

Club de Maths de l'Université de Nantes

Activités 2017-2018

Séance du 4 octobre 2017

La saison 2017-18 est inaugurée par l'exposé d'un paradoxe en probabilités : on choisit au hasard un cube de côté compris entre 1 et 10 ; la probabilité que son côté soit entre 1 et 7 vaut $\frac{2}{3}$, et elle est donc deux fois supérieure à celle que son côté soit entre 7 et 10, alors que la probabilité que son volume soit entre $1^3 = 1$ et $7^3 = 343$ vaut $\frac{114}{333}$, ce qui est environ deux fois inférieur à la moitié de la probabilité $\frac{219}{333}$ que ce volume soit entre $7^3 = 343$ et $10^3 = 1000$. Nous cherchons collectivement à expliquer le paradoxe ; comme pour la plupart des paradoxes en probas, cela provient de ce que l'on n'a pas précisé ce que signifiait "au hasard" : si l'on met une loi uniforme sur $[1, 10]$ pour le côté du cube, la loi pour le volume n'est pas la loi uniforme sur $[1, 1000]$.

Puis on nous propose les problèmes suivants.

Problème 2017-18(1). Soient m_1, m_2, \dots, m_6 six points de l'espace euclidien de dimension 3. On suppose que les côtés opposés de l'hexagone sont parallèles, soit : $\langle m_1m_2 \rangle \parallel \langle m_4m_5 \rangle$, $\langle m_2m_3 \rangle \parallel \langle m_5m_6 \rangle$, et $\langle m_3m_4 \rangle \parallel \langle m_6m_1 \rangle$. Il s'agit de justifier que les triangles $(m_1m_3m_5)$ et $(m_2m_4m_6)$ ont même aire.

Problème 2017-18(2). Résoudre : $\cos(x) \cos(2x) \cos(3x) > \frac{1}{8}$.

Problème 2017-18(3). Montrer qu'un parallélogramme inscrit dans un cercle est nécessairement un rectangle.

On expose ensuite une preuve du théorème de Viviani (1659) : Dans un triangle équilatéral dont le rayon du cercle inscrit est noté r , la somme des distances d'un point intérieur aux trois côtés vaut $3r$. En effet, si le triangle est noté (xyz) et le point intérieur p , on écrit que l'aire du triangle est la somme des aires des trois triangles (pxy) , (pyz) et (pzx) , qui vaut la somme $S(p)$ des distances aux côtés multipliée par le demi-côté du triangle ; il en résulte que $S(p)$ est indépendante de p , et en prenant p au centre du triangle, que cette somme vaut $3r$. On propose alors d'autres inégalités triangulaires :

Problème 2017-18(4). Dans un triangle dont les rayons des cercles inscrit et circonscrit sont notés respectivement r et R , on a toujours $R \geq 2r$ (inégalité d'Euler), avec $R = 2r$ si et seulement si le triangle est équilatéral.

Problème 2017-18(5). Dans un triangle (xyz) , soient p un point intérieur, et u, v et w ses projections (orthogonales) sur les côtés du triangle. Alors on a toujours $px+py+pz \geq 2(pu+pv+pw)$ (inégalité d'Erdős-Mordell — 1937), avec $px+py+pz = 2(pu+pv+pw)$ si et seulement si le triangle est équilatéral et le point p situé en son centre. De même, on a aussi toujours $px \cdot py \cdot pz \geq 8pu \cdot pv \cdot pw$, avec $px \cdot py \cdot pz = 8pu \cdot pv \cdot pw$ si et seulement si le triangle est équilatéral et le point p situé en son centre.

Comme pour aborder ces problèmes, il faut connaître un peu de géométrie euclidienne, on procède à quelques rappels dans ce domaine : cas d'égalité des triangles, propriété de l'angle inscrit dans un cercle, puissance d'un point par rapport à un cercle.

On termine cette première séance inaugurale de l'année 2017-18 par la démonstration que *Tout triangle est équilatéral* : soit (xyz) le triangle, on va montrer que $xy = xz$, les autres égalités s'obtenant par permutation circulaire sur les sommets. On introduit pour cela le point p intersection de la bissectrice issue du sommet x avec la médiatrice du côté $[yz]$, et on projette ce point en w sur le côté $[xy]$, et en v sur le côté $[xz]$. Les deux triangles (xwp) et (xvp) ont le côté $[xp]$ en commun, et vérifient l'égalité de longueurs $pw = pv$ puisque p est sur la bissectrice ; comme ces triangles sont droits en w et v respectivement, on obtient l'égalité de longueurs $xw = xv$ par le théorème de Pythagore. De la même façon, les deux triangles (pwy) et (pvz) vérifient les égalités de longueurs $pw = pv$ et $py = pz$ car p est sur la bissectrice issue de x et sur la médiatrice de $[yz]$; et là encore comme ces triangles sont droits en w et v respectivement, on obtient l'égalité de longueurs $wy = vz$ par le théorème de Pythagore. On conclut ainsi : $xy = xw + wy = xv + vz = xz$. ■

Problème : où est l'erreur ?

Séance du 11 octobre 2017

On nous présente une solution du problème (3) du 4 octobre : les quatre sommets w, x, y, z du parallélogramme sont à égale distance du centre c du cercle, et donc ce dernier est situé sur les médiatrices des diagonales $[wy]$ et $[xz]$; mais dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leurs milieux, si bien que le point c ne peut être que le point d'intersection des diagonales ; on en déduit que les diagonales sont égales et donc que le parallélogramme est un rectangle. ■

On revient ensuite sur le problème (2) du 4 octobre : en exprimant le produit en fonction de $\cos x$, on obtient que la nouvelle inconnue $X = \cos^2 x$ doit vérifier l'inéquation $X(2X - 1)(4X - 3) > \frac{1}{8}$, ou encore $8X^3 - 10X^2 + 3X - \frac{1}{8} > 0$. Pour résoudre cette inégalité, l'orateur nous explique la méthode de Cardan, mais il est clair que les valeurs numériques ici en jeu ne permettent pas de terminer vraiment le calcul.

Une variante consiste à prendre comme nouvelle inconnue $Y = \cos(2x) = 2X - 1$, ce qui conduit à l'inéquation $Y^3 + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}Y > \frac{1}{8}$ qui n'est pas plus facile à résoudre ; cependant, l'on fait observer que c'est le $\frac{1}{8}$ qui rend les choses difficiles, car si l'on remplace le $\frac{1}{8}$ par $\frac{1}{4}$, on obtient le :

Problème 2017-18(2^{bis}). Résoudre : $\cos(x) \cos(2x) \cos(3x) > \frac{1}{4}$.

Avec le changement d'inconnue ci-dessus, on trouve l'inéquation $0 < Y^3 + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}Y - \frac{1}{4} = (Y^2 - \frac{1}{2})(Y + \frac{1}{2})$. Cette inéquation se résout avec un tableau de signes : elle est vérifiée si et seulement si Y est dans $]-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}[$ ou dans $]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, soit $2x$ dans $]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}[$ ou $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$ ou $]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}[$ modulo 2π , soit encore x dans $]-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}[$ ou $]-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}[$ ou $]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}[$ modulo π . ■

Après cela, on passe au problème (1) du 4 octobre : le produit vectoriel permet de rendre compte du parallélisme par la propriété que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si \vec{u} et \vec{v} sont liés, et permet d'exprimer l'aire d'un triangle (abc) par la quantité $\frac{1}{2} \|\vec{ab} \wedge \vec{bc}\|$. On effectue alors le calcul suivant

$$\begin{aligned} \vec{m_1 m_3} \wedge \vec{m_3 m_5} &= \vec{m_1 m_2} \wedge \vec{m_3 m_5} + \vec{m_2 m_4} \wedge \vec{m_3 m_5} + \vec{m_4 m_3} \wedge \vec{m_3 m_5} = \\ &= \vec{m_1 m_2} \wedge \vec{m_3 m_4} + \vec{m_2 m_4} \wedge (\vec{m_3 m_4} + \vec{m_4 m_6} + \vec{m_6 m_5}) + \vec{m_4 m_3} \wedge \vec{m_4 m_5} = \\ &= \vec{m_2 m_4} \wedge \vec{m_4 m_6} + \vec{m_3 m_4} \wedge \vec{m_2 m_1} + \vec{m_3 m_4} \wedge \vec{m_4 m_2} + \vec{m_3 m_4} \wedge \vec{m_6 m_5} + \vec{m_3 m_4} \wedge \vec{m_5 m_4} = \\ &= \vec{m_2 m_4} \wedge \vec{m_4 m_6} + \vec{m_3 m_4} \wedge \vec{m_6 m_1} = \vec{m_2 m_4} \wedge \vec{m_4 m_6}, \end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité des aires en passant aux (demi-)normes euclidiennes, mais justifie aussi que les deux triangles sont situés dans des plans parallèles. ■

On revient ensuite à la preuve de l'énoncé : *Tout triangle est équilatéral*, et on tombe d'accord pour dire que l'erreur réside dans le fait que l'on a dessiné le point p d'intersection d'une bissectrice et d'une médiatrice à l'intérieur du triangle, alors qu'en réalité, il tombe à l'extérieur. Mais est-ce bien la bonne raison ? (à suivre).

Enfin, on donne le début de la solution du problème (4) du 4 octobre ; mais pris par le temps, on ne termine pas : on y reviendra ultérieurement.

Séance du 18 octobre 2017

On commence par revenir sur la preuve de l'énoncé : *Tout triangle est équilatéral*. En effet, si le point p est à l'extérieur du triangle, on peut quand même le projeter en w et v sur les prolongements des côtés $[xy]$ et $[xz]$, et on obtient les égalités de longueurs $xw = xv$ et $wy = vz$ exactement comme dans la preuve du 4 octobre, mais la conclusion est ici que $xy = xw - wy = xv - vz = xz$, et on a encore prouvé que le triangle est équilatéral.

Alors reposons la question : où est l'erreur ?

On nous fait ensuite un exposé pour démontrer que : π est irrationnel. Supposons en effet que $\pi = p/q$ avec p et $q \in \mathbb{N}^*$, et pour tout entier $n > 0$ considérons le polynôme $p_n(x) = \frac{1}{n!} q^n x^n (\pi - x)^n$. On prétend que toutes les dérivées de p_n en $x = 0$ ou $x = \pi$ sont des nombres entiers : en effet, par symétrie autour de $x = \frac{1}{2}\pi$, il suffit de le montrer en $x = 0$, la formule de Leibniz permet d'écrire que

$$p_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} q^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{d}{dx}\right)^j (x^n) \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j} ((\pi - x)^n),$$

et en $x = 0$ cela vaut 0 si $k < n$ ou si $k > 2n$, et $p_n^{(k)}(0) = q^n \binom{k}{k-n} \pi^{2n-k}$ si $n \leq k \leq 2n$ (car dans la formule, seul le terme pour $j = n$ est alors non nul), ce qui est bien entier dans ce dernier cas puisqu'alors $n \leq k \leq 2n$ entraîne que $q^n \pi^{2n-k} = p^{2n-k} q^{k-n}$ est entier. On pose alors $P_n(x) = p_n(x) - p_n^{(2)}(x) + p_n^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n p_n^{(2n)}(x)$ dont les valeurs en $x = 0$ et $x = \pi$ sont encore entières, et qui permet d'exprimer une primitive de $p_n(x) \sin x$ sous la forme $P_n'(x) \sin x - P_n(x) \cos x$. La fonction $p_n(x) \sin x$ est continue et > 0 sur $]0, \pi[$, et donc

$$0 < \int_0^\pi p_n(x) \sin x \, dx = [P_n'(x) \sin x - P_n(x) \cos x]_0^\pi = P_n(\pi) - P_n(0) \in \mathbb{Z},$$

et par ailleurs, sur $[0, \pi]$ on a la majoration $p_n(x) \leq \frac{1}{n!} q^n \pi^{2n} \leq \frac{1}{n!} p^{2n}$ qui montre que l'entier $I_n = \int_0^\pi p_n(x) \sin x \, dx \in \mathbb{N}^*$ vérifie $I_n \leq \pi \frac{1}{n!} p^{2n}$, ce qui est arbitrairement petit quand on prend n grand. Cela fournit la contradiction qui permet de conclure que π est irrationnel. ■

Un intervenant revient sur la preuve de : *Tout triangle est équilatéral* pour faire remarquer que la preuve ne fonctionne plus si l'un des points w ou v est situé sur le côté du triangle tandis que l'autre n'est situé que sur le prolongement du côté ; et c'est effectivement ce qui se passe toujours (sauf lorsque le triangle est isocèle, auquel cas la bissectrice et la médiatrice sont confondues).

Pour terminer la séance, voici un problème d'arithmétique.

Problème 2017-18(6). Montrer que si p est un nombre premier différent de 2 ou 5, alors il existe un entier n tel que p divise $\sum_{k=0}^n 10^k$.

Séance du 25 octobre 2017

On commence par une solution du problème (6) du 18 octobre : par le petit théorème de Fermat, le nombre premier p divise $10^p - 10 = 90 \sum_{k=0}^{p-2} 10^k$; si p est différent de 2, 3 ou 5, il ne divise pas 90 et il divise donc l'autre facteur ; si $p = 3$, il divise $111 = \sum_{k=0}^2 10^k$; et enfin, si $p = 2$ ou $p = 5$, il ne peut diviser aucune somme $\sum_{k=0}^n 10^k = 1 + 10a$.

On nous donne alors trois nouveaux défis.

Problème 2017-18(7). Soient n points ($n \geq 3$) du plan euclidien non tous alignés sur une même droite. Montrer qu'il existe une droite passant par deux de ces points, mais par deux seulement.

Problème 2017-18(8). On cherche tous les couples d'entiers (m, n) tels que le nombre $A = \frac{n^3 + 1}{mn - 1}$ soit lui aussi entier.

Problème 2017-18(9). Montrer que : $a|b \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n^a - 1 | n^b - 1$.

À la suite de ces défis, nous sommes partis sur une longue discussion autour des notions de mesure et d'intégrale.

On a commencé par le paradoxe consistant à comparer un segment $[AB]$ de longueur 2 avec : le demi-cercle de diamètre $[AB]$ (de longueur π), puis les deux demi-cercles de diamètre $[AC]$ et $[CB]$ où C est le milieu de $[AB]$ (de longueur totale π), [...], avec les 2^n demi-cercles de diamètres $[A_{k-1}A_k]$ pour une subdivision de $[AB]$ en 2^n segments égaux (de longueur totale toujours égale à π), etc. La courbe approche le segment, mais sa longueur n'approche pas celle du segment. On cherche à expliquer le paradoxe : ce n'est pas parce que l'aire entre les deux courbes ne tendrait pas vers 0, car elle vaut $\pi/2^{n+1}$. Une explication consiste à remarquer que l'on reproduit la même figure à différentes échelles, et que le changement d'échelle conserve les rapports de longueurs, même quand ce rapport est différent de 1. Une autre explication consiste à observer que si la n -ième courbe est de la forme $y = f_n(x)$, cette courbe "tend" vers le segment au sens que $f_n(x)$ tend vers 0 pour tout x , mais que cela n'entraîne pas que la suite des dérivées $f'_n(x)$ tend vers 0, alors que l'expression de la longueur de la n -ième courbe utilise cette dérivée f'_n . On pourrait aussi dire que la longueur d'une courbe n'est pas une fonction continue de cette courbe ... en mettant une topologie *ad hoc* sur les courbes !

À propos de la longueur d'une courbe, on nous fait remarquer que l'on peut définir la longueur d'une courbe en l'approchant par une ligne brisée, mais que ce procédé ne fonctionne pas pour des aires de surface que l'on approcherait par des triangles : exemple du cylindre où les sommets de la triangulation seraient choisis aux sommets de polygones réguliers à n côtés situés sur des cercles parallèles et tournés de π/n à chaque nouveau cercle afin de former une approximation en forme de lampin.

Dans l'espace, prenons la branche d'hyperbole définie par $xy = 1$, $x \geq 1$ et $z = 0$, que l'on fait tourner autour de l'axe des x : on obtient une portion d'hyperboloïde d'aire infinie, mais renfermant un volume fini : en remplissant le volume de peinture, on peut donc peindre une aire infinie avec une quantité finie de peinture ! Explication du paradoxe : oui, mais la couche de peinture n'a pas la même épaisseur partout. Ce dernier exemple faisant intervenir la série harmonique, on signale aussi : que la courbe $y = x \cos x$ est de longueur infinie près de $x = 0$; que l'intégrale $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ est divergente, tandis que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

À une question, comment définit-on l'aire sans utiliser d'intégrale ?, il est répondu en substance que définir l'aire ou définir l'intégrale sont deux problèmes très voisins, et consistent à rechercher ce que l'on appelle en mathématiques des *mesures*. Celles-ci ont un cahier des charges : elles doivent être invariantes par translations, et jouir de la propriété d'additivité ; si on ajoute que le carré unité (ou le cube en dimension 3) est de mesure égale à 1, cela définit entièrement la mesure, et il n'y a plus qu'à trouver des techniques pour la calculer. Un autre point de vue voisin consiste à voir l'intégrale comme une application linéaire continue qui à une fonction continue à support compact associe son intégrale.

Avant de se séparer, on mentionne qu'à la séance suivante, qui aura lieu dans quinze jours, on nous propose un exposé de topologie algébrique (élémentaire).

Séance du 8 novembre 2017

On nous propose un exposé qui pourrait s'intituler : "Promenade au pays des variétés topologiques de dimension 2".

On commence par décrire ces objets : une variété topologique de dimension 2 est un espace topologique X (c'est-à-dire un ensemble muni d'une famille convenable d'ouverts, ce qui permet de parler de voisinages, de fonctions continues, etc.) qui est localement "identifiable" à \mathbb{R}^2 , plus précisément tel que tout point $x \in X$ possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^2 ("homéomorphe à \mathbb{R}^2 " signifiant en bijection bi-continue avec \mathbb{R}^2). En gros, cela signifie que X est une "surface". Si l'on s'en tient à de telles variétés séparées, compactes, connexes, sans bord, et admettant une base dénombrable d'ouverts, il y a un théorème de classification qui affirme que ce sont soit des sommes connexes de tores \mathbb{T}^2 , soit des sommes connexes de plans projectifs réels.

Effectuer une somme connexe de deux telles variétés consiste à découper dans chacune d'elles un petit disque, et à recoller ces deux variétés le long des bords de ces disques. Ainsi, une somme connexe de 0 tore (ou de 0 plan projectif), c'est (homéomorphe à) la sphère \mathbb{S}^2 , une somme connexe d'un tore, c'est le tore \mathbb{T}^2 lui-même (le pneu), une somme connexe de deux tores, c'est le "tore à deux trous", etc. Il est plus difficile de se représenter les sommes connexes de plans projectifs. Le plan projectif lui-même consiste à prendre un disque dont on recolle le bord sur lui-même en faisant coïncider les points diamétralement opposés de ce bord ; il n'est pas possible de réaliser cela dans \mathbb{R}^3 sans que la surface se recoupe elle-même. Une somme connexe de deux plans projectifs est appelée "bouteille de Klein" : le plan projectif dont on a enlevé un disque est analogue à un "ruban de Moebius", et donc cette somme connexe de deux plans projectifs consiste à recoller deux rubans de Moebius le long de leurs bords.

Le plan projectif constitue une surface qui n'est pas orientable, et le ruban de Moebius et la bouteille de Klein non plus, ni non plus toutes les sommes connexes de plans projectifs ; il en résulte que ces surfaces ne peuvent pas se plonger dans \mathbb{R}^3 : représentées dans \mathbb{R}^3 , elles se recoupent nécessairement. Dans cet exposé, on ne s'intéressera désormais qu'aux variétés topologiques de dimension 2 pouvant se plonger dans \mathbb{R}^3 , et qui sont donc topologiquement équivalentes à des tores à n trous.

L'orateur nous projette alors des dessins de telles variétés représentées dans \mathbb{R}^3 , et le jeu consiste à rechercher quel est le tore à n trous équivalent. On constate sur plusieurs exemples que la réponse est bien loin d'être immédiate !

Puis il introduit une nouvelle classification, qui est la classification à homotopie près : deux variétés sont “du même type” si on peut déformer continûment la première en la seconde en restant à chaque instant une variété topologique de dimension 2. Cela suppose bien entendu que ces deux variétés soient déjà homéomorphes, c’est-à-dire du même type dans la première classification, et cette nouvelle classification sera donc plus fine. L’orateur ne sait pas si cette autre classification est complètement étudiée : est-ce une question ouverte ? Il nous présente un cas d’un tore à deux trous où les deux trous sont entrelacés, qui est homotope à un tore à deux trous où les deux trous ont été séparés : c’est à peine croyable !

Pour terminer son exposé, l’orateur nous explique comment il a fabriqué les belles images qu’il nous a projetées : comment il a choisi ses paramétrages, avec quels paramètres, comment il a compliqué ses modèles pour varier les surfaces présentées. Il nous signale aussi d’intéressantes vidéos sur le sujet, disponibles sur internet et dues à Aurélien Alvarez.

Séance du 15 novembre 2017

On ouvre la séance avec une méthode simple pour déterminer les racines carrées d’un nombre complexe. Soit z un nombre complexe dont on veut déterminer les racines carrées w . On calcule que

$$(z + |z|)^2 = z^2 + 2z|z| + |z|^2 = z(z + 2|z| + \bar{z}) = 2z(\Re z + |z|),$$

soit encore

$$z = \left(\frac{z + |z|}{\sqrt{2} \sqrt{\Re z + |z|}} \right)^2, \quad \text{d'où} \quad w = \pm \frac{z + |z|}{\sqrt{2} \sqrt{\Re z + |z|}}.$$

Remarque. Ce calcul fonctionne tant que $z \notin \mathbb{R}_-$, car dans ce cas $z + |z| \neq 0 < \Re z + |z|$; mais lorsque $z \in \mathbb{R}_-$, on a $z + |z| = 0 = \Re z + |z|$, et l’équation précédente devient $0^2 = 0z$, d’où il serait difficile de tirer quoi que ce soit. Cependant, pour $z \in \mathbb{R}_-$, on peut toujours prendre $w = \pm \sqrt{|z|}i$.

Après quoi, on nous pose un nouveau défi.

Problème 2017-18(10). *Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que chaque réel ait exactement deux antécédents par f ?*

On revient encore sur une discussion entamée le 25 octobre, où l’on approchait un segment $[A, B]$ par un chapelet de petits demi-cercles : chacun de ces demi-cercles converge vers un point, et il n’y a qu’un nombre dénombrable de ces demi-cercles ; alors comment se fait-il que l’on conserve encore de la longueur à la limite ?

Là encore, pour lever le paradoxe, il faut voir que les centres de ces cercles ne sont pas fixés, et qu’au fur et à mesure que l’on diminue la taille de ces demi-cercles, on multiplie aussi le nombre de centres : il est donc abusif de considérer que les demi-cercles tendent vers un point, car ils ne tiennent pas en place, et que l’on est toujours en train d’en rajouter d’autres.

Il est cependant vrai qu'un nombre dénombrable de points a une longueur totale nulle. Mais cela peut arriver aussi à des ensembles *non-dénombrables* de points. On décrit alors l'ensemble triadique de Cantor : $C_1 = [0, 1] \setminus]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, puis de chacun des deux segments $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$ restants, on enlève encore le tiers central pour obtenir C_2 , puis de chacun des quatre segments restants, on enlève encore le tiers central pour obtenir C_3 , et ainsi de suite ; la longueur totale de C_n vaut clairement $(\frac{2}{3})^n$, et si on définit $C_\infty = \bigcap_{n>0} C_n$, cet ensemble est donc de "longueur" totale nulle. Pourtant il contient plus qu'un nombre dénombrable de points. Pour le voir, écrivons les réels de $[0, 1]$ en écriture triadique illimitée, et observons qu'à condition d'identifier les développements se terminant par $[...]1000000\dots$ avec $[...]0222222\dots$, les éléments de C_∞ sont ceux dont le développement triadique illimité ne comporte que des 0 et des 2 (pas de 1). On peut alors conclure en justifiant :

Problème 2017-18(11). *Montrer qu'il y a autant de points dans C_∞ que dans $[0, 1]$ en construisant une bijection entre ces deux ensembles.*

Pour terminer la séance, on revient sur les défis donnés lors de la séance du 25 octobre. Après avoir vainement discuté le numéro (7), on nous présente le début de la solution du (8). On traite successivement les cas suivants : (i) $n = 1$ et $m > 1$, qui donne $m = 2$ ou $m = 3$; (ii) $n = 2$, qui donne $m = 1$ ou $m = 2$ ou $m = 5$; (iii) $m = n > 1$ qui donne $m = n = 2$; (iv) $m > n > 1$ qui donne $(m, n) = (5, 2)$ ou $(m, n) = (5, 3)$. Les cas restants seront traités la semaine prochaine, et l'on trouvera un compte-rendu sur les détails de ce problème ci-dessous à la date du 22 novembre.

Séance du 22 novembre 2017

On termine la solution du problème (8) du 25 octobre ; la preuve complète présentée procède de la façon suivante.

On observe d'abord que si $(mn - 1)|(n^3 + 1)$, alors on a aussi

$$(mn - 1)|((m^3(n^3 + 1) - (mn - 1)(m^2n^2 + mn + 1)) = m^3 + 1,$$

si bien que (m, n) est solution si et seulement (n, m) est aussi solution. On peut donc supposer pour la suite que $m \geq n$.

Quand $n = 1$, on doit avoir $A = \frac{2}{m-1}$ entier, d'où $m = 2$ ou $m = 3$. Quand $n = 2$, on doit avoir $A = \frac{9}{2m-1}$ entier (et $m \geq 2$), d'où $m = 2$ ou $m = 5$. Dans les cas $m \geq n > 2$ restants, on observe d'abord que A est congru à -1 modulo n , soit $A = kn - 1$, ce qui conduit à écrire

$$kn = \frac{n^3 + 1}{mn - 1} + 1 \leq \frac{n^3 + 1}{n^2 - 1} + 1 = n + \frac{1}{n - 1} + 1 < 2n,$$

d'où $k = 1$, puis $n - 1 = \frac{n^3 + 1}{mn - 1}$, d'où l'on tire que $m = n + 1 + \frac{2}{n - 1}$; cela donne donc $n = 3$ et $m = 5$.

En résumé, les couples (m, n) solutions sont au nombre de neuf : $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(3, 5)$, et $(5, 3)$. ■

Une autre solution du même problème est alors proposée : de l'équation $A = \frac{n^3 + 1}{mn - 1}$, on tire que $A(mn - 1) = n^3 + 1$ puis que $A = (Am - n^2)n - 1 = kn - 1$ en posant $k = Am - n^2$ (A congru à -1 modulo n), et comme $A > 0$, on voit que l'on doit aussi avoir $k > 0$: on cherche donc trois entiers $n > 0$, $m > 0$ et $k > 0$ tels que $n^3 + 1 = (mn - 1)(kn - 1) = kmn^2 - kn - mn + 1$ soit $n(n^2 - kmn + k + m) = 0$; comme $n > 0$, on voit donc qu'il faut que le discriminant $\delta = (\frac{1}{2}km)^2 - k - m$ soit positif, et les valeurs de n sont alors données par $n = \frac{1}{2}km \pm \sqrt{\delta}$.

Comme $\sqrt{\delta} < \frac{1}{2}km$, on a $0 < n < km$ d'où $1 \leq n \leq km - 1$ puis $\sqrt{\delta} \leq \frac{1}{2}km - 1$; en portant cela au carré on obtient $-k - m \leq -km + 1$, soit aussi $(k-1)(m-1) \leq 2$, ce qui limite le nombre de cas à étudier. Les deux cas $m = 3, k = 2$ d'une part, et $m = 2, k = 3$ d'autre part donnent $\delta = 4$ puis $n = 3 \pm 2$, soit $(n, m, k) \in \{(1, 3, 2), (5, 3, 2), (1, 2, 3), (5, 2, 3)\}$; le cas $m = k = 2$ donne $\delta = 0$ puis $n = 2 \pm 0$, soit $(n, m, k) = (2, 2, 2)$. Restent les cas $m = 1, k \in \mathbb{N}^*$ d'une part, et $k = 1, m \in \mathbb{N}^*$ d'autre part qui sont plus délicats.

Quand $m = 1$, le discriminant devient $\delta = (\frac{1}{2}k)^2 - k - 1 = (\frac{1}{2}k - 1)^2 - 2$ et vérifie donc $\sqrt{\delta} < \frac{1}{2}k - 1$, d'où $1 < n < k - 1$ puis $2 \leq n \leq k - 2$ et $\sqrt{\delta} \leq \frac{1}{2}k - 2$; en portant cela au carré on obtient $-k - 1 \leq -2k + 4$ soit $k \leq 5$, tandis que la condition $\delta \geq 0$ entraîne que $k > 4$; on a donc ici $k = 5, \delta = \frac{1}{4}$ puis $n = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$, d'où $(n, m, k) \in \{(2, 1, 5), (3, 1, 5)\}$. Enfin le cas $k = 1$ est symétrique du cas juste étudié, et conduit à $(n, m, k) \in \{(2, 5, 1), (3, 5, 1)\}$. En résumé, l'ensemble des triplets (n, m, k) est donné par

$$\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 5), (2, 2, 2), (2, 5, 1), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 2, 3), (5, 3, 2)\},$$

c'est-à-dire qu'il y a neuf solutions. ■

On a remarqué ci-dessus la symétrie entre k et m ; on fait observer une autre symétrie : en cherchant les solutions n de l'équation $n^2 - kmn + k + m = 0$, on cherche deux nombres p et q qui vérifient $p + q = km$ et $pq = k + m \dots$ et réciproquement ! Serait-il possible de résoudre le problème en partant de ces dernières équations ?

Le reste de la séance est consacré au début d'un exposé sur le *problème de Sylvester*, qui est le problème (7) du 25 octobre.

Après avoir souligné la nécessité d'avoir une famille de points *non tous alignés*, et en *nombre fini* (penser à \mathbb{Z}^2), l'orateur commence par poser le problème algébriquement en exprimant l'alignement de points par l'annulation d'un déterminant faisant intervenir les coordonnées des points. Mais c'est surtout pour montrer que le problème n'est pas purement affine : si l'on prend les coordonnées dans le corps $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on obtient un système de 9 points où le problème de Sylvester ne peut pas être résolu car ces 9 points sont alignés 3 par 3, et aucune droite n'en contient que 2; ce système de 9 points peut aussi se représenter sur le tore $(\mathbb{R}/3\mathbb{Z})^2$, et même dans le plan \mathbb{C}^2 de dimension 2 sur \mathbb{C} : dans toutes ces géométries, le problème de Sylvester ne peut pas être résolu.

C'est donc bien dans le plan *euclidien* qu'il faut travailler, et l'orateur se propose d'en expliquer plusieurs solutions, les deux premières découlant de propriétés élémentaires des triangles euclidiens.

La première preuve découle du lemme : *Si l'angle en a d'un triangle (abc) est droit ou obtus, alors la hauteur issue de a est plus courte que les deux autres hauteurs du triangle.* Pour résoudre le problème de Sylvester, on considère alors la plus petite hauteur $[ah]$ parmi tous les triangles (abc) dont les sommets sont pris dans la famille donnée, et on montre (par l'absurde) que la droite $\langle bc \rangle$ est alors solution du problème.

Une deuxième preuve découle de l' "axiome de Pasch" : *Si une droite ne passe par aucun des sommets d'un triangle, alors elle coupe 0 ou 2 des côtés de ce triangle.* Pour résoudre le problème de Sylvester, on prend alors une droite D passant par un seul des points de la famille, le point a , et on sélectionne celle des droites $\langle bc \rangle$ passant par deux autres points de la famille qui coupe la droite D au plus près de a , et qui sera la droite solution, ou servira à construire cette dernière : pour pouvoir conclure rigoureusement, il faut traiter à part plusieurs cas particuliers.

Avant de nous séparer, nous réglons en deux minutes le cas du problème (10) du 15 novembre : on obtient en effet facilement une contradiction à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. Une telle fonction ne peut donc pas exister.

Séance du 29 novembre 2017

Le début de la séance est consacré à la fin de l'exposé sur le problème de Sylvester.

En vue d'une troisième preuve, on pose le problème de Sylvester sur la sphère, l'alignement de trois points étant défini comme l'appartenance de ces trois points à un même grand cercle ; à cause des paires de points antipodaux, on raisonne en réalité soit dans le plan projectif soit dans un hémisphère (la famille de points donnée étant finie). L'orateur montre alors qu'il est équivalent de résoudre le problème de Sylvester dans le plan euclidien, ou sur un hémisphère. Puis, associant à un point d'un hémisphère considéré comme pôle le grand cercle jouant le rôle d'équateur, l'orateur formule un problème de Sylvester *dual* sur la sphère où : *On se donne un nombre fini de grands cercles non tous concourants parmi lesquels il s'agit d'en trouver une paire se coupant en deux points où ne passe aucun autre grand cercle de la famille* ; et l'orateur établit que ce problème est encore équivalent aux précédents.

La donnée d'une famille de grands cercles de la sphère définit un découpage de la sphère en polygones sphériques, à l'occasion de quoi l'orateur mentionne la *formule d'Euler* $s - a + f = 2$ reliant les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un tel découpage. Et muni de cette formule, il présente une preuve combinatoire de la résolution du problème dual de Sylvester sur la sphère, ainsi que d'un problème voisin : *Étant donnée une famille de points noirs ou blancs du plan non tous alignés, trouver une droite monochromatique passant par au moins deux points de la famille.*

Le temps passant, l'orateur laisse en défi le :

Problème 2017-18(12). *Démontrer la formule d'Euler $s - a + f = 2$ pour tout découpage de la sphère en polygones sphériques.*

Les participants proposent alors une série de nouveaux défis.

Problème 2017-18(13). *Quatre personnes nommées A, B, C et D sont réputées dire la vérité avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et mentir avec une probabilité $\frac{2}{3}$, et ce indépendamment les unes des autres. Alors A dit quelque chose, mais on sait seulement que " D affirme que C nie que B déclare que A ment". Quelle est la probabilité que " A a dit la vérité" ?*

Problème 2017-18(14). *Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 1$, puis $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n a_n}$. Calculer a_{1996} .*

Problème 2017-18(15). *Trouver un polynôme $P(X)$ vérifiant l'identité $(X - 16)P(2X) = 16(X - 1)P(X)$.*

Problème 2017-18(16). *Chercher (x, y, z) solution du système d'équations : $xy = z^2$, $x + y + z = 7$, $x^2 + y^2 + z^2 = 133$.*

Problème 2017-18(17). *Prouver que le nombre qui s'écrit $N = 1 \dots 12 \dots 25$, c'est-à-dire qui commence par 1997 fois le chiffre 1, se poursuit avec 1998 fois le chiffre 2 et se termine par 1 fois le chiffre 5, est le carré d'un entier.*

Séance du 6 décembre 2017

La plus grande partie de la séance est consacrée à la résolution des quatre derniers problèmes posés la semaine précédente.

Solution du problème (14) du 29 novembre. Calculant les premiers termes, on trouve que $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{7}$, $a_5 = \frac{1}{11}$, $a_6 = \frac{1}{16}$, $a_7 = \frac{1}{22}$, etc. On devine alors l'expression suivante

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^n k},$$

ce qui se démontre en effet par récurrence. On calcule pour finir que

$$\sum_{k=0}^{1995} k = \frac{1995 \times 1996}{2} = 1\,991\,010, \quad \text{d'où} \quad a_{1996} = \frac{1}{1\,991\,011}. \blacksquare$$

Solution du problème (15) du 29 novembre. On observe sur la relation donnée que $P(2X)$ doit avoir $X = 1$ comme racine tandis que $P(X)$ doit avoir $X = 16$ comme racine ; cela donne $P(X) = (X - 2)(X - 16)Q(X)$ pour un nouveau polynôme Q à déterminer. Reportant cette expression dans la relation donnée on trouve $(X - 16)(2X - 2)(2X - 16)Q(2X) = 16(X - 1)(X - 2)(X - 16)Q(X)$, ce qui, après simplification des facteurs communs, s'écrit encore $(X - 8)Q(2X) = 4(X - 2)Q(X)$. On observe à nouveau que cela entraîne que $Q(2X)$ doit avoir $X = 2$ pour racine et $Q(X)$ avoir $X = 8$ pour racine, d'où $Q(X) = (X - 4)(X - 8)R(X)$ pour un nouveau polynôme R à déterminer. Reportant dans l'équation précédente, on trouve que $R(2X) = R(X)$, ce qui est une relation vérifiée si et seulement si R est un polynôme constant. Les solutions du problème sont donc les multiples du polynôme $P(X) = (X - 2)(X - 4)(X - 8)(X - 16)$. ■

Une autre solution de ce problème est alors proposée : P est solution du problème si et seulement si λP aussi ; on peut donc chercher une solution de la forme $P(X) = X^m + Q(X)$ avec $\text{degré}(Q) < m$, et en reportant dans l'équation, on trouve $2^m X^{m+1} = 16 X^{m+1}$, d'où $m = 4$; on pose alors $Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et en reportant dans l'équation on obtient un système linéaire pour (a, b, c, d) qui a pour solution $a = -30$, $b = 280$, $c = -960$ et $d = 1024$, d'où les solutions $P(X) = \lambda(X^4 - 30X^3 + 280X^2 - 960X + 1024)$. ■

Solution du problème (16) du 29 novembre. La deuxième équation conduit à $x + y = 7 - z$ puis $(x + y)^2 = 49 - 14z + z^2$; en soustrayant deux fois la première équation puis la troisième, on obtient

$$-z^2 = (x + y)^2 - 2xy - (x^2 + y^2 + z^2) = 49 - 14z + z^2 - 2z^2 - 133 = -84 - 14z - z^2,$$

d'où $z = -\frac{84}{14} = -6$; reportant cette valeur dans les deux premières équations, on trouve que $xy = 36$ et $x + y = 13$, si bien que x et y sont solutions de l'équation $t^2 - 13t + 36 = 0$, ce qui donne $\{x, y\} = \{4, 9\}$. Le problème avait deux solutions : $(4, 9, -6)$ et $(9, 4, -6)$. ■

Solution du problème (17) du 29 novembre. Le nombre donné s'écrit

$$\begin{aligned} N &= 10^{1999} \frac{10^{1997} - 1}{9} + 20 \frac{10^{1998} - 1}{9} + 5 = \frac{1}{9} (10^{1996} - 10^{1999} + 20 \times 10^{1998} - 20 + 45) = \\ &= \frac{1}{9} ((10^{1998})^2 + 10 \times 10^{1998} + 25) = \frac{1}{9} (10^{1998} + 5)^2 = \left(\frac{10^{1998} + 5}{3} \right)^2 ; \end{aligned}$$

or modulo 3, le nombre $10^{1998} + 5$ est congru à $1^{1998} + 5 = 6 \equiv 0$, ce qui permet de conclure que la grande parenthèse est un entier, et que N est le carré de cet entier. ■

On discute aussi un peu le problème (13) du 29 novembre, mais sans arriver à une conclusion satisfaisante. On en remet la discussion à la semaine prochaine.

Séance du 13 décembre 2017

La séance commence par l'énoncé de trois nouveaux problèmes.

Problème 2017-18(18). *Un troupeau de 101 vaches vérifie la propriété suivante : “Chaque fois que l’on met à part une vache du troupeau, on est capable de diviser les 100 vaches restantes en deux groupes de 50 vaches et de poids global égal. Saurez-vous démontrer que toutes les vaches de ce troupeau pèsent le même poids ?*

Problème 2017-18(19). *On dispose de douze pièces qui ont toutes le même poids sauf l’une d’entre elles qui est fautive, sans que l’on sache si elle est plus lourde ou plus légère que les autres. Pour détecter la pièce fautive, on ne dispose que d’une balance de Roberval (deux plateaux permettant de décider si un groupe de pièces est plus lourd ou plus léger qu’un autre groupe) avec laquelle on n’a le droit de réaliser que trois pesées. Comment procéder ?*

Problème 2017-18(20). *On se donne deux points situés sur deux faces adjacentes d’un même cube. En ne considérant que des chemins tracés sur la surface du cube, il s’agit de déterminer le chemin le plus court reliant ces deux points.*

Puis on repart sur le problème (13) du 29 novembre, mais ici deux interprétations s’affrontent :

(a) Dans l’une, on considère que : soit D a dit la vérité, et donc (avec la probabilité $\frac{1}{3}$) on sait que “ C que B déclare que A ment”, soit D a menti, et donc (avec la probabilité $\frac{2}{3}$) on ne sait même pas si C a dit quelque chose ou s’il n’a rien dit. Dans cette interprétation, l’un des participants prétend faire le calcul ainsi : dans le $\frac{1}{3}$ des cas où on a une information, on poursuit le calcul (avec un arbre par exemple), et dans les $\frac{2}{3}$ autres cas où on ne sait rien, on peut conclure que A ment avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dit la vérité avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Ce type de calcul conduit d’après son auteur à la probabilité $\frac{11}{27}$ que “ A dit la vérité”. ■

Mais il est contesté : si on suppose que B ou C se tait, il faut pour pouvoir compléter le calcul savoir avec quelle probabilité ces personnes se taisent ; or l’énoncé disait que chacun disait la vérité ou mentait avec les probabilités $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$, et ne donnait pas de probabilité pour le mutisme. Si D a menti, on ne peut pas conclure que “ A dit la vérité” avec la probabilité $\frac{1}{3}$ sans connaître les probabilités des différentes situations.

(b) Dans l’autre interprétation, B et C ont fait des déclarations, et s’il est faux que “ B a déclaré que A ment”, il faut comprendre que cela signifie que “ B a déclaré que A a dit la vérité”. Et de même pour C : on n’admet pas qu’il ne se soit pas prononcé sur ce qu’a déclaré B . Dans cette interprétation, un autre participant propose d’utiliser la formule de Bayes ou formule de probabilité des causes : pour deux événements X et Y , on a

$$\mathbb{P}(X|Y) = \frac{\mathbb{P}(Y|X) \mathbb{P}(X)}{\mathbb{P}(Y|X) \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y|\bar{X}) \mathbb{P}(\bar{X})} .$$

Prenant ici X = “ A dit la vérité” et Y = “ D affirme que C nie que B déclare que A ment”, on calcule les probabilités $\mathbb{P}(Y|X)$ et $\mathbb{P}(Y|\bar{X})$ par un arbre, ce qui donne $\mathbb{P}(Y|X) = \frac{13}{27}$ et $\mathbb{P}(Y|\bar{X}) = \frac{14}{27}$, d’où finalement $\mathbb{P}(X|Y) = \frac{13}{41}$. ■

Mais l’autre parti objecte que ce n’est pas une bonne interprétation de l’énoncé, car pour décrire le problème tel qu’il est interprété ici, on n’aurait pas dû l’énoncer “ D affirme que C nie que B déclare que A ment”, car le contraire d’affirmer quelque chose, ce n’est pas affirmer son contraire.

Conclusion : une difficulté récurrente dans les problèmes de probabilités, c’est qu’un énoncé trop flou ne permet pas de décider quelle est la bonne modélisation du problème. Nous nous accordons (presque) pour dire que le problème aurait dû être posé de façon plus précise, pour éviter une divergence d’interprétations.

Pour compléter cette séance, un participant se propose de donner une solution du problème (12) du 29 novembre.

La solution passe par des formules reliant les aires et les angles des polygones sphériques. On se place sur une sphère de rayon 1, dont Archimède a montré que l'aire était égale à 4π . L'orateur montre alors le

Lemme. *Un polygone sphérique (à n côtés) d'angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a une aire égale à $A = (\sum_{j=1}^n \alpha_j) - (n - 2)\pi$.*

Pour démontrer ce lemme, on commence par le cas des fuseaux ($n = 2$), ce qui s'obtient en divisant la sphère en q parts de melon si $\alpha = (p/q)2\pi$, puis par continuité ou croissance de l'aire pour les angles multiples irrationnels de 2π ; on passe ensuite au cas des triangles sphériques ($n = 3$) en découpant une demi-sphère à l'aide des côtés du triangle prolongés en grands cercles pour faire apparaître des fuseaux; on termine avec des polygones à $n > 3$ côtés en découpant ces derniers en $n - 2$ triangles sphériques.

Ce lemme étant acquis, on utilise l'indice $k \leq f$ pour numéroter les faces, l'indice $j \leq s$ pour numéroter les sommets, A_k et n_k pour désigner l'aire et le nombre de côtés de la face $n^\circ k$, et α_{jk} l'angle sur la face $n^\circ k$ au sommet $n^\circ j$, avec la convention que $\alpha_{jk} = 0$ si le sommet $n^\circ j$ n'est pas un sommet de la face $n^\circ k$. La somme de tous les n_k vaut $2a$ où a est le nombre d'arêtes du découpage, et pour chaque j fixé, la somme de tous les α_{jk} vaut 2π puisque c'est la somme de tous les angles autour du sommet $n^\circ j$; et comme on a un découpage de la sphère en polygones sphériques, l'aire totale de la sphère vaut

$$\begin{aligned} 4\pi &= \sum_{k=1}^f A_k = \sum_{k=1}^f ((\sum_{j=1}^s \alpha_{jk}) - (n_k - 2)\pi) = \\ &= (\sum_{j=1}^s (\sum_{k=1}^f \alpha_{jk})) - (\sum_{k=1}^f n_k)\pi + (\sum_{k=1}^f 2\pi) = 2\pi(f - a + s), \end{aligned}$$

ce qui donne la formule d'Euler $2 = f - a + s$ après division par 2π . ■

Séance du 20 décembre 2017

Pour commencer, un participant tente de donner la solution du problème (19) du 13 décembre : après une première pesée de 3 pièces contre 3, on dispose de deux lots de 6 pièces, et on sait dans lequel de ces deux lots se trouve la pièce fautive. On numérote les pièces suspectes de 1 à 6, et les pièces du lot fiable seront appelées indifféremment "n", puis on compare le groupe 1-2-3 au groupe 4-n-n (deuxième pesée); en cas d'égalité on compare 5 à n et on conclut que la fautive est 5 ou 6 suivant le résultat; en cas d'inégalité dans la deuxième pesée, on compare en troisième pesée le groupe 1-4 au groupe 3-n, mais malheureusement, on ne peut pas conclure dans tous les cas; on essaie de corriger en comparant plutôt en troisième pesée le groupe 1-3 au groupe 2-n, mais là encore, ça ne marche pas. On convient d'y revenir en janvier.

Même décision en ce qui concerne le problème (18) du 13 décembre : nous nous donnons du temps supplémentaire pour y réfléchir.

Solution du problème (9) du 25 octobre : l'identité de la somme géométrique permet d'affirmer que pour tous entiers $m > 0$ et $k > 0$, on a $m^k - 1 = (m - 1) \sum_{j=1}^k m^{j-1}$.

Si $a|b$, alors $b = aq$ et l'identité précédente avec $m = n^a$ devient

$$n^b - 1 = (n^a)^q - 1 = (n^a - 1) \sum_{j=1}^q n^{a(j-1)},$$

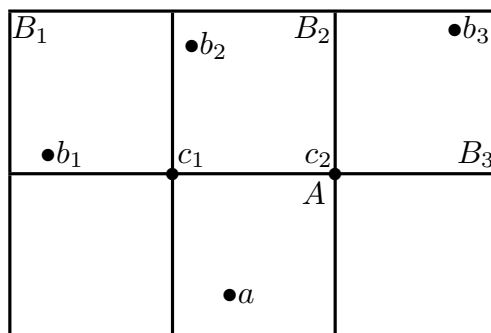
si bien que $(n^a - 1)|(n^b - 1)$.

Réciproquement, supposons que $(2^a - 1)|(2^b - 1)$, et écrivons $b = aq + r$ avec $0 \leq r < a$ (c'est la division euclidienne de b par a). Alors $2^a - 1$ divise

$$2^b - 1 = 2^{aq+r} - 2^r + 2^r - 1 = 2^r(2^a - 1) \sum_{j=1}^q 2^{a(j-1)} + (2^r - 1),$$

(si $q = 0$, on a directement que $2^b - 1 = 2^r - 1$) et donc $(2^a - 1)|(2^r - 1)$; mais comme $0 \leq r < a$ entraîne que $0 \leq 2^r - 1 < 2^a - 1$, on doit donc avoir $2^r - 1 = 0$, soit $r = 0$, ce qui signifie que $a|b$. ■

Solution du problème (20) du 13 décembre : l'énoncé nous donne deux faces adjacentes d'un cube notées A et B , un point a sur A et un point b sur B ; on dessine alors un patron du cube faisant apparaître la face A , les deux faces du cube simultanément adjacentes à A et à B , et trois exemplaires B_1, B_2 et B_3 de la face B . Le point b étant reporté sur chacun des exemplaires de la face B (points notés $b_j \in B_j$ pour $j = 1, 2$ ou 3), il s'agit de chercher le



segment le plus court entre $[a, b_1]$, $[a, b_2]$ et $[a, b_3]$; on peut caractériser cela par la position de a par rapport aux médiatrices des segments $[b_1, b_2]$ et $[b_2, b_3]$, ou par une condition angulaire portant sur les angles formés aux sommets c par $[a, c]$ et $[b, c]$ respectivement avec les arêtes du cube. ■

On pose le problème suivant : une horloge sonne les six coups de six heures en trente secondes; en combien de temps sonnera-t-elle les douze coups de midi? On précise le problème en ajoutant les hypothèses sous-entendues : l'écart entre deux coups est constant, et les coups sont instantanés (on ne mesure pas le temps de résonance). Ce n'est qu'un problème d'intervalles : cinq intervalles pour les six heures, onze intervalles pour midi, si bien que la durée totale à midi sera égale aux $\frac{11}{5}$ de la durée à six heures, soit **soixante-six secondes**. ■

Problème 2017-18(21). On dispose dix points dans un carré (euclidien) de côté 1. Montrer qu'il existe parmi ces dix points une paire de points distants l'un de l'autre de strictement moins que $\frac{1}{2}$.

Pour finir, on se donne rendez-vous pour une reprise en janvier après les examens.

*
* * * *
*

Activités 2017-2018

deuxième semestre

Séance du 24 janvier 2018

La séance débute par une solution du problème des douze pièces (problème (19) du 13 décembre 2017). Mais avant d'expliciter les pesées, on fait remarquer que si une même pièce se trouve dans le groupe le plus léger lors d'une pesée et dans le groupe le plus lourd lors d'une autre pesée, c'est nécessairement une "bonne" pièce. Avec cet outil on procède ainsi.

On effectue une première pesée où l'on compare quatre pièces à quatre autres pièces, et deux situations se peuvent produire : ou bien les plateaux sont équilibrés, ce qui signifie que la "fausse" pièce est parmi les quatre restantes, ou bien l'un des plateaux est plus lourd que l'autre, et la "fausse" pièce est parmi les huit pièces pesées, mais avec cette information supplémentaire que la "fausse" pièce est plus lourde si elle est dans le plateau du bas et plus légère si elle est dans le plateau du haut.

Premier cas : plateaux équilibrés lors de la première pesée. On sait dans ce cas que la "fausse" pièce est parmi les quatre non pesées, que l'on numérote 1, 2, 3 et 4. On effectue alors une deuxième pesée où l'on compare la combinaison 1&2 à la combinaison 3&5 (la pièce 5 étant une "bonne" pièce) ; en cas d'égalité, on sait que la "fausse" pièce est la pièce 4, et on détermine si elle est plus lourde ou plus légère que les autres par une troisième pesée où l'on compare cette pièce 4 à n'importe quelle autre ; si la combinaison 1&2 est plus lourde que la combinaison 3&5, on sait que la "fausse" pièce est 1, 2 ou 3, avec l'information supplémentaire qu'elle est plus lourde si c'est 1 ou 2, plus légère si c'est 3 ; et si la combinaison 1&2 est plus légère que la combinaison 3&5, on sait que la "fausse" pièce est 1, 2 ou 3, avec l'information supplémentaire qu'elle est plus légère si c'est 1 ou 2, plus lourde si c'est 3 ; dans ces deux derniers cas, on peut trouver quelle est la "fausse" pièce et si elle est plus lourde ou plus légère que les autres par une troisième pesée où l'on compare la pièce 1 à la pièce 2.

Deuxième cas : plateaux inégaux lors de la première pesée. On sait dans ce cas que la "fausse" pièce est parmi les huit qui ont été pesées. Numérotions 1, 2, 3 et 4 les pièces figurant dans la combinaison la plus lourde de cette première pesée, et 5, 6, 7 et 8 celles figurant dans la combinaison la plus légère de cette première pesée. On effectue alors une deuxième pesée où l'on compare la combinaison 1&2&5 à la combinaison 3&4&6 ; en cas d'égalité, on sait que la fausse pièce est 7 ou 8 et qu'elle est plus légère que les autres, et on détermine laquelle par une troisième pesée où l'on compare 7 à 8 ; si la combinaison 1&2&5 est plus lourde que la combinaison 3&4&6, la "fausse" pièce ne peut être ni 3 ni 4 ni 5 en raison de la remarque initiale précédant la description des pesées, et c'est donc 1, 2 ou 6 avec l'information supplémentaire qu'elle est plus lourde si c'est 1 ou 2, plus légère si c'est 6 ; et si la combinaison 1&2&5 est plus légère que la combinaison 3&4&6, la "fausse" pièce ne peut être ni 1 ni 2 ni 6 en raison de la remarque initiale précédant la description des pesées, et c'est donc 3, 4 ou 5 avec l'information supplémentaire qu'elle est plus lourde si c'est 3 ou 4, plus légère si c'est 5 ; et dans ces deux derniers cas, on peut trouver quelle est la "fausse" pièce et si elle est plus lourde ou plus légère que les autres par une troisième pesée où l'on compare les deux pièces suspectées d'être plus lourdes (1&2 dans le deuxième cas, 3&4 dans le troisième cas). ■

La séance se poursuit avec la solution du problème des vaches (problème (18) du 13 décembre 2017). On note x_j le poids de la vache numéro j puis X le vecteur de \mathbb{R}^{101} de coefficients x_j dans la base canonique. Ce vecteur est solution du système linéaire $AX = 0$ où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \pm 1 \\ & \pm 1 & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où chaque ligne comporte un zéro (sur la diagonale) et cinquante fois le coefficient 1 et cinquante fois le coefficient -1 , car la j -ième équation correspond à l'oubli de la vache numéro j , et à la répartition (via les coefficients 1 et des -1) des autres vaches en deux groupes de poids global égal ; on ne dispose cependant pas de la position précise des 1 et des -1 . Il s'agit maintenant de déterminer le noyau de (l'application linéaire associée à) cette matrice A .

On va montrer pour cela que la matrice $A \in \mathcal{M}_{101}(\mathbb{R})$ est de rang (supérieur ou) égal à 100. On ne change pas le rang de la matrice si l'on ajoute la première ligne à chacune des autres lignes, ce qui donne la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & & \\ \vdots & & \ddots & * \\ \pm 1 & & * & \pm 1 \end{pmatrix}$$

où les coefficients situés sur la première ligne, sur la première colonne ou sur la diagonale sont tous égaux à ± 1 (sauf le coefficient en haut à gauche), tandis que les coefficients situés ni sur la première ligne, ni sur la première colonne ni sur la diagonale (et figurés par $*$) sont tous égaux à $-2, 0$ ou 2 . La matrice $B \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R})$ extraite de A' en supprimant la première ligne et la première colonne a donc des coefficients égaux à ± 1 sur la diagonale, et pairs hors de la diagonale, si bien que $\det B = \pm 1 + 2k \neq 0$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ et que la matrice B est donc inversible. On en déduit que $\text{rg } A \geq 100$.

On conclut alors facilement : par le théorème du rang (que l'on apprend en L1), $\text{rg } A \geq 100$ entraîne que $\dim(\text{Ker } A) \leq 1$, et puisque $X_0 = (1, 1, \dots, 1)$ est clairement dans le noyau, on obtient ainsi que $\text{Ker } A = \text{Vect } X_0$, ce qui est le résultat voulu. ■

Nous passons ensuite à la description de cinq nouveaux problèmes !

Problème 2017-18(22). *Évaluer la somme*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(3 \frac{\ln(4k+2)}{4k+2} - \frac{\ln(4k+3)}{4k+3} - \frac{\ln(4k+4)}{4k+4} - \frac{\ln(4k+5)}{4k+5} \right).$$

Problème 2017-18(23). *Soient $a < b$ deux réels, et $f \neq g$ deux fonctions continues positives (strictement pour g) telles que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. Avec ces deux fonctions, on définit $I_n = \int_a^b f(x)^{n+1} g(x)^{-n} dx$. Il s'agit de montrer que la suite (I_n) est croissante et tend vers $+\infty$.*

Problème 2017-18(24). *Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P et $Q \in \mathbb{R}[X]$ sont scindés sur $\mathbb{R}[X]$, alors $\sum_{k=0}^n a_k Q^{(k)}$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}[X]$.*

Problème 2017-18(25). À partir d'un mot formé des lettres a et b , on effectue l'opération suivante : on choisit dans ce mot une occurrence du motif "ab" (s'il y en a), et on remplace ce motif par le motif "bba" ; puis on recommence cette opération tant que l'on trouve des occurrences du motif "ab". Il s'agit de montrer qu'au bout d'un temps fini, on ne trouve plus de motif "ab" (et donc le jeu s'arrête), et que la durée totale du jeu (le nombre de fois que l'on a répété l'opération de base) ne dépend que du mot de départ, mais pas des choix des occurrences effectués.

Problème 2017-18(26). Dans une île sont rassemblés trente-cinq lions et un mouton ; chaque lion peut choisir de rester tranquille ou de manger le mouton, et lorsqu'un lion mange le mouton, ce lion devient mouton à son tour. Chaque lion préfère manger le mouton plutôt que de rester tranquille, mais à condition de ne pas être mangé à son tour ; s'il sait qu'après avoir mangé le mouton il doit se faire manger, il préfère rester tranquille ; enfin, chaque lion sait que les autres lions ont les mêmes préférences que lui. Que va-t-il se passer ?

Séance du 31 janvier 2018

La séance commence par une solution du problème (26) du 24 janvier.

Supposons d'abord qu'il n'y a qu'un lion et un mouton : le lion mange le mouton sans hésiter puisqu'il ne risque pas de se faire manger après car il n'y aura plus d'autre lion. Supposons ensuite qu'il y a deux lions et un mouton ; dans ce cas, si un lion décide de manger le mouton, il devient mouton et on se retrouve dans la situation précédente (un lion un mouton), si bien qu'il se fera manger ; par conséquent, dans ce deuxième cas, les lions décident plutôt de rester tranquilles.

Ceci constitue l'initialisation d'une démonstration par récurrence : supposant que l'on a n lions et un mouton, on va démontrer que si n est impair les lions voudront manger le mouton, tandis que si n est pair ils préféreront rester tranquilles. En effet, dans le cas n impair, si un lion décide de manger le mouton, il devient le mouton en présence de $n - 1$ (qui est alors pair) lions, et par hypothèse de récurrence ces derniers resteront alors tranquilles, si bien que les lions ont intérêt dans ce cas à manger le mouton. Et dans le cas n pair, si un lion décide de manger le mouton, il devient le mouton en présence de $n - 1$ (qui est alors impair) lions, et par hypothèse de récurrence ces derniers voudront alors manger le mouton, si bien que les lions ont intérêt dans ce cas à rester tranquilles. La preuve de la récurrence est ainsi complète.

Dans l'énoncé initial, il y a trente-cinq lions ; donc un lion va manger le mouton et devenir ainsi mouton en présence de trente-quatre lions qui resteront tranquilles. ■

On donne aussi la solution du problème des dix points dans un carré (problème (21) du 20 décembre 2017). C'est simplement une application du *principe des tiroirs* : on découpe le carré donné en neuf petits carrés de côté $\frac{1}{3}$, et parmi les dix points donnés dans le grand carré, deux nécessairement (au moins) se trouveront dans le même petit carré, et donc à une distance l'un de l'autre inférieure ou égale à sa diagonale, qui vaut $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}$. ■

On propose de nouveaux problèmes.

Problème 2017-18(27). On choisit quatre points "au hasard" sur la sphère et indépendamment, les probabilités étant uniformes c'est-à-dire proportionnelles à l'aire. On demande de calculer la probabilité pour que le centre de la sphère soit situé dans le tétraèdre dont les sommets sont les quatre points choisis.

Problème 2017-18(28). On considère l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Parmi ces matrices, certaines ne sont pas inversibles, et il faudra changer certains de leurs coefficients pour les rendre inversibles. Il s'agit de déterminer celles de ces matrices qui nécessitent le plus de changements pour devenir inversibles. Et on demande aussi de calculer la moyenne des carrés des déterminants de toutes ces matrices $n \times n$ à coefficients ± 1 .

Problème 2017-18(29). Un nombre fini de lapins jouent au jeu suivant : portant chacun un chapeau blanc ou noir, mais chacun ignorant la couleur du chapeau qu'il porte, ils se mettent en ligne en regardant tous dans la direction du premier de la ligne, en sorte qu'ils ne puissent voir la couleur que des chapeaux des lapins situés devant eux dans la ligne. En commençant par le dernier de la ligne, chacun va dire à haute voix (les autres l'entendent) la couleur qui est, à son avis, celle de son propre chapeau. Ces lapins ont pu se mettre d'accord au préalable sur une stratégie. On demande quelle stratégie adopter pour que collectivement, les lapins ne se trompent pas plus d'une fois.

Variante : les lapins sont, cette fois-ci, en nombre dénombrable, et ils se mettent à nouveau en ligne, mais s'il y a bien un lapin en queue de ligne (qui voit tous les autres chapeaux), il n'y en a pas en tête car la ligne est infinie. Dans ce nouveau jeu, les lapins ont le droit de se tromper un nombre fini de fois, mais ils chuchotent leur réponse en sorte que les autres lapins ne l'entende pas. Peuvent-ils mettre au point une stratégie commune (qui peut utiliser des données non dénombrable, ainsi que l'axiome du choix) qui leur permette de réaliser cet exploit ?

Problème 2017-18(30). On se donne un convexe compact C de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , puis on note $B = \partial C$ le bord (topologique) de C ; avec ces notations, on considère l'ensemble $D = \{a + b; a \in B \text{ et } b \in B\}$. Il s'agit de montrer que D est convexe.

Pour terminer la séance, un participant donne la solution de la première forme du problème des lapins (problème (29) ci-dessus) : les lapins ont convenu que le dernier de la file annoncerait "un chapeau blanc" si le nombre de chapeaux blancs qu'il voit est impair, et qu'il annoncerait "un chapeau noir" si ce nombre est pair. Bien sûr, cette convention n'a aucun rapport avec la vraie couleur du chapeau qu'il porte, et il est possible que sa réponse soit fautive. Mais l'avant-dernier de la file connaît maintenant cette parité parmi les chapeaux qu'il voit plus le sien, et peut donc en déduire la couleur de son chapeau ; et chaque lapin l'un après l'autre connaît cette même parité parmi les chapeaux qu'il voit plus le sien plus ceux qui ont été annoncés sans erreur, et peut à son tour en déduire la couleur de son chapeau. ■

Séance du 7 février 2018

La séance débute par la description d'un procédé permettant de calculer les nombres $S_n^a = \sum_{k=1}^n k^a$. Il est immédiat de noter que $S_n^0 = n$, et on peut calculer S_n^1 en effectuant le changement d'indice $k = n + 1 - j$ dans la somme, ce qui donne $S_n^1 = \sum_{j=1}^n (n + 1 - j) = n(n + 1) - S_n^1$, puis $S_n^1 = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

L'étape suivante consiste à écrire

$$\begin{aligned} S_{n+1}^3 &= 1 + \sum_{k=2}^{n+1} k^3 = 1 + \sum_{j=1}^n (j+1)^3 = \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n (j^3 + 3j^2 + 3j + 1) = 1 + S_n^3 + 3S_n^2 + 3S_n^1 + S_n^0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$S_n^2 = \frac{1}{3}(S_{n+1}^3 - S_n^3 - 3S_n^1 - S_n^0 - 1).$$

On a $S_{n+1}^3 - S_n^3 = (n+1)^3$, et les autres termes ont été précédemment calculés, ce qui permet de donner l'expression de S_n^2 en fonction de n sans somme.

Ce procédé permet de calculer les S_n^a par récurrence sur a : en partant de S_{n+1}^{a+1} , on obtient $S_n^a = \frac{1}{a+1}((n+1)^{a+1} + \text{des termes ayant été calculés avant})$. ■

On nous donne ensuite la solution de la deuxième forme du problème des lapins (problème **(29)** du 31 janvier). La stratégie commune adoptée par nos lapins sera de considérer la relation d'équivalence suivante sur les suites ne prenant que les deux valeurs "blanc" ou "noir" : $(u_n) \sim (v_n)$ si $u_n = v_n$ pour tout indice n sauf pour un nombre fini d'indices, puis de retenir (grâce à l'axiome du choix) pour chaque classe d'équivalence un représentant. Une fois que les lapins sont disposés en file, chacun d'entre eux, regardant l'infinité des chapeaux s'étendant devant lui, peut reconnaître dans quelle classe d'équivalence on se trouve, et annoncer la couleur de chapeau qu'il aurait si les couleurs étaient celles du représentant choisi ; avec cette stratégie, seuls des lapins en nombre fini peuvent se tromper. ■

Puis on donne la solution du problème **(24)** du 24 janvier : le polynôme P étant scindé, il s'écrit $\sum_{k=0}^n a_k X^k = P(X) = a_n \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ pour des réels λ_k ; alors on peut écrire

$$\sum_{k=0}^n a_k Q^{(k)} = P\left(\frac{d}{dX}\right)Q = a_n \prod_{k=1}^n \left(\frac{d}{dX} - \lambda_k\right)Q.$$

Par récurrence sur n , il suffit donc de prouver que si Q est un polynôme scindé, alors $Q' - \lambda Q$ est aussi un polynôme scindé. Cela se démontre en considérant la fonction f de classe C^1 définie par $f(x) = Q(x) e^{-\lambda x}$: si Q est scindé de degré m , cette fonction possède m zéros réels, et par le théorème de Rolle, sa dérivée $f'(x) = (Q'(x) - \lambda Q(x)) e^{-\lambda x}$ possède au moins $m - 1$ zéros réels ; comme l'exponentielle ne s'annule pas, ces zéros sont des racines réelles du polynôme $Q' - \lambda Q$, et la dernière racine complexe de ce polynôme (quand $\lambda \neq 0$) est aussi réelle puisque les racines non-réelles ne viennent que par paires conjuguées. On a ainsi prouvé que $Q' - \lambda Q$ est scindé, ce qui termine la preuve. ■

À propos du problème **(27)** du 31 janvier (quatre points pris "au hasard" sur une sphère), une indication nous est donnée par une preuve esquissée dans le cas de la dimension 2 avec trois points sur un cercle. Nous y reviendrons la semaine prochaine.

Séance du 14 février 2018

On commence par une tentative de calcul de la série **(22)** du 24 janvier, en regardant les sommes partielles de la série comme des sommes de Riemann. Mais cela ne fonctionne pas, car il y a une tentative de passer à la limite $n \rightarrow \infty$ dans une partie seulement des n , gardant les autres pour passer à la limite plus tard, ce qui n'est pas licite.

On donne ensuite la solution du problème **(23)** du 24 janvier sur l'étude d'une suite (I_n) d'intégrales. Pour montrer que la suite (I_n) est croissante, on considère

$$I_{n+1} - I_n = \int_a^b (f/g)(x)^{n+1} (f(x) - g(x)) dx = \int_{f \geq g} (f/g)^{n+1} (f - g) - \int_{f \leq g} (f/g)^{n+1} (g - f).$$

Comme $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, on a aussi $\int_{f \geq g} (f - g) = \int_{f \leq g} (g - f)$, d'où

$$\int_{f \geq g} (f/g)^{n+1} (f - g) \geq \int_{f \geq g} (f - g) = \int_{f \leq g} (g - f) \geq \int_{f \leq g} (f/g)^{n+1} (g - f),$$

et donc $I_{n+1} - I_n \geq 0$, et la suite (I_n) est croissante.

Pour voir que cette suite tend vers l'infini, on remarque que $\int_a^b (g - f)(x) dx = 0$ et que l'on ne peut donc avoir $f \leq g$ que si $f \equiv g$ (ces fonctions sont continues), ce qui est interdit par l'énoncé ; toujours par continuité, il existe un intervalle $[c, d] \subset [a, b]$ avec $c < d$ sur lequel $(f/g) \geq r$ pour un réel $r > 1$. Alors $I_n = \int_a^b (f/g)(x)^{n+1} g(x) dx \geq r^{n+1} \int_c^d g(x) dx = \delta r^{n+1}$ avec $\delta > 0$ et $r > 1$, d'où $\lim I_n = +\infty$. ■

On donne ensuite un début de solution du problème **(30)** du 31 janvier en prouvant que tout point d'un convexe est le milieu de deux points de son bord. Mais on ne sait pas conclure pour le moment.

La séance se termine avec une nouvelle liste de problèmes.

Problème 2017-18(31). Pour deux entiers a et $r \geq 2$, montrer que si a^r est premier, alors r est premier et $a = 2$.

Problème 2017-18(32). Soient p un nombre premier impair, et $a \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que $(1 + p)^{p^a}$ est congru à $1 + p^{a+1}$ modulo p^{a+2} .

Problème 2017-18(33). Montrer que la suite harmonique $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ne prend pas de valeurs entières pour $n > 1$.

Problème 2017-18(34). Pour $x \in]-1, 1[$, résoudre $\sum_{k=0}^{\infty} (3k + 1)^2 x^k = 0$.

Problème 2017-18(35). (Lemme de Gauss) Soient Q et R deux polynômes à coefficients entiers, et p un nombre premier. Montrer que si p divise tous les coefficients de QR , alors il divise tous les coefficients de Q ou tous les coefficients de R . Si maintenant Q et R sont à coefficients rationnels et QR à coefficients entiers, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ tel que λQ et R/λ soient tous deux à coefficients entiers.

Problème 2017-18(36). Peut-on colorier chaque point du plan \mathbb{R}^2 de l'une des deux couleurs "blanc" ou "noir" en sorte qu'aucun segment de longueur > 0 ne soit unicolore ?

Pour ce dernier problème **(36)** une solution est aussitôt proposée : on fixe une origine O , on colorie les cercles de centre O et de rayon rationnel en blanc, et tous les autres points en noir. Un segment de longueur > 0 ne pouvant être contenu dans un cercle, la distance de ses points à l'origine prend plusieurs valeurs de façon continue, et prend donc des valeurs rationnelles (points blancs) et irrationnelles (points noirs). ■

Séance du 21 février 2018

Solution du problème (30) du 31 janvier (convexité de $\partial C + \partial C$ quand C est convexe). On prouve d'abord que toute demi-droite issue d'un point intérieur m d'un compact convexe C de \mathbb{R}^2 coupe la frontière de ce compact en point unique, et que la distance séparant m du point d'intersection avec la frontière varie continûment lorsque la demi-droite tourne autour de m . On en déduit que tout point intérieur de C est le milieu d'un segment $[e, f]$ avec e et $f \in B = \partial C$ (et c'est évidemment vrai aussi pour un point frontière m en prenant $e = f = m$). Soient alors deux points $a + b$ et $c + d \in D = B + B$, c'est-à-dire avec a, b, c et $d \in B$, puis un point $m \in [a + b, c + d]$: on montre que le milieu $m' = \frac{1}{2}m$ entre m et l'origine est dans C , donc qu'il est lui-même milieu de deux points e et $f \in B$, ce qui entraîne que $m = e + f \in D = B + B$. L'ensemble D est donc convexe. ■

Une variante consiste à observer que D est l'homothétique de rapport 2 de l'ensemble des milieux des segments $[a, b]$ pour a et $b \in B$, et sera donc convexe si et seulement si l'ensemble $\frac{1}{2}D$ de ces milieux est lui-même convexe. Or l'ensemble de ces milieux est égal à C lui-même. En effet, on a déjà $\frac{1}{2}D \subset C$ par convexité, et pour montrer l'inclusion dans l'autre sens on raisonne comme plus haut en montrant que tout point de C est le milieu d'un segment dont les extrémités sont dans B . ■

On donne ensuite une méthode pour calculer la somme de la série du problème (22) du 24 janvier. Pour $k > 0$, on pose

$$a_k = \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln(k+1)}{k+1},$$

ce qui permet d'écrire le terme général de notre série sous la forme

$$\begin{aligned} & \left(3 \frac{\ln(4k+2)}{4k+2} - \frac{\ln(4k+3)}{4k+3} - \frac{\ln(4k+4)}{4k+4} - \frac{\ln(4k+5)}{4k+5} \right) = \\ & = 3a_{4k+2} + 2a_{4k+3} + a_{4k+4} = 2(a_{4k+2} + a_{4k+3}) + (a_{4k+2} + a_{4k+4}) = \\ & = 2 \left(\frac{\ln 2 + \ln(2k+1)}{4k+2} - \frac{\ln 2 + \ln(2k+2)}{4k+4} \right) + (a_{4k+2} + a_{4k+4}) = \\ & = \ln 2 \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) + a_{2k+1} + (a_{4k+2} + a_{4k+4}). \end{aligned}$$

On peut alors passer à la somme de $k = 0$ à $k \rightarrow \infty$ pour voir que la somme de notre série vaut $(\ln 2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ car la série de terme général a_k étant à termes positifs pour $k \geq 3$, elle est commutativement convergente. Or

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} = -\frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

pour tout $n > 0$, ce qui permet de conclure que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0$, puis que notre série a pour somme $(\ln 2)^2$. ■

Et voici une variante de ce calcul : en utilisant le résultat de comparaison d'une série et d'une intégrale : si f est continue, positive et décroissante sur $[p, \infty[$, alors la suite $\delta_n = \sum_{k=p}^n f(k) - \int_p^n f(t) dt$ converge vers une limite finie. En appliquant ce résultat aux deux fonctions $f(t) = 1/t$ et $f(t) = (\ln t)/t$ positives et décroissantes respectivement sur $[1, \infty[$ et sur $[e, \infty[$, on en déduit les développements suivants

$$h_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \quad \text{et} \quad g_n := \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \beta + o(1)$$

pour deux constantes réelles γ et β . On peut alors considérer les sommes partielles u_n de notre série, qui s'écrivent

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(3 \frac{\ln(4k+2)}{4k+2} - \frac{\ln(4k+3)}{4k+3} - \frac{\ln(4k+4)}{4k+4} - \frac{\ln(4k+5)}{4k+5} \right) = \\ &= 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\ln(4k+2)}{4k+2} + \frac{\ln(4k+4)}{4k+4} \right) - 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\ln(4k+4)}{4k+4} \right) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\ln(4k+2)}{4k+2} + \frac{\ln(4k+3)}{4k+3} + \frac{\ln(4k+4)}{4k+4} + \frac{\ln(4k+5)}{4k+5} \right). \end{aligned}$$

On récrit séparément ces trois sommes sous la forme

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\ln(4k+2)}{4k+2} + \frac{\ln(4k+4)}{4k+4} \right) &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(\ln 2) + \ln(2k+1)}{2k+1} + \frac{(\ln 2) + \ln(2k+2)}{2k+2} \right) = \\ &= 2 (\ln 2) h_{2n} + 2 g_{2n}, \\ 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\ln(4k+4)}{4k+4} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(\ln 4) + \ln(k+1)}{k+1} \right) = 2 (\ln 2) h_n + g_n, \\ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\ln(4k+2)}{4k+2} + \frac{\ln(4k+3)}{4k+3} + \frac{\ln(4k+4)}{4k+4} + \frac{\ln(4k+5)}{4k+5} \right) &= g_{4n+1}, \end{aligned}$$

si bien que l'on a

$$\begin{aligned} u_n &= 2 (\ln 2) (h_{2n} - h_n) + 2 g_{2n} - g_n - g_{4n+1} = \\ &= 2 (\ln 2) (\ln 2 + o(1)) + (\ln(2n))^2 - \frac{1}{2} (\ln n)^2 - \frac{1}{2} (\ln(4n+1))^2 + o(1) = \\ &= 2 (\ln 2)^2 + (\ln 2 + \ln n)^2 - \frac{1}{2} (\ln n)^2 - \frac{1}{2} (2 \ln 2 + \ln n + \mathcal{O}(\frac{1}{n}))^2 + o(1) = \\ &= 2 (\ln 2)^2 - (\ln 2)^2 + o(1) = (\ln 2)^2 + o(1), \end{aligned}$$

soit finalement $\lim u_n = (\ln 2)^2$. ■

Séance du 28 février 2018

On revient sur le vieux problème (11) du 15 novembre 2017 : montrer qu'il y a autant de points dans l'ensemble triadique de Cantor C_∞ que dans le segment $[0, 1]$ en construisant une bijection entre ces deux ensembles.

Le 15 novembre, on avait plus ou moins démontré qu'il y a une bijection entre les suites d'éléments de $\{0, 2\}$ et l'ensemble C_∞ , bijection qui associe à une telle suite $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k>0}$ le réel $\psi(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \varepsilon_k$; on peut alors définir une surjection de $f : C_\infty \rightarrow [0, 1]$ en posant $f = \varphi \circ \psi^{-1}$ avec $\varphi(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} \varepsilon_k$. En effet, pour voir que f est surjective, on prend un $y \in [0, 1]$ quelconque, on écrit $y = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_k$ son (ou plutôt l'un de ses) développement(s) dyadique(s), puis on pose $x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} 2\delta_k$ qui vérifie bien $\psi^{-1}(x) = (2\delta_k)_{k>0}$ puis $f(x) = \varphi(2\delta) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_k = y$. Mais on voit en même temps que f n'est pas injective car un réel peut avoir plusieurs développements dyadiques distincts.

Cependant, si l'on restreint f aux parties de C_∞ et de $[0, 1]$ formés des réels ayant un seul développement triadique (pour C_∞) ou dyadique (pour $[0, 1]$), alors la fonction f devient bijective ; les parties enlevées étant dénombrables, elles sont aussi bijectives entre elles, et on peut donc redéfinir f entre ces parties dénombrables pour en faire une fonction globalement bijective entre C_∞ et $[0, 1]$. ■

On nous propose ensuite un petit exposé sur l'**hydre de Kirby** : l'hydre est un "arbre" dont la racine est le *corps*, dont les arêtes sont les *cous*, et dont les nœuds terminaux sont les *têtes* ; chaque nœud est relié par un unique cou à la partie inférieure de l'hydre (structure d'arbre). Pour vaincre l'hydre, Hercule doit en couper toutes les têtes. S'il coupe une tête directement reliée par son cou au corps (sans nœud intermédiaire), celle-ci ne repousse pas ; mais s'il coupe une tête reliée par son cou à un nœud intermédiaire (qui n'est pas le corps) que nous appellerons n et qui est lui-même attaché par son cou à un nœud N inférieur, alors ce nœud n , ainsi que le cou qui le porte et que tout ce qui est attaché à n et qui n'a pas encore été coupé (autres cous, autres nœuds intermédiaires et autres têtes) se reproduit en plusieurs exemplaires sur le nœud N : d'abord en un exemplaire, puis en deux, puis en trois et ainsi de suite. Hercule parviendra-t-il à vaincre l'hydre ?

Kirby a démontré que la victoire d'Hercule est *indécidable* sous les seuls axiomes de l'arithmétique de Peano, mais qu'Hercule vaincra grâce aux axiomes de Zermelo-Fraenkel. Sous ces derniers axiomes, on dispose en effet des *nombres ordinaux* que l'on peut décrire ainsi : après les entiers naturels $0, 1, 2, \dots$, on a un premier nombre infini noté ω , puis $\omega + 1, \omega + 2, \dots$, ensuite $2\omega, 2\omega + 1, \dots, \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \dots, 2\omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega$, etc. ; le résultat crucial est alors le théorème affirmant que *Toute suite strictement décroissante d'ordinaux est finie (ou, si l'on préfère, arrive à 0 en un temps fini)*. On peut alors résoudre le problème d'Hercule de la façon suivante : à chaque forme successive de l'hydre, on associe une note qui est un ordinal en sorte que lorsqu'Hercule coupe une tête, la note décroît strictement ; le théorème précédent permet alors de conclure, et même de conclure qu'Hercule vaincra quelle que soit sa stratégie. La note est fabriquée ainsi : à chaque tête on associe l'ordinal 0 , à chaque cou on associe l'ordinal ω à la puissance la valeur du nœud qu'il porte (et donc les cous portant directement une tête reçoivent la note $\omega^0 = 1$), et à chaque nœud (autre que les têtes) on associe la somme des ordinaux associés aux différents cous partant de ce nœud ; on montre alors facilement que la note du corps (c'est-à-dire du nœud initial) décroît strictement à chaque fois que l'on coupe une tête de l'hydre. ■

Séance du 14 mars 2018

On commence par l'énoncé d'un nouveau problème.

Problème 2017-18(37). Soit f une fonction localement intégrable sur \mathbb{R}^n vérifiant que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $r \mapsto r^{-n} \int_{|y-x| \leq r} |f(y)| dy$ est dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Est-il vrai que l'on peut en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $r \mapsto r^{1-n} \int_{|y-x|=r} |f(y)| d\sigma_r(y)$ est aussi dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$?

On réfléchit collectivement sur ce problème : on mentionne que les deux intégrales sont liées par la relation $\int_{|y-x| \leq r} |f(y)| dy = \int_0^r \left(\int_{|y-x|=s} |f(y)| d\sigma_s(y) \right) ds$. Par ailleurs, on reformule la question en dimension $n = 1$ de la façon suivante : sachant que $\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx \leq C_{(a+b)/2}$, a-t-on $f \in L^\infty(\mathbb{R})$? On fabrique un contre-exemple en prenant pour f une scie avec, en chaque point $k \in \mathbb{N}^*$, une dent de largeur $1/k$ et de hauteur k . Il y a un problème d'uniformité par rapport à x qui n'est pas supposée dans l'hypothèse. On fait encore remarquer qu'un théorème de Lebesgue (qui affirme que f est égale presque partout à la limite de ses moyennes sur des boules dont le rayon tend vers 0) permet de conclure si l'estimation de départ est uniforme en x . On pose aussi la question : en rajoutant que f est continue, pourrait-on conclure plus facilement ?

On reparle ensuite des problèmes **(32)** (de congruence modulo p^{a+2}) et **(33)** (valeurs non-entières de la suite harmonique) du 14 février, mais sans les résoudre.

Enfin, on donne une solution du problème (27) du 31 janvier (quatre points sur une sphère). L'idée est d'utiliser la symétrie de la sphère. La probabilité qu'un point tombe sur l'équateur étant nulle, on peut représenter la loi de probabilité d'un point comme le produit tensoriel de la loi uniforme pour la droite vectorielle à laquelle appartient ce point par la probabilité $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ d'être, sur cette droite, dans l'hémisphère nord ou l'hémisphère sud. On représente donc la probabilité conjointe pour les quatre points comme un produit tensoriel de la probabilité conjointe pour les quatre droites portant ces points par les probabilités $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pour chacun des quatre points. On peut encore observer que la probabilité que trois des quatre droites soient coplanaires est nulle, si bien qu'on peut supposer que ceci ne se produit pas.

On a donc quatre vecteurs directeurs de droites u_1, u_2, u_3 et u_4 (disons pris dans l'hémisphère nord) avec une certaine loi de probabilité, et nos quatre points sont alors $(\pm u_1, \pm u_2, \pm u_3, \pm u_4)$ avec probabilité $\frac{1}{16}$ pour chacune de ces combinaisons. Les quatre vecteurs u_j pouvant être supposés non coplanaires, l'application $\mathbb{R}^4 \ni \lambda \mapsto \sum_{j=1}^4 \lambda_j u_j$ est de rang 3, et la dimension de son noyau est 1; il en résulte qu'il existe un $\lambda^0 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tel que l'on ait $\sum_{j=1}^4 \lambda_j u_j = 0$ si et seulement si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = k \lambda^0$ pour un $k \in \mathbb{R}$; et comme les u_j sont trois à trois indépendants, on a même $\lambda^0 \in (\mathbb{R}^*)^4$.

Le point 0 étant situé dans le tétraèdre de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq 4}$ si et seulement s'il existe des $\lambda_j \geq 0$ de somme 1 tels que $\sum_{j=1}^4 \lambda_j a_j = 0$, on voit alors que parmi les 16 possibilités $(\pm u_1, \pm u_2, \pm u_3, \pm u_4)$, il y en a deux et seulement deux qui possèdent cette propriété; il en résulte que pour (presque) chaque choix de droites, il y a probabilité $\frac{1}{8}$ que le point 0 soit dans le tétraèdre, et donc cela reste vrai globalement sans qu'il soit besoin d'explicitier la loi conjointe pour les quatre droites. ■

Séance du 21 mars 2018

On commence par donner une solution du problème (32) du 14 février sur des congruences. Le cas $a = 0$ étant immédiat, on peut supposer que $a > 0$. Par la formule du binôme, on peut écrire

$$(1+p)^{p^a} = \sum_{k=0}^{p^a} \binom{p^a}{k} p^k = 1 + p^{a+1} + \sum_{1 < k < p^a} \binom{p^a}{k} p^k + p^{a+p^a}.$$

Comme $p \geq 3$ et que $a > 0$, on a $p^a \geq 3$, et donc le dernier terme p^{a+p^a} est divisible par p^{a+2} . Pour $1 < k < p^a$, on peut écrire $p^a - k = p^b n$ avec $p \wedge n = 1$ (et $b \leq a$), et donc aussi

$$\binom{p^a}{k} p^k = \binom{p^a - 1}{k} \frac{p^{a+k}}{p^a - k} = \frac{1}{n} \binom{p^a - 1}{k} p^{a+k-b} = m_k p^{a+k-b}$$

pour un entier m_k puisque cette expression est entière et que $p \wedge n = 1$. Quand $b = 0$, on a $k - b \geq 2$ puisque $k > 1$, tandis que si $b > 0$, on a $p^b | k$, d'où $k \geq p^b \geq b + 2$ et donc encore $k - b \geq 2$; il en résulte que tous ces termes sont divisibles par p^{a+2} . ■

Puis c'est une avalanche de nouveaux problèmes.

Problème 2017-18(38). Prouver que la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 2017-18(39). Pour $k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$, trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur la longueur $a > 0$ pour qu'il existe un tétraèdre ayant k arêtes de longueur a et les $6 - k$ arêtes restantes de longueur 1.

Problème 2017-18(40). Dans l'espace vectoriel E des formes quadratiques sur \mathbb{R}^n , montrer que l'ensemble des formes quadratiques définies positives forme un ouvert de E .

Problème 2017-18(41). Un soldat doit repérer la présence de mines dans une région ayant la forme d'un triangle équilatéral à l'aide d'un détecteur dont le rayon d'action est égal à la moitié de la hauteur du triangle. Partant d'un sommet du triangle, quel chemin de longueur minimum doit-il emprunter pour tester la totalité de la région ?

Problème 2017-18(42). Dans un plan, on se donne deux cercles C_1 et C_2 se coupant en A et B (éventuellement confondus). Deux points mobiles, M_1 sur C_1 et M_2 sur C_2 , partent simultanément du point A , et tournent dans le même sens et avec la même périodicité, chacun à une vitesse uniforme. Montrer qu'il existe un point constamment équidistant de M_1 et M_2 .

Séance du 28 mars 2018

On commence par proposer une solution du problème (40) du 21 mars sur les formes quadratiques dans \mathbb{R}^n , mais cette solution s'avère foireuse, et le problème reste ouvert !

On attaque ensuite le problème (39) du 21 mars sur les tétraèdres ayant des arêtes de deux longueur $a > 0$ et 1 données. Pour $k = 0$ ou $k = 6$, il n'y a aucune condition sur a pour qu'il existe un tétraèdre ayant ses six arêtes égales à 1 ou à a : c'est tout simplement le tétraèdre régulier.

Pour $k = 1$, les cinq arêtes de longueur 1 constituent les bords de deux des faces du tétraèdre, qui sont donc des triangles équilatéraux ; considérant le bord commun de ces deux faces comme une charnière, on voit que l'arête restante a une longueur comprise entre 0 et deux fois la hauteur de ces triangles, soit $a < \sqrt{3}$. Le cas $k = 5$ se traite en échangeant les rôles de 1 et a , si bien que la cns demandée devient ici $a > 1/\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Pour $k = 3$, si l'on a une face équilatérale de côté 1, pour toute longueur a dépassant les $\frac{2}{3}$ d'une hauteur de ce triangle, soit $a > \frac{1}{3}\sqrt{3}$, on peut construire sur cette face un tétraèdre dont les trois autres arêtes sont de longueur a ; et réciproquement, si l'on a une face équilatérale de côté $a < \sqrt{3}$, on peut construire sur cette face un tétraèdre dont les trois autres arêtes sont de longueur 1. Par conséquent, il n'y a dans ce cas aucune condition à mettre sur $a > 0$: l'existence du tétraèdre est toujours assurée.

Restent à traiter les cas $k = 2$ et $k = 4$, que nous gardons pour une autre fois. ■

On présente ensuite une solution du problème (38) toujours du 21 mars. Si d est un diviseur commun de $21n+4$ et de $14n+3$, c'est aussi un diviseur de $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$; il n'y a donc pas de diviseur commun > 1 . ■

Puis c'est au tour du problème (33) du 14 février sur les termes de la suite harmonique : nous allons démontrer, par récurrence sur l'entier n , que pour tout entier $n \geq 2$ vérifiant $2^k \leq n < 2^{k+1}$, le nombre h_n peut s'écrire $h_n = \frac{a_n}{2^k b_n}$ pour deux entiers a_n et b_n impairs ; cela entraîne clairement que h_n ne peut pas être entier.

L'initialisation de cette récurrence est immédiate puisque $h_2 = \frac{3}{2}$ est de la forme prescrite avec $a_2 = 3$ et $b_2 = 1$. Supposons donc cette propriété vérifiée jusqu'à un rang n vérifiant $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Alors de deux choses l'une :

- ou bien $n + 1 < 2^{k+1}$, auquel cas $n + 1 = 2^j c_n$ pour deux entiers c_n impair et $j < k$; on peut alors écrire

$$h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1} = \frac{a_n}{2^k b_n} + \frac{1}{2^j c_n} = \frac{a_n c_n + 2^{k-j} b_n}{2^k b_n c_n} = \frac{a_{n+1}}{2^k b_{n+1}}$$

avec $a_{n+1} = a_n c_n + 2^{k-j} b_n$ et $b_{n+1} = b_n c_n$ tous deux impairs ;

- ou bien $n + 1 = 2^{k+1}$, auquel cas

$$h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1} = \frac{a_n}{2^k b_n} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2a_n + b_n}{2^{k+1} b_n} = \frac{a_{n+1}}{2^{k+1} b_{n+1}}$$

avec $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = b_n$ tous deux impairs ;

et dans les deux cas, on a bien montré que h_{n+1} est de la forme prescrite. ■

On commence ensuite des calculs sur le problème (42) du 21 mars, mais sans arriver au bout, si bien que ce problème reste, lui aussi, ouvert.

Séance du 11 avril 2018

La séance s'ouvre avec la présentation de deux nouveaux problèmes.

Problème 2017-18(43). (Lemme du bras, de Cauchy) *On se donne (m_1, m_2, \dots, m_n) et $(m'_1, m'_2, \dots, m'_n)$ deux polygones convexes du plan euclidien vérifiant $m'_i m'_{i+1} = m_i m_{i+1}$ pour tout $1 \leq i < n$. Si on note α_i l'angle en m_i et α'_i l'angle en m'_i , il s'agit de montrer que les conditions $\alpha'_i \geq \alpha_i$ pour tout $1 < i < n$ entraînent que $m'_n m'_1 > m_n m_1$.*

À la suite de cet énoncé, on mentionne que ce lemme est également valide en géométrie sphérique, et que c'est en réalité en géométrie sphérique qu'il est utile, dans la démonstration du théorème de rigidité de Cauchy sur les polyèdres convexes de l'espace \mathbb{R}^3 euclidien.

Problème 2017-18(44). (Lemme de recouvrement, de Besicovitch) *Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n on se donne une partie bornée A , et en chaque point x de A un cube $q(x)$ de centre x et de rayon $r_x > 0$. Il s'agit ici de montrer que l'on peut extraire de cette famille de cubes une suite (q_k) telle que $A \subset \cup_k q_k$ et que $\sum_k \mathbb{1}_{q_k} \leq \theta_n$ où θ_n ne dépend que de la dimension n de l'espace ambiant (autrement dit, en chaque point, le chevauchement des cubes sélectionnés est borné par θ_n).*

On mentionne la variante (recouvrement de Whitney) : pour tout fermé F de \mathbb{R}^n , on peut recouvrir le complémentaire de F par des cubes d'intérieurs disjoints et dont le diamètre est compris entre la distance à F et quatre fois cette distance.

On conclut cette séance par une solution au problème (41) du 21 mars sur le trajet de détection de mines. Prenant comme unité de longueur le côté de la région triangulaire, le rayon d'action du détecteur vaut $r = \frac{1}{4}\sqrt{3}$. On note a, b et c les sommets du triangle, et le soldat part de a . S'il veut tout visiter, il devra passer par un point b' tel que $bb' \leq r$ et par un point c' tel que $cc' \leq r$. Par symétrie, il revient au même qu'il passe d'abord par b' ou d'abord par c' ; supposant donc qu'il passe d'abord par b' , son chemin est alors de longueur $\geq ab' + b'c'$; si maintenant on note d le point du segment $[a, b']$ vérifiant $bd = r$ puis e le point du segment $[d, c]$ vérifiant $ec = r$, le trajet $a \rightarrow d \rightarrow e$, de longueur $ad + de$ sera plus court que le trajet $a \rightarrow b' \rightarrow c'$ de longueur $ab' + b'c' \geq ad + dc' \geq ad + de$.

On cherche alors le trajet du type $a \rightarrow d \rightarrow e$ qui minimise la distance $ad + de$; or $ad + de = ad + dc - r$ et il revient donc au même de minimiser la somme $ad + dc$; de plus, le lieu des points d tels que $ad + dc$ est constant est une ellipse de foyers a et c , si bien que le point d cherché se trouve à l'intersection du cercle de centre b et de rayon r avec la médiatrice de $[a, c]$. On constate alors que ce trajet non seulement couvre bien les sommets b et c du triangle, mais aussi tous les points de la région triangulaire à explorer.

Pour finir, on calcule le chemin parcouru : le point d se trouve à une distance $\frac{1}{2}r$ du segment $[b, c]$, et sa projection sur ce segment se trouve à une distance $\frac{1}{2}\sqrt{3}r$ du point b , et donc à une distance $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ du milieu de $[b, c]$; la distance ad^2 vaut donc $(\frac{3}{2}r)^2 + (\frac{1}{8})^2 = \frac{27+1}{64} = \frac{7}{16}$. Et la longueur du chemin vaut $ad + de = ad + dc - r = 2ad - r = \frac{1}{4}(2\sqrt{7} - \sqrt{3})$. ■

Séance du 18 avril 2018

On démarre la séance avec une solution du problème (31) du 14 février sur la primalité de $a^r - 1$. Écrivons $r = pq$ avec p et q entiers. Alors $a^r - 1 = (a^q - 1)(\sum_{k=0}^{p-1} a^{kq})$, ce qui est un produit de deux entiers ; si $p > 1$, la somme contient au moins deux termes $a^{kq} \geq 1$ si bien que cette somme est ≥ 2 , et comme $a^r - 1$ est premier, il en résulte que l'autre facteur $(a^q - 1)$ est égal à 1, d'où $a = 2$ et $q = 1$; on en tire que r est premier (puisque $r = pq$ et $p > 1$ entraînent $q = 1$), puis en prenant $p = r > 1$, que $a = 2$. ■

On nous propose ensuite une preuve du lemme du bras, de Cauchy, c'est-à-dire du problème (43) du 11 avril. La preuve procède par récurrence sur le nombre n de sommets des polygones.

On initialise à $n = 3$: en notant $a = m_1m_2 = m'_1m'_2$ et $b = m_2m_3 = m'_2m'_3$, et en utilisant que $\alpha'_2 \geq \alpha_2 \Rightarrow \cos \alpha'_2 \leq \cos \alpha_2$ puisque la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$, la formule d'Al Kashi permet d'écrire que $m'_3m'_1{}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha'_2 \geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha_2 = m_3m_1{}^2$, d'où le résultat voulu.

Pour prouver l'hérédité, on introduit une figure intermédiaire, qui est le polygone $P^* = (m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m^*)$ où on a remplacé le dernier sommet m_n du polygone $P = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ par un sommet m^* vérifiant : $m_{n-1}m^* = m_{n-1}m_n = m'_{n-1}m'_n$ et tel que l'angle $\alpha^* \in [\alpha_{n-1}, \alpha'_{n-1}]$ en m_{n-1} dans le polygone P^* soit l'angle maximum garantissant que P^* soit encore convexe. Alors de deux choses l'une : ou bien $\alpha^* = \alpha'_{n-1}$, ou bien $\alpha^* < \alpha'_{n-1}$.

Si (premier cas) on a $\alpha^* = \alpha'_{n-1}$, alors $m'_{n-2}m'_n = m_{n-2}m^*$ car les triangles (m_{n-2}, m_{n-1}, m^*) et $(m'_{n-2}, m'_{n-1}, m'_n)$ sont isométriques, et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux polygones $(m_1, \dots, m_{n-2}, m^*)$ et $(m'_1, \dots, m'_{n-2}, m'_n)$, ce qui montre que $m'_n m'_1 \geq m^* m_1$; de plus, le résultat (voir l'initialisation) pour les triangles (m_1, m_{n-1}, m_n) et (m_1, m_{n-1}, m^*) montre que $m^* m_1 \geq m_n m_1$ si bien que l'on a obtenu au total que $m'_n m'_1 \geq m_n m_1$.

Si (deuxième cas) on a $\alpha^* < \alpha'_{n-1}$, alors l'inégalité triangulaire usuelle permet d'écrire $m'_n m'_2 \leq m'_n m'_1 + m'_1 m'_2$ d'où $m'_n m'_1 \geq m'_n m'_2 - m_1 m_2$; l'hypothèse de récurrence appliquée aux polygones $(m_2, \dots, m_{n-1}, m^*)$ et $(m'_2, \dots, m'_{n-1}, m'_n)$ puis aux polygones $(m_2, \dots, m_{n-1}, m_n)$ et $(m_2, \dots, m_{n-1}, m^*)$ montre ensuite que $m'_n m'_2 \geq m^* m_2 \geq m_n m_2$, si bien que l'on a justifié que $m'_n m'_1 \geq m_n m_2 - m_1 m_2$; or $m_n m_2 - m_1 m_2 = m_n m_1$ car la condition $\alpha^* < \alpha'_{n-1}$ entraîne que les points m_2, m_1 et m^* sont alignés dans cet ordre. On a donc ici encore prouvé que $m'_n m'_1 \geq m_n m_1$.

La preuve en géométrie sphérique est identique, à l'exception de l'initialisation qui utilise une formule de trigonométrie sphérique à la place de celle d'Al Kashi. ■

Voici ensuite une preuve du lemme de recouvrement de Besicovitch, c'est-à-dire du problème (44) du 11 avril.

Soit $a_0 = \sup_{x \in A} r(x)$. Si $a_0 = \infty$, on peut trouver un cube q_0 qui contient A entièrement, et c'est donc fini. Sinon, on choisit la suite (q_k) de cubes itérativement de la façon suivante : avec $a_i = \sup_{x \in A \setminus \cup_{k < i} q_k} r(x)$, on choisit $q_i = q(x_i, r_i)$ avec $x_i \in A \setminus \cup_{k < i} q_k$ et $r_i > \frac{1}{2}a_i$. Reste à montrer que cette suite est solution du problème.

Si le processus s'arrête, c'est que $A \subset \cup_k q_k$. Sinon, montrons d'abord (par l'absurde) que les cubes $\frac{1}{3}q_k$ (définis comme les cubes de centre x_k et de rayon $\frac{1}{3}r_k$) sont deux à deux disjoints : pour $y \in \frac{1}{3}q_i \cap \frac{1}{3}q_j$ avec $i < j$, on a $x_j \notin q_i \Rightarrow r_i < |x_j - x_i| \leq |x_j - y| + |y - x_i| \leq \frac{1}{3}r_j + \frac{1}{3}r_i$ et donc $2r_i < r_j$, mais par définition de r_i on a aussi $r_j \leq a_i < 2r_i$ d'où la contradiction. On en déduit que $\text{mesure}(A + q(0, r_1)) \geq \text{mesure}(\cup_k \frac{1}{3}q_k) = \sum_k (\frac{2}{3}r_k)^n$, d'où l'on peut conclure que $\lim r_k = 0$. Alors s'il subsistait un point $x \in A \setminus \cup_k q_k$, on pourrait écrire que pour tout i , on a $r(x) \leq a_i < 2r_i$, et comme r_i tend vers 0, on aurait $r(x) = 0$ ce qui n'est pas permis. On a ainsi montré que $A \subset \cup_k q_k$ dans tous les cas.

Pour montrer la propriété $\sum_k \mathbb{1}_{q_k} \leq \theta_n$, on procède de la façon suivante. On se place en un point de A que l'on peut prendre comme l'origine de \mathbb{R}^n , et l'on va dénombrer les cubes de la famille qui ont leur centre dans le premier "quadrant" (points dont toutes les coordonnées sont positives) et qui contiennent 0. Soit q_k le cube de ce type de plus petit indice ; les autres cubes de ce type sont des cubes q_i qui vérifient $i > k \Rightarrow r_i \leq a_k < 2r_k$ et aussi $r_i \geq r_k$ puisque $x_i \notin q_k$ et que $0 \in q_i$. Alors les cubes q_i de ce type vérifient que les $\frac{1}{3}q_i$ sont disjoints les uns des autres, sont contenus dans un grand cube de rayon $\frac{5}{3}r_k$ et de mesure $(\frac{10}{3}r_k)^n$, et sont chacun de mesure $\geq (\frac{2}{3}r_k)^n$; le nombre de ces cubes est donc $\leq 5^n$. Enfin, comme il y a 2^n "quadrants", on obtient donc le résultat avec $\theta_n = 10^n$. ■

Application : l'inégalité maximale. Pour f intégrable, on pose $Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|q(x,r)|} \int_{q(x,r)} |f(y)| dy$. Alors pour tout $\lambda > 0$, on a $|\{x; Mf(x) > \lambda\}| \leq \theta_n \|f\|_{L^1} / \lambda$.

Preuve. Pour tout $x \in \{x; Mf(x) > \lambda\}$, il existe un $r(x) > 0$ tel que la moyenne de $|f|$ sur $q(x, r(x))$ soit $> \lambda$. Le lemme de recouvrement de Besicovitch permet alors de recouvrir cet ensemble par une suite de ces cubes, ce qui permet d'écrire que

$$|\{x; Mf(x) > \lambda\}| \leq \sum_k |q_k| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{q_k} |f(y)| dy \leq \theta_n \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda},$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

Séance du 25 avril 2018

C'est aujourd'hui la dernière séance de l'année. Nous allons tâcher d'y donner les solutions de la plupart de nos problèmes restés en suspens.

Nous commençons par revenir sur le problème (40) du 21 mars consistant à prouver que les formes quadratiques *définies positives* forment un ouvert de l'espace des formes quadratiques réelles, et dont la solution esquissée au 28 mars était insatisfaisante. Pour cela, on représente une forme quadratique f sur \mathbb{R}^n par la matrice symétrique A telle que $f(x) = {}^t x A x$, et on définit alors la topologie de l'espace des formes quadratiques par la norme $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$. En outre, une forme quadratique f est dite *définie positive* si $f > 0$ sur la sphère $|x| = 1$.

On observe alors que, pour une forme quadratique f de matrice A , on peut écrire $|f(x)| = |\langle x, Ax \rangle| \leq \|A\|$ pour tout x de norme 1 ; de plus, par compacité de la sphère $|x| = 1$ et continuité de f (qui est polynomiale en x), une forme quadratique f définie positive vérifie en réalité $f \geq \delta > 0$ sur cette sphère puisqu'elle y atteint son minimum ; alors pour une forme quadratique g de matrice $A + H$ avec $\|H\| < \delta$, on a $g(x) = f(x) + (g - f)(x) > \delta - \|H\| > 0$ sur la sphère, ce qui prouve que g est également définie positive. On a ainsi montré que si f est définie positive, toute la boule de centre f et de rayon δ est contenue dans l'ensemble des formes quadratiques définies positives, qui est donc un ouvert de l'espace des formes quadratiques. ■

Puis nous passons au problème **(39)** du 21 mars, dont nous avons donné une solution partielle dès la séance du 28 mars. On commence par résoudre le problème : trouver une cns sur a pour qu'il existe un tétraèdre ayant $k = 2$ arêtes de longueur a et $6 - k = 4$ arêtes de longueur 1. Il y a deux situations à considérer : ou bien les deux arêtes de longueur a ont un sommet en commun, ou bien non.

Dans le premier cas, le tétraèdre est dans une forme intermédiaire entre deux formes extrêmes aplaties, et l'on trouve que a doit donc vérifier $\sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; dans le deuxième cas, les deux arêtes de longueur a sont deux arêtes opposées : elles peuvent être aussi petites que l'on veut, mais leur longueur ne doit pas dépasser la valeur qu'elle a lorsque le tétraèdre est aplati, soit $a < \sqrt{2}$; en réunissant les deux cas, on voit que la cns cherchée pour le cas $k = 2$ est $a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Enfin, le cas $k = 4$ se ramène au cas $k = 2$ par une homothétie de rapport $1/a$, si bien que la cns cherchée dans ce cas est $a > 1/\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. ■

Nous passons ensuite au problème **(34)** du 14 février sur une équation comportant une série. On a $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 9(k + 2)(k + 1) - 21(k + 1) + 4$, et donc l'équation devient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (3k + 1)^2 x^k = 9 \sum_{k=0}^{\infty} (k + 2)(k + 1)x^k - 21 \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)x^k + 4 \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\ &= 9 \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \frac{1}{1 - x} - 21 \left(\frac{d}{dx} \right) \frac{1}{1 - x} + 4 \frac{1}{1 - x} = \frac{18 - 21(1 - x) + 4(1 - x)^2}{(1 - x)^3}, \end{aligned}$$

soit l'équation $4x^2 + 13x + 1 = 0$ dont la solution $x \in]-1, 1[$ est $x = (3\sqrt{17} - 13)/8$. ■

Voici ensuite une solution du problème **(35)** du 14 février (lemme de Gauss). Les polynômes Q et R étant à coefficients entiers, on note

$$Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, \quad R(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m,$$

et $Q(X)R(X) = c_0 + c_1X + \dots + c_{n+m}X^{n+m}$, et les coefficients c_ℓ de QR se calculent en fonction de ceux de Q et de R par les formules $c_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} a_i b_{\ell-i}$ (les a_j et b_k étant considérés comme nuls si l'indice dépasse le degré du polynôme). Si (par l'absurde) un nombre premier p divise tous les coefficients c_ℓ mais ni tous les coefficients a_j ni tous les coefficients b_k , on fixe les indices j et k comme les plus petits tels que p ne divise ni a_j ni b_k ; alors dans l'équation $c_{j+k} = \sum_{i=0}^{j-1} a_i b_{j+k-i} + a_j b_k + \sum_{i=j+1}^{j+k} a_i b_{j+k-i}$ le membre de gauche est divisible par p , ainsi que les deux sommes du membre de droite puisque dans la première $i < j \Rightarrow p|a_i$ et que dans la seconde $i > j \Rightarrow p|b_{j+k-i}$, mais p ne divise pas le terme $a_j b_k$, d'où la contradiction.

Une autre solution, plus conceptuelle, est alors proposée : considérant nos polynômes comme étant à coefficients dans $\mathbb{K} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, la condition que p divise tous les coefficients de Q revient à dire que $Q = 0$ dans $\mathbb{K}[X]$; le résultat à prouver dit alors seulement que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau *intègre*, ce qui est vrai puisque \mathbb{K} est un corps lorsque p est premier.

Pour la deuxième affirmation, on suppose que les polynômes Q et R sont à coefficients rationnels, et que QR est à coefficients entiers. On note d le plus petit entier tel que dQ soit à coefficients entiers ; alors si p est un facteur premier de d , il ne divise pas tous les coefficients de dQ par définition de d ; de même on note e le plus petit entier tel que eR soit à coefficients entiers, et les facteurs premiers de e ne divisent pas tous les coefficients de eR . Un facteur premier p de d divise tous les coefficients de $deQR = (dQ)(eR)$ mais pas tous les coefficients de dQ ; d'après la première affirmation démontrée plus haut, il en résulte que p divise tous les coefficients de eR , et que eR/p est donc encore un polynôme à coefficients entiers ; on a alors $(d/p)eQR = (dQ)(eR/p)$, et si d/p a encore des facteurs premiers, on peut répéter l'argument, d'où on déduit finalement que $eQR = (dQ)(eR/d)$ est une factorisation en deux polynômes dQ et eR/d à coefficients entiers. On reprend alors le raisonnement avec les facteurs premiers de e pour aboutir à la conclusion que $QR = (dQ/e)(eR/d)$, où les deux facteurs dQ/e et eR/d sont des polynômes à coefficients entiers. ■

Nous terminons cette séance (la dernière de l'année !) avec le problème **(42)** du 21 mars. On représente les points du plan par leurs affixes complexes en prenant l'origine au point A . Si c_1 et c_2 désignent les affixes des deux centres des cercles, les points M_1 et M_2 ont pour affixes au temps t les complexes $m_1 = c_1(1 - e^{it})$ et $m_2 = c_2(1 - e^{it})$. L'affixe z d'un point à égale distance de m_1 et m_2 doit vérifier $|z - c_1(1 - e^{it})|^2 = |z - c_2(1 - e^{it})|^2$, soit encore en développant

$$2 \operatorname{Re} (\bar{z} (c_2 - c_1) (1 - e^{it})) = (|c_2|^2 - |c_1|^2) |1 - e^{it}|^2 .$$

Or $\operatorname{Re} (1 - e^{it}) = 1 - \cos t = \frac{1}{2} (2 - 2 \cos t) = \frac{1}{2} |1 - e^{it}|^2$, si bien que $z = (|c_2|^2 - |c_1|^2) / (\bar{c}_2 - \bar{c}_1)$ résout le problème (le cas où $c_1 = c_2$ correspond au cas où les deux cercles sont confondus, si bien que dans ce cas $M_1 \equiv M_2$ et que le point cherché est évidemment indéterminé). Bien entendu, cette solution est frustrante car on aurait aimé une solution géométrique, avec une construction du point pivot ; on peut continuer à chercher une telle solution. ■



Appendice

Il convient ici de faire le bilan des problèmes posés au cours de l'année, afin d'identifier ceux qui n'ont pas reçu de solution.

Au 4 octobre 2017, on pose les problèmes **(1)**, **(2)** et **(3)** qui seront résolus le 11 octobre (ainsi qu'un problème **(2^{bis})**) ; un problème **(4)** partiellement résolu le 11 octobre, et un problème **(5)** jamais résolu.

Au 18 octobre, on pose un problème **(6)** qui sera résolu le 25 octobre.

Au 25 octobre, on pose un problème (7) qui sera résolu les 22 et 29 novembre, un problème (8) résolu les 15 et 22 novembre, et un problème (9) qui ne sera résolu que le 20 décembre.

Au 15 novembre, on pose un problème (10) résolu le 22 novembre, et un problème (11) qui ne sera résolu que le 28 février 2018.

Au 29 novembre, on pose un problème (12) qui sera résolu le 13 décembre, un problème (13) qui sera discuté les 6 et 13 décembre avec la conclusion que l'énoncé est trop vague, et des problèmes (14), (15), (16) et (17) qui seront résolus le 6 décembre.

Au 13 décembre, on pose des problèmes (18) et (19) qui seront discutés le 20 décembre, mais résolus le 24 janvier 2018, et un problème (20) qui sera résolu le 20 décembre.

Au 20 décembre, on pose un problème (21) qui sera résolu le 31 janvier 2018.

Au 24 janvier 2018, on pose un problème (22) qui sera résolu le 21 février, un problème (23) résolu le 14 février, un problème (24) résolu le 7 février, un problème (25) jamais résolu, et un problème (26) résolu le 31 janvier.

Au 31 janvier, on pose un problème (27) résolu le 14 mars, un problème (28) jamais résolu, un problème (29) résolu le jour même et le 7 février, et un problème (30) discuté le 14 février et résolu le 21 février.

Au 14 février, on pose un problème (31) résolu le 18 avril, des problèmes (32) et (33) discutés le 14 mars, mais résolus les 21 et 28 mars, des problèmes (34) et (35) résolus le 25 avril, et un problème (36) résolu le jour même.

Au 14 mars, on pose un problème (37) dont l'énoncé est douteux et sur lequel on réfléchit collectivement le jour même sans véritable conclusion.

Au 21 mars, on pose un problème (38) qui sera résolu le 28 mars, des problèmes (39), (40) et (42) discutés le 28 mars mais résolus entièrement le 25 avril, et un problème (41) résolu le 11 avril.

Au 11 avril, on pose des problèmes (43) et (44) qui seront résolus le 18 avril.

Solution du problème (4) du 4 octobre 2017

Dans un triangle dont les rayons des cercles inscrit et circonscrit sont notés respectivement r et R , on a toujours $R \geq 2r$ (inégalité d'Euler), avec $R = 2r$ si et seulement si le triangle est équilatéral.

Soient (xyz) le triangle, et ω et Ω les centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle (le cercle circonscrit sera noté \mathcal{C}). On note aussi p le point d'intersection de la bissectrice en x avec \mathcal{C} , q le point diamétralement opposé à p sur \mathcal{C} , et v la projection de ω sur le côté $[xy]$. Par le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{pqy} = \widehat{pxy} = \widehat{zxp} = \widehat{zyp}$. Et ω étant situé à l'intersection des bissectrices de (xyz) , on a $\omega \in [xp]$ et $\widehat{zy\omega} = \widehat{\omega yx}$.

Comme la somme des angles du triangle (ωxy) vaut un angle plat, on voit que $\widehat{p\omega y} = \widehat{\omega y p}$ si bien que le triangle $(p\omega y)$ est isocèle en p , et donc que $\omega p = yp$. Comme le point ω est situé à l'intérieur du cercle \mathcal{C} , sa puissance par rapport à \mathcal{C} vaut $\mathbf{P}(\omega) = -\omega x \cdot \omega p = -\omega x \cdot yp$. On peut donc écrire

$$0 \leq \omega \Omega^2 = R^2 + \mathbf{P}(\omega) = R^2 - \omega x \cdot yp.$$

De plus, les triangles (ypq) et $(v\omega x)$ sont semblables puisque $\widehat{q} = \widehat{x}$ et que $\widehat{y} = \frac{1}{2}\pi = \widehat{v}$, d'où $\omega x \cdot yp = pq \cdot v\omega = 2Rr$. On obtient ainsi $0 \leq R^2 - 2Rr = R(R - 2r)$, d'où $R \geq 2r$.

L'égalité ne peut se produire que si $\omega = \Omega$, et les côtés du triangle étant inscrits dans le cercle \mathcal{C} et tangents au cercle inscrit, on voit qu'ils sont alors tous trois égaux à $2\sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{3}$, si bien que le triangle est alors équilatéral. ■

Solution du problème (5) du 4 octobre 2017

Dans un triangle (xyz) , soient p un point intérieur, et u, v et w ses projections (orthogonales) sur les côtés du triangle. Alors on a toujours $px + py + pz \geq 2(pu + pv + pw)$ (inégalité d'Erdős-Mordell — 1937), avec $px + py + pz = 2(pu + pv + pw)$ si et seulement si le triangle est équilatéral et le point p situé en son centre. De même, on a aussi toujours $px \cdot py \cdot pz \geq 8pu \cdot pv \cdot pw$, avec $px \cdot py \cdot pz = 8pu \cdot pv \cdot pw$ si et seulement si le triangle est équilatéral et le point p situé en son centre.

Avec les notations de l'énoncé, on construit deux parallélogrammes $(yxx'y')$ et $(xzz'x')$ de bases et hauteurs respectives $yx =: c$ et $xv' = pv$ d'une part, et $xz =: b$ et $xw' = pw$ d'autre part. Alors les quadrilatères $(pvxw)$ et $(xv'x'w')$ sont isométriques, d'où $yy' = zz' = xx' = px$, et avec $a := yz$ on a donc,

$$\begin{aligned} a \cdot px &\geq \text{Aire}(yzz'y') = \text{Aire}(yzz'x'y') - \text{Aire}(x'y'z') = \\ &= \text{Aire}(yzz'x'y') - \text{Aire}(xyz) = \text{Aire}(yxx'y') + \text{Aire}(xzz'x') = c \cdot pv + b \cdot pw . \end{aligned}$$

On divise alors cette inégalité par a , puis on écrit le même type d'inégalité pour py et pz , et après sommation de ces trois inégalités, on obtient ainsi

$$px + py + pz \geq \frac{b^2 + c^2}{bc} pu + \frac{c^2 + a^2}{ca} pv + \frac{a^2 + b^2}{ab} pw ,$$

ce qui prouve l'inégalité d'Erdős-Mordell puisque $0 \leq (b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ entraîne que $b^2 + c^2 \geq 2bc$ et donc que $(b^2 + c^2)/bc \geq 2$.

Reste à caractériser le cas de l'égalité. Pour avoir l'égalité, il faut l'égalité dans l'inégalité $b^2 + c^2 \geq 2bc$, laquelle ne se produit que si $b = c$, ainsi que dans les deux autres inégalités analogues, si bien que le triangle (xyz) doit être équilatéral. Et il faut aussi l'égalité dans l'inégalité $a \cdot px \geq \text{Aire}(yzz'y')$, laquelle ne se produit que si $(yzz'y')$ est un rectangle, c'est-à-dire si p est sur l'axe de symétrie du triangle passant par x , ainsi que dans les deux autres inégalités analogues, si bien que le point p doit se trouver au centre du triangle (xyz) .

Et pour le deuxième résultat énoncé. On repart de l'inégalité $a \cdot px \geq c \cdot pv + b \cdot pw$ obtenue dans la preuve précédente, ainsi que de ses deux sœurs jumelles $b \cdot py \geq a \cdot pw + c \cdot pu$ et $c \cdot pz \geq b \cdot pu + a \cdot pv$; le produit de ces trois inégalités montre que $abc \cdot px \cdot py \cdot pz$ est supérieur à

$$2 abc \cdot pu \cdot pv \cdot pw + a \cdot pu(c^2 pv^2 + b^2 pw^2) + b \cdot pv(a^2 pw^2 + c^2 pu^2) + c \cdot pw(b^2 pu^2 + a^2 pv^2) .$$

Puisque $0 \leq (c \cdot pv - b \cdot pw)^2 = c^2 pv^2 + b^2 pw^2 - 2bc \cdot pv \cdot pw$ entraîne que l'on a l'inégalité $c^2 pv^2 + b^2 pw^2 \geq 2bc \cdot pv \cdot pw$, et que l'on a deux inégalités similaires pour les autres termes carrés, on en déduit que $abc \cdot px \cdot py \cdot pz \geq 8 abc \cdot pu \cdot pv \cdot pw$, d'où l'inégalité cherchée.

Lorsqu'il y a égalité, on voit que l'on doit avoir $c \cdot pv = b \cdot pw$ ainsi que deux autres égalités analogues, d'où l'on tire que $(pu/a) = (pv/b) = (pw/c)$. On en déduit que les parallélogrammes $(yxx'y')$ et $(xzz'x')$ de la démonstration précédente sont d'aires égales; comme pour avoir aussi l'égalité $a \cdot px = c \cdot pv + b \cdot pw$ il faut que le parallélogramme $(yzz'y')$ soit un rectangle, on en déduit que le triangle (xyz) doit vérifier $b = c$ et que le point p doit être situé sur l'axe de symétrie passant par x . En raisonnant de même par rapport aux deux autres sommets, on voit qu'il faut que le triangle (xyz) soit équilatéral et que le point p soit situé en son centre. ■

Solution du problème (25) du 24 janvier 2018

À partir d'un mot formé des lettres a et b , on effectue l'opération suivante : on choisit dans ce mot une occurrence du motif "ab" (s'il y en a), et on remplace ce motif par le motif "bba" ; puis on recommence cette opération tant que l'on trouve des occurrences du motif "ab". Il s'agit de montrer qu'au bout d'un temps fini, on ne trouve plus de motif "ab" (et donc le jeu s'arrête), et que la durée totale du jeu (le nombre de fois que l'on a répété l'opération de base) ne dépend que du mot de départ, mais pas des choix des occurrences effectués.

On commence par observer que le nombre de "a" reste constant, tandis que le nombre de "b" augmente d'une unité à chaque opération. Ensuite, tant qu'il restera des "a" à la gauche de "b", il restera des motifs "ab" quelque part dans le mot ; si donc la suite de transformations doit se terminer, ce sera donc avec tous les "a" à droite.

Si un "b" n'a qu'un seul "a" à sa gauche, il suffira d' $1 = 2 - 1$ opération pour le faire passer de l'autre côté ; si un "b" a deux "a" à sa gauche, il faudra $3 = 2^2 - 1$ opérations pour le faire passer de l'autre côté, car en sautant le premier "a" il se dédouble et aura donc besoin de deux opérations supplémentaires pour sauter le deuxième "a" ; et plus généralement, par récurrence, un "b" possédant k lettres "a" à sa gauche aura besoin de $2^k - 1$ opérations pour passer entièrement de l'autre côté. On voit ainsi comment compter le nombre d'opérations nécessaires pour déplacer tous les "b" situés à la droite des "a" : ce nombre est fini, et ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les opérations. ■

Solution (partielle) du problème (28) du 31 janvier 2018

On considère l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Parmi ces matrices, certaines ne sont pas inversibles, et il faudra changer certains de leurs coefficients pour les rendre inversibles. Il s'agit de déterminer celles de ces matrices qui nécessitent le plus de changements pour devenir inversibles. Et on demande aussi de calculer la moyenne des carrés des déterminants de toutes ces matrices $n \times n$ à coefficients ± 1 .

Une matrice $n \times n$ est inversible si et seulement si elle est de rang n , et changer un coefficient ne peut augmenter son rang que d'une unité. Pour des coefficients ± 1 , la matrice ne peut pas être de rang 0, mais elle peut être de rang 1, et nécessiter donc $n - 1$ changements de coefficient pour devenir inversible. Les matrices qui ont besoin de $n - 1$ changements de coefficient sont donc les matrices de rang 1, qui sont les matrices dont toutes les colonnes sont proportionnelles. Pour la première colonne C_1 , il y a 2^n choix possibles, et pour chacune des $n - 1$ colonnes suivantes C_j , il n'y a que deux choix : $C_j = \pm C_1$; au total, le nombre de matrices de rang 1 est donc $2^n \times 2^{n-1} = 2^{2n-1}$ (pour mémoire, le nombre total de matrices à coefficients ± 1 est 2^{n^2}).

Concernant la valeur moyenne du carré du déterminant, je n'ai pour le moment pas d'idée.

*
* * * *
*