deux fonctions, on appellera X un processus $CBI(\psi, \phi)$.

On a le résultat suivant : si X est un $CBI(\psi, \phi)$, alors son générateur L, générateur du processus de Feller, qui agit sur $C_0^2(\mathbb{R}_+)$, l'espace des fonctions deux fois dérivables qui tendent vers 0 en l'infini, est donné par :

$$\begin{aligned} Lf(x) = \quad & \frac{\sigma^2}{2}xf''(x) + (ax+b)f'(x) - (qx+c)f(x) \\ & + x\int_0^\infty (f(x+z) - f(x) - z1_{[0,1]}(z)f'(x))\Pi(dz) \\ & + \int_0^\infty (f(x+z) - f(x))\nu(dz) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Théorème 4.1. *Soit X un processus stochastique. X est un processus $CBI(\psi, \phi)$ si et seulement si pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$*

$$f(X_t) - f(x) - \int_0^t L(f(X_s))ds$$

est une martingale locale, où L désigne le genérateur d'un processus $CBI(\psi, \phi)$ défini dans 4.2.

4.2 Temps d'atteinte

On s'appuyant sur l'article de Duhalde, Foucart et Ma [3], nous allons donner la loi des temps d'atteintes de ces processus.

Pour X un processus $CBI(\psi, \phi)$, et pour $a \in \mathbb{R}_+$ on définit :

$$\sigma_a := \inf\{t \geqslant 0, X_t \leqslant a\}$$

On considérera alors seulement les cas où X part de $x > a$, et on ne considerera que ψ n'est pas l'exposant de Laplace d'un subordinateur auquel cas le processus X est croissant. On voudra alors obtenir une formule pour :

$$\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\lambda\sigma_a - \mu\int_0^{\sigma_a} X_t dt\right)\right] \tag{4.3}$$

Pour $\lambda > 0, \mu \geqslant 0$ et $x > a \geqslant l$, où $l := \frac{b}{\mathbf{d}}$. Pour X notre $CBI(\psi, \phi)$, on définit $I_t = \displaystyle\int_0^t X_s ds$. Ainsi, $e^{-\mu I_t}$ correspond à une partie de 4.2. Comme on l'a déjà remarqué, la famille $(e^{-\mu I_t}, t \geqslant 0)$ est une fonctionnelle multiplicative. Ainsi on considère $(\bar{X}_t, t \geqslant 0)$ le processus stochastique tel que pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$

$$\mathbb{E}(f(\overline{X_t})) = \mathbb{E}_x(f(X_t)e^{-\mu I_t}) \tag{4.4}$$

On peut alors se servir du Théorème 1.24 pour voir que $\bar{X}$ est un processus de Feller, qui a pour générateur $\bar{L}$ définit sur $C_0^2(\mathbb{R}_+)$ par

$$\bar{L}f(x) = Lf(x) - \mu x f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}_+.$$

L'objectif maintenant est alors de trouver des valeurs propres de $\bar{L}$.

Lemme 4.2. *Soit $\lambda, \mu \geqslant 0$. On pose $q(\mu) = \sup\{q \geqslant 0, \psi(q) = \mu\}$, et on fixe une constante $\theta > q(\mu)$ (qui dépend de μ). Pour $x \in (q(\mu), \infty)$, on définit :*

$$g_{\lambda,\mu}(x) = \frac{1}{\psi(x) - \mu}\exp\left(\int_\theta^x \frac{\phi(u) + \lambda}{\psi(u) - \mu}du\right)$$

et

$$f_{\lambda,\mu}(x) = \int_{q(\mu)}^\infty e^{-xz} g_{\lambda,\mu}(z)dz$$

alors pour $\lambda > 0$, $f_{\lambda,\mu}$ est une fonction décroissante de $C_0^2(l, \infty)$, et vérifie $\bar{L}f_{\lambda,\mu} = \lambda f_{\lambda,\mu}$.

Démonstration. On commence par poser $h_z(x) = e^{-xz}$ Cette fonction vérifie de bonnes propriétés :

$$\bar{L}h_z(x) = [x(\psi(z) - \mu) - \phi(z)]h_z(x)$$

et

$$\bar{L}\left(\int_{q(\mu)}^\infty h_z(x) g_{\lambda,\mu}(z)dz\right) = \int_{q(\mu)}^\infty \bar{L}h_z(x) g_{\lambda,\mu}(z)dz$$

ainsi on a

$$\begin{aligned}\bar{L}f_{\lambda,\mu}(x) - \lambda f_{\lambda,\mu}(x) &= \int_{q(\mu)}^{\infty} (\bar{L}h_z(x) - \lambda h_z(x))g_{\lambda,\mu}(z)dz \\ &= \int_{q(\mu)}^{\infty} e^{-xz}(x(\psi(z)-\mu) - \phi(z) - \lambda)g_{\lambda,\mu}(z)dz\end{aligned}$$

On intègre par partie en dérivant $(\psi(z)-\mu)g_{\lambda,\mu}(z)$ et en intégrant xe^{-xz}. Par la propriété de ψ, $\int_{q(\mu)+} \frac{du}{\psi(u)-\mu} = \infty$ et alors

$$\lim_{x\to q(\mu)} (\psi(x)-\mu)g_{\lambda,\mu}(x) = \lim_{x\to q(\mu)} \exp\left(\int_\theta^x \frac{\phi(u)+\lambda}{\psi(u)-\mu}du\right) = 0$$

et l'intégration par partie donne

$$\bar{L}f_{\lambda,\mu}(x) - \lambda f_{\lambda,\mu}(x) = \int_{q(\mu)}^{\infty} e^{-xz}(\psi'(z)g_{\lambda,\mu}(z) + (\psi(z)-\mu)g'_{\lambda,\mu}(z) - (\phi(z)+\lambda)g_{\lambda,\mu}(z))dz = 0$$

où le dernier calcul est bien 0 car g est choisie comme solution de l'EDO suivante :

$$\psi'(z)g_{\lambda,\mu}(z) + (\psi(z)-\mu)g'_{\lambda,\mu}(z) = (\phi(z)+\lambda)g_{\lambda,\mu}(z)$$

pour $z > q(\mu)$.

Il reste alors à vérifier que $f_{\lambda,\mu}$ est bien définie et appartient bien à $C_0^2(l,\infty)$. On a

$$\frac{\phi(u)}{\psi(u)-\mu} = \frac{\phi(u)}{u}\frac{u}{\psi(u)-\mu} \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{d} =: l$$

alors

$$\frac{1}{z}\int_\theta^z \frac{\phi(u)+\lambda}{\psi(u)-\mu}du \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} l$$

Pour z assez grand, on a $\psi(z)-\mu \geqslant Cz$ où C est une constante positive, on a pour tout $\lambda \geqslant 0$

$$\int_\theta^\infty \frac{1}{\psi(z)} \exp\Big(-xz + \int_\theta^z \frac{\phi(u)+\lambda}{\psi(u)-\mu}du\Big)dz < \infty \tag{4.5}$$

car $x > l$

Il reste à vérifier l'intégrabilité en $q(\mu)$. On a

$$\int_{q(\mu)}^\theta \frac{1}{\psi(z)-\mu}\exp\Big(-xz - \int_\theta^z \frac{\phi(u)+\lambda}{\psi(u)-\mu}du\Big)dz \leqslant \int_{q(\mu)}^\theta \frac{1}{\psi(z)-\mu}\exp\Big(-\int_\theta^z \frac{\lambda}{\psi(u)-\mu}du\Big)dz$$

On considère $\lambda > 0$ et en remarquant qu'une primitive du terme de droite est

$$z \mapsto \frac{1}{\lambda}\exp\Big(-\lambda\int_\theta^z \frac{1}{\psi(u)-\mu}du\Big)$$

qui prend une valeur finie à $q(\mu)$, et donc donne bien l'intégrabilité. On montre avec les mêmes techniques que $f_{\lambda,\mu}$ est bien dans $C^2(l,\infty)$ et qu'elle tend vers 0 en ∞.

□

Théorème 4.3. *On considère X un processus $CBI(\psi,\phi)$, et $\sigma_a = \inf\{t > 0, X_t \leqslant a\}$. Soit $x > a \geqslant l$. Pour tout $\lambda > 0$ et $\mu \geqslant 0$ on a*

$$\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\lambda\sigma_a - \mu\int_0^{\sigma_a} X_t dt\right)\right] = \frac{f_{\lambda,\mu}(x)}{f_{\lambda,\mu}(a)}$$

où f est définie comme dans le lemme précédent.

Démonstration. On considère d'abord le cas $a > l$ .En combinant le lemme 4.2 et le lemme 1.15 à $\bar{X}$ avec $f_{\lambda,\mu}$, et en considérant le temps d'arrêt σ_a, on obtient que $e^{-\lambda t\wedge\sigma_a} f_{\lambda,\mu}(\bar{X}_{t\wedge\sigma_a})$ est une $\mathbb{P}_x$-martingale. D'où :

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda t\wedge\sigma_a} f_{\lambda,\mu}(\bar{X}_{t\wedge\sigma_a})) = f_{\lambda,\mu}(x)$$

et

$$\mathbb{E}_x(e^{-\mu I_{t\wedge\sigma_a}} e^{-\lambda t\wedge\sigma_a} f_{\lambda,\mu}(X_{t\wedge\sigma_a})) = f_{\lambda,\mu}(x)$$

L'idée est maintenant de passer à la limite quand $t \to \infty$. Pour cela, on remarque que comme le processus n'a pas de saut négatif, si $t < \sigma_a$ alors $X_t > a$. Par la décroissance de $f_{\lambda,\mu}$, on a pour tout $t \geqslant 0$ $f_{\lambda,\mu}(X_{t\wedge\sigma_a}) \leqslant f_{\lambda,\mu}(a)$. Le passage à la limite nous donne alors :

$$\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\lambda\sigma_a - \mu\int_0^{\sigma_a} X_t dt\right)\right] = \frac{f_{\lambda,\mu}(x)}{f_{\lambda,\mu}(a)}$$

Pour le cas $a = l$, on reprend cette dernière formule, et en remarquant que quand $a \downarrow l$ alors σ_a croît vers σ_l, on a le résultat par convergence monotone.

□

Ce théorème donne directement la loi des temps d'atteinte d'un processus CBI. Pour simplifier les notations, on pose

$$g_\lambda(x) = g_{\lambda,0}(x)\ ,\ f_\lambda(x) = \int_{q(\mu)}^{\infty} e^{-xz} g_\lambda(z)dz \tag{4.6}$$

Corollaire 4.1. *Pour X un processus $CBI(\psi,\phi)$, et $\sigma_a = \inf\{t > 0, X_t \leqslant a\}$. Soit $x > a \geqslant l$. Pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\sigma_a}) = \frac{f_\lambda(x)}{f_\lambda(a)}$$

4.3 Comportement en l'infini

On va s'intéresser dans cette section au comportement à l'infini des processus de branchement avec immigration. On exclura donc les cas où le processus est tué, et on considèrera qu'il est conservatif, qu'il n'est pas absorbé en l'infini en un temps fini.

On distingue trois cas de processus $CBI(\psi,\phi)$ en fonction de la valeur de $\psi'(0+) = \lim_{t\downarrow 0}\psi'(t)$. Dans le cas où $\psi'(0+) > 0$, on dit que le processus est sous-critique, si $\psi'(0+) = 0$, il est critique et si $\psi'(0+) < 0$ on dira qu'il est sur-critique. Dans le cas critique et sous-critique, on a une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une distribution de probabilité invariante qu'on peut retrouver dans le livre de Z.H. Li [6]

Théorème 4.4. *Le processus $CBI(\psi,\phi)$ possède une distribution de probabilité invariante si et seulement si*

$$\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du < \infty$$

Démonstration. Rappelons l'écriture de la transformée de Laplace des lois de X :

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda X_t}) = \exp\Big(-xu_t(\lambda) - \int_0^t \phi(u_s(\lambda))ds\Big)$$

Par la remarque 3.6, la fonction $t \mapsto u_t(\lambda)$ décroît vers 0 quand $t \to \infty$. De plus, on remarque par le changement de variable $y = u_t(\lambda)$ et par la relation 3.6 que

$$\int_0^t \phi(u_s(\lambda))ds = \int_{u_t(\lambda)}^{\lambda} \frac{\phi(y)}{\psi(y)}dy \tag{4.7}$$

Ainsi par convergence monotone on a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x(e^{-\lambda X_t}) = \exp\Big(- \int_0^{\lambda} \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du\Big) \tag{4.8}$$

□

Remarque 4.5. Dans le livre de Li [6], on a une condition équivalente d'intégrabilité dans le cas de processus sous-critique ($\psi'(0+) > 0$) qui est la suivante

$$\int_1^{\infty} log(u)\nu(du) < \infty \tag{4.9}$$

Corollaire 4.2. *Dans le cas où*

$$\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du = \infty \tag{4.10}$$

on a pour tout $x, b \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x(X_t \leqslant b) = 0 \tag{4.11}$$

Démonstration. Dans la démonstration du théorème précédent lorsque

$$\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du = \infty \tag{4.12}$$

on a le résultat suivant

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda X_t}) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

qui donne bien le corollaire. □

Pour étudier le comportement un processus de branchement avec immigration en l'infini, nous allons donner les définitions de récurrence et transience.

Définition 4.6. Soit $X = (X_t, t \geqslant 0)$ un processus stochastique à valeur dans $\mathbb{R}_+$. On dit que X est récurrent si il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\mathbb{P}_x(\liminf_{t\to\infty} |X_t - x| = 0) = 1$$

Définition 4.7. Soit $X = (X_t, t \geqslant 0)$ un processus stochastique à valeur dans $\mathbb{R}_+$. On dit que X est transient si pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{P}_x(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty) = 1$$

Théorème 4.8. *Soit X un $CBI(\psi, \phi)$. Dans les cas critique et sous-critique, le processus est récurrent ou transient si :*

$$\int_0^1 \frac{1}{\psi(z)} \exp\Big(-\int_z^1 \frac{\phi(x)}{\psi(x)} dx\Big) dz = \infty \text{ ou } < \infty$$

Dans le cas d'un processus sur-critique, le processus est transient.

Pour prouver ce résultat, on aura besoin de la proposition suivante dont la preuve se trouve dans [3]

Proposition 4.9. *Soit X un processus $CBI(\psi, \phi)$ qui démarre en $x > 0$. Alors, $\mathbb{P}_x$ presque sûrement, on a pour tout $t > 0$,*

$$X_t \geqslant e^{-dt} x + l(1 - e^{-dt})$$

et en particulier, on a $\liminf_{t\to\infty} X_t \geqslant l$.

Nous allons maintenant prouver le théorème 4.8

Démonstration. On rappelle la notation :

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\psi(x)} \exp\Big(\int_1^x \frac{\phi(u) + \lambda}{\psi(u)} du\Big)$$

Commençons par supposer que

$$\int_0^1 \frac{1}{\psi(x)} \exp\Big(-\int_x^1 \frac{\phi(u)}{\psi(u)} du\Big) dx = \infty \tag{4.13}$$

On a pour tout $x \geqslant a$, $P_x(\sigma_a < \infty) = \lim_{\lambda\to 0} E_x(e^{-\lambda\sigma_a})$

On fixe $\varepsilon \in (0, \infty)$, et en utilisant le corollaire 4.1 on a pour $a > l$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\sigma_a}) &= \frac{\displaystyle\int_0^\varepsilon e^{-xz} g_\lambda(z) dz + \int_\varepsilon^\infty e^{-xz} g_\lambda(z) dz}{\displaystyle\int_0^\varepsilon e^{-az} g_\lambda(z) dz + \int_\varepsilon^\infty e^{-az} g_\lambda(z) dz} \\
&\geqslant \frac{\displaystyle e^{-x\varepsilon} \int_0^\varepsilon g_\lambda(z) dz}{\displaystyle\int_0^\varepsilon g_\lambda(z) dz + \int_\varepsilon^\infty e^{-az} g_\lambda(z) dz} \\
&\geqslant \frac{e^{-x\varepsilon}}{1 + \int_\varepsilon^\infty e^{-az} g_\lambda(z) dz / \int_0^\varepsilon g_\lambda(z) dz}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

On a par 4.13

$$\int_0^{\varepsilon} g_\lambda(z)dz \underset{\lambda\to\infty}{\to} \infty$$

De plus par 4.5 comme $a > l$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-az} g_0(z)dz < \infty$$

On en déduit que le terme de 4.14 tend vers $e^{-x\varepsilon}$ quand $\lambda \to 0$. Comme ce ε peut être choisi aussi petit qu'on veut, on a finalement

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\sigma_a}) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 1 \tag{4.15}$$

On déduit alors que $\mathbb{P}_x(\sigma_a < \infty) = 1$ pour tout $x \geqslant a > l$, et donc $\mathbb{P}_x(\liminf_{t\to\infty} X_t \leqslant l) = 1$. Par 4.9, on conclut alors que $\mathbb{P}_x(\liminf_{t\to\infty} X_t = l) = 1$, et que le processus est récurrent.

On passe maintenant au deuxième cas où on suppose maintenant que

$$\int_0^1 \frac{1}{\psi(x)} \exp\Big(-\int_x^1 \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du\Big)dx < \infty \tag{4.16}$$

Soit $a > l$. Maintenant que a est fixé, on va montrer que $\mathbb{P}_x(\liminf_{t\to\infty} X_t < a) = 0$, ce qui prouvera bien que le processus est transient.
On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\liminf_{t\to\infty} X_t < a) &\leqslant \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x(\sigma_a \circ \theta_t < \infty)\\ &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\big(P_{X_t}(\sigma_a < \infty)\big)\end{aligned}$$

On remarque que

$$\mathbb{E}_x\big(\mathbb{P}_{X_t}(\sigma_a < \infty)\big) \leqslant \mathbb{P}_x(X_t \leqslant a) + \mathbb{E}_x\Big(1_{\{X_t > a\}}\mathbb{P}_{X_t}(\sigma_a < \infty)\Big) \tag{4.17}$$

L'objectif maintenant est de montrer que les deux termes de droite dans 4.17 tendent bien vers 0 quand $t \to \infty$.
On commence par le premier terme : $\mathbb{P}_x(X_t \leqslant a)$. Rappelons que comme le processus est conservatif et que nous somme dans le cas critique ou sous critique, on a $\psi(0) = 0$ et

$$\int_{0+} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} = \infty \tag{4.18}$$

Alors, comme l'intégrale de 4.16 est fini, on doit obligatoirement avoir en 0

$$\exp\Big(-\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du\Big) = 0$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du = \infty$$

Ainsi, le Corollaire 4.2 donne directement

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x(X_t \leqslant a) = 0. \tag{4.19}$$

On passe maintenant au deuxième terme de 4.17. Cette fois-ci, comme on a 4.16, on peut utiliser le Corollaire 4.1 avec $\lambda = 0$ qui donne

$$\mathbb{P}_x(\sigma_a < \infty) = \lim_{\lambda\to 0} \mathbb{E}_x(e^{-\lambda X_t}) = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\psi(z)} \exp\big(-xz + \int_1^z \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du\big)dz}{\int_0^\infty \frac{1}{\psi(z)} \exp\big(-az + \int_1^z \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du\big)dz} = c_a \int_0^\infty g_0(z)e^{-xz}dz \tag{4.20}$$

en posant $c_a = \Big(\int_0^\infty \frac{1}{\psi(z)} \exp\big(-az + \int_1^z \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du\big)dz\Big)^{-1}$ Ainsi on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\Big(1_{\{X_t>a\}}P_{X_t}(\sigma_a < \infty)\Big) &= \mathbb{E}_x\Big(1_{\{X_t>a\}}c_a \int_0^\infty g_0(z)e^{-X_t z}dz\Big) \\ &= c_a \int_0^\infty g_0(z)\mathbb{E}_x\Big(1_{\{X_t>a\}}e^{-X_t z}\Big)dz\end{aligned}$$

On a en utilisant la propriété des CBI et 4.7

$$\mathbb{E}_x\Big(1_{\{X_t>a\}}e^{-X_t z}\Big) \leqslant \mathbb{E}_x\Big(e^{-X_t z}\Big) = \exp\Big(-xu_t(z) - \int_{u_t(z)}^z \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du\Big) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Comme $\mathbb{E}_x\Big(1_{\{X_t>a\}}e^{-X_t z}\Big) \leqslant e^{-az}$, nous allons dominé l'intégrale précédente par $G(z) = g_0(z)e^{-az}$. Comme tout est positif et que $e^{-az} \sim 1$ quand $z \to 0$, c'est la formule 4.16 qui nous donne l'intégrabilité de G en 0. Pour l'intégrabilité en ∞, c'est 4.5 qui nous la donne. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir

$$\mathbb{E}_x\Big(1_{\{X_t>a\}}\mathbb{P}_{X_t}(\sigma_a < \infty)\Big) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ainsi pour tout $a > l$, on a

$$\mathbb{P}_x(\liminf_{t\to\infty} X_t < a) = 0 \tag{4.21}$$

ce qui prouve que le processus est transient.

Enfin, on passe au cas du processus sur-crtitique. On rappelle que $q(0)$ désigne la plus grande racine de ψ. Commençons par noter que

$$\int_{q(0)}^z \frac{\phi(u)}{\psi(u)}du = \infty \tag{4.22}$$

En effet, le problème d'intégration est en $q(0)$, ce point est strictement supérieur à 0 dans le cas sur-critique. On note alors $c := \phi(q(0))$, et en rappelant que ψ est une fonction convexe, continûment dérivable, elle se comporte comme une fonction linéaire au voisinage de $q(0)$. Ainsi l'intégrale de 4.22 se comporte comme l'intégrale

$$\int_{q(0)}^z \frac{c}{u - q(0)}du = \infty \tag{4.23}$$

Comme tout est positif, on a bien 4.22.

Par des arguments similaires, on montre que

$$\int_{q(0)}^{\theta} \frac{1}{\psi(z)} \exp\Big(- \int_z^{\theta} \frac{\phi(u)}{\psi(u)} du \Big) dz < \infty \tag{4.24}$$

En effet le problème est une nouvelle fois autour de $q(0)$, et autour de ce point, l'intégrale se comporte comme

$$\int_{q(0)}^{\theta} \frac{1}{z - q(0)} \exp\Big(- \int_z^{\theta} \frac{c}{u - q(0)} du \Big) dz \tag{4.25}$$

en remarquant qu'une primitive de

$$z \mapsto \frac{1}{z - q(0)} \exp\Big(- \int_z^{\theta} \frac{c}{u - q(0)} du \Big)$$

est

$$z \mapsto \frac{1}{c} \exp\Big(- \int_z^{\theta} \frac{c}{u - q(0)} du \Big)$$

on trouve que en utilisant 4.23 que 4.25 est finie, et donc il en est de même pour l'intégrale de 4.24. Alors comme cette intégrale est finie, on peut réécrire la ligne 4.20 du cas critique/sous-critique et obtenir à nouveau

$$\mathbb{P}_x(\sigma_a < \infty) = c_a \int_{q(0)}^{\infty} g_0(z) e^{-xz} dz$$

on peut alors avec 4.22, montrer de la même manière que dans le cas critique/sous-critique que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\Big(1_{\{X_t > a\}} \mathbb{P}_{X_t}(\sigma_a < \infty) \Big) = 0$$

Ainsi pour montrer la transience dans le cas sur-critique, il nous reste à prouver que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x(X_t \leqslant a) = 0. \tag{4.26}$$

On trouve ce résultat en adaptant la preuve de 4.4. Avec le même changement de variable que dans cette preuve, on retrouve bien

$$\int_0^t \phi(u_s(\lambda)) ds = \int_{u_t(\lambda)}^{\lambda} \frac{\phi(y)}{\psi(y)} dy$$

mais cette fois-ci dans le cas sur-critique on a

$$\lim_{t\to\infty} \int_{u_t(\lambda)}^{\lambda} \frac{\phi(y)}{\psi(y)} dy = \int_{q(0)}^{\lambda} \frac{\phi(y)}{\psi(y)} dy = \infty$$

par 4.22. On aura alors

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x(e^{-\lambda X_t}) = e^{-xq(0)} \exp\Big(- \int_{q(0)}^{\lambda} \frac{\phi(u)}{\psi(u)} du \Big) = 0$$

ce qui nous donne bien 4.26 et prouve la transience dans le cas sur-critique.

$\square$

Références

[1] Jean Bertoin. *Lévy Processes*. Cambridge Tracts In Mathematics, 2001.

[2] R. M. Blumenthal et R. K. Getoor. *Markov Processes and Potential Theory*. The Mathematical Gazette , Volume 56 , Issue 395, 1972.

[3] Xan Duhalde, Clément Foucart et Chunhua Ma. « On the hitting times of continuous-state branching processes with immigration ». In : *Stochastic Processes and their Applications* (2014), p. 4182-4201.

[4] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, 2001.

[5] Andreas E. Kyprianou. *Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Springer.

[6] Z.H. Li. *Measure-Valued Branching Markov Processes*. Springer, 2011.

[7] L.C.G Rogers et D.Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. Cambridge University Press 2000, 1994.