Préliminaires en cohomologie de groupes et suites spectrales

1. Cohomologie de groupes

G groupe, M un G-module

$$C^n(G,M) = \{ \varphi : G^n \to M \mid \varphi(g_1,\dots,g_n) = 0 \text{ si } \exists i : g_i = 1 \}$$

cochaînes non-homogènes normalisées

$$d : C^n(G,M) \to C^{n+1}(G,M)$$

$$d\varphi(g_1,\dots,g_{n+1}) = g_1\varphi(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \varphi(\dots, g_i g_{i+1}, \dots)$$
$$+ (-1)^{n+1}\varphi(g_1,\dots,g_n)$$

$Z^n(G,M)$ cocycles, $B^n(G,M)$ cobords

$$H^n(G,M) = Z^n(G,M) / B^n(G,M)$$

Ceci est la description à l'aide de cochaînes <u>non-homogènes</u>.
Celle à l'aide de cochaînes <u>homogènes</u> (normalisées) est la suivante :

$$\tilde{C}^n(G,M) = \{ \psi : G^{n+1} \to M \mid \psi \text{ équivariante par rapport à } g\cdot(g_0,\dots,g_n) = (gg_0,\dots,gg_n),\ \psi(g_0,\dots,g_n) = 0 \text{ si } \exists i : g_i = g_{i+1} \}$$

$$\tilde{d} : \tilde{C}^n(G,M) \to \tilde{C}^{n+1}(G,M)$$

$$\tilde{d}\psi(g_0,\dots,g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \psi(g_0,\dots,\hat{g_i},\dots,g_{n+1})$$

différentielle d'Alexander-Spanier

<u>Prop</u> : On a un isomorphisme de complexes

$$(C^\bullet(G,M), d) \underset{\xi}{\overset{\zeta}{\rightleftarrows}} (\tilde{C}^\bullet(G,M), \tilde{d})$$

donné par

$$\zeta(\varphi)(g_0,\dots,g_n) = g_0\varphi(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2, \dots, g_{n-1}^{-1}g_n)$$

et $$\xi(\psi)(g_1,\dots,g_n) = \psi(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2\cdots g_n)$$

Rem. : (a) On a les interprétations usuelles des groupes de cohomologie de petit degré : H^0 sont les invariants (et ainsi la cohomologie s'interprète comme foncteur dérivé du foncteur des invariants), H^1 sont les homomorphismes croisés, H^2 les extensions abéliennes et H^3 les modules croisés.

(b) Lien avec Ext : $H^n(G,M) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$

2. Cup produit

[Mac Lane : Homology] Ch. VIII §§8-9

Le cup produit s'obtient en composant le cross produit

$$H^\cdot(G,M) \otimes H^\cdot(H,M') \longrightarrow H^\cdot(G\times H, M\otimes M')$$

avec une "multiplication" équivariante $M\otimes M' \to M''$.
Le cross produit s'obtient par le thm. d'Eilenberg-Zilber qui se démontre par ex. à l'aide de l'application d'Alexander-Whitney f : si $x^n = (0,1,\dots,n)$, alors

$$f(x^n \times x^n) = \sum_{i=0}^{n} (0,\dots,i)\otimes(i,i+1,\dots,n)$$

Les cochaînes homogènes sont mieux adaptées aux considérations simpliciales et f induit le cup produit

$$(\psi \cup \psi')(x_0,\dots,x_n) = \psi(x_0,\dots,x_k)\otimes\psi'(x_{k+1},\dots,x_n)$$

pour $\deg\psi = k$, $\deg\psi' = m$, $k+m=n$

Ceci donne pour des cochaînes non-homogènes φ, φ' :

$$(\varphi\cup\varphi')(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\varphi(x_1,\dots,x_k)\otimes x_1\cdots x_k\,\varphi'(x_{k+1},\dots,x_n)$$

(cf. Exo p. 248 [Mac Lane])

3. Suites spectrales

Une <u>suite spectrale</u> est un procédé itératif pour calculer la cohomologie d'un complexe qui a de la structure auxiliaire, comme par exemple un complexe filtré ou un complexe où la différentielle est la somme de deux différentielles (" complexe total d'un bicomplexe").

<u>Def</u>: Une <u>suite spectrale</u> est une suite $(E_r, d_r)_{r\geq 0}$ d'espaces bigradués

$$E_r = \bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} E_r^{pq}$$

avec des différentielles $d_r : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$, $d_r\circ d_r = 0$,

tels que $\quad H(E_r, d_r) = E_{r+1} \quad$ (comme espaces bigradués)

On dit que <u>la suite spectrale converge</u> (vers E_∞) ou stabilise si pour tout (p,q), il existe $r(p,q)$ t.q. $E_r^{pq} = E_{r(p,q)}^{pq}$ $\forall r \geq r(p,q)$. Dans ce cas, on pose $E_\infty^{pq} = E_{r(p,q)}^{pq}$.

Ceci est le cas si $d_r^{p+r,\, q-r+1} = d_r^{pq} = 0 \quad \forall r \geq r(p,q)$.

On dessine une suite spectrale :

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet^{p,q+1} & E_\bullet^{p+1,q+1} & E_\bullet^{p+2,q+1} \\
E_\bullet^{p,q} \arrow[u] \arrow[r, "d_1^{pq}"] \arrow[drr, "d_2^{pq}"] & E_\bullet^{p+1,q} & E_\bullet^{p+2,q} \\
E_\bullet^{p,q-1} & E_\bullet^{p+1,q-1} & E_\bullet^{p+2,q-1}
\end{tikzcd}$$

<u>Exemple</u>: suite spectrale d'un <u>complexe filtré</u>:

"exhaustive" $\qquad\qquad$ "séparé"

$$C^\bullet = F^0C^\bullet \supset \dots \supset F^pC^\bullet \supset F^{p+1}C^\bullet \supset \dots \supset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F^iC^\bullet = \{0\}$$

filtration compatible avec la différentielle :

$$d(F^pC^\bullet) \subseteq F^pC^\bullet$$

(i.e. les $F^pC^\bullet$ sont des sous-complexes)

On construit alors une suite spectrale : le terme E_0 est le gradué associé à la filtration :

$$E_0^{pq} = Gr^p(C^{p+q}) = \frac{F^pC^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}$$

et $d_0 = d : E_0^{pq} \longrightarrow E_0^{p,q+1}$: bien défini, car F^{p+1} sous-cpx.

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(Gr^p(C^{p+q})) = \frac{\{a \in F^pC^{p+q} \mid da \in F^{p+1}C^{p+q+1}\}}{dF^pC^{p+q-1} + F^{p+1}C^{p+q}}$$

et $d_1 = d : E_1^{pq} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$

Plus généralement,

$$E_r^{pq} = \frac{\{a \in F^pC^{p+q} \mid da \in F^{p+r}C^{p+q+1}\}}{dF^{p-r+1}C^{p+q-1} + F^{p+1}C^{p+q}}$$

en tout cas la partie de ceci qui est contenu dans le numérateur !

et $d_r = d : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$

<u>Prop</u> : (a) $H(E_r, d_r) = E_{r+1}$

(b) Si la suite spectrale converge, alors

$$E_\infty^{p,q} = Gr^p H^{p+q}(C^\bullet)$$

pour la filtration naturelle induite sur la coh. $H^\bullet(C^\bullet)$.
(i.e. $F^pH^q(C^\bullet) = \pi(\ker d \cap F^pC^q)$ avec π la proj. sur la cohomologie)

4. La suite spectrale de Lyndon - Hochschild - Serre

voir [Hochschild-Serre] Trans. AMS 74 (1953)

Il s'agit d'une suite spectrale canoniquement associée à un groupe G, un sous-groupe $K < G$ et un G-module M.

$$A^n = C^n(G, M)$$ cochaînes (non-hom.) normalisées avec la différentielle d.

On définit une filtration par (A_j) $\left(A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right)$

$A_j = A$ pour $j \leq 0$, $A_j \cap A^n \ni f$ tels que $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = 0$ si $(n-j+1)$ éléments appartiennent à K

On a $d(A_j) \subset A_j$, donc il s'agit bien d'un complexe filtré.

Dans le cas où $K \lhd G$ est un sous-groupe distingué, on a une autre filtration (A_j^*) de A :

$$A_j^* = A \quad \forall j \leq 0 \quad \text{et} \qquad A_j^* = \sum_{n=0}^{\infty} A_j^* \cap A^n \quad \forall j > 0$$

avec $\quad A_j^* \cap A^n \ni f \quad : \quad f(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ne dépend que de

$\gamma_1, \dots, \gamma_{n-j}$ et des classes $\quad \gamma_{n-j+1}K, \dots, \gamma_n K$.

(et $\quad A_j^* \cap A^n = \{0\}$ pour $j > n$)

<u>Prop 1</u> : On a un iso de suites spectrales entre celles associées à (A_j) et (A_j^*), induit par l'injection $A_j^* \hookrightarrow A_j$.

En restreignant les i premiers arguments à K, on obtient

$$A_j^* \cap A^{i+j} \longrightarrow C^j(G/_K, C^i(K, M)) \quad , \quad f \mapsto {}_j f$$

<u>Thm 1</u> : Cet homomorphisme induit un iso

$$\Phi : \quad E_1^{*j,i} = C^j(G/_K ; H^i(K, M))$$

$f \in A^{i+j-1}$:

$$\delta_i f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_j) \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 \cdot f(\alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_j) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k f(\alpha_1, \dots, \alpha_k \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_j) + (-1)^i f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \dots, \beta_j)$$

$$\partial_j f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_j) \overset{\text{def}}{=} \beta_1 \cdot f(\beta_1^{-1}\alpha_1 \beta_1, \dots, \beta_1^{-1}\alpha_i \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j)$$

$$+ \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^k f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_k \beta_{k+1}, \dots, \beta_j) + (-1)^j f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_{j-1})$$

$S = (s_1, \dots, s_j) \subset (1, 2, \dots, i+j)$ sous-ensemble ordonné

$S^* = (s_1^*, \dots, s_i^*)$ son complément ordonné

$b_0 = 1, \dots, b_k = \beta_1 \cdots \beta_k \quad$ pour $\quad 1 \leq k \leq j$

$p^* = s_p^* - p \quad$ le nombre d'indices s_q avec $s_q < s_p^*$
$(1 \leq p \leq i)$

$$\nu(S) = \sum_{p=1}^{i} p^*$$

$g \in A^{i+j}$: $\quad g_S(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_j) \overset{\text{def}}{=} g(\gamma_1, \dots, \gamma_{i+j})$

où $\quad \gamma_{s_q} = \beta_q \quad$ et $\quad \gamma_{s_{p^*}} = b_{p^*}^{-1} \alpha_p b_{p^*}$

$$g_j = \sum_S (-1)^{\nu(S)} g_S$$ où S parcourt les sous-ens. ordonnés de j éléments dans $(1, \dots, i+j)$.

<u>Exemple</u> : $\quad i = 1$, j qcq.

$$g_j = \sum_S (-1)^{\nu(S)} g_S ,$$ S sous-ens. ordonnés de j éléments de $(1, \dots, j+1)$

$b_0 = 1$, $b_1 = \beta_1$, ..., $b_j = \beta_1 \dots \beta_j$

$$\Longrightarrow \quad g_j(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_j) = \pm g(\beta_1, \dots, \beta_j, (\beta_1 \dots \beta_j)^{-1} \alpha (\beta_1 \dots \beta_j)) \pm \dots \pm g(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_j)$$

Hochschild et Serre montrent avec ces notations l'<u>identité</u> :

<u>Prop 2</u> : $\quad f \in A^{i+j-1}$: $\quad (df)_j = \delta_i(f_j) + (-1)^i \partial_j(f_{j-1})$.

Cette identité leur sert à identifier la différentielle d_1 de la suite spectrale, et ils obtiennent :

<u>Thm 2</u> : l'iso ϕ du Thm 1 induit un isomorphisme

$$E_2^{*\, j,i} = H^j(G/K ; H^i(K, M))$$

Traduction en la première suite spectrale :

$f \in A_j \cap A^{i+j}$, $df \in A_{j+1}$: $(df)_j \in A_{j+1}$ et $f_{j-1} \in A_j$

$\overset{\text{Prop 2}}{\Longrightarrow}$ $\quad \delta_{i+1}(f_j)(\sigma_1, \dots, \sigma_{i+1}, \gamma_1, \dots, \gamma_j) = 0$

restriction des premiers $(i+1)$ arguments à K

On définit $f_j' \in C^j(G; C^i(K, M))$: $\quad f_j'(\gamma_1, \dots, \gamma_j)(\sigma_1, \dots, \sigma_i) \overset{\text{def}}{=} f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \gamma_1, \dots, \gamma_j)$

$$\Longrightarrow \quad f_j' \in C^j(G; Z^i(K, M)).$$

Prop 3 l'homomorphisme $f \mapsto f_j'$ de A_j dans $C^j(G, C^\bullet(K,M))$ induit un isomorphisme de E_1 avec $C^\bullet(G/_K ; H^\bullet(K,M))$. Le E_2 est alors la coh. $H^\bullet(G/_K ; H^\bullet(K,M))$

Supposons maintenant $m > 1$ et $H^n(K,M) \overset{(*)}{=} 0 \quad \forall n = 2, \dots, m$. (cf démo Thm 3). On a pour la suite spectrale

$$\forall r > \max(j, i+1) : \quad E_r^{j,i} = E_\infty^{j,i} \quad \text{et}$$

$$E_\infty^{j,i} \cong H^{i+j}(A)_j / H^{i+j}(A)_{j+1} \quad \text{où}$$

$H(A)_j$ est l'image de $H(A_j)$ dans $H(A)$.

l'hypothèse (*) entraîne $E_r^{j,i} = 0 \quad \forall i = 2, \dots, m$ et $r \geq 2$.
Ceci s'applique donc à $E_\infty^{j,i}$, et on a alors

$$H^m(G,M)_{m-i} = H^m(G,H)_{m-i+1} \quad \forall i = 2, \dots, m$$

Par suite $$H^m(G,M) = H^m(G,M)_{m-1} = E_r^{m-1,1} \quad \text{pour } r > 2$$

$$\Longrightarrow \quad H^m(G,M) = E_3^{m-1,1}$$

Par ailleurs, $d_2 : E_2^{m-3,2} \to E_2^{m-1,1}$ est zéro, car $E_2^{m-3,2} = 0$,
donc
$$E_3^{m-1,1} = \ker\left(d_2 : E_2^{m-1,1} \to E_2^{m+1,0}\right)$$

On a donc un morphisme canonique (l'inclusion !)

$$H^m(G,M) = \ker(d_2) \hookrightarrow E_2^{m-1,1} = H^{m-1}(G/_K ; H^1(K,M))$$

Ceci donne le <u>morphisme de Gysin</u>

$$\pi_\# : H^{p+1}(\bar{A}_n ; H^{\otimes(p+1)}) \longrightarrow H^p(\mathrm{Aut}(F_n) ; H^* \otimes H^{\otimes(p+1)})$$

avec $G = \bar{A}_n = F_n \rtimes \mathrm{Aut}(F_n)$, $K = F_n$, $G/_K = \mathrm{Aut}(F_n)$
$M = H^{\otimes(p+1)}$ et $H^1(F_n ; H^{\otimes(p+1)}) = \mathrm{Hom}(H, H^{\otimes(p+1)}) = H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}$

Cohomologie des groupes libres

(voir par ex. [Weibel] § 6.2, Cor. 6.2.7 p. 169)

Prop : G le groupe libre sur l'ensemble X. Alors l'idéal d'augmentation J de $\mathbb{Z}G$ est un $\mathbb{Z}G$-module libre de base $Y = \{ x-1 \mid x \in X \}$.

Cor. G le groupe libre sur l'ensemble X. Alors $\mathbb{Z}$ admet comme résolution $\mathbb{Z}G$-libre la suite d'augmentation

$$0 \to J \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$$

Donc $\quad H_n(G; A) = H^n(G, A) = 0 \quad \forall n \neq 0, 1 \quad$ et

$$H_0(G; \mathbb{Z}) = H^0(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} .$$

Le théorème des coefficients universels

(par ex. [Weibel] p. 89 Thm 3.6.5)

Thm : $\forall n \geq 1$ et M un $\mathbb{Z}G$-module trivial, il existe une suite exacte (non canoniquement scindée)

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G), M) \to H^n(G; M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(G), M) \to 0$$

En particulier pour $n = 1$:

$$H_0(G) = \mathbb{Z} \quad \text{et donc} \quad H_0(G; R) = R$$

R-module libre !

$$\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_0(G; R), M) = 0$$

Ainsi, on a $\quad H^1(G; M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(G); M)$

pour tout groupe G et tout G-module trivial M.