Club de Maths de l'Université de Nantes

Activités 2018-2019

Séance du 26 septembre 2018

La saison 2018-19 est inaugurée par un discours d'Éric Paturel qui présente le projet *Math-o-LU* en partenariat avec la maison des mathématiques à Nantes et avec le Lieu Unique : il s'agit de proposer à un grand public des activités mathématiques en lien avec la vie de tous les jours ; ces activités seront animées par des lycéens et des étudiants en mathématiques, ce projet étant porté par François Sauvageot (du lycée Clemenceau) et Éric Paturel (de chez nous). Il y aura trois réunions d'organisation au LU au cours du premier semestre (la première le 17 octobre à 12h30), et les activités seront proposées au grand public à partir de janvier 2019.

À cette présentation, Éric ajoute que la fête de la Science aura lieu les 11, 12 et 13 octobre dans le jardin du Museum ; les intéressés peuvent participer ici aussi à l'animation.

Puis on nous propose les problèmes suivants.

Problème 2018-19(1). *Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles d'ensembles (parties d'un même ensemble, pour fixer les idées). Démontrer que*

$$\cup_{i\in I}(A_i\cap B_i) \;=\; \cap_{X\subset I}\big((\cup_{i\in X}A_i)\cup(\cup_{i\in I\setminus X}B_i)\big).$$

Problème 2018-19(2). *Dans un repère affine $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ on se donne les trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA}=n\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OB}=n\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OC}=n\overrightarrow{k}$ pour un entier n fixé. Déterminer en fonction de n le nombre de points à coordonnées entières et situés à l'intérieur du tétraèdre $(OABC)$ (on ne compte pas les points situés sur le bord).*

La séance se poursuit ensuite avec un exposé sur les courbes planes : on y présente la notion de courbe plane paramétrée, puis de courbe de classe C^1 avec ses tangentes, puis de courbe de classe C^2 avec les notions de convexité, de courbure et de courbe fermée. Après avoir explicité les cas de l'ellipse et de la cardioïde, pour lesquels on calcule explicitement la fonction courbure, on définit les *sommets* d'une courbe convexe fermée comme les points de la courbe où la fonction (continue) courbure atteint un extremum local. Enfin, après avoir remarqué que le nombre de sommets est infini ou pair, on énonce le *théorème des quatre sommets* qui affirme qu'une courbe de classe C^2 convexe et fermée possède au moins quatre sommets. La preuve n'en sera donné qu'à la séance suivante.

Séance du 3 octobre 2018

On discute un peu collectivement du problème **(2)** du 26 septembre : en notant (x,y,z) les points à dénombrer, il s'agit de compter les triplets d'entiers vérifiant $x>0$, $y>0$, $z>0$ et $x+y+z<n$; après découpage en tranches, on voit qu'il s'agit de calculer une somme du type $\sum_{i=1}^{n-3}\big(\sum_{k=1}^{i}k\big)$. Travail à poursuivre pour la prochaine fois.

Concernant le problème **(1)** du 26 septembre, on donne comme indication (?) de "raconter avec des phrases" le développement du produit :

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n).$$

Puis on propose un nouveau problème.

Problème 2018-19(3). *Par combien de* 0 *se termine le nombre* $1\,000\,000!$ *?*

Mais aussitôt on généralise ce problème en

Problème 2018-19($3^{\mathbf{bis}}$). *En notant* $Z(N)$ *le nombre de zéros figurant à la fin du nombre* N *écrit en base* 10, *calculer* $\lim_{n\to\infty} Z(n!)/n$. *Et en base* b *?*

La fin de la séance est occupée par une démonstration (d'après Osserman) du théorème des quatre sommets dont il a été question la semaine dernière. On commence par une définition : *si* $\mathscr{C}$ *est une figure bornée du plan, on dit que le cercle* Γ *est* circonscrit *à la figure* $\mathscr{C}$ *si* $\mathscr{C}$ *est contenue dans le disque de bord* Γ *mais dans aucun disque de rayon strictement plus petit.* On montre alors que toute courbe fermée du plan possède un unique cercle circonscrit, et que l'intersection de la courbe et de son cercle circonscrit contient soit deux points diamétralement opposés, soit au moins trois points ; et on termine en montrant qu'entre deux tels points consécutifs, il y a au moins un point de courbure localement minimale sur la courbe, et que le nombre de sommets est donc au moins égal au double du nombre de points communs à la courbe et à son cercle circonscrit. D'où le théorème. ■

<u>Séance du 10 octobre 2018</u>

On commence par une solution du problème **(3)** du 3 octobre. Soit P l'ensemble des nombres premiers. Comme $10 = 2\times 5$, on a

$$Z(n!) = Z(\textstyle\prod_{p\in P} p^{\alpha_p}) = Z(2^{\alpha_2}5^{\alpha_5}) = \min\{\alpha_2,\alpha_5\}$$

où $n! = \prod_{p\in P} p^{\alpha_p}$ est la décomposition de $n!$ en facteurs premiers. Posons $V_p(N) =$ nombre de facteurs p dans la décomposition de N en facteurs premiers, en sorte que $V_p(n!) = \alpha_p = \alpha_p(n)$ avec la notation précédente. On a alors

$$\alpha_p(n) = V_p(n!) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} V_p(k) = \sum_{k\le n\,,\,p|k} V_p(k) = \sum_{k=1}^{E(n/p)} V_p(kp),$$

ce qui permet de justifier par récurrence sur k que

$$\alpha_p(n) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} E(n/p^i) + \alpha_p(E(n/p^k)).$$

Pour $k > (\ln n)/(\ln p)$ le reste est nul, et donc $\alpha_p(n) = \sum_{i=1}^{E(\ln n/\ln p)} E(n/p^i)$.

On montre ensuite que $\alpha_5(n) \le \alpha_2(n)$; cela vient d'une part de ce que $\ln 5 > \ln 2$, et d'autre part de ce que chaque terme de la somme $\alpha_5(n)$ est plus petit que le terme correspondant dans la somme $\alpha_2(n)$. Le nombre cherché est donc $\alpha_5(10^6)$ dont on a donné une expression plus haut ($\alpha_p(n) = \ldots$), et on trouve donc

$$200\,000 + 40\,000 + 8\,000 + 1\,600 + 320 + 64 + 12 + 2 = 249\,998. \ ■$$

Quelqu'un conjecture que la limite cherchée au problème **($3^{\mathbf{bis}}$)** du 3 octobre vaut $1/4$.

On revient ensuite sur le problème **(2)** du 26 septembre. Reprenant le calcul là où on l'avait laissé, on trouve que $\sum_{k=1}^{i} k = \frac12 i(i+1)$, et donc que le nombre de points cherché vaut

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n-3}\frac12 i(i+1) = \frac12\sum_{i=1}^{n-3} i^2 + \frac12\sum_{i=1}^{n-3} i =$$

$$= \tfrac12\big(\tfrac16(n-3)(n-2)(2n-5) + \tfrac36(n-3)(n-2)\big) = \tfrac16(n-3)(n-2)(n-1).$$

(on avait commencé par de petits cafouillages sur la borne $n-3$ qu'on avait d'abord prise pour $n-2$, mais le résultat correct est bien celui qui précède, ce que l'on vérifie en prenant $n=3$ pour lequel il y a 0 solution). ■

On propose une variante qui utilise le théorème de Pick : *Soit un polygone du plan dont les sommets sont à coordonnées entières ; désignons par i (resp. par b) le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur du polygone (resp. sur le bord), et par a l'aire du polygone ; alors* $2a + 2 = 2i + b$. En découpant notre tétraèdre en tranches $z = n - k$, on a ainsi $a_k = \frac{1}{2}k^2$ et $b_k = 3k$, ce qui donne $i_k = \frac{1}{2}(k^2 - 3k + 2) = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$, et le nombre cherché vaut alors $\sum_{k=1}^{n-1} i_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)(k-2)$, ce qui redonne le résultat trouvé par la méthode précédente, soit $\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)$. ■

Puis on nous propose une série de calculs à effectuer.

Problème 2018-19(4). *Calculer les quantités suivantes :*
(a) *Une primitive de* $\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \tan^2(2^{-k}x)\right)$.
(b) *L'intégrale* $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx$.
(c) *L'intégrale* $\int_0^{\pi/4} x\prod_{k=1}^{\infty}\cos(2^{-k}x)\,dx$.
(d) *La limite* $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=10}^{n+9}\frac{2^{11(k-9)/n}}{\log_2(e^{n/11})} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{58}{\pi\sqrt{n^2-k^2}}\right)$.

Séance du 17 octobre 2018

Pas de séance en ce jour, en raison de la réunion d'organisation de Math-o-LU.

Séance du 24 octobre 2018

On commence par l'énoncé d'un nouveau problème.

Problème 2018-19(5). *On se donne trois boîtes contenant chacune des jetons (au moins un dans chaque boîte, mais un nombre fini). On décrit l'opération élémentaire suivante : ayant choisi deux de ces trois boîtes, on transfère des jetons de la boîte en contenant le plus vers la boîte en contenant le moins jusqu'à doubler le nombre de jetons de la boîte qui en contenait le moins. En répétant cette opération élémentaire autant de fois que l'on veut, peut-on toujours parvenir à vider entièrement l'une des trois boîtes ?*

On revient ensuite sur le problème **(1)** du 26 septembre : pour montrer l'égalité des deux ensembles, on va montrer l'inclusion dans chacun des deux sens, et on nous propose la preuve d'un sens.

Si $y \in \cup_{i\in I}(A_i \cap B_i)$, alors il existe un $j \in I$, $y \in A_j$ et $y \in B_j$; si maintenant $X \subset I$, alors on a $j \in X$ (auquel cas $y \in \cup_{i\in X}A_i$) ou $j \in I \setminus X$ (auquel cas $y \in \cup_{i\in I\setminus X}B_i$), et donc $y \in (\cup_{i\in X}A_i) \cup (\cup_{i\in I\setminus X}B_i)$ dans tous les cas ; et comme ceci est vrai pour tout $X \subset I$, y appartient donc à l'intersection sur tous les $X \subset I$ des réunions précédentes. Reste à prouver l'inclusion inverse. ■

Puis voici encore un nouveau problème, issu de la remarque suivante : un nombre entier écrit en base 10 est divisible par 3 (resp. par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3 (resp. par 9). Si l'on change de base, on a le problème suivant :

Problème 2018-19(6). *Soit* $b > 1$ *un entier. La notation* $\overline{d_k d_{k-1}\ldots d_0}$ *désignera l'entier qui s'écrit avec les chiffres* $d_k, \ldots, d_0$ *dans la base b, c'est-à-dire l'entier* $\sum_{j=0}^{k} d_j b^j$. *On dit alors que l'entier n a la propriété* P_b *si on a :* $n|\overline{d_k\ldots d_0} \;\Leftrightarrow\; n|(d_0 + \ldots + d_k)$. *Question : pour quel(s)* $b \in [\![2, 100]\!]$ *y a-t-il le maximum de n ayant la propriété* P_b *?*

Comme personne n'a d'autre problème ni d'autre solution à proposer, nous cherchons collectivement une solution au problème **(4)**(c) du 10 octobre en partant de la formule de trigonométrie $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$; on suggère que par récurrence cela donnerait

$$\textstyle\prod_{k=1}^{n} \cos(2^{-k}x) = 2^{1-k} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \cos(2^{-k}(2j-1)x),$$

et que cette dernière expression, considérée comme une somme de Riemann, tendrait vers $\int_0^1 \cos(tx)\,dt = \frac{\sin x}{x}$ quand n tend vers l'infini. Cela donnerait $\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour le problème **(4)**(c), mais permettrait aussi d'aborder le problème **(4)**(a) puisque

$$1 - \tan^2(2^{-k}x) = \frac{\cos^2(2^{-k}x) - \sin^2(2^{-k}x)}{\cos^2(2^{-k}x)} = \frac{\cos(2^{1-k}x)}{\cos^2(2^{-k}x)}.$$

On s'arrête faute de temps, mais on reprendra à la prochaine séance.

Séance du 7 novembre 2018

On commence par reprendre l'étude du problème **(4)**(c) entreprise à la dernière séance. Une façon plus simple d'obtenir que $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(2^{-k}x) = \frac{\sin x}{x}$ consiste à montrer par récurrence sur n que

$$\textstyle\prod_{k=1}^{n} \cos(2^{-k}x) = \dfrac{\sin x}{2^n \sin(2^{-n}x)},$$

d'où le résultat puisque $\lim_{n\to\infty} 2^n \sin(2^{-n}x) = x$. Pour justifier la récurrence, on initialise à $n=1$, ce qui s'écrit : $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$, ce qui est vrai ; et pour l'hérédité, on utilise que $\sin(2^{-n}x) = 2\sin(2^{-n-1}x)\cos(2^{-n-1}x)$). ∎

On en déduit le calcul d'intégrale (c), soit $\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ comme on l'avait déjà plus ou moins calculé le 24 octobre. ∎

Et pour le calcul de primitive (a), on écrit alors que $1-\tan^2 y = \dfrac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\cos^2 y} = \dfrac{\cos(2y)}{\cos^2 y}$, et donc que

$$\textstyle\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \tan^2(2^{-k}x)\right) = \dfrac{\prod_{k=0}^{\infty} \cos(2^{-k}x)}{\left(\prod_{k=1}^{\infty} \cos(2^{-k}x)\right)^2} = \dfrac{\cos x(\sin x/x)}{(\sin x/x)^2} = \dfrac{x\cos x}{\sin x}.$$

Il s'agit donc de trouver une primitive de la fonction $1/\tan x$, et c'est $\ln(\sin x)$ sur $]0,\pi[$ par exemple. ∎

Des calculs demandés au problème **(4)** du 10 octobre, il ne reste donc plus que l'intégrale (b) et la limite (d).

On donne ensuite la fin de la solution du problème **(1)** du 26 septembre. Une inclusion ayant été démontrée le 24 octobre, il reste l'autre. Si donc on prend y dans l'intersection $\cap_{X\subset I}\big((\cup_{i\in X} A_i) \cup (\cup_{i\in I\setminus X} B_i)\big)$, on commence par poser $Z = \{\, i \in I\,;\, y \in B_i \,\}$; alors $y \notin \cup_{i\in I\setminus Z} B_i$ par définition de Z, et donc $y \in \cup_{i\in Z} A_i$, c'est-à-dire qu'il existe un $j \in Z$ tel que $y \in A_j$, et dire que $j \in Z$, c'est dire que $y \in B_j$; on a donc prouvé qu'il existe un $j \in I$ tel que $y \in A_j \cap B_j$, c'est-à-dire que $y \in \cup_{i\in I}(A_i \cap B_i)$. ∎

On revient ensuite sur le problème **($3^{\mathbf{bis}}$)** du 3 octobre. On avait montré le 10 octobre que $Z(n!) = \sum_{i=1}^{E(\ln n/\ln p)} E(n/p^i)$ avec $p = 5$; il en résulte que

$$\Big|\frac{Z(n!)}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{E(\ln n/\ln 5)} \frac{n}{5^i}\Big| \;\leq\; \frac{1}{n} \times \frac{\ln n}{\ln 5}.$$

Comme le majorant tend vers 0, le nombre $Z(n!)/n$ a même limite que la somme géométrique écrite ci-dessus, qui vaut $\frac{1}{5}\big(\frac{1-5^{-E(\ln n/\ln 5)}}{1-5^{-1}}\big)$, et ce rapport tend vers $\frac{1}{5}.\frac{5}{4} = \frac{1}{4}$ quand n tend vers l'infini. Dans une base b, si l'on désigne par p le plus grand facteur premier de b, on trouvera de même que $Z(n!)/n$ tend vers $1/(p-1)$. ■

Puis on résout aussi le problème **(6)** du 25 octobre. Pour que n ait la propriété P_b, il faut et suffit que $b \equiv 1[n]$, et il faut donc chercher les b tels que $b-1$ ait beaucoup de diviseurs. Le maximum, pour $b-1 \in [\![1, 99]\!]$, c'est douze diviseurs ; c'est le cas de $b-1 = 60$, de $b-1 = 72$, de $b-1 = 84$, de $b-1 = 90$ et de $b-1 = 96$; les solutions sont donc : 61, 73, 85, 91 et 97. ■

On termine la séance avec quelques énoncés de nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(7). *Calculer $P(\frac{7}{2})$ où le polynôme P vérifie l'identité $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$.*

Problème 2018-19(8). *Calculer les deux intégrales :*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty g\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\,dy$ *où $g = f^{-1}$ est la réciproque de la fonction $f(x) = x\,e^x$.*

Et enfin, on propose une généralisation du problème **(1)** du 26 septembre : en notant $E_{i1} = A_i$ et $E_{i2} = B_i$, on voit que le problème **(1)** cherchait à établir une autre expression de la réunion $\cup_{i\in I}\big(\cap_{j\in\{1,2\}} E_{ij}\big)$ sous la forme d'une intersection de réunions. C'était donc un cas particulier du problème suivant :

Problème 2018-19($1^{\mathbf{bis}}$). *Étant donnée une famille $(E_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ à deux indices de parties d'un ensemble, exprimer $\cup_{i\in I}\big(\cap_{j\in J} E_{ij}\big)$ sous la forme d'une intersection de réunions.*

Séance du 14 novembre 2018

Pas de séance en ce jour, en raison de la réunion d'organisation de Math-o-LU.

Séance du 21 novembre 2017

On nous propose une solution du problème **(7)** du 7 novembre. En prenant $x = 1$ puis $x = -2$ dans la relation vérifiée par le polynôme P, on voit que P s'annule en ± 1 et qu'il est donc divisible par $x^2 - 1$. En réutilisant une troisième fois la relation, on trouve qu'il est encore divisible par x, et en posant $P(x) = (x^3 - x)\,R(x)$ à nouveau dans la relation donnée, on trouve cette fois $(x+2)(x^3-x)\,R(x+1) = (x+2)(x^3-x)\,R(x)$, si bien que R doit être un polynôme constant. Mais réciproquement, tout polynôme $P(x) = a\,(x^3 - x)$ vérifie la relation, si bien que les polynômes vérifiant cette relation sont exactement les polynômes $P(x) = a\,(x^3 - x)$; on ne peut donc pas calculer $P(\frac{7}{2})$. Si l'on impose en plus que P est unitaire, on peut alors calculer $P(\frac{7}{2}) = \frac{315}{8}$. ■

Autre solution pour le même problème **(7)** du 7 novembre. En commence par poser $P(x) = a\,x^n + b\,x^{n-1} +$ reste de degré $< n-1$, ce qui permet de calculer que $(x-1)P(x+1) = a\,x^{n+1} + (na+b-a)\,x^n +$ reste, et que $(x+2)P(x) = a\,x^{n+1} + (2a+b)\,x^n +$ reste, si bien que l'identité vérifiée par P entraîne que $na+b-a = 2a+b$ (avec $a \neq 0$), et donc que P est de degré $n = 3$. En récrivant alors $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$, on obtient que cette même identité donne que P est un multiple de $P_1(x) = x^3 - x$, ce qui permet de conclure comme dans la solution ci-dessus. ∎

On reprend ensuite les deux derniers calculs du problème **(4)** du 10 octobre.

Pour le calcul d'intégrale (b), on commence par utiliser la formule d'Euler pour écrire que $\cos(\sin x) = \frac{1}{2}(e^{i\sin x} + e^{-i\sin x})$, d'où

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\exp(e^{ix}) + \exp(e^{-ix})\big)\,dx = \int_0^{2\pi} \exp(e^{ix})\,dx$$

car $\int_0^{2\pi} \exp(e^{-ix})\,dx = \int_{-2\pi}^{0} \exp(e^{-ix})\,dx = \int_0^{2\pi} \exp(e^{ix})\,dx$ par périodicité puis changement de variable $x \mapsto -x$. Comme $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$, on a

$$\Big|\int_0^{2\pi} \exp(e^{ix})\,dx - 2\pi\Big| = \Big|\int_0^{2\pi} \exp(e^{ix})\,dx - \sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikx}}{k!}\,dx\Big| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \Big|\exp(e^{ix}) - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{k!}\Big|\,dx \;\leq\; 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

et comme le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on en déduit que l'intégrale cherchée vaut 2π. ∎

Et pour la limite (d), on écrit

$$\sum_{k=10}^{n+9} \frac{2^{11(k-9)/n}}{\log_2(e^{n/11})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{11k/n}}{\log_2(e^{n/11})} = \frac{11\,\ln 2}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{k(11\ln 2/n)} = a\,e^a\,\frac{e^{na}-1}{e^a-1}$$

en notant $a = (11\ln 2/n)$. Quand a tend vers 0, c'est équivalent à $e^{na} - 1 = 2^{11} - 1 = 2\,047$, et donc la limite de ce premier terme vaut $2\,047$. En mettant $1/n$ en facteur dans le deuxième terme, celui-ci devient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{58}{\pi\sqrt{1-(k/n)^2}}$$

où l'on reconnaît une somme de Riemann qui tend, lorsque n tend vers l'infini, vers l'intégrale $\int_0^1 \frac{58}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{58\cos x}{\pi\cos x}\,dx = 29$ par changement de variable $t = \sin x$. Pour finir, la limite demandée valait $2\,047 - 29 = 2\,018$. ∎

On termine ensuite la séance en posant quatre nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(2^{bis}). *Généralisant le problème* **(2)** *du 26 septembre, on demande de calculer le cardinal S_n^d de $\{\,(x_1,\ldots,x_d) \in (\mathbb{N}^*)^d\,;\ \sum_{i=1}^d x_i < n\,\}$.*

Problème 2018-19(9). *On considère les matrices $d \times d$ qui sont des carrés latins, autrement dit les matrices $A = (a_{jk})$ telles que $\sum_j a_{jk} = \sum_k a_{jk} = s$ pour tout k et tout j. Peut-on dire quelque chose sur la diagonalisabilité de A ?*

Problème 2018-19(10). *Pour une suite réelle (a_n) bornée, on considère la série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,a_k\,x^k$ qui est de rayon de convergence infini. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} e^x f(x) = c \in \mathbb{R}$, alors $a_k = (-1)^k c$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Problème 2018-19(11). *On dit que la série numérique* $\sum a_k$ *est* Abel-sommable *si la série* $s(x) = \sum a_k\, x^k$ *converge pour* $x \in [0,1[$ *et si* $\lim_{x\to 1^-} s(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}$. *On veut déterminer les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que pour toute série* $\sum a_k$ *Abel-sommable, la série* $\sum f(a_k)$ *soit aussi Abel-sommable.*

Séance du 28 novembre 2017

On commence par discuter du problème **(5)** du 24 octobre afin de mentionner quelques situations où l'on sait conclure. Supposons par exemple qu'une boîte contient a jetons, et une autre $a(2^n - 1)$ jetons. Alors en choisissant toujours ces deux boîtes, on aura successivement $a\,2^k$ et $a\,(2^n - 2^k)$ jetons dans ces boîtes pour $k \le n$, et quand $k = n$, on aura vidé la deuxième boîte. Une autre situation favorable, c'est lorsque les contenus des boîtes sont $(a, a\,2^n, c)$ avec $c > a\,2^n$; en effet, en choisissant la première et la troisième boîtes, celles-ci auront $a\,2^k$ et $c - a\,2^k$ jetons pour $k \le n$, et quand $k = n$, on aura donc les deux premières boîtes avec le même contenu de $a\,2^n$ jetons, ce qui permet de vider une boîte. Et si on a des contenus de départ égaux à $(\ a\ ,\ b\ ,\ a\,(2^n - 1) + b\,(2^m - 1)\ )$, on choisit les boîtes 1 et 3 jusqu'à avoir les contenus $(\ a\,2^n\ ,\ b\ ,\ b\,(2^m - 1)\ )$, puis on choisit les boîtes 2 et 3 jusqu'à vider l'une de ces deux boîtes. L'idée est alors de s'inspirer de ces cas particuliers pour tâcher de traiter le cas général !

On donne ensuite des solutions au problème **(9)** du 21 novembre. Bien entendu, toutes les matrices symétriques sont diagonalisables, et donc les matrices avec des 1 partout le sont. La question, c'est : en existe-t-il qui ne soient pas diagonalisable ? La réponse est oui ; en voici trois :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{R}$, mais elles le sont sur $\mathbb{C}$; la troisième n'est même pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$, car ses valeurs propres sont 6, 2 (simples) et 1 (valeur propre double) avec $\dim \mathrm{Ker}(A - I) = 1$ puisque $\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}(1, -1, 0, 0)$.

Nous discutons ensuite de quelques-uns des problèmes du concours smf-juniors. Plus précisément du problème 2 : *pour tout triplet* (p, q, r) *de nombre premiers distincts, montrer que* $x^p + y^q = z^r$ *a une solution en entiers* (x, y, z) *strictement positifs* ; du problème 4 (jeu de points et de droites dans un disque) ; et du problème 10 : *existe-t-il une configuration de points blancs et noirs avec les contraintes : strictement plus de blancs que de noirs, et exactement dix noirs à distance* 1 *de chaque blanc ?*

Et voici deux nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(12). *Des soldats numérotés de* 1 *à* n *se disposent en cercle comme les numéros d'une horloge à aiguilles. En tournant dans le sens des aiguilles, le numéro* 1 *supprime le suivant (le* 2*), puis le suivant (le* 3*) supprime celui d'après (le* 4*) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un. Trouver une formule donnant le numéro du survivant en fonction de* n.

Problème 2018-19(13). *Calculer* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,(\cos x)^n\, \sin(nx)$.

Séance du 5 décembre 2017

On commence par présenter un nouveau problème.

Problème 2018-19(14). *Deux urnes contiennent chacune n jetons. On sort les jetons de l'urne numéro 1 pour former des tas de 23 jetons, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un nombre $r < 23$; on rajoute ces derniers au contenu de l'urne numéro 2, puis on ressort les jetons de cette urne numéro 2 pour former des tas de 37 jetons, et cela tombe juste, c'est-à-dire que l'on a vidé entièrement l'urne numéro 2 de cette façon. Le nombre total de tas (de 23 ou 37 jetons) est égal à 72. Combien de jetons y avait-il ?*

Après quoi, nous reparlons du problème **(12)** du 28 novembre : après quelques expériences pour les petites valeurs de n (pour $n \leq 10$), on est capable de former la conjecture suivante : si le nombre n s'écrit $n = 2^k + j$ avec $0 \leq j < 2^k$, le dernier survivant sera le soldat numéro $1 + 2j$. Mais malgré beaucoup de discussions, nous n'avons pas trouvé de preuve pour le moment.

Nous réfléchissons collectivement au problème **(14)** introduit ci-dessus, et formulons le problème par les équations suivantes :

$$\begin{cases} n = 23\,q + r \quad \text{avec } r < 23\,, \\ n + r = 37\,q'\,, \\ q + q' = 72\,. \end{cases}$$

De ce système on tire que $23\,q = n - r$ et $37\,q' = n + r$, puis multipliant la première équation par 37 et la seconde par 23 additionnant les deux équations ainsi obtenues, on trouve $23 \times 37 \times (q + q') = 60\,n - 14\,r$, et avec $q + q' = 72$ on en déduit que $r = \frac{6}{7}\,(5n - 5106)$. Comme 6 est premier avec 7, on voit que $5n - 5106$ doit être divisible par 7, et que le reste r est donc un multiple de 6 ; et comme ce reste est aussi < 23, on a $r = 6k$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, puis $5n = 5106 + 7k$. Enfin, pour que $5106 + 7k$ soit divisible par 5, il faut prendre $k = 2$, ce qui donne un reste $r = 12$ et un nombre initial $n = 1024$.

Séance du 12 décembre 2017

On commence par présenter un nouveau problème.

Problème 2018-19(15). *Cinq pirates hiérarchisés, le chef portant le numéro 5, le sous-chef le numéro 4, le sous-sous-chef le numéro 3 et ainsi de suite, veulent se partager mille pièces d'or. Le chef fait une proposition de répartition, et les pirates (le chef compris) votent : s'ils acceptent avec une majorité stricte (au moins 3 "pour"), on répartit les pièces comme proposé et le jeu s'arrête là, tandis que s'ils refusent, le chef est mis à mort, et on recommence le jeu avec les pirates restant, le sous-chef ayant pris la place du chef. On demande quelle devrait être la stratégie de chacun des pirates, sachant que leurs priorités sont : 1) de rester en vie ; 2) de gagner le plus de pièces possible ; 3) d'assassiner le plus de co-pirates possible.*

Puis on revient au problème **(12)** du 28 novembre que nous avions presque résolu la semaine précédente. On peut prouver le résultat, à savoir que si $n = 2^k + j$ avec $0 \leq j < 2^k$ le dernier survivant portera le numéro $i = 2j + 1$, par une récurrence sur n.

Initialisation. Pour $n = 1 = 2^0 + 0$, on a $j = k = 0$, et $i = 2j + 1 = 1$ est bien le numéro du dernier survivant.

Hérédité. Supposons que le résultat est connu pour un nombre de soldats $< n = 2^k + j$ avec $k > 0$ et $0 \leq j < 2^k$. On distingue deux cas, suivant que n (ou j, ce qui revient au même) est pair ou impair. Dans le cas où $j = 2j'$ est pair (avec donc $0 \leq j' < 2^{k-1}$), après les $\frac{1}{2}n$ premières suppressions, il reste $n' = 2^{k-1} + j'$ soldats portant les numéros i impairs de 1 à $n-1$; si on les renumérote par $i' \in [1, n']$, le nouveau numéro i' est attribué au soldat dont le numéro d'origine était $i = 2i' - 1$; par hypothèse de récurrence, le dernier survivant a le numéro $i' = 2j' + 1$, et avait donc au départ le numéro $i = 2(2j' + 1) - 1 = 4j' + 1 = 2j + 1$. Dans le cas où $j = 2j' + 1$ est impair (avec donc $0 \leq j' < 2^{k-1}$), après les $\frac{1}{2}(n + 1)$ premières suppressions, il reste $n' = 2^{k-1} + j'$ soldats portant les numéros i impairs de 3 à n ; si on les renumérote par $i' \in [1, n']$, le nouveau numéro i' est attribué au soldat dont le numéro d'origine était $i = 2i' + 1$; par hypothèse de récurrence, le dernier survivant a le numéro $i' = 2j' + 1$, et avait donc au départ le numéro $i = 2(2j' + 1) + 1 = 4j' + 3 = 2j + 1$. Cela termine la récurrence. ∎

Un autre participant propose une autre approche (que l'on peut voir comme assez voisine de la preuve précédente). On dispose les uns au-dessus des autres les nombres $i - 1$ écrits en base 2, ce qui donne une disposition du genre

$$
\begin{array}{cccccccc}
i-1 & & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
1 & \longrightarrow & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
2 & \longrightarrow & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\
3 & \longrightarrow & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
n-1 & \longrightarrow & a' & b' & \ldots & c' & d' \\
n & \longrightarrow & 1 & b & \ldots & c & d
\end{array}
$$

la dernière ligne servant seulement de référence, où on observe que les chiffres “ d' ” et “ d ” vérifient $d' = 1 - d$. Quand on supprime les soldats du premier tour, on barre les lignes se terminant par un “1”, et on voit donc que le survivant s'écrira avec une ligne se terminant par un “0”, et on observe de plus que la nouvelle dernière ligne a alors pour avant-dernier chiffre un “ c'' ” valant $c'' = 1 - c$; au deuxième tour, on barrera les lignes ayant le chiffre “ d' ” en avant-dernière position, si bien qu'il ne restera que les lignes ayant le chiffre “ d ” en avant-dernière position, qui sera donc l'avant-dernier chiffre du survivant ; en poursuivant ainsi, on voit que le survivant sera représenté par la ligne $b \quad \ldots \quad c \;\; d \;\; 0$, c'est-à-dire la ligne n amputée de son “1” initial, et rallongée par un “0” final. Si $n = 2^k + j$ avec $0 \leq j < 2^k$, cela signifie que le numéro du survivant est donné par $i - 1 = 2j$. ∎

On reparle aussi du problème **(5)** du 25 octobre. On présente un cas où l'on sait conclure, mais qui ne dit rien du cas général : *si les boîtes contiennent respectivement a, b et c jetons avec $a < b < c$ et $a|b$ (par exemple si l'une des boîtes ne contient qu'un jeton)*. Dans ce cas, en notant $2^k + j$ avec $0 \leq j < 2^k$ l'entier $1 + (b/a)$, on choisit $k + 1$ fois les deux premières boîtes, ce qui amène les contenus $(2^k - j)\,a$ et $2\,j\,a$ respectivement dans les boîtes 1 et 2. Or $(2^k - j)\,a \leq (2^k + j)\,a = b + 1 \leq c$, donc si nous choisissons les boîtes 1 et 3, les nouveaux contenus de ces trois boîtes sont $(2^{k+1} - 2\,j)\,a$, $2\,j\,a$, et c'. Pour finir, nous choisissons à nouveau les boîtes 1 et 2 jusqu'à en vider entièrement une ; en effet, les contenus des deux boîtes sont maintenant $p\,a$ et $q\,a$ avec $p + q = 2^{k+1}$, et la puissance maximale de 2 divisant p vaut 2^i avec $i \leq k + 1$, et elle divise aussi q puisqu'elle divise $p + q$; en transférant des jetons de l'une à l'autre boîte, on augmente cette puissance maximale à 2^{i+1} dans la boîte la plus petite ...et donc aussi dans la boîte la plus grande ; on va jusqu'à obtenir que l'une des boîtes contient $p\,a$ jetons avec $2^{k+1}|p$, ce qui entraîne que l'une des boîtes contient $2^{k+1}a$ jetons, et l'autre 0.

Un participant mentionne qu'il a essayé beaucoup d'exemples ; sur ces exemples, il y a une procédure permettant de finir dans tous les cas, et qui consiste à choisir les deux boîtes respectivement la plus et la moins pleines. Ce pourrait être une idée pour résoudre le problème.

On revient ensuite sur les intégrales **(8)** du 7 novembre. Pour l'intégrale (a), elle se calcule lorsque l'on modifie l'expression de la fonction à intégrer. Si la question avait été de calculer l'intégrale

$$I \;=\; \int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+2)\,\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

(on a remplacé un $(x^2 + 1)$ par un $(x^2 + 2)$ au dénominateur), on aurait eu la primitive et la valeur de l'intégrale suivantes :

$$F(x) \;=\; \frac{x\,\arctan\sqrt{x^2+2}}{2\sqrt{x^2+2}} - \frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,\arctan\big(\frac{x}{\sqrt{3}}\big) - \sqrt{2}\,\arctan\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)\Big)$$

$$I \;=\; \frac{92^{3/2}\,\arctan\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) - \sqrt{3}\,\pi}{36} \quad ;$$

mais bien entendu, ce n'était pas la vraie intégrale à calculer, qui elle avait le facteur (x^2+1) et non le facteur $(x^2 + 2)$ au dénominateur.

Pour l'intégrale (b), qui était l'intégrale

$$\int_0^\infty g\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\,dy \qquad \text{où } g = f^{-1} \text{ est réciproque de } f(x) = x\,e^x \;,$$

on commence par observer que la fonction f est strictement croissante, et donc bijective de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même, ce qui fait que g est bien définie. On fait ensuite le changement de variable

$$y = \frac{e^{-x^2/2}}{x} \quad \text{en sorte que} \quad \frac{1}{y^2} = f(x^2) \quad \text{et que} \quad dy = -\frac{1+x^2}{x^2}\,e^{-x^2/2}\,dx \;.$$

Avec ce changement de variable, notre intégrale devient donc

$$\int_0^\infty g\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\,dy = \int_0^\infty x^2\,\frac{1+x^2}{x^2}\,e^{-x^2/2}\,dx \;.$$

Par intégration par partie, l'intégrale $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\,dx$ est égale à l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx$, et donc on trouve pour résultat $2\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$. ∎

Pour finir, on se donne rendez-vous pour une reprise en janvier après les examens.

<u>Séance du 19 décembre 2018</u>

Pas de séance en ce jour, en raison de la réunion d'organisation de Math-o-LU.

*

* * * *

*