Le foncteur de Maurer-Cartan sur les algèbres L_∞ nilpotentes, d'après Getzler

Notes d'exposé au groupe de travail de topologie algébrique

Nantes/Angers

Aurélien DJAMENT

novembre 2012

Résumé

Dans l'exposé précédent, nous avons appris la définition de l'ensemble de Maurer-Cartan $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre L_∞ nilpotente (sur un corps de caractéristique nulle) $\mathfrak{g}$ et vu que, à l'aide du foncteur de tensorisation par l'algèbre commutative graduée simpliciale $\Omega_\bullet$ que nous avons étudiée dans les séances antérieures, on en déduit un foncteur $\mathrm{MC}_\bullet$ des algèbres L_∞ nilpotentes vers les ensembles simpliciaux, donné par $\mathrm{MC}_n(\mathfrak{g}) = \mathrm{MC}(\mathfrak{g} \otimes \Omega_n)$. Cet ensemble simplicial modélise le type d'homotopie de $\mathfrak{g}$; le résultat fondamental de cet exposé (qui suit essentiellement la deuxième partie de la section 4 de l'article [Get09] de Getzler) est qu'il s'agit d'un ensemble simplicial de Kan.

Table des matières

1 Rappels sur les algèbres L_∞

On se donne une algèbre L_∞ $\mathfrak{g}$ sur le corps de base K de caractéristique 0. Celle-ci est donc munie de crochets $[] : \Lambda^k\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, qui sont homogènes de degré $2-k$, pour tout $k \geq 1$, où la puissance extérieure k-ème $\Lambda^k\mathfrak{g}$ s'entend au sens gradué et vérifient une relation de Jacobi appropriée. Pour $k = 1$, on obtient une différentielle que Getzler note δ.

Si (A, d) est une (K-)algèbre commutative graduée (éventuellement sans unité), l'espace vectoriel gradué $\mathfrak{g} \otimes A$ hérite d'une structure d'algèbre L_∞ telle que

$$[x \otimes a] = [x] \otimes a + (-1)^{|x|} x \otimes da$$

et

$$[x_1 \otimes a_1, \ldots, x_k \otimes a_k] = (-1)^{\sum_{i<j} |a_i||x_j|}[x_1, \ldots, x_k] \otimes (a_1 \ldots a_k) \text{ pour } k > 1$$

(attention, le papier de Getzler semble contenir une coquille pour le signe).

Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, il en est de même pour $\mathfrak{g} \otimes A$.

Comme Getzler, nous adopterons les abus de notation suivants : si f est une application linéaire $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, nous noterons encore f pour $f \otimes A : \mathfrak{g} \otimes A \to \mathfrak{g} \otimes A$. Si $\varphi : A \to A$ est une application linéaire homogène, on notera encore φ l'application linéaire $\mathfrak{g} \otimes A \to \mathfrak{g} \otimes A$ donnée par $x \otimes a \mapsto (-1)^{|\varphi||x|} x \otimes \varphi(a)$ (on utilise toujours la règle de Koszul pour les signes). Ainsi, la différentielle de $\mathfrak{g} \otimes A$ peut être notée $d + \delta$. Noter que, avec cette convention de prolongement, f et φ commutent au signe $(-1)^{|f|\cdot|\varphi|}$ près (on suppose ici que f est homogène).

Le cas qui nous intéresse est celui où A est l'algèbre commutative graduée Ω_n des formes différentielles polynomiales sur le n-simplexe standard Δ^n. On dispose ainsi d'une algèbre L_∞ simpliciale $\mathfrak{g} \otimes \Omega_\bullet$.

2 Rappels et compléments sur le foncteur de Maurer-Cartan

On dispose d'un premier foncteur de Maurer-Cartan MC des algèbres L_∞ nilpotentes vers les ensembles. À $\mathfrak{g}$ il associe l'ensemble $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ des $\alpha \in \mathfrak{g}^1$ tels que $\mathcal{F}(\alpha) = 0$, où

$$\mathcal{F}(\alpha) := \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l!}[\alpha^{\wedge l}]$$

(la somme est finie puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente). Noter que la fonctorialité est évidente sur les algèbres de Lie différentielles graduées, mais pas tout à fait dans le cadre L_∞. Supposons en effet que $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme L_∞ (avec $\mathfrak{g}'$ nilpotente, comme $\mathfrak{g}$) : f est une collection d'applications linéaires $f_i : \mathfrak{g}^{\wedge i} \to \mathfrak{g}'$ de degré $1-i$ vérifiant des relations appropriées ; si $x \in \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$, alors on n'a pas nécessairement $f_1(x) \in \mathrm{MC}(\mathfrak{g}')$ (c'est cependant le cas, évidemment, si f est un morphisme naïf, c'est-à-dire que les f_i sont nuls pour $i > 1$). En revanche, l'élément

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} f_i(x^{\wedge i})$$

(on suppose ici que la somme est finie, ce qui n'est pas a priori gratuit) de $\mathfrak{g}'^1$ appartient à $\mathrm{MC}(\mathfrak{g}')$ (c'est une conséquence facile des relations vérifiées par les f_i) et cela fait de MC un foncteur des algèbres L_∞ nilpotentes vers les ensembles (éventuellement pointés : 0 est point de base canonique de l'ensemble de Maurer-Cartan).

Le foncteur étudié par Getzler dans le § 4 de [Get09], noté $\mathrm{MC}_\bullet$, va des algèbres L_∞ nilpotentes (les morphismes étant les morphismes L_∞ nilpotents au sens où la somme précédente est toujours finie) vers les ensembles simpliciaux. Il est obtenu en composant MC et $-\otimes\Omega_\bullet$. Comme Ω_0 s'identifie à K, l'ensemble $\mathrm{MC}_0(\mathfrak{g})$ des 0-simplexes de $\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})$ s'identifie à $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$.

Getzler définit les groupes d'homotopie d'une algèbre L_∞ nilpotente $\mathfrak{g}$ comme ceux de l'ensemble simplicial pointé de Maurer-Cartan $\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})$. L'ensemble (pointé) $\pi_0(\mathfrak{g}) := \pi_0(\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g}))$ possède une interprétation sympathique — voir pour cela l'annexe en fin de texte.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre L_∞ *abélienne* (i.e. dont les produits, sauf peut-être la différentielle, sont nuls), c'est-à-dire un complexe de cochaînes, on dispose d'isomorphismes naturels $\pi_i(\mathfrak{g}) \simeq H^{1-i}(\mathfrak{g})$.

3 L'ensemble simplicial $\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})$ est fibrant

On rappelle (cf. § 3 de [Get09] et exposés correspondants) que, pour $0 \leq i \leq n$, on dispose d'applications linéaires $\varepsilon_n^i : \Omega_n \to K \subset \Omega_n$ d'évaluation sur le sommet e_i des formes (c'est donc nul sur une forme homogène de degré strictement positif) et d'opérateurs $h_n^i : \Omega_n \to \Omega_n$ de degré -1 vérifiant la relation d'homotopie $Id - \varepsilon_n^i = dh_n^i + h_n^i d$; les extensions de ces applications à $\mathfrak{g}\otimes\Omega_n$ vérifient encore la même relation, ainsi que $\delta h_n^i = -h_n^i\delta$ (à cause des signes), de sorte qu'on a :

$$Id = \varepsilon_n^i + (d+\delta)h_n^i + h_n^i(d+\delta). \tag{1}$$

On pose aussi $R_n^i := (d+\delta)h_n^i$.

Si $\alpha \in \mathrm{MC}_n(\mathfrak{g})$, alors $(d+\delta)(\alpha) = -\sum_{l\geq 2}\frac{1}{l!}[\alpha^{\wedge l}]$, de sorte que (1) donne :

$$\alpha = \varepsilon_n^i(\alpha) + R_n^i(\alpha) - \sum_{l\geq 2}\frac{1}{l!}h_n^i[\alpha^{\wedge l}] \tag{2}$$

On rappelle également que $\varepsilon_n^i h_n^i = 0$ par le lemme 3.6 de Getzler (cette composée est, au signe près, l'intégrale sur le simplexe *dégénéré* (*ii*), donc 0).

On utilisera par ailleurs l'égalité

$$x^{\wedge l} - y^{\wedge l} = \sum_{j=1}^{l} x^{\wedge(j-1)} \wedge (x-y) \wedge y^{\wedge(l-j)} \tag{3}$$

Définition 3.1. On note $\mathrm{mc}_n^i(\mathfrak{g})$ le sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{g}\otimes\Omega_n)^1$ intersection de l'image par $d+\delta$ de $(\mathfrak{g}\otimes\Omega_n)^0$ (image que Getzler note $\mathrm{mc}_n(\mathfrak{g})$ mais qui ne semble pas faire le travail) et de $Ker\,\varepsilon_n^i$.

Proposition 3.2 (Lemme 4.6 de [Get09]). *Pour toute algèbre L_∞ nilpotente $\mathfrak{g}$, l'application (ε_n^i, R_n^i) induit une bijection $\mathrm{MC}_n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{MC}(\mathfrak{g}) \times \mathrm{mc}_n^i(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. On commence par noter que ε_n^i, qui est une application simpliciale, envoie $\mathrm{MC}_n(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{MC}_0(\mathfrak{g}) = \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ et que R_n^i envoie $\mathrm{MC}_n(\mathfrak{g})$ dans

$\mathrm{mc}_n^i(\mathfrak{g})$. En effet, l'image de R_n^i restreinte aux éléments de degré 1 est clairement incluse dans l'image par $d+\delta$ de $(\mathfrak{g}\otimes\Omega_n)^0$, et l'on remarque que $\varepsilon_n^i(d+\delta)h_n^i$ est nul car :

1. $\varepsilon_n^i d = 0$, puisque ε_n^i est nul sur les formes homogènes de degré non nul et que d accroît strictement le degré ;
2. $\varepsilon_n^i \delta h_n^i$ est également nul à cause de la relation $\varepsilon_n^i h_n^i = 0$ (ε_n^i est une application simpliciale et δ opère seulement sur $\mathfrak{g}$, de sorte que ces morphismes commutent au signe près).

Montrons maintenant que la restriction à $\mathrm{MC}_n(\mathfrak{g})$ de (ε_n^i, R_n^i) est injective. Si α et β sont deux éléments de $\mathrm{MC}_n(\mathfrak{g})$ tels que $\varepsilon_n^i(\alpha)=\varepsilon_n^i(\beta)$ et $R_n^i(\alpha)=R_n^i(\beta)$, alors les égalités (2) et (3) fournissent

$$\alpha-\beta=\sum_{l\geq 2}\frac{1}{l!}\sum_{j=1}^{l}h_n^i\big([\beta^{\wedge(j-1)}\wedge(\beta-\alpha)\wedge\alpha^{\wedge(l-j)}]\big).$$

Par conséquent, si l'on note $F^*\mathfrak{g}$ la suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$, la relation $\alpha-\beta\in F^r\mathfrak{g}$ entraîne $\alpha-\beta\in F^{r+1}\mathfrak{g}$; comme $\mathfrak{g}$ est nilpotente, on en déduit $\alpha=\beta$.

Établissons la surjectivité de notre application. Donnons-nous $\mu\in\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ et $\nu\in\mathrm{mc}_n^i(\mathfrak{g})$ et posons $\alpha_0=\mu+\nu$. On a ici noté, par abus, de la même façon μ et son image $\mu\otimes 1$ (où 1 désigne l'unité de l'algèbre Ω_n) dans $\mathfrak{g}^1\otimes\Omega_n^0$. Alors $\varepsilon_n^i\mu=\mu$ (car ε_n^i n'est autre qu'une évaluation sur les 0-formes) et $\varepsilon_n^i\nu=0$ par définition de $\mathrm{mc}_n^i(\mathfrak{g})$ (c'est là qu'on ne semble pas pouvoir s'en sortir avec le $\mathrm{mc}_n(\mathfrak{g})$ de Getzler), donc $\varepsilon_n^i\alpha_0=\mu$. On a également $R_n^i\mu=0$ car $h_n^i\mu=0$ (h_n^i n'opère que sur la partie simpliciale et fait strictement décroître le degré des formes, or μ est de degré nul) et $R_n^i\nu=\nu$ grâce à la relation (1), qui fournit

$$R_n^i\nu=\nu-\varepsilon_n^i\nu-h_n^i(d+\delta)\nu\ ;$$

or $\varepsilon_n^i\nu=0$ et $(d+\delta)\nu=0$ puisque $(d+\delta)^2=0$, donc $R_n^i\alpha_0=\nu$.

On définit maintenant α_k, pour $k\in\mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence suivante :

$$\alpha_{k+1}=\alpha_0-\sum_{l\geq 2}\frac{1}{l!}h_n^i[\alpha_k^{\wedge l}].$$

Comme $\varepsilon_n^i h_n^i=0$, on a $\varepsilon_n^i\alpha_k=\varepsilon_n^i\alpha_0=\mu$ pour tout k. De même, de $(h_n^i)^2=0$ (cas particulier du lemme 3.5 de [Get09]) on tire $R_n^i\alpha_k=\nu$ pour tout k.

Utilisant l'identité (3), on voit que

$$\alpha_{k+1}-\alpha_k=\sum_{l\geq 2}\frac{1}{l!}h_n^i\Big(\sum_{j=1}^{l}[\alpha_{k-1}^{\wedge(j-1)}\wedge(\alpha_{k-1}-\alpha_k)\wedge\alpha_k^{\wedge(l-j)}]\Big)$$

d'où l'on déduit par récurrence la relation $\alpha_{k+1}-\alpha_k\in F^{k+1}\mathfrak{g}\otimes\Omega_n$. Comme $\mathfrak{g}$ est nilpotente, cela implique que la suite (α_k) est stationnaire ; nous noterons α sa limite : elle vérifie $\varepsilon_n^i\alpha=\mu$ et $h_n^i\alpha=\nu$. Pour conclure la démonstration, il suffit donc d'établir que α appartient à $\mathrm{MC}_n(\mathfrak{g})$. Pour cela, on applique l'opérateur $d+\delta$ à l'égalité

$$\alpha=\alpha_0-\sum_{l\geq 2}\frac{1}{l!}h_n^i[\alpha^{\wedge l}],$$

ce qui donne, puisque $(d+\delta)\nu = 0$ (car $(d+\delta)^2 = 0$) et $d\mu = 0$ (car μ est dans $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes K \subset \mathfrak{g} \otimes \Omega_n^0$) :

$$(d+\delta)\alpha = \delta\mu - \sum_{l\geq 2} \frac{1}{l!}(d+\delta)h_n^i[\alpha^{\wedge l}],$$

d'où

$$\mathcal{F}(\alpha) = \delta\mu + \sum_{l\geq 2} \frac{1}{l!}\big(id - (d+\delta)h_n^i\big)[\alpha^{\wedge l}]$$

puis, en utilisant l'égalité (1), la relation $\varepsilon_n^i\alpha = \mu$ et le fait que ε_n^i, qui est une application simpliciale de degré nul, commute aux crochets venant de $\mathfrak{g}$:

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\mu) + \sum_{l\geq 2} \frac{1}{l!}h_n^i(d+\delta)[\alpha^{\wedge l}] = h_n^i(d+\delta)\mathcal{F}(\alpha).$$

Par l'identité de Bianchi

$$(d+\delta)\mathcal{F}(\alpha) = -\sum_{l\geq 1} \frac{1}{l!}[\alpha^{\wedge l} \wedge \mathcal{F}(\alpha)],$$

on en déduit :

$$\mathcal{F}(\alpha) = -\sum_{l\geq 1} \frac{1}{l!}h_n^i[\alpha^{\wedge l} \wedge \mathcal{F}(\alpha)],$$

ce qui montre, par récurrence sur j, que $\mathcal{F}(\alpha)$ appartient à chaque $F^j\mathfrak{g} \otimes \Omega_n$ et conclut la démonstration, $\mathfrak{g}$ étant nilpotente. □

Remarque 3.3. Il serait très intéressant de comprendre comment les morphismes L_∞ (nilpotents) se comportent vis-à-vis de la bijection de la proposition précédente : pour ce qui concerne $\varepsilon_n^i : \mathrm{MC}_n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ c'est évident, mais ce l'est beaucoup moins pour $R_n^i : \mathrm{MC}_n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{mc}_n^i(\mathfrak{g})$. Peut-être cela pourrait-il aider à compléter la démonstration de la proposition 3.6 ci-après pour un morphisme L_∞ général ?

Dans ce qui suit, les ∂_j désignent (comme dans l'article de Getzler) les opérateurs de face sur l'algèbre simpliciale $\Omega_\bullet$.

Lemme 3.4. *1. Pour $0 \leq i < j \leq n$, on a $\varepsilon_n^i = \varepsilon_{n-1}^i\partial_j$, $\partial_j h_n^i = h_{n-1}^i\partial_j$ et $\partial_j R_n^i = R_{n-1}^i\partial_j$.*

2. Pour $0 \leq j < i \leq n$, on a $\varepsilon_n^i = \varepsilon_{n-1}^{i-1}\partial_j$, $\partial_j h_n^i = h_{n-1}^{i-1}\partial_j$ et $\partial_j R_n^i = R_{n-1}^{i-1}\partial_j$.

Démonstration. Les assertions relatives aux ε résultent de ce que la composée $\varepsilon_{n-1}^k\partial_j$ est induite par l'application $[0] \to [n-1] \to [n]$ (de la catégorie simpliciale $\mathbf{\Delta}$) composée de la fonction constante en k et de la fonction associant t à $t < j$ et $t+1$ à $t \geq j$, composée égale à l'application constante en k si $k < j$ et en $k+1$ sinon.

Les assertions relatives aux applications h sont (avec des notations légèrement différentes) le point (ii) du lemme 2.19 de [Dup78]. Celles relatives aux $R = (d+\delta)h$ s'en déduisent, puisque $d+\delta$ commute [1] aux applications simpliciales (d est la différentielle de de Rham et δ n'opère que sur l'algèbre L_∞). □

1. Il n'y a pas de problème de signe car les opérateurs simpliciaux ∂_j sont de degré nul.

On rappelle également le résulat classique suivant (cf. [GJ99], chap. III, lemme 2.10, par exemple) :

Lemme 3.5. *Tout morphisme de groupes abéliens simpliciaux qui est surjectif en chaque degré est une fibration de Kan.*

Proposition 3.6 (Proposition 4.7 de [Get09]). *Si $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme surjectif*[2] *d'algèbres L_∞ nilpotentes, alors le morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathrm{MC}_\bullet(f) : \mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g}) \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{h})$ est une fibration de Kan, au moins si f est un morphisme naïf.*

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{0, \dots, n\}$, $\beta_j \in \mathrm{MC}_{n-1}(\mathfrak{g})$, pour $0 \leq j \neq i \leq n$, vérifiant $\partial_j \beta_k = \partial_{k-1}\beta_j$ pour $0 \leq j < k \leq n$ avec $j, k \neq i$ (autrement dit, les β_j forment un cornet) et $\gamma \in \mathrm{MC}_n(\mathfrak{h})$ tel que $\partial_j \gamma = f(\beta_j)$ pour $j \neq i$. Il s'agit de montrer l'existence de $\alpha \in \mathrm{MC}_n(\mathfrak{g})$ tel que $f(\alpha) = \gamma$ et $\partial_j \alpha = \beta_j$ pour $j \neq i$.

Comme $f_1 \otimes \Omega_m$ est surjectif pour tout $m \in \mathbb{N}$, le lemme 3.5 montre que $f_1 \otimes \Omega_\bullet$ est une fibration de Kan si f est un morphisme naïf surjectif (sinon, je ne sais pas comment compléter la démonstration de Getzler — le morphisme entre les ensembles simpliciaux sous-jacents aux espaces vectoriels simpliciaux $(\mathfrak{g} \otimes \Omega_\bullet)^1$ et $(\mathfrak{h} \otimes \Omega_\bullet)^1$ dont on aimerait savoir qu'il est une fibration n'est alors pas linéaire — cf. la fonctorialité de $\mathrm{MC}_\bullet$ indiquée dans la section 2 — de sorte qu'on ne peut pas appliquer le lemme 3.5), de sorte qu'il existe $\rho \in \mathfrak{g} \otimes \Omega_n$ tel que $f(\rho) = \gamma$ et $\partial_j \rho = \beta_j$ pour $j \neq i$. Du fait que ε^i_n est une application simpliciale qui se factorise par ∂_j, où $j \neq i$ est arbitraire, et que $\partial_j \rho$ appartient au sous-ensemble simplicial $\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g} \otimes \Omega_\bullet$, $\varepsilon^i_n \alpha$ appartient à $\mathrm{MC}_0(\mathfrak{g}) = \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$. La proposition 3.2 garantit donc l'existence d'un (unique) $\alpha \in \mathrm{MC}_n(\mathfrak{g})$ tel que $\varepsilon^i_n \alpha = \varepsilon^i_n \rho$ et $R^i_n \alpha = R^i_n \rho$.

On a

$$\varepsilon^i_n f(\alpha) = f(\varepsilon^i_n \alpha) = f(\varepsilon^i_n \rho) = \varepsilon^i_n f(\rho) = \varepsilon^i_n \gamma$$

et de même $R^i_n f(\alpha) = R^i_n \gamma$, de sorte que $f(\alpha) = \gamma$ par la proposition 3.2.

Soit $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}$, montrons l'égalité $\partial_j \alpha = \beta_j$. (Attention, sur ce point, le papier de Getzler contient quelques erreurs d'indexation.) Supposons d'abord $i < j$. Grâce au lemme 3.4, on a

$$\varepsilon^i_{n-1} \partial_j \alpha = \varepsilon^i_n \alpha = \varepsilon^i_n \rho = \varepsilon^i_{n-1} \partial_j \rho = \varepsilon^i_{n-1} \beta_j$$

et

$$R^i_{n-1} \partial_j \alpha = \partial_j R^i_n \alpha = \partial_j R^i_n \rho = R^i_{n-1} \partial_j \rho = R^i_{n-1} \beta_j,$$

de sorte que la proposition 3.2 entraîne que $\partial_j \alpha = \beta_j$.

Dans le cas où $j < i$, on procède de la même façon, mais en utilisant ε^{i-1}_{n-1} et R^{i-1}_{n-1} ; par exemple,

$$R^{i-1}_{n-1} \partial_j \alpha = \partial_j R^i_n \alpha = \partial_j R^i_n \rho = R^{i-1}_{n-1} \partial_j \rho = R^{i-1}_{n-1} \beta_j,$$

ce qui conclut la démonstration. ☐

2. Cela signifie-t-il que la première composante de f (qui est un morphisme d'espaces vectoriels gradués de degré 0 de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$) est surjective, ou que le morphisme entre les cogèbres colibres associées est surjectif (peut-être même est-ce équivalent ?) ? Je n'ai pu trancher ce point, ne comprenant de toute façon pas la démonstration dans le cas où le morphisme n'est pas naïf.

Prenant pour $\mathfrak{h}$ l'algèbre nulle, on obtient l'un des résultats principaux du § 4 de [Get09] :

Corollaire 3.7. *Pour toute algèbre L_∞ nilpotente $\mathfrak{g}$, $\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})$ est un ensemble simplicial de Kan.*

4 Propriétés d'invariance homotopique

On reproduit ici sans démonstration deux résultats de la fin du § 4 de [Get09]. Elles indiquent en un certain sens que l'ensemble simplicial pointé $\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})$ constitue un modèle raisonnable pour faire de la théorie de l'homotopie sur les algèbres L_∞ nilpotentes.

Proposition 4.1 (Théorème 4.8 de [Get09]). *Soit $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ une équivalence faible (naïve ?) entre deux algèbres L_∞ nilpotentes concentrées en degrés négatifs. Alors le morphisme d'ensembles simpliciaux*

$$\mathrm{MC}_\bullet(f) : \mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g}) \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{h})$$

est une équivalence d'homotopie.

Si $\mathbf{m}$ est une K-algèbre commutative sans unité, on a rappelé au début comment faire de $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{m}$ une algèbre L_∞ lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre L_∞. Si $\mathbf{m}$ est nilpotente au sens où $\mathbf{m}^i = 0$ pour un certain i, alors l'algèbre L_∞ $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{m}$ est toujours nilpotente.

Proposition 4.2 (Proposition 4.9 de [Get09]). *Soient $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ une équivalence faible (naïve ?) entre deux algèbres L_∞ et $\mathbf{m}$ une algèbre commutative sans unité nilpotente. Alors le morphisme d'ensembles simpliciaux*

$$\mathrm{MC}_\bullet(f \otimes \mathbf{m}) : \mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g} \otimes \mathbf{m}) \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{h} \otimes \mathbf{m})$$

est une équivalence d'homotopie.

La démonstration de ces deux résultats repose sur l'utilisation de filtrations judicieuses. Pour la proposition 4.1, Getzler emploie une filtration définie à l'aide des cocyles et cobords des algèbres L_∞ (avec des conditions de degré), pour la proposition 4.2, c'est la filtration finie décroissante induite par les puissances de $\mathbf{m}$ qui sert. Un autre ingrédient réside dans le caractère contractile de $\Omega_\bullet$ pour la proposition 4.1 et l'observation que le foncteur $\mathrm{MC}_\bullet$ restreint aux algèbres L_∞ abéliennes (i.e. aux complexes de cochaînes — noter que MC est l'ensemble Z^1 des 1-cocycles pour une telle algèbre) envoie équivalences faibles sur équivalences d'homotopie. Enfin, on utilise pour les deux propriétés la proposition 3.6, de sorte qu'il faut savoir la démontrer pour un morphisme L_∞ (nilpotent) arbitraire pour obtenir le même degré de généralité pour les propositions 4.1 et 4.2.

5 Annexe : tentative pour comprendre $\pi_0(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie différentielle graduée

Pour simplifier, on suppose ici simplement que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie différentielle graduée nilpotente. Cherchons à décrire $\pi_0(\mathfrak{g}) = \pi_0(\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g}))$. Considérons pour cela un élément de $(\mathfrak{g} \otimes \Omega_1)^1 \simeq \mathfrak{g}^1[t] \oplus \mathfrak{g}^0[t]dt$ de composantes x et

$-y.dt$: sa différentielle est la somme du terme $dx - dy.dt$ issu de la différentielle d de $\mathfrak{g}$ et du terme $-\dot{x}.dt$ (on désigne par un point la dérivation des polynômes ; le signe provient de la règle de Koszul) et

$$[x - y.dt, x - y.dt] = [x, x] - 2[x, y].dt = [x, x] + 2(ad\, y)x.dt$$

puisque $dt.dt = 0$, où l'on note $ad\, y = [y, -]$. Par conséquent, $x - y.dt$ vérifie l'équation de Maurer-Cartan si et seulement si

$$dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x} = (ad\, y)(x) - dy.$$

Cela équivaut à $x(0) \in \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ et $\dot{x} = (ad\, y)(x) - dy$. En effet, si x vérifie cette égalité, on voit facilement que $z := dx + \frac{1}{2}[x, x]$ vérifie l'égalité $\dot{z} = (ad\, y)z$, de sorte que $z = 0$ équivaut simplement à $z(0) = 0$. Par ailleurs, en utilisant que $\mathfrak{g}$ est nilpotente, on constate aisément que, pour tout $a \in \mathfrak{g}^1$, il existe une et une seule solution $x \in \mathfrak{g}^1[t]$ de l'équation $\dot{x} = (ad\, y)(x) - dy$ telle que $x(0) = a$. Pour résoudre cette équation, on procède comme d'habitude : soit Y la primitive sans terme constant de y, en posant $X = \exp(-ad\, Y)(x)$ (c'est licite car $\mathfrak{g}$ est nilpotente) l'équation devient

$$\dot{X} = -\exp(-ad\, Y)(dy).$$

Si y est un monôme $t^n\omega$ (où $\omega \in \mathfrak{g}^0$ et $n \in \mathbb{N}$), $\exp(-ad\, Y)(dy) = t^n \exp(-\frac{t^{n+1}}{n+1} ad\, \omega).d\omega$ s'intègre aussitôt :

$$X = X(0) + \frac{\exp\big(-\frac{t^{n+1}}{n+1} ad\, \omega\big) - 1}{ad\, \omega}.d\omega$$

ou encore

$$x = \exp\Big(\frac{t^{n+1}}{n+1}.ad\, \omega\Big).x(0) + \frac{1 - \exp\big(\frac{t^{n+1}}{n+1} ad\, \omega\big)}{ad\, \omega}.d\omega.$$

Cela montre d'une part que la formule

$$\exp(\lambda).a = \exp(ad\, \lambda)a + \frac{1 - \exp(ad\, \lambda)}{ad\, \lambda}.d\lambda$$

définit une action (ou plutôt, cela montre que cette formule donne un élément de $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ lorsque a y appartient : vérifier la formule $\exp(\lambda).(\exp(\mu).a) = (\exp(\lambda)\exp(\mu)).a$ n'est pas évident) du groupe $\exp(\mathfrak{g}^0)$ sur l'ensemble $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ (cf. [GM88] ; [Hin97] donne quelques explications sur cette action, mais elles me semblent totalement incompréhensibles) et d'autre part que deux éléments de $\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) = \mathrm{MC}_0(\mathfrak{g})$ sont dans la même composante connexe de l'ensemble simplicial de $\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g})$ s'ils sont conjugués sous cette action. Cela montre aussi la réciproque — i.e. permet d'identifier $\pi_0(\mathrm{MC}_\bullet(\mathfrak{g}))$ à $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})/\exp(\mathfrak{g}^0)$, résultat affirmé par exemple par l'article de Getzler (y compris sous la forme plus générale correspondant au cas L_∞ ; le cas Lie dg est attesté dans [GM88] ou [Hin97]) — si l'on sait montrer que le cas général (où y n'est pas monomial) se ramène à celui qu'on peut facilement intégrer.

Remarque 5.1. Une façon de voir qu'il est naturel de considérer l'équation $dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0$ pour x élément homogène de degré 1 d'une algèbre de Lie différentielle graduée (et sans doute, plus généralement, l'équation de Maurer-Cartan dans le cadre L_∞, en effectuant les modifications qui s'imposent) est de noter la relation (pour x homogène de degré impair)

$$(d + ad\, x)^2 = ad\, Q(x) \qquad \text{où} \qquad Q(x) = dx + \frac{1}{2}[x, x]$$

(cf. [GM88], pages 50-51). Cela semble lié intuitivement à l'énoncé selon lequel $\pi_0(\mathfrak{g})$ paramétrise les classes d'équivalence de déformations de $\mathfrak{g}$ (vrai également dans le cadre L_∞) qui constitue manifestement une motivation fondamentale à l'introduction du foncteur de Maurer-Cartan. On ne cherchera toutefois pas, dans cet exposé, à expliquer ce que signifie déformer une algèbre de Lie différentielle graduée (tout cela paraît trouver sa source dans des considérations géométriques qui dépassent totalement le cadre du présent exposé et les compétences de son auteur).

Remerciements Je remercie chaleureusement Friedrich Wagemann pour les références et indications précieuses qu'il m'a fournies, ainsi qu'Hossein Abbaspour sans qui je n'aurais rien compris à la fonctorialité de l'ensemble de Maurer-Cartan relativement aux morphismes L_∞. La préparation de cet exposé a également bénéficié de discussions avec Salim Rivière.

Références

[Dup78] J. L. Dupont – *Curvature and characteristic classes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 640, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[Get09] E. Getzler – « Lie theory for nilpotent L_∞-algebras », *Ann. of Math. (2)* **170** (2009), no. 1, p. 271–301.

[GJ99] P. G. Goerss & J. F. Jardine – *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[GM88] W. M. Goldman & J. J. Millson – « The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1988), no. 67, p. 43–96.

[Hin97] V. Hinich – « Descent of Deligne groupoids », *Internat. Math. Res. Notices* (1997), no. 5, p. 223–239.