Groupes libres et développements de Magnus

Jacques Darné

9 octobre 2014

Résumé

Ce premier exposé de groupe de travail sera fondé sur les trois premières sections de l'article *Cohomological aspects of Magnus expansions* de N. Kawazumi ([Kaw06]) ainsi que sur les travaux de T. Satoh (cf. par exemple [Sat12b] ou [Sat12a]). On commencera par une introduction à la théorie classique des suites fortement centrales et algèbres de Lie associées sur un groupe G quelconque, en introduisant quelques exemples classiques, dont la filtration d'Andreadakis sur $\mathrm{Aut}(G)$. On présentera ensuite dans ce cadre le morphisme de Johnson, qui permet notamment de déterminer IA_n^{ab} $(= H_1(IA_n))$. Dans un deuxième temps, on introduira l'algèbre de Magnus, qui permet de faire des calculs sur le groupe libre à partir les développements de Magnus et des applications de Johnson suivant Kawazumi.

Table des matières

1 Algèbre de Lie associée à une suite fortement centrale

1.1 Un peu de théorie des groupes

Soit G un groupe. On notera les actions par conjugaison de G sur lui-même par :

$$\begin{cases} x^y := y^{-1}xy & \text{(action à droite)} \\ {}^y x := yxy^{-1} & \text{(action à gauche).} \end{cases}$$

Définition 1.1.1 *Le* commutateur *de deux éléments x et y de G est donné par :*

$$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}.$$

Le sous-groupe engendré par tous les commutateurs est appelé groupe dérivé *de G.*

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes, où x, y et z désigne des éléments de G :

Proposition 1.1.1 *Si $\varphi : G \longrightarrow H$ est un morphisme, alors :*

$$\begin{cases} \varphi\left([x, y]\right) = [\varphi x, \varphi y], \\ \varphi(x^y) = (\varphi x)^{\varphi y}. \end{cases}$$

Proposition 1.1.2
- $[x, x] = 1,$
- $[x, y]^{-1} = [y, x],$
- $[x, yz] = [x, y]\left({}^y[x, z]\right),$
- $[[x, y], {}^y z] \cdot [[y, z], {}^z x] \cdot [[z, x], {}^x y] = 1.$
- $\left[[x, y^{-1}], z^{-1}\right]^x \cdot \left[[z, x^{-1}], y^{-1}\right]^z \cdot \left[[y, z^{-1}], x^{-1}\right]^y = 1$

Les deux dernières formules sont deux formulations de l'*identités de Witt-Hall.*

Si A et B sont deux parties de G. On note $[A, B]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs de la forme $[a, b]$ avec $(a, b) \in A \times B$. En particulier, si A et B sont symétriques (si par exemple ce sont des sous-groupes), la deuxième formule ci-dessus donne :

$$[A, B] = [B, A].$$

Le *groupe dérivé* de G est par définition $[G, G]$. Il est caractéristique dans G (*i.e.* stable par tout endomorphisme) par 1.1.1, et $G/[G, G]$ est l'abélianisation de G, notée G^{ab}.

Définition 1.1.2 *La* suite centrale descendante *de G, notée $\Gamma(G)$, Γ_G ou simplement Γ, est la suite de sous groupes de G donnée par :*

$$\begin{cases} \Gamma_1 := G, \\ \Gamma_{k+1} := [G, \Gamma_k]. \end{cases}$$

Cette suite jouera un rôle fondamental dans la suite.

L'identité de Witt-Hall a pour corollaire le lemme suivant, très utile :

Lemme 1.1.1 (des trois sous-groupes) *Soient A, B et C trois sous-groupes d'un groupe G. Si deux des groupes suivants sont triviaux, le troisième l'est aussi :*
- $[A, [B, C]]$,
- $[B, [C, A]]$,
- $[C, [A, B]]$.

De manière équivalente, l'un d'entre eux est inclus dans la clôture normale de la réunion des deux autres.

On rappelle que la clôture normale $\mathcal{N}(A)$ d'un partie A de G est l'intersection des sous-groupes normaux de G contenant A. L'équivalence se voit en appliquant le lemme dans G/N, où N est la clôture normale considérée.

Ce lemme peut en particulier s'appliquer lorsque A, B ou C sont des sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$, les autres étant des sous-groupes de G. On considère en effet le groupe :

$$G \rtimes \mathrm{Aut}(G).$$

On rappelle que ce groupe a pour ensemble sous-jacent $G \times \mathrm{Aut}(G)$ et que le produit y est défini par :

$$(g, \sigma) \cdot (h, \tau) := (g\sigma(h), \sigma\tau).$$

On identifie G et $\mathrm{Aut}(G)$ aux sous-groupes $G \times 1$ et $1 \times \mathrm{Aut}(G)$ de $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$. Avec cette identification, on peut définir le commutateur d'un automorphisme avec un élément du groupe :

$$[\sigma, g] = \sigma(g)g^{-1}.$$

Remarquons que $[\mathrm{Aut}(G), G] \subseteq G$.

1.2 Suites fortement centrales, filtration d'Andreadakis

La théorie des suites fortement centrales doit beaucoup à M. Lazard, dont on pourra consulter le travail classique [Laz54].

Définition 1.2.1 *Soit G un groupe. Une* suite fortement centrale *de G (aussi appelée* N-série *dans la littérature) est une filtration*

$$G = N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_i \supseteq \cdots$$

de G par des sous-groupes vérifiant :

$$[N_i, N_j] \subseteq N_{i+j}.$$

Notons que l'indexation doit commencer à $G = N_1$. En particulier, $[G, N_i] \subseteq N_{i+1} \subseteq N_i$, ce qui signifie exactement que les N_i sont *normaux* dans G.

Remarquons que par une récurrence immédiate, $N_i \supseteq \Gamma_i(G)$ pour tout $i \geqslant 1$. En fait :

Proposition 1.2.1 *La filtration centrale Γ_G est fortement centrale :*

$$[\Gamma_i, \Gamma_j] \subseteq \Gamma_{i+j}.$$

Ceci se montre par récurrence à partir du lemme des trois sous-groupes 1.1.1. On montre par récurrence sur i le résultat pour tout j.

Pour $i = 0$, c'est la définition de la suite centrale descendante (car $G = \Gamma_1$). Supposons qu'on ait le résultat au rang $i-1$ (pour tout j). Alors, par le lemme des trois sous-groupes :

$$\begin{aligned}
[\Gamma_i, \Gamma_j] = [[\Gamma_{i-1}, G], \Gamma_j] &\subseteq \mathcal{N}\left([\Gamma_{i-1}, [G, \Gamma_j]] \cup [G, [\Gamma_{i-1}, \Gamma_j]]\right) \\
&\subseteq \mathcal{N}\left([\Gamma_{i-1}, \Gamma_{j+1}] \cup [G, \Gamma_{i-1+j}]\right) \\
&\subseteq \mathcal{N}\left(\Gamma_{i+j} \cup \Gamma_{i+j}\right) = \Gamma_{i+j} \lhd G.
\end{aligned}$$

Un autre exemple de filtration fortement centrale sur un groupe quelconque G (que l'on mentionne pour la culture générale, mais qu'on n'utilisera pas ici) est la *suite de dimension* donnée par :

$$D_{i,\Bbbk} := G \cap \left(1 + (I_{\Bbbk}G)^i\right),$$

où $I_{\Bbbk}G$ est l'idéal d'augmentation dans l'algèbre du groupe $\Bbbk G$. Notons que ces groupes dépendent de $\Bbbk$. Le lecteur intéressé pourra consulter [Pas79] pour une étude de ces filtrations.

On introduit à présent une filtration naturelle sur $\mathrm{Aut}(G)$:

Définition 1.2.2 *Le* filtration d'Andreadakis *sur* $\mathrm{Aut}(G)$ *est donnée par :*

$$\mathcal{A}_k(G) := \ker\left(\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G/\Gamma_{k+1}(G))\right).$$

La flèche canonique

$$\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G/\Gamma_{k+1}(G))$$

est donnée par le passage au morphisme induit : si φ est un automorphisme de G, φ et φ^{-1} stabilisent les $\Gamma_i(G)$ (qui sont caractéristiques dans G), donc φ induit par passage au quotient un endomorphisme de $G/\Gamma_{k+1}(G)$.

Ainsi, $\mathcal{A}_k$ est formé des automorphismes qui induisent l'identité sur $G/\Gamma_{k+1}(G)$. En particulier, on pose :

$$IA_G := \mathcal{A}_1.$$

C'est le groupe des automorphismes qui induisent l'identité sur l'abélianisation de G.

Proposition 1.2.2 *Pour tous $k, l \geqslant 1$:*

- $[\mathcal{A}_k, \Gamma_l] \subseteq \Gamma_{k+l}$,
- $[\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_l] \subseteq \mathcal{A}_{k+l}$

Les commutateurs de la première assertion sont définis dans $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$, comme à la fin du paragraphe 1.1. La seconde assertion assure que $\mathcal{A}$ est une suite fortement centrale de $\mathcal{A}_1 = IA_G$.

La démonstration de cette proposition découle du lemme des trois sous-groupe et de la remarque évidente suivante :

$$\mathcal{A}_k = \{\ \sigma \in \mathrm{Aut}(G)\ |\ [\sigma, G] \subseteq \Gamma_{k+1}(G).\ \}$$

Ainsi, la première assertion est vraie pour $l = 1$ puis se montre par une récurrence sur l semblable à la démonstration de 1.2.1. La seconde s'en déduit alors directement avec le lemme des trois sous-groupes : il suffit en effet de montrer que

$$[[\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_l], G] \subseteq \Gamma_{k+l+1}.$$

En particulier, $\mathcal{A}_k(G)$ contient $\Gamma_k(IA_G)$.

Conjecture 1 (Andreadakis)

$$\forall k,\ \mathcal{A}_k = \Gamma_k(IA_G).$$

1.3 Algèbres de Lie associées, morphisme de Johnson

Soit $G = N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_k \supseteq \cdots$ une filtration fortement centrale d'un groupe G. La condition $[G, N_i] \subseteq N_i$ est équivalente à la normalité de N_i dans G. Considérons le quotient $\mathcal{L}_i(N) := N_i/N_{i+1}$. Il est abélien car pour $i > 1$:

$$[N_i, N_i] \subseteq N_{2i} \subseteq N_{i+1}.$$

On pose alors :

$$\mathcal{L}(N) := \bigoplus_{i\geqslant 1} \mathcal{L}_i(N).$$

Le commutateur dans G définit par passage au quotient un crochet :

$$[,] : \mathcal{L}_i(N) \times \mathcal{L}_j(N) \longrightarrow \mathcal{L}_{i+j}(N).$$

Remarquons que l'action de G induite par la conjugaison sur N_i/N_{i+1} est triviale car si $x \in N_i$ et $g \in G$,

$$^{g}x = gxg^{-1}x^{-1}x = [g,x]x \equiv x \pmod{N_{i+1}}.$$

En utilisant cette remarque, on vérifie facilement à partir de 1.1.2 que le crochet est bilinéaire alterné, et vérifie l'identité de Jacobi. Son extension par bilinéarité $\mathcal{L}(N)$ définit ainsi une structure d'algèbre de Lie graduée sur $\mathcal{L}(N)$.

On considère $\mathcal{SFC}$ la catégorie des suites fortement centrales, obtenue comme sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes filtrés. Elle est munie d'un foncteur d'oubli vers les groupes, donné par :

$$N \longmapsto N_1.$$

$\mathcal{L}$ définit un foncteur depuis $\mathcal{SFC}$ vers les $\mathbb{Z}$-algèbres de Lie gradués.

$\Gamma : G \longrightarrow \Gamma_G$ définit un foncteur de $\mathcal{G}rp$ dans $\mathcal{SFC}$. On notera encore $\mathcal{L}$ pour la composée $\mathcal{L} \circ \Gamma$:

$$\mathcal{L}(G) := \mathcal{L}(\Gamma_G).$$

Proposition 1.3.1 *$\mathcal{L}(G)$ est* engendrée en degré 1*, c'est-à-dire qu'elle est engendrée, comme algèbre de Lie, par $\mathcal{L}_1(G) = G^{ab}$. En particulier, si G est de type fini, chaque $\mathcal{L}_n(G)$ l'est aussi.*

En effet, par définition, $\Gamma_k(G)$ est engendré par les k-commutateurs d'éléments de G, donc $\Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$ est engendré par les k-crochets d'éléments de $G/\Gamma_2(G)$, par définition du crochet.

Examinons à présent les actions de $\mathrm{Aut}(G)$ sur les différentes algèbres de Lie que nous venons de définir.

Soit un groupe H agissant par automorphismes de groupes préservant la filtration (N_i) sur $G = N_1$. Ceci équivaut à dire que H agit sur $N = (N_i)$ par automorphismes de $\mathcal{SFC}$. Alors par fonctorialité de $\mathcal{L}$, on obtient une action de H sur $\mathcal{L}(N)$, par automorphismes d'algèbres de Lie graduées.

Par exemple, l'action canonique de $\mathrm{Aut}(G)$ sur G préserve la filtration centrale descendante de G, donc induit une action de $\mathrm{Aut}(G)$ sur $\mathcal{L}(G)$. Le noyau de cette action est donné par :

$$\left\{\ \varphi \in \mathrm{Aut}(G) \ \middle|\ \forall k,\ \forall x \in \Gamma_k(G),\ \Gamma_{k+1} \ni \varphi(x)x^{-1} = [\varphi, x]\ \right\} = IA_G,$$

Donc cette action se factorise en une action fidèle de $\mathrm{Aut}(G)/IA_G$ ($\leqslant GL(G^{ab})$) sur $\mathcal{L}(G)$.

$\mathrm{Aut}(G)$ agit aussi par conjugaison sur lui-même. Comme les $\mathcal{A}_k$ sont normaux dans $\mathrm{Aut}(G)$ par définition, cette action stabilise IA_G ainsi que sa filtration $\mathcal{A}$. Elle induit donc une action sur $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, dont la restriction à IA_G est triviale (cf. la remarque générale ci-dessus : l'action de N_1 par conjugaison sur l'algèbre de Lie d'une filtration fortement centrale N est toujours triviale). Cette fois encore, on obtient une action de $\mathrm{Aut}(G)/IA_G$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

De même, l'action de $\mathrm{Aut}(G)$ par conjugaison sur IA_G préserve la filtration Γ_{IA_G}, ce qui premet de construire une action de $\mathrm{Aut}(G)/IA_G$ sur $\mathcal{L}(IA_G)$, dont la restriction à IA_G est triviale.

Considérons à présent $G \rtimes IA_G \subseteq G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$. Le groupe G est muni de la filtration fortement centrale Γ_G, et IA_G de la filtration d'Andreadakis associée. La relation de compatibilité donnée en 1.2.2 permet de montrer que le crochet sur $G \rtimes IA_G$ induit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{L}(G) \oplus \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

De plus, 1.2.2 donne directement :

$$[\mathcal{L}(G), \mathcal{L}(\mathcal{A})] \subseteq \mathcal{L}(G).$$

$\mathrm{Aut}(G)$ agit sur $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ par l'action canonique sur G et l'action par conjugaison sur lui-même :

$$\varphi \cdot (x, \sigma) := (\varphi x, {}^{\varphi}\sigma).$$

Il est facile de vérifier que c'est une action par automorphismes de groupes, qui préserve les sous-groupes $G \times 1$ et $1 \times \mathrm{Aut}(G)$. Par ce qu'on a vu ci-dessus, elle préserve les filtrations considérées sur ces facteurs. Cette action induit l'action diagonale sur $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{L}(G)$, qui est par conséquent une action par automorphisme d'algèbres de Lie. De plus, elle se factorise en une action de $\mathrm{Aut}(G)/IA_G$.

Nous sommes à présent en mesure de définir le *morphisme de Johnson* :

Définition 1.3.1 *Le* morphisme de Johnson *est le morphisme d'algèbres de Lie :*

$$\tau : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(\mathcal{L}(G)) \\ \sigma & \longmapsto & \mathrm{ad}_\sigma |_{\mathcal{L}(G)}. \end{cases}$$

$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{End}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$ désigne la sous-algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire des endomorphismes d vérifiant :

$$d([x, y]) = [dx, y] + [x, dy]$$

et ad désigne la représentation adjointe :

$$\mathrm{ad}_x(y) := [x, y],$$

qui est à valeurs dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ par l'identité de Jacobi.

Lemme 1.3.1 *τ est injectif et $\mathrm{Aut}(G)/IA_G$-équivariant.*

Soit en effet $\sigma \in \mathcal{A}_l$, représentant un élément $\bar{\sigma}$ de $\mathcal{L}_l(\mathcal{A})$.

$$\tau(\bar{\sigma}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall k,\ \forall x \in \Gamma_k(G),\ [\sigma, x] \in \Gamma_{k+l+1}(G).$$

En prenant $k = 1$, ceci implique $\sigma \in \mathcal{A}_{l+1}$, donc $\bar{\sigma} = 0$. D'où l'injectivité de τ.

Montrons l'équivariance. Comme $\mathrm{Aut}(G)/IA_G$ agit sur $\mathcal{L}(G)$ par automorphismes de Lie, $\mathrm{Der}(\mathcal{L}(G))$ est une sous-$\mathrm{Aut}(G)/IA_G$-représentation de $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{L}(G))$ (avec l'action habituelle par conjugaison sur $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{L}(G))$). On écrit :

$$(\varphi \cdot \tau(\sigma))(x) = \varphi \cdot [\sigma, \varphi^{-1}x] = [{}^{\varphi}\sigma, x] = \tau({}^{\varphi}\sigma)(x).$$

Remarquons qu'on peut faire exactement la même construction en remplaçant la filtration $\mathcal{A}$ par la filtration Γ_{IA_G}. En effet, puisque $\Gamma_k(IA_G) \subseteq \mathcal{A}_k$ pour tout k, Γ_{IA_G} vérifie les propriétés énoncées pour $\mathcal{A}$ dans 1.2.2.

On munit ainsi $\mathcal{L}(G) \oplus \mathcal{L}(IA_G)$ d'une structure d'algèbre de Lie, munie d'un morphisme canonique i_* vers $\mathcal{L}(G) \oplus \mathcal{L}(\mathcal{A})$. On définit aussi un morphisme de Johnson τ', qui se factorise à travers τ :

$$\tau' : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\Gamma_{IA_G}) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(\mathcal{L}(G)) \\ \sigma & \longmapsto & \mathrm{ad}_\sigma|_{\mathcal{L}(G)} \end{array} \right.$$

Evidemment, $\tau' = \tau \circ i_*$. τ' est encore équivariante, mais elle n'est injective que si la conjecture d'Andreadakis est vraie sur G (si $i_* = 1$).

1.4 Cas des groupes libres, détermination de IA_n^{ab}

Dans le cas où $G = F_n = \langle x_1, ..., x_n | \ \rangle$ est un groupe libre, on note $H = G^{ab}$. On admettra pour ce paragraphe le théorème suivant, qui sera démontrée dans la seconde partie de l'exposé (cf. 2.1.1) :

Théorème 1.4.1 *$\mathcal{L}(F_n)$ est l'algèbre de Lie libre sur $H = G^{ab} = \mathcal{L}_1(F_n)$.*

Notons qu'on parlera indifféremment de l'algèbre de Lie sur $X = \{x_1, ..., x_n\}$ ou sur $H = \Bbbk^X$. C'est l'algèbre de Lie, notée $\mathfrak{L}X$ ou $\mathfrak{L}H$, qui vérifie la propriété universelle suivante : *Pour toute application f de X vers une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (ou de manière équivalente pour toute application $\Bbbk$-linéaire de H*

vers $\mathfrak{g}$), il existe une unique extension de f en un morphisme de $\mathfrak{L}X$ dans $\mathfrak{g}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathfrak{g}. \\ \mathfrak{L}X \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{L}H$ peut être décrite explicitement comme la sous-algèbre de Lie de l'algèbre tensorielle TH engendrée par H. Ceci en fait une algèbre de Lie graduée (la graduation est aussi celle de $\mathcal{L}(F_n)$) et permet par exemple de décrire $\mathfrak{L}_2H$:

$$\mathfrak{L}_2H = \Lambda^2 H.$$

C'est en effet le sous-module de $H^{\otimes 2}$ engendré par les $[x,y] = x \otimes y - y \otimes x$, qui est en fait libre sur les $[x_i, x_j]$ (i<j).

On peut aussi décrire l'algèbre des dérivations de $\mathfrak{L}H$ explicitement. On peut en effet montrer facilement (cf. par exemple [Reu03]) que toute application linéaire de H dans $\mathfrak{L}H$ se prolonge de manière unique en une dérivation de $\mathfrak{L}H$.

On en déduit qu'en posant :

$$\mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}H) = \{\ d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{L}H) \mid d(H) \subseteq \mathfrak{L}_{k+1}H\ \},$$

on a :

$$\mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}H) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, L_{k+1}H) \cong H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{L}_{k+1}H,$$

et de plus :

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{L}H) \cong \bigoplus_k \mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}H).$$

Le morphisme de Johnson est un morphisme gradué :

$$\tau = \bigoplus_k \tau_k : \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \bigoplus_k (\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+1} \longrightarrow \bigoplus_k H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{L}_{k+1}H$$

Lorsque $G = F_n$, le morphisme $\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G^{ab})$ (dont IA_G est le noyau) est surjectif, donc (en notant IA_n pour IA_{F_n}) :

$$\mathrm{Aut}(F_n)/IA_n \cong \mathrm{GL}(H).$$

La surjectivité se voit en relevant les générateurs usuels de $\mathrm{GL}(H) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ en des éléments de $\mathrm{Aut}(F_n)$:

$$\begin{array}{ccc} T_{ij} : x_t \mapsto \begin{cases} x_i + x_j & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon} \end{cases} & & \tilde{T}_{ij} : x_t \mapsto \begin{cases} x_i x_j & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon} \end{cases} \\ & \text{se relève en} & \\ D_i : x_t \mapsto \begin{cases} -x_i & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon} \end{cases} & & \tilde{D}_i : x_t \mapsto \begin{cases} x_i x_j & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

$\tilde{T}_{ij}$ et $\tilde{D}_i$ envoient une base de F_n sur une autre base de F_n, donc sont dans $\mathrm{Aut}(F_n)$.

Ainsi, dans le cas du groupe libre, les actions considérées plus haut sont des actions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. De plus, l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}H) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, H^{\otimes k+1})$ est bien l'action canonique (c'est-à-dire que l'inclusion est GL_n-équivariante pour les actions canoniques des deux côtés) : il s'agit en effet de l'action par conjugaison par les actions canoniques à la source et au but.

Proposition 1.4.1 *$\tau_1 : IA_n \longrightarrow H^* \otimes \Lambda^2 H$ induit un isomorphisme ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$)-équivariant) :*

$$\bar{\tau}_1 : IA_n^{ab} \cong H^* \otimes \Lambda^2 H.$$

On admettra que IA_n est de type fini, engendré par les générateurs :

$$K_{ij} : x_t \longmapsto \begin{cases} x_j x_i x_j^{-1} & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad K_{ijk} : x_t \longmapsto \begin{cases} x_i [x_j, x_k] & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que ce système est redondant : $K_{ii} = K_{ijj} = 1_{F_n}$ et $K_{ijk} = K_{ikj}^{-1}$, donc on peut se limiter à $i \neq j$ pour les premiers, et $j < k$ pour les seconds.

Calculons $\tau_1(K_{ij})$:

$$\tau_1(K_{ij})(x_t) = [K_{ij}, x_t] = K_{ij}(x_t) x_t^{-1} = \begin{cases} x_j x_i x_j^{-1} x_i^{-1} = [x_i, x_j] & \text{si } t = i \\ x_t x_t^{-1} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\tau_1(K_{ij}) = x_i^* \otimes [x_i, x_j] \in H^* \otimes \Lambda^2 H.$$

Un calcul similaire donne :

$$\tau_1(K_{ijk}) = x_i^* \otimes [x_j, x_k] \in H^* \otimes \Lambda^2 H.$$

$\bar{\tau}_1$ envoie ainsi un ensemble de générateurs de IA_n^{ab} sur une base de $H^* \otimes \Lambda^2 H$ (qui est $\mathbb{Z}$-libre). Il admet donc un inverse, que l'on construit en envoyant la base de $H^* \otimes \Lambda^2 H$ sur les générateurs correspondants de IA_n^{ab}.

2 Développements de Magnus

2.1 Algèbre de Magnus, complété de l'algèbre du groupe libre

On considère *la $\mathbb{Z}$-algèbre tensorielle* sur H :

$$TH = \bigoplus_{k \geqslant 0} H^{\otimes k}.$$

On rappelle qu'elle est munie du produit de concaténation, qu'elle est graduée (par k) et que c'est la $\mathbb{Z}$-algèbre associative (unitaire) libre sur H, au sens où si A est une algèbre associative (unitaire) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\mathbb{Z}}}(TH, A).$$

Autrement dit, toute application linéaire de H dans A se prolonge de manière unique en un morphisme d'algèbres de TH dans A.

Elle est munie d'une filtration par des idéaux T_iH, avec :

$$T_iH := \bigoplus_{k \geqslant i} H^{\otimes k}.$$

Remarquons que T_1H est le noyau de l'augmentation canonique $TH \longrightarrow \mathbb{Z}$ (le morphisme d'algèbres qui envoie H sur 0), et que pour tout i :

$$T_iH = (T_1H)^i,$$

en tant qu'idéaux : c'est l'idéal engendré par les monômes de degré i en les X_j.

On définit *l'algèbre de Magnus* comme le complété de TH par rapport à cette filtration :

$$\widehat{T}H := \varprojlim_{i} \left(TH/T_iH\right).$$

On renvoie à l'annexe A.3 pour les détails de la construction.

Remarquons que la construction est similaire à celle de l'algèbre de séries formelles $\mathbb{Z}[\![T]\!]$. L'algèbre obtenue est par définition l'algèbre de séries formelles en n indéterminées qui ne commutent pas :

$$\widehat{T}H \cong \mathbb{Z}\langle\!\langle X_1, ..., X_n \rangle\!\rangle \cong \prod_{k \geqslant 0} H^{\otimes k}.$$

On écrira souvent un élément $z = (z_k)$ du produit sous la forme :

$$z = \sum_{k \geqslant 0} z_k.$$

$\widehat{T}$ (on omettra souvent ici la mention de H, qui est fixé) est filtré par les idéaux $\widehat{T}_i$, qui sont simplement :

$$\widehat{T}_i = \prod_{k \geqslant i} H^{\otimes k}.$$

Ceux-ci forment une base de voisinages de 0 dans $\widehat{T}$ (cf. A.3.1). On remarquera que $\widehat{T}_i = \widehat{T}_1^i$ (c'est ici encore l'idéal engendré par les monômes de degré i).

On remarque également que $1 + \widehat{T}_1$ est un sous-groupe du groupe des inversibles $\widehat{T}^*$, en vertu d'un calcul classique sur les séries formelles.

Soit un groupe G. On rappelle que *l'algèbre de groupe* $\mathbb{Z}G$ est définie comme le $\mathbb{Z}$-module libre sur G, où la multiplication sur la base G est étendue par bilinéarité. Elle vérifie la propriété universelle suivante : tout morphisme de G dans le groupe A^* des inversibles d'une algèbre associative A s'étend uniquement en un morphisme d'algèbres de $\mathbb{Z}G$ dans A.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d] & A^* \arrow[d] \\ \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, "u^{\mathbb{Z}}"] & A. \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}G$ est une algèbre augmentée avec pour augmentation $\varepsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$, l'application linéaire qui envoie G sur 1. C'est un morphisme d'algèbre de noyau IG, *l'idéal d'augmentation de G (sur $\mathbb{Z}$)*, qui n'est autre que l'idéal (bilatère) engendré par les $g - 1$. On munit $\mathbb{Z}G$ de la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation, IG^k. Le complété pour cette filtration sera noté $\widehat{\mathbb{Z}G}$:

$$\widehat{\mathbb{Z}G} := \lim_{\substack{\longleftarrow \\ k}} \left(\mathbb{Z}G/(IG)^k \right).$$

Proposition 2.1.1 *La correspondance $x_i - 1 \longleftrightarrow X_i$ définit un* isomorphisme *:*

$$\widehat{\mathbb{Z}F_n} \cong \hat{T}H,$$

où $H = F_n^{ab}$. Autrement dit, $\widehat{\mathbb{Z}F_n}$ est une algèbre de séries formelles sur les $x_i - 1$.

On construit les isomorphismes réciproques par propriétés universelles.

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r] \arrow[d, "\theta_0"'] & \mathbb{Z}F_n \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "\theta_0^{\mathbb{Z}}"'] & \widehat{\mathbb{Z}F_n} \arrow[d, dotted, "\widehat{\theta_0^{\mathbb{Z}}}"] \\ 1 + \widehat{T}_1 \arrow[rr] & & \widehat{T}H. \end{tikzcd}$$

On définit θ_0 par $x_i \mapsto 1+X_i$, que l'on étend à F_n par la propriété du groupe libre ($1+\widehat{T}_1$ est un groupe pour la multiplication). Ceci s'étend en un morphisme d'algèbre $\theta_0^{\mathbb{Z}}$ par la propriété universelle de $\mathbb{Z}F_n$. Comme $\theta_0^{\mathbb{Z}}(IF_n) \subseteq \widehat{T}_1$ (puisque $\theta_0^{\mathbb{Z}}(F_n-1) \subseteq \widehat{T}_1$), $\theta_0^{\mathbb{Z}}$ est continu, donc se prolonge en un unique morphisme continu $\widehat{\theta_0^{\mathbb{Z}}}$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[dr, "\kappa"'] & TH \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\kappa^{\mathbb{Z}}"] & \widehat{T}H \arrow[d, "\widehat{\kappa^{\mathbb{Z}}}"] \\ & \mathbb{Z}F_n \arrow[r] & \widehat{\mathbb{Z}F_n}. \end{tikzcd}$$

On définit κ par $X_i \longrightarrow x_i - 1$, qu'on étend par linéarité, puis on l'étend en $\kappa^{\mathbb{Z}}$ par propriété universelle de TH, et $\kappa^{\mathbb{Z}}(H) \subseteq IF_n$, donc $\kappa^{\mathbb{Z}}(T_1) \subseteq IF_n$ (puisque H engendre l'idéal T_1 dans TH) : $\kappa^{\mathbb{Z}}$ est continu, donc se prolonge en $\widehat{\kappa^{\mathbb{Z}}}$

Pour conclure la démonstration de la proposition, il suffit de remarquer que $\widehat{\kappa^{\mathbb{Z}}} \circ \widehat{\theta_0^{\mathbb{Z}}}$ (resp. $\widehat{\theta_0^{\mathbb{Z}}} \circ \widehat{\kappa^{\mathbb{Z}}}$) est un endomorphisme d'algèbre continu de $\widehat{\mathbb{Z}F_n}$ (resp. de $\widehat{T}H$), qui fixe F_n (resp.H), donc est l'identité, par unicité dans les diverses propriétés universelle.

Proposition 2.1.2 $x_i \longmapsto 1+X_i$ *induit un plongement :*

$$\theta_0 : F_n \hookrightarrow 1+\widehat{T}_1.$$

Il faut montrer que le sous-groupe engendré par les $1+X_i$ est libre, autrement dit que :

$$(1+X_{i_1})^{\alpha_1}\cdots(1+X_{i_l})^{\alpha_l} \neq 0 \ \text{ si } \begin{cases} i_j \neq i_{j+1} \\ 0 \neq \alpha_j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Le coefficient de $X_{i_1}^{\beta_1}\cdots X_{i_l}^{\beta_l}$ dans cette expression est :

$$\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_l}{\beta_l}.$$

Soit p premier. On décompose chaque α_j en $\beta_j\gamma_j$ avec β_j une puissance de p et $p \nmid \gamma_j$. Alors :

$$\binom{\alpha_j}{\beta_j} \equiv \gamma_j \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p),$$

car c'est le coefficient de $X_{i_j}^{\beta_j}$ dans :

$$(1+X_{i_j})^{\alpha_j} = (1+X_{i_j})^{\beta_j\gamma_j} \equiv (1+X_{i_j}^{\beta_j})^{\gamma_j} = 1+\gamma_j X_{i_j}^{\beta_j} + \cdots$$

Ainsi, avec ce choix de β_j :

$$\binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_l}{\beta_l} \neq 0.$$

Remarquons que si l'on ne se place pas sur $\mathbb{Z}$, il faut choisir p divisant la caractéristique de l'anneau.

Nous allons à présent démontrer le théorème qui a été énoncé dans la section 1.4 :

Théorème 2.1.1 *$\mathcal{L}(F_n)$ est l'algèbre de Lie libre sur $H = G^{ab} = \mathcal{L}_1(F_n)$.*

Pour cela, nous aurons besoin d'un peu plus de théorie des groupes, principalement de la proposition suivante :

Proposition 2.1.3 *Soit G un groupe. L'application $\alpha : g \longmapsto g - 1$ de G dans $\mathbb{Z}G$ induit un morphisme d'algèbres de Lie graduées :*

$$\alpha_* : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}G),$$

où le gradué est pris par rapport à la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation.

Notons que la structure d'algèbre de Lie sur $\mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}G)$ est induite par sa structure d'algèbre associative graduée, héritée de la structure d'algèbre associative filtrée de $\mathbb{Z}G$. Autrement dit, le crochet est induit par :

$$[x, y] = xy - yx.$$

Montrons d'abord que $\alpha(\Gamma_k(G)) \subseteq IG^k$ par récurrence sur k.
C'est évident pour $k = 1$ puisque $g - 1 \in IG$.
Si l'on suppose l'hypothèse vérifiée au rang $k-1$, soient $g \in \Gamma_k$ et $h \in G$. On écrit :

$$\begin{aligned} [g, h] - 1 &= (gh - hg)g^{-1}h^{-1} \\ &= [g - 1, h - 1]g^{-1}h^{-1} \\ &= [\alpha(g), \alpha(h)]g^{-1}h^{-1} \in [IG^{k-1}, IG] \subseteq IG^k. \end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

On obtient ainsi une application bien définie :

$$\alpha_k : \Gamma_k \longrightarrow IG^k/IG^{k+1}.$$

Cette application est en fait un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned}\alpha_k(gh) &= gh - 1 = (g-1) + (h-1) + (g-1)(h-1)\\ &\equiv \alpha_k(g) + \alpha_k(h) \pmod{IG^{k+1}}.\end{aligned}$$

Comme $\alpha(\Gamma_{k+1}) \subseteq IG^{k+1}$, il se factorise bien en une application linéaire :

$$\alpha_{*,k} : \Gamma_k/\Gamma_{k+1} \longrightarrow IG^k/IG^{k+1},$$

ce qui donne bien une application linéaire graduée :

$$\alpha_* : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}\,G).$$

Il reste à prouver que c'est un morphisme de Lie. Mais on l'a presque déjà fait :

$$\alpha([g,h]) = [g,h] - 1 = [\alpha(g), \alpha(h)]g^{-1}h^{-1}.$$

Il suffit de remarquer que l'action de G par multiplication à droite sur $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}\,G)$ est triviale. En effet, si $x \in IG^k$, on a :

$$xg = x + x(g-1) \equiv x \pmod{IG^{k+1}}.$$

Ainsi, α est un morphisme d'algèbre de Lie, et la proposition est démontrée.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. La proposition précédente qui fournit un morphisme d'algèbres de Lie graduées :

$$\mathcal{L}(F_n) \longrightarrow \mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}\,F_n) = \mathrm{gr}_*\left(\widehat{\mathbb{Z}\,F_n}\right) \cong \mathrm{gr}_*\left(\widehat{T}H\right) = TH.$$

Ce morphisme envoie x_i sur $x_i - 1 \in \mathrm{gr}_*(\widehat{\mathbb{Z}\,F_n})$. Celui-ci est envoyé sur $X_i \in TH$, par définition de l'isomorphisme du milieu (cf. 2.1.1 ci-dessus). C'est donc un morphisme sur la sous-algèbre de Lie engendrée par H de l'algèbre tensorielle TH. Cette sous-algèbre de Lie n'est autre que l'algèbre de Lie libre sur H (cf. par exemple [Reu03]). Et une surjection d'une algèbre de Lie contenant H sur l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{L}H$ qui induit l'identité de H est nécessairement un isomorphisme (l'inverse se construit par propriété universelle). Ceci achève la preuve du théorème.

On peut en déduire davantage. Notamment, $\mathcal{L}(F_n) \longrightarrow \mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}\,F_n)$ est injectif (c'est l'injection canonique de $\mathfrak{L}H$ dans TH. Ce qui a pour corollaire :

Corollaire 2.1.1

$$\forall k,\ \Gamma_k(F_n) = F_n \cap (1 + IF_n^k).$$

Ainsi, la filtration par les groupes de dimension coïncide avec la filtration centrale sur F_n.

A partir de là, on peut montrer :

Proposition 2.1.4 *F_n est* résiduellement nilpotent, i.e. *:*

$$\bigcap_{k\geqslant 1} \Gamma_k(F_n) = 1.$$

Le plongement

$$\theta_0 : F_n \hookrightarrow 1 + \widehat{T}_1 \subseteq \widehat{T}$$

coïncide avec la flèche canonique $F_n \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}G}$, d'après le diagramme de la preuve de 2.1.1. Celle-ci est donc injective. Or, en notant ι la flèche canonique de $\mathbb{Z}F_n$ dans son complété :

$$\iota^{-1}\left(\widehat{IF_n^k}\right) = IF_n^k.$$

On peut alors écrire :

$$\Gamma_k(F_n) = F_n \cap (1 + IF_n^k) = F_n \cap \left(1 + \widehat{IF_n^k}\right) = F_n \cap \left(1 + \widehat{T}_k\right).$$

L'intersection des $\widehat{T}_k$ étant évidemment nulle dans $\widehat{T}$, on a le résultat.

2.2 Automorphismes de l'algèbre de Magnus, développements de Magnus

Notation 2.2.1 *On notera* $\mathrm{Aut}(\widehat{T})$ *pour le sous-groupe de* $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}lg}(\widehat{T})$ *formé des automorphismes qui préservent fortement la filtration par les* $\widehat{T}_k$, i.e. *les automorphismes d'algèbre U tels que :*

$$U(\widehat{T}_k) = \widehat{T}_k.$$

Remaquons que ce sont les automorphismes bi-continus, et que la condition $U(\widehat{T}_k) = \widehat{T}_k$ est équivalente à $U(\widehat{T}_1) = \widehat{T}_1$, puisque $\widehat{T}_k = \widehat{T}_1^k$.

Il existe un critère simple pour identifier les éléments de $\mathrm{Aut}(\widehat{T})$ parmi les endomorphismes d'algèbres de $\widehat{T}$:

Lemme 2.2.1 *Soit $U \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}lg_{\Bbbk}}(\widehat{T})$ préservant la filtration :*

$$U(\widehat{T}_k) \subseteq \widehat{T}_k.$$

$U \in \mathrm{Aut}(\widehat{T})$ si et seulement si le morphisme induit

$$|U| : \widehat{T}_1/\widehat{T}_2 \cong H \longrightarrow H$$

est un automorphisme de H.

Là encore, la condition $U(\widehat{T}_k) \subseteq \widehat{T}_k$ est une condition de continuité, et il suffit de la vérifier pour $k = 1$.

Considérons U_k l'endomorphisme induit par U sur $\widehat{T}/\widehat{T}_{k+1}$ La préservation de la filtration donne que sa matrice (dans la base canonique de $\widehat{T}/\widehat{T}_{k+1}$, ordonnée par degré) est triangulaire par blocs. Par définition de $|U|$, on a :

$$U(x_i) = |U|(x_i) + \varphi(x_i),$$

où φ est une application linéaire de H dans $\widehat{T}_2$.

De plus, U est un morphisme d'algèbres, donc $U(1) = 1$ et :

$$\begin{aligned} U(x_{i_1} \cdots x_{i_k}) &= U(x_{i_1}) \cdots U(x_{i_k}) \\ &= (|U|(x_{i_1}) + \varphi(x_{i_1})) \cdots (|U|(x_{i_k}) + \varphi(x_{i_k})) \\ &\equiv |U|^{\otimes k}(x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \pmod{\widehat{T}_{k+1}} \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de U_k est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & |U| & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & |U|^{\otimes 2} & * & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$$

Comme $|U|$ est un isomorphisme si et seulement si tous les $|U|^{\otimes k}$ (donc les U_k) le sont, on a bien l'équivalence du lemme.

$|\cdot|$ définit un morphisme de groupes $\mathrm{Aut}(\widehat{T}) \longrightarrow \mathrm{GL}(H)$, qui est surjectif et scindé. En effet , une section est donnée par le morphisme :

$$u \in GL(H) \longmapsto \prod_k u^{\otimes k} \in \mathrm{Aut}(\widehat{T}).$$

On note $IA(\widehat{T})$ le noyau de $|\cdot|$. On a ainsi une décomposition en produit semi-direct :

$$\mathrm{Aut}(\widehat{T}) \cong IA(\widehat{T}) \rtimes \mathrm{GL}(H).$$

De plus, $|\cdot|$ définit un morphisme d'anneaux de $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{C}^0}(\widehat{T})$ (les endomorphismes du groupe abélien $\widehat{T}$ qui préservent la filtration, *i.e.* qui sont continus) vers $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(H)$. Les morphismes d'algèbres qui sont envoyés sur l'identité sont des automorphismes par 2.2.1, ce sont donc exactement les éléments de $IA(\widehat{T})$.

La propriété universelle de $\widehat{T}$ permet de prolonger de manière unique les applications linéaires ψ de H vers $\widehat{T}$ en des endomorphismes continus de $\widehat{T}$ pourvu que leur prolongement (unique) à TH soit continu, ce qui équivaut à $\psi(H) \subseteq \widehat{T}_1$. Autrement dit, on a une bijection, donnée par $U \mapsto U|_H$:

$$\mathrm{End}(\widehat{T}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H, \widehat{T}_1\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H, \prod_{k \geqslant 0} H^{\otimes k+1}\right) \cong \prod_{k \geqslant 0} H^* \otimes H^{\otimes k+1},$$

où $\mathrm{End}(\widehat{T})$ désigne les endomorphismes d'algèbres continus de $\widehat{T}$. S'ensuit une description de $IA(\widehat{T})$, qui sont les éléments dont la composante de degré 0 est l'identité de H :

$$IA(\widehat{T}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H, \widehat{T}_2\right) \cong \prod_{k \geqslant 1} H^* \otimes H^{\otimes k+1}.$$

L'isomorphisme s'écrit explicitement $U \mapsto (U - 1_H)|_H$, et fait de $IA(\widehat{T})$ un groupe abélien.

On peut utiliser l'action évidente de $\mathrm{Aut}(\widehat{T})$ sur $1 + \widehat{T}_1$ pour obtenir d'autres plongements de F_n dans $1 + \widehat{T}_1$ à partir de θ_0.

Définition 2.2.1 *Les plongements ainsi obtenus par l'action de $IA(\widehat{T})$ sont appelés* développements de Magnus. *Leur ensemble est noté :*

$$\Theta_n := IA(\widehat{T})\theta_0.$$

θ_0 *est appelé* développement de Magnus standard *(il est noté std par Kawazumi).*

L'isomorphisme :

$$IA(\widehat{T}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \widehat{T}_2),$$

donné par $U \longmapsto \varphi_U = U|_H - 1_H$, permet de décrire précisément l'action des développements de Magnus :

$$U\theta_0(x_i) = U(1 + X_i) = 1 + X_i + \varphi_U(X_i).$$

Ainsi, la donnée de $U\theta_0$ détermine φ_U, donc U : l'action de $IA(\widehat{T})$ sur Θ_n est simple (et transitive par définition). On obtient donc une bijection :

$$\Theta_n \cong IA(\widehat{T}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \widehat{T}_2) \cong \widehat{T}_2^n,$$

qui est simplement donnée par $\theta \longmapsto (\theta(x_i) - 1 - X_i) \in \widehat{T}_2^n$.

Soit $\theta \in \Theta_n$. Remarquons que θ induit un morphisme :

$$F_n \longrightarrow 1 + \widehat{T}_1 \longrightarrow (1 + \widehat{T}_1)/(1 + \widehat{T}_2) \cong H,$$

et que par définition de Θ_n, ce morphisme n'est autre que l'abélianisation ($U\theta_0$ induit $|U|\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_0$).

$\theta = U\theta_0$ se prolonge également en un morphisme $\widehat{\mathbb{Z}F_n} \longrightarrow \widehat{T}$, que l'on note encore θ. Ce n'est autre, par unicité du prolongement, que $U\theta_0^{\mathbb{Z}}$: c'est donc un isomorphisme.

2.3 Applications de Johnson

Dans la décomposition en produit semi-direct donnée ci-dessus :

$$\mathrm{Aut}(\widehat{T}) \cong IA(\widehat{T}) \rtimes \mathrm{GL}(H),$$

la projection sur le premier facteur est donnée par la rétraction ensembliste :

$$U \longmapsto U|U|^{-1},$$

où l'on note encore $|U|$ pour $\prod |U|^{\otimes k}$.

Soit $\theta \in \Theta_n$. Définissons $\theta_* : \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Z}F_n}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\widehat{T})$ par :

$$\gamma \longmapsto {}^{\theta}\gamma = \theta\gamma\theta^{-1}.$$

On dispose également du morphisme de prolongement $\sigma \longmapsto \widehat{\sigma}$ de $\mathrm{Aut}(F_n)$ vers $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Z}F_n})$. On peut alors tracer le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & IA_n \arrow[r] \arrow[dd, dotted, "\tau^\theta|_{IA}"'] & \mathrm{Aut}(F_n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, dotted, "\tau^\theta"'] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
 & & \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Z}F_n}) \arrow[d, "\theta_*"] & & \\
0 \arrow[r] & IA(\widehat{T}) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\widehat{T}) \arrow[r] \arrow[l, dotted, bend right] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[l, bend right] & 0.
\end{tikzcd}$$

L'application de Johnson τ^θ est défini à partir de la rétraction ensembliste décrite ci-dessus, composée avec θ_*. Le carré de gauche est commutatif par définition de θ, choisi pour induit l'identité sur H. Par conséquent, $\tau^\theta|_{IA}$ est bien défini et est un morphisme de groupes.

A Anneaux topologiques et complétion

A.1 complété d'un espace métrique

Soit X un espace métrique. On peut construire un espace métrique complet $\widehat{X}$ et une injection isométrique $\iota : X \hookrightarrow \widehat{X}$ tels que $\iota(X)$ soit dense dans $\widehat{X}$ (cf. par exemple l'excellent livre [Ava96] pour la construction). On dit alors que $(\widehat{X}, \iota)$ (ou, par abus de langage, $\widehat{X}$) est un *complété* de X.

Il vérifie la propriété universelle suivante :

Proposition A.1.1 *Pour toute application uniformément continue f de X dans un espace métrique complet Y, il existe une unique application continue*

$\bar{f}$ *qui fait commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & Y \\ \widehat{X}. \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

En particulier, comme ι est elle-même uniformément continue (elle est isométrique), le complété est caractérisé par une propriété universel, donc est unique : si $\widehat{X}$ et $\widehat{X}'$ sont deux complétés de X, il existe un unique homéomorphisme de $\widehat{X}$ dans $\widehat{X}'$ qui induit l'identité sur X.

A.2 Groupes et anneaux topologique

Un *groupe topologique* est un groupe G muni d'une topologie telle que le produit $(g,h) \longmapsto gh$ et le passage à l'inverse $g \longrightarrow g^{-1}$ soient continus. En particulier, la multiplication à gauche (resp. à droite) par un élément g_0 de G est un homéomorphisme, d'inverse la multiplication par g_0^{-1}. Par conséquent, $(V_i)_{i\in I}$ est un système fondamental de voisinages de 1 dans G, $(g_0V_i)_{i\in I}$ (resp. $(V_ig_0)_{i\in I}$) est un système fondamental de voisinages de g_0.

La multiplication permet donc de comparer les tailles de voisinages de deux éléments distincts. On peut ainsi définir une notion de continuité uniforme, qui coïncidera avec la notion classique si la topologie est définie par une métrique invariante par translation :

Définition A.2.1 *Soit $f : G \longrightarrow H$ une application entre groupes topologique. f est dite* uniformément continue *si :*

$$\forall W \in \mathcal{V}_H(1),\ \exists V \in \mathcal{V}_G(1),\ \forall g \in G,\ f(gV) \subseteq f(g)W,$$

où $\mathcal{V}_X(x)$ désigne l'ensemble des voisinages de x dans X.

On vérifie que l'on obtient une définition équivalente en utilisant la multiplication à droite par les éléments plutôt qu'à gauche (*i.e.* $f(Vg) \subseteq Wf(g)$.

Si l'on remplace H par un espace métrique X, on peut aussi écrire une définition de la continuité uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists W \in \mathcal{V}_G(1),\ \forall g \in G,\ f(gV) \subseteq B(f(g), \varepsilon).$$

Ces définitions sont des cas particuliers de la continuité uniforme entre espaces munis d'une structure uniforme (cf. [Bou71], chap. *II*).

La proposition suivante montre que pour les morphismes de groupes, la continuité se teste en 1 et n'est pas différente de la continuité uniforme.

Proposition A.2.1 *Soit $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes entre groupes topologiques. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *φ est continu en 1.*
- *φ est continu.*
- *φ est uniformément continu.*

Il suffit de montrer que la première implique la dernière : si φ est continue en 1, soit W un voisinage de 1 dans H. Par hypothèse, il existe Vun voisinage de 1 dans G vérifiant $\varphi(V) \subseteq W$. Comme φ est un morphisme, on a bien :

$$\forall g \in G, \varphi(gV) \subseteq \varphi(g)W.$$

A.3 Complétion d'anneaux.

Soit A un anneau (non nécessairement commutatif) muni d'une filtration

$$A = \mathfrak{I}_0 \supseteq \mathfrak{I}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{I}_k \supseteq \cdots$$

par des idéaux (bilatères). On munit A de la topologie $\mathfrak{I}_*$-adique en prenant les $a+\mathfrak{I}_k$ pour base de voisinages de a. Ceci fait de A un anneau topologique : la continuité des opérations résulte de ce que les $\mathfrak{I}_k$ sont des idéaux. Cette topologie est séparée est séparé si et seulement si :

$$\bigcap_k \mathfrak{I}_k = 0$$

Dans ce cas, elle provient d'une métrique (qui n'est qu'une pseudo-métrique sans la condition de séparation) donnée explicitement par :

$$d(x, y) := 2^{-\nu(x-y)},$$

où ν désigne la *valuation* associée à la filtration :

$$\nu(x) := \max \left\{ \; k \in \mathbb{N} \mid \; x \in \mathfrak{I}_k \; \right\}.$$

Remarquons que 2 pourrait être remplacé par n'importe quel nombre dans $]1, \infty[$.

Remarquons que ceci, comme tout ce qui suit, pourrait s'énoncer en replaçant A par un groupe G est les $\mathfrak{I}_k$ par des sous-groupes normaux de G.

A peut alors être complété, et sa complétion $\hat{A}$ est encore un anneau, en étendant par continuité les opérations de A à $\hat{A}$. On peut en fait décrire $\hat{A}$ en termes algébriques :

$$\hat{A} = \varprojlim_k (A/\mathfrak{I}_k).$$

Cette limite projective admet une description concrète comme sous-anneau du produit $\prod_k (A/\mathfrak{I}_k)$:

$$\hat{A} = \varprojlim_k (A/\mathfrak{I}_k) = \left\{ (x_k) \in \prod_k (A/\mathfrak{I}_k) \;\middle|\; \forall\, k,\ x_{k+1} \equiv x_k \pmod{\mathfrak{I}_k} \right\}.$$

Le morphisme canonique

$$\iota : \begin{cases} A \longrightarrow & \hat{A} \\ a \longmapsto & (a \pmod{\mathfrak{I}_k})_k \end{cases}$$

est injectif si et seulement si la condition de séparation ci-dessus est vérifiée.

On munit $\hat{A}$ ainsi de la topologie induite par la topologie produit, ce qui en fait un sous-anneau topologique, et rend ι continu. L'espace sous-jacent est alors la limite inductive des espaces topologiques $A/\mathfrak{I}_k$.

Ceux-ci sont discrets : si

$$\pi_k : A \longrightarrow A/\mathfrak{I}_k$$

désigne la projection canonique, $\pi_k^{-1}(\bar{a}) = a + \mathfrak{I}_k$ est ouvert dans A, donc $\{\bar{a}\}$ est ouvert dans $A/\mathfrak{I}_k$ pour la topologie quotient.

Lemme A.3.1 *Une base de voisinages de* 0 *dans l'anneau topologique* $\hat{A}$ *est donnée par les :*

$$\widehat{\mathfrak{I}_k} = \varprojlim_{l \geqslant k} (\mathfrak{I}_k/\mathfrak{I}_l) \hookrightarrow \hat{A}.$$

Par définition de la topologie produit, puisque les facteurs sont discrets, une base d'ouverts pour le produit est donnée par les :

$$\mathcal{U}_{I,a_I} := \{\ (\bar{x}_k)_k \mid \forall i \in I,\ x_i \equiv a_i \pmod{\mathfrak{I}_i}\ \}$$

pour $I \subseteq \mathbb{N}$ une partie finie et pour tout i dans I, $a_i \in A$ ($\{\bar{a}_i\}$ est un ouvert de $A/\mathfrak{I}_i$).

Se placer sur la limite projective permet de simplifier ces formules. En effet, dans $\hat{A}$, si l'on connaît la coordonnée i_0, ceci détermine les coordonnées pour $i \leqslant i_0$:

$$x_i = x_{i_0} \pmod{\mathfrak{I}_i}.$$

$x_{i_0} \pmod{\mathfrak{I}_i}$ est bien défini car x_{i_0} est défini modulo $\mathfrak{I}_{i_0}$, et $\mathfrak{I}_i \supseteq \mathfrak{I}_{i_0}$.

Ainsi, pour que $\mathcal{U}_{I,a_I} \cap \hat{A}$ soit non-vide, en notant $i_0 = \max I$, il faut que pour $i \leqslant i_0$:

$$a_i \equiv a_{i_0} \pmod{\mathfrak{I}_{i_0}},$$

et alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{I,a_I} \cap \hat{A} = \mathcal{U}_{i_0,a_{i_0}} \cap \hat{A} &= \{ \ (\bar{x}_k)_k \mid \bar{x}_{i_0} = \bar{a}_{i_0} \ \} \\ &= \iota(a_{i_0}) + \{ \ (\bar{x}_k)_k \mid \forall i \leqslant i_0, \ \bar{x}_i = 0 \ \} \\ &= \iota(a_{i_0}) + \widehat{\mathfrak{I}_{i_0}},\end{aligned}$$

avec $\widehat{\mathfrak{I}_{i_0}} := \mathcal{U}_{i_0,0}$:

$$\widehat{\mathfrak{I}_k} = \varprojlim_{l \geqslant k} (\mathfrak{I}_k/\mathfrak{I}_l) \hookrightarrow \hat{A}.$$

La métrique sur A s'étend naturellement en une métrique définissant la topologie de $\hat{A}$: il suffit de prendre celle déterminée par la filtration de $\hat{A}$ par les $\widehat{\mathfrak{I}_{i_0}}$.

Proposition A.3.1 *Muni de cette métrique, $\hat{A}$ est un complété de A pour la topologie $\mathfrak{I}_*$-adique.*

En effet, à partir de la description d'une base de voisinages de a, il est facile de voir que chacune des coordonnées d'une suite de *Cauchy* de $\hat{A}$ est stationnaire, et que la limite prise coordonnée par coordonnée est bien une limite pour la suite. Par conséquent, $\hat{A}$ est complet. De plus, il est facile de vérifier que $\iota(A)$ est dense dans $\hat{A}$.

Remarquons que d'après A.2.1, l'extension unique au complété vaut pour les morphismes d'anneaux *continus* vers un autre anneau topologique, puisque ceux-ci sont uniformément continus.

Le plupart des filtrations que l'on rencontrera seront données par les puissances d'un idéal I de A ($\mathfrak{I}_k = I^k$). Dans ce cas, on dit que A est muni de la *topologie I-adique.*

Par exemple, on munit $\mathbb{Z}$ de la topologie $(\mathbb{Z}\,p)$-adique, que l'on appelle aussi *topologie p-adique.* Les $\mathfrak{I}_k$ sont alors les $p^k\,\mathbb{Z}$, la valuation ν est la valuation p-adique v_p, et on pose :

$$d_p(n,m) = p^{-v_p(n-m)},$$

Autrement dit, deux nombres sont proches si leur différence est divisible par une grande puissance de p. En particulier, la suite des sommes partielles des séries :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k,$$

avec $a_k \in \{0, ..., p-1\}$, est une suite de Cauchy, qui converge dans le complété vers :

$$(a_0, a_0 + a_1 p, ...) \in \varprojlim_k \left(\mathbb{Z}\,/p^k\,\mathbb{Z}\right) =: \mathbb{Z}_p \subseteq \prod_k \mathbb{Z}\,/p^k\,\mathbb{Z}.$$

$\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques, bien connu des arithméticiens. On pourra par exemple consulter à ce sujet l'excellent ouvrage de A.M. Robert ([Rob00]), qui donne entre autres une introduction remarquable aux groupes topologique et leurs complétions.

Un autre exemple, très similaire, est donné par l'anneau des séries formelles. Si $\mathbb{k}$ est un anneau, on munit $\mathbb{k}[X]$ de la filtration donnée par les puissances de $X\mathbb{k}[X]$ (qui ne sont autres que les $X^k\mathbb{k}[X]$). La valuation est la valuation habituelle sur les polynômes, et le complété est l'anneau des séries formelles :

$$\mathbb{k}[\![X]\!] \cong \varprojlim_k \left(\mathbb{k}[X]/X^k\mathbb{k}[X]\right).$$

L'isomorphisme (qui peut servir de définition) envoie une série formelle sur la suite de ses sommes partielles, comme ci-dessus.

Références

[Ava96] Vazgain Avanissian. *Initiation à l'analyse fonctionnelle*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1996.

[Bou71] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.

[Kaw06] Nariya Kawazumi. Cohomological aspects of magnus expansions. *arXiv :math/0505497*, 2006.

[Laz54] Michel Lazard. Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)*, 71 :101–190, 1954.

[Pas79] Inder Bir S. Passi. *Group rings and their augmentation ideals*, volume 715 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

[Reu03] Christophe Reutenauer. Free Lie algebras. In *Handbook of algebra, Vol. 3*, pages 887–903. North-Holland, Amsterdam, 2003.

[Rob00] Alain M. Robert. *A course in p-adic analysis*, volume 198 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[Sat12a] Takao Satoh. On the lower central series of the IA-automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 216(3) :709–717, 2012.

[Sat12b] Takao Satoh. A survey of the johnson homomorphisms of the automorphism groups of free groups and related topics. *arXiv :1204.0876v2*, 2012.