Club de Maths de l'Université de Nantes

Le Club de Maths de l'Université de Nantes est une activité ouverte aux étudiants de notre Université (à partir de la L2) et à ses enseignants-chercheurs, ainsi qu'à tous les niveaux intermédiaires (L3, masters, doctorants, etc.) ; en pratique, il est ouvert à toute personne intéressée par la discussion de problèmes mathématiques de nature à exciter la curiosité de tout un chacun. Il se réunit généralement une fois par semaine à l'heure du déjeuner (13h–13h55) hors vacances universitaires.

Ce club a pour objet d'être un lieu de discussion de problèmes mathématiques variés dans un cadre totalement informel ; par bienséance, on se limite aux problèmes dont au moins l'énoncé est suffisamment simple pour être compris par tous les participants. Le club est régi par une unique règle de fonctionnement, qui stipule qu'il n'y a pas d'autre règle que cette règle unique. Donc tout y est possible, même et surtout de se tromper (du moins provisoirement), ou de poser des questions idiotes.

Le Club de Maths de l'Université de Nantes existe depuis plusieurs années, au moins depuis 2012, mais ne possède pas beaucoup d'archives sur ses activités des années passées. On possède toutefois une page, due à Victoria Lebed, éminente animatrice du club, qui relate l'essentiel des séances de la saison 2015-2016. On trouvera ci-dessous un résumé des activités de la saison 2016-2017.

Activités 2016-2017

Séance du 21 septembre 2016

On propose le problème suivant, dont on donnera une solution la semaine prochaine.

Problème 2016-17(1). *Soient a et b deux entiers positifs tels que $ab+1$ divise a^2+b^2. Montrer que le quotient*

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

est lui-même le carré d'un entier.

Autre problème, géométrique cette fois.

Problème 2016-17(2). *Soit $(ABCD)$ un quadrilatère convexe du plan euclidien. On note $\alpha = AB$ et $\beta = CD$ les longueurs de deux côtés opposés, et d la distance d'un point $M \in [BC]$ à la droite $\langle AD \rangle$. A-t-on toujours $d \leq \max(\alpha, \beta)$? Et même question dans l'*espace *euclidien (de dimension 3).*

Mais pour meubler cette toute première séance, on propose un exposé sur le théorème suivant, attribué à Aubry (1912).

Théorème. *Soit $n > 0$ un entier :*
(a) Forme géométrique : *Si le cercle euclidien d'équation $x^2+y^2=n$ passe par un point à cordonnées rationnelles, alors il passe aussi par un point à coordonnées entières.*
(b) Forme arithmétique : *Si l'équation $x^2+y^2=n$ admet une solution en nombres rationnels, alors elle en admet aussi une en nombre entiers.*

C'est clairement deux fois le même énoncé, mais on présente deux preuves différentes. Dans la preuve géométrique, on utilise une *méthode de descente* : si m est un point du cercle à coordonnées rationnelles $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ avec $c > 1$, on construit géométriquement un autre point m' du cercle dont les coordonnées sont $(\frac{a'}{c'}, \frac{b'}{c'})$ avec $0 < c' < c$. La preuve arithmétique utilise la caractérisation des entiers qui sont somme de deux carrés : *Un entier n est somme de deux carrés si et seulement si dans la décomposition de n en facteurs premiers, les facteurs congrus à -1 modulo 4 n'apparaissent qu'à des puissances paires.*

La preuve géométrique s'étend au cas de la sphère, c'est-à-dire de la somme de trois carrés : *Les entiers sommes de trois carrés de rationnels sont aussi sommes de trois carrés d'entiers.* En dimension 4 (sommes de quatre carrés), le théorème est sans intérêt puisque tout entier positif est somme de quatre carrés d'entiers (théorème de Lagrange).

Pour compléter cet exposé, on donne encore les preuves de la caractérisation des sommes de deux carrés et du théorème de Lagrange sur les sommes de quatre carrés, qui utilisent aussi des méthodes de descente.

Séance du 28 septembre 2016

Nouveau problème posé.

Problème 2016-17(3). *Chaque lettre représentant un chiffre de* 0 *à* 9 *(chiffres différents pour des lettres différentes), déterminer la correspondance entre les lettres et les chiffres si l'on a l'addition suivante*

$$\begin{array}{r} \text{FULL} \\ \underline{+\ \text{METAL}} \\ \text{JACKET} \end{array}$$

On expose une solution du problème **(1)** du 21 septembre : pour tout entier k, on note $A_k = \{\, (a,b) \in \mathbb{N}^2 \,;\, a^2 + b^2 = k\,(ab+1) \,\}$ si bien qu'il nous faut démontrer que $A_k = \emptyset$ lorsque k n'est pas un carré. On observe que A_k est symétrique, et on introduit le nouvel ensemble $B_k = \{\, a+b \,;\, (a,b) \in A_k \,\}$.

On procède par l'absurde : supposons que $A_k \neq \emptyset$ pour un entier k qui n'est pas un carré, alors $B_k \neq \emptyset$ et on peut noter $e > 0$ le plus petit élément de B_k, qui est de la forme $e = a + b$ avec $(a,b) \in A_k$; par symétrie, on peut supposer que $a \geq b$, et puisque k n'est pas un carré, on peut supposer que $b > 0$. On pose ensuite $P(X) = X^2 - kb\,X + b^2 - k$, en sorte que $(c,b) \in A_k \;\Leftrightarrow\; P(c) = 0$; ce polynôme P ayant pour racine a, il a aussi une autre racine c qui est entière puisque $c = kb - a$; on aura prouvé le résultat si l'on montre que $0 < c < a$, car cela impliquera que $B_k \ni c + b < a + b = e$, ce qui contredit la définition de e.

Comme k n'est pas un carré, les racines de P sont non nulles, et puisque $P(c) = 0$ entraîne que $bc = \dfrac{c^2+b^2}{k} - 1 > -1$, on a même $c > 0$; de plus, $a \geq b > 0$ entraîne les inégalités $a^2 \geq b^2 > b^2 - k$, d'où $a > \dfrac{b^2-k}{a} = c$, ce qui termine la preuve des inégalités $0 < c < a$. ∎

Un nouveau problème est soumis à la sagacité des éminents membres du club.

Problème 2016-17(4). *Soit $n > 0$ un entier fixé. On cherche le plus grand des entiers $k \in [\![1,n]\!]$ vérifiant : $\forall i \in [\![1,k-1]\!]$, $\left[\frac{n}{i}\right] > \left[\frac{n}{i+1}\right]$.*

Dans cet énoncé, $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

Séance du 5 octobre 2016

On apporte une solution au problème **(3)** du 28 septembre : comme FULL $<$ 10000 et METAL $<$ 100000, on a JACKET $<$ 109999, d'où J $=1$, M $=9$ et A $=0$.

Comme A $=0$ et que E $\neq$ L, la deuxième colonne en partant de la droite montre que la somme L $+$ L conduit à une retenue, soit L ≥ 5 et E $=$ L $+1$; on a même L >5 puisque T $\neq$ A $=0$, et L $\neq 8$ puisque L $+1=$ E $\neq$ M $=9$. En conclusion, on a donc L $=6$ ou 7, et E $=$ L $+1$.

Si on avait L $=6$, on aurait T $=2$ et E $=7$, et il resterait à attribuer les valeurs 3, 4, 5 et 8 aux lettres restantes. On aurait alors K $=$ U $+2$ donc U $=3$ et K $=5$, puis F >3 ; si F $=4$ on obtient C $=1$ mais c'est impossible puisqu'on a déjà J $=1$, tandis que si F $=8$ on obtient C $=5$ ce qui est aussi impossible puisqu'on a déjà K $=5$. En conclusion, L $=6$ semble impossible.

C'est donc que L $=7$, ce qui entraîne que T $=4$ et E $=8$, et il reste à attribuer les valeurs 2, 3, 5 et 6 aux lettres restantes. On a alors K $=$ U $+4$ soit U $=2$ et K $=6$, puis F >3 soit F $=5$ et C $=3$.

L'addition donnée était donc $5277+98407=103684$. ∎

Revenant au problème **(2)** du 21 septembre, une meilleure reformulation de ce problème serait peut-être :

> **Problème 2016-17($2^{\mathbf{bis}}$).** *Soient K un fermé convexe du plan euclidien, et d_K la distance à K. Cette fonction est-elle convexe sur le plan euclidien ?*

La réponse semble être "oui" ; mais pourquoi ?

On nous rapporte qu'un absent nous aurait proposé une démonstration originale du petit théorème de Fermat. Mais cette proposition reste anonyme, et nous ne savons pas si elle sera suivie d'effet !

Séance du 12 octobre 2016

À propos du problème **($2^{\mathbf{bis}}$)** du 5 octobre, notons y_0 et y_1 les projections sur K de x_0 et x_1, et aussi $x_t=(1-t)x_0+tx_1$ et $y_t=(1-t)y_0+ty_1 \in K$. Alors

$$d_K(x_t) \leq |x_t-y_t| = |(1-t)(x_0-y_0)+t(x_1-y_1)| \leq$$
$$\leq (1-t)|x_0-y_0|+t|x_1-y_1| = (1-t)d_K(x_0)+td_K(x_1),$$

pour $t\in[0,1]$, ce qui semble résoudre le problème. ∎

Puis voici une nouvelle série d'interrogations.

> **Problème 2016-17(5).** *Soit une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ qui est dérivable sur $]a,b[$ avec f' intégrable sur $]a,b[$. A-t-on $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,dt$?*

La réponse est oui : c'est prouvé dans Rudin, *Real and complex analysis.*

> **Problème 2016-17(6).** *On se donne un polygone du plan centré en 0 et symétrique. Sait-on décrire la norme dont c'est la boule unité ?*

Problème 2016-17(7). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive de classe C^1 ; peut-on écrire $f = g^2 + h^2$ pour des fonctions g et h de classe C^1 ? Variantes :*
(a) *Si f est polynomiale positive, peut-on trouver g et h polynomiales ?*
(b) *Si f est C^∞ positive, peut-on trouver g et h de classe C^∞ ?*
(c) *Si f est C^{2m} positive, peut-on trouver g et h de classe C^m ?*

Un petit malin, pour montrer qu'il a bien suivi, fait remarquer que ce problème, ainsi que les variantes (b) et (c), est trivial lorsque la fonction f reste *strictement* positive. Mais évidemment, le problème se pose pour les fonctions positives qui s'annulent.

Séance du 19 octobre 2016

Nouvelle avalanche de problèmes.

Problème 2016-17(8). *On se donne k entiers a_j vérifiant $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq m \in \mathbb{N}$ et tels que pour tout $i \leq k$, l'entier a_i ne divise pas $\prod_{j \neq i} a_j$. Prouver que $k \leq \pi(m)$ où $\pi(m)$ désigne le nombre d'entiers premiers $\leq m$.*

Problème 2016-17(9). *Montrer que si $k \leq 16$, tout ensemble de k entiers > 1 consécutifs contient toujours un élément qui est premier avec tous les autres. Et montrer que si $k > 16$, ce n'est plus vrai en général.*

Problème 2016-17(10). *On définit un nombre* trapézoïdal *comme une somme d'entiers positifs consécutifs (autrement dit comme une différence de deux nombres triangulaires). Pourrait-on donner une caractérisation simple de ces nombres ?*

Problème 2016-17(11). *Soit Ω une partie de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ dont le complémentaire est de mesure de Lebesgue nulle, et telle qu'Ω soit partitionnée en graphes 1-lipschitz $\mathcal{G}_\gamma = \{\, (t, \gamma(t))\, ;\, t \in \mathbb{R} \,\}$. Peut-on "boucher les trous" ?*

La question du problème **(11)** ayant été précisée, il est apparu que la réponse était claire, et que le problème doit être considéré comme résolu.

À propos du problème **(7)** du 12 octobre, on fait remarquer qu'il existe des fonctions positives de classe C^1 qui ne sont pas somme de deux carrés de classe C^1 : en effet, près d'un zéro x_0 d'une somme f de carrés de classe C^1 on a toujours $f'(x) = \mathcal{O}(|x - x_0|)$ tandis que la fonction de classe C^1 définie par $f(x) = |x|^{3/2}$ vérifie $|f'(x)| = \frac{3}{2}|x|^{1/2}$, ce qui n'est pas un $\mathcal{O}(|x|)$.

Par ailleurs, on nous promet pour les séances à venir des exposés sur les *hyperensembles* et un autre sur la *théorie des graphes*.

Séance du 26 octobre 2016

Encore un nouveau problème !

Problème 2016-17(12). *On cherche les entiers positifs n tels que tout sous-ensemble de $[\![1, n^2]\!]$ de cardinal n contienne deux parties U et V non vides disjointes telles que $\sum_{x \in U} x = \sum_{x \in V} x$.*

À propos du problème **(9)** du 19 octobre, on fait remarquer que deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux, et que parmi trois entiers consécutifs, celui du centre est toujours premier avec ses deux voisins.

Enfin, on nous signale que sur le site de la RMS figure un lien vers une liste de problèmes non-résolus. Parmi ces problèmes figure le suivant :

> **Problème 2016-17(13).** *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on considère la réunion d'une suite croissante de boules. Peut-on caractériser les parties ainsi obtenues ?*

Dans le cas euclidien, il semble assez facile de montrer que cette réunion est soit une boule, soit l'espace tout entier, soit un demi-espace. Une façon élégante de le voir est de compactifier l'espace en l'envoyant par projection stéréographique sur la sphère de même dimension. Sur la sphère, il est à peu près immédiat que la réunion d'une suite croissante de boules (ne contenant pas le pôle) est une boule ; reste à voir quelle est sa position par rapport au pôle, et cela donne les trois cas décrits ci-dessus.

Mais le problème est beaucoup plus ouvert si l'on considère des normes quelconques (pas euclidiennes).

Séance du 9 novembre 2016

On propose ici une solution du problème **(8)** du 19 octobre : pour tout $i \leq k$ on écrit $a_i = \prod_{p \leq m} p^{\alpha_i(p)}$, et puisque a_i ne divise pas $\prod_{j \neq i} a_j$, il existe un $p \leq m$ tel que $\alpha_i(p) > \sum_{j \neq i} \alpha_j(p)$; on a ainsi associé à chaque indice $i \leq k$ un nombre premier $p \leq m$, et vu la condition écrite, cela définit une application injective, d'où le résultat. ∎

On rediscute aussi le problème **(9)** mais sans progresser de façon significative.

Et voici un nouveau problème de boules !

> **Problème 2016-17(14).** *On se donne $2n$ points $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, et n rayons $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que pour tous indices i et $j \leq n$, on a $|y_i - y_j| \leq |x_i - x_j|$. Peut-on en conclure que le volume (euclidien) de $\cap_i B(y_i, r_i)$ est supérieur ou égal au volume de $\cap_i B(x_i, r_i)$?*

Séance du 16 novembre 2016

On rediscute le problème **(14)** des boules qui se rapprochent, mais sans le résoudre, même en dimension $d = 1$!

Et encore d'autres problèmes !

> **Problème 2016-17(15).** *Soit A un ensemble ; montrer que si $\mathbb{N}$ s'injecte dans $\mathcal{P}(A)$, alors $\mathbb{R}$ s'y injecte aussi.*

En réalité, c'est immédiat : si A était fini, on aurait aussi $\mathcal{P}(A)$ fini ; c'est donc que A est infini, que $\mathbb{N}$ s'injecte dans A, et donc que $\mathbb{R} \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'injecte dans $\mathcal{P}(A)$. ∎

> **Problème 2016-17(16).** *Soient x, y et z trois éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Alors :*
> (a) $x^y + y^x \leq x^x + y^y$.
> (b) $x^y + y^z + z^x \leq x^x + y^y + z^z$.
> *On cherche une démonstration élégante de* (a) *(on en connaît déjà une peu élégante), et une démonstration tout court de* (b).

Un participant propose de démontrer la formule (a) en développant en série les exponentielles de l'expression $e^{x\ln x} + e^{y\ln y} - e^{x\ln y} - e^{y\ln x}$. Cette idée est saisissante, mais nous mettrons plusieurs semaines à nous apercevoir qu'elle ne fonctionne bien que si tous les nombres x et y (et z) sont ≥ 1.

Séance du 23 novembre 2016

Enthousiasmés par la preuve de la semaine dernière, nous écrivons une preuve du problème **(16)**(b) (mais qui s'avérera correcte seulement si x, y et z sont ≥ 1), puis nous énonçons une généralisation du problème :

> **Problème 2016-17(16$^{\mathbf{bis}}$).** *Étant donnés n nombre réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ et une permutation σ de $[\![1,n]\!]$, montrer que l'on a toujours $\sum_j x_j^{x_{\sigma(j)}} \leq \sum_j x_j^{x_j}$, et aussi $\sum_j x_{\sigma(j)}^{x_j} \leq \sum_j x_j^{x_j}$.*

Si l'on écrit l'une de ces deux inégalités pour la permutation σ^{-1} et que l'on fait le changement d'indices $k = \sigma^{-1}(j)$, on obtient l'autre inégalité, si bien qu'il suffit de démontrer l'une de ces deux inégalités.

En vue de démontrer la première, on peut écrire

$$\left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^{x_j}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^{x_{\sigma(j)}}\right) \;=\; \sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{x_j\ln x_j} - \mathrm{e}^{x_{\sigma(j)}\ln x_j}\right),$$

et par développement en série des exponentielles, cette expression s'écrit aussi

$$\left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^{x_j}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^{x_{\sigma(j)}}\right) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,u_k$$

$$\text{avec}\qquad u_k \;=\; \sum_{j=1}^{n}(\ln x_j)^k\big({x_j}^k - {x_{\sigma(j)}}^k\big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} f_k(y_j)\big(y_j - y_{\sigma(j)}\big)$$

en notant, pour k fixé, $y_j = {x_j}^k$ et $f_k(y) = \big(\ln(y^{1/k})\big)^k$. Chaque fonction f_k est croissante sur $[1,\infty[$ (et non sur $\mathbb{R}_+^*$ comme nous l'avons d'abord cru !) comme composée de trois fonctions croissantes sur les intervalles où nous les considérons, et il faudrait pouvoir en déduire que chaque nombre u_k est positif, grâce à une identité algébrique sur les fonctions croissantes, quelque chose du genre convexité (?), mais il reste à mettre cela au clair. Nous y réfléchirons pour la semaine prochaine.

On revient ensuite au problème **(13)** du 26 octobre, c'est-à-dire à la description des réunions de suites croissantes de boules (non-euclidiennes). On cherche à formuler une conjecture en termes d'hyperplans d'appui de la boule unité et de points extrémaux, mais on n'arrive pas à une formulation convaincante.

Et nous revenons aussi au problème **(14)** du 9 novembre en dimension $d = 1$, c'est-à-dire au problème des segments qui se rapprochent. On fait des dessins pour expliquer une idée, mais cela ne prend pas vraiment forme.

Cependant dans le cas de deux segments, on se convainc facilement que le résultat est vrai : soient I_1 et I_2 les segments de centres x_1 et x_2, et J_1 et J_2 les segments de centres y_1 et y_2 ; on examine différents cas :

- Si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, alors $|I_1 \cap I_2| = 0 \leq |J_1 \cap J_2|$.
- Si $I_1 \subset I_2$, alors $J_1 \subset J_2$ et $|I_1 \cap I_2| = |I_1| = |J_1| = |J_1 \cap J_2|$.
- Si $I_2 \subset I_1$, raisonnement analogue.
- Reste le cas où, à symétrie près $x_1 - r_1 < x_2 - r_2 < x_1 + r_1 < x_2 + r_2$; les deux inégalités de droite et de gauche s'écrivent aussi $x_1 - x_2 < r_1 - r_2$ et $x_1 - x_2 < r_2 - r_1$, d'où : $x_1 - x_2 < 0$, et $|I_1 \cap I_2| = r_1 + r_2 + x_1 - x_2 < 2r_1 = |J_1|$ et $|I_1 \cap I_2| < 2r_2 = |J_2|$. Ces dernières inégalités prouvent le résultat quand $J_1 \subset J_2$ ou quand $J_2 \subset J_1$, et sinon à symétrie près on a aussi $y_1 - r_1 < y_2 - r_2 < y_1 + r_1 < y_2 + r_2$, d'où comme ci-dessus $y_1 - y_2 < 0$ et $|J_1 \cap J_2| = r_1 + r_2 - |y_1 - y_2| \geq r_1 + r_2 - |x_1 - x_2| = |I_1 \cap I_2|$. ∎

Séance du 30 novembre 2016

Toujours sur le problème **(14)** du 9 novembre en dimension $d = 1$, c'est-à-dire sur le problème des segments qui se rapprochent, on propose d'écrire

$$\cap_i [y_i - r_i, y_i + r_i] = [\max_i (y_i - r_i), \min_i (y_i + r_i)]$$

si c'est non vide, et c'est encore égal à

$$[y_j - r_j, y_k + r_k] = [y_j - r_j, y_j + r_j] \cap [y_k - r_k, y_k + r_k]$$

pour deux indices j et $k \leq n$. On a donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{long}(\cap_i [x_i - r_i, x_i + r_i]) \leq \mathrm{long}([x_j - r_j, x_j + r_j] \cap [x_k - r_k, x_k + r_k]) \leq \\ &\leq \mathrm{long}([y_j - r_j, y_j + r_j] \cap [y_k - r_k, y_k + r_k]) = \mathrm{long}(\cap_i [y_i - r_i, y_i + r_i]), \end{aligned}$$

puisque le résultat est clair dans le cas de deux segments. ∎

Cela termine la preuve dans le cas $d = 1$, ... mais il reste les cas $d > 1$!

Revenant aux problèmes **(16)** et **(16$^{\mathbf{bis}}$)** des 16 et 23 novembre, nous voyons que pour conclure, il nous suffit de prouver la proposition suivante : *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur l'intervalle I, et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Alors pour toute donnée $y_1, \ldots, y_n$ de points de I on a l'inégalité* $\sum_{j=1}^{n} f(y_j)\big(y_j - y_{\sigma(j)}\big) \geq 0$. <u>Démonstration</u> : si pour un $a \in I$ quelconque, on pose $F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$, cette fonction F est une primitive de f si f est continue, et elle est convexe par croissance de f. Mais que f soit continue ou pas, par croissance de f on a l'inégalité de convexité $F(z) = F(y) + \int_y^z f(x)\,dx \geq F(y) + f(y)(z - y)$ pour tous y et $z \in I$ (que y soit $\leq z$ ou pas), et en appliquant cela à $y = y_j$ et $z = y_{\sigma(j)}$, nous obtenons l'inégalité $f(y_j)\big(y_j - y_{\sigma(j)}\big) \geq F(y_j) - F(y_{\sigma(j)})$, si bien que la proposition se prouve alors par sommation de l'inégalité ci-dessus de $j = 1$ à n puisque cette sommation annule le membre de droite. ∎

Cela termine la preuve du problème **(16$^{\mathbf{bis}}$)**, mais seulement lorsque les nombres x_j vérifient tous $x_j \geq 1$. Mentionnons que le résultat de la proposition s'étend aux fonctions de plusieurs variables sous la forme suivante : *Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$ et $F : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1 dont on note $f_y : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la différentielle au point $y \in U$. Si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$ et $y_1, \ldots, y_n$ sont des points de U, alors* $\sum_{j=1}^{n} f_{y_j}(y_j - y_{\sigma(j)}) \geq 0$. Nouvelle remarque : l'autre forme de l'inégalité du problème **(16$^{\mathbf{bis}}$)** peut s'obtenir par la même technique de développement en série des exponentielles à condition de montrer la positivité de l'expression $\sum_{j=1}^{n} y_j \big(f(y_j) - f(y_{\sigma(j)})\big)$ pour f croissante ; or montrer cette inégalité équivaut à montrer celle de la proposition ci-dessus, comme on le voit en l'écrivant pour σ^{-1} puis en effectuant une *transformation d'Abel*.

Pour en revenir à la simple condition $x_j > 0$ initialement posée, on détaille maintenant une preuve acceptable de la question (a) du problème **(16)**.

On peut supposer que $x > y > 0$, et en introduisant les fonctions $f(t) = x^t - y^t$ et $g(t) = t^x - t^y$, on peut écrire que

$$(x^x + y^y) - (x^y + y^x) = f(x) - f(y) = g(x) - g(y),$$

si bien qu'il nous suffit donc de montrer que l'une des deux fonctions f ou g est croissante sur l'intervalle $[y, x]$.

Dans le cas où $x \geq 1$, on calcule que

$$f'(t) = (\ln x)\, x^t - (\ln y)\, y^t = (\ln x)(x^t - y^t) + (\ln x - \ln y)\, y^t,$$

et dans cette expression, tout est positif puisque $\ln x \geq 0$, $t \geq 0$ et $x \geq y$. Dans ce cas, la fonction f est donc croissante et l'inégalité est démontrée.

Dans le cas où $x \leq 1$, on calcule que $g'(t) = x\, t^{x-1} - y\, t^{y-1}$, et donc que

$$g'(t) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x + (x-1)\ln t \geq \ln y + (y-1)\ln t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln x - \ln y}{x - y} \geq -\ln t\,;$$

or comme $y < x \leq 1$, on a

$$\frac{\ln x - \ln y}{x - y} \;\geq\; \frac{-\ln y}{1 - y} \;\geq\; -\ln y \;\geq\; -\ln t$$

pour tout $t \geq y$, et on ainsi prouvé que g est croissante sur $[y, x]$, et donc que l'inégalité est aussi démontrée dans ce deuxième cas. ∎

Puisqu'on sait le faire pour deux nombres, ne pourrait-on le faire pour n nombres, par récurrence sur n ?

Séance du 7 décembre 2016

Un étudiant ayant demandé des explications sur la décomposition de Dunford (motivé semble-t-il par un prochain contrôle !), on se lance dans des considérations sur la réduction des endomorphismes. Puis on reparle des problèmes **(13)** et **(16)** sans beaucoup progresser, et on se donne rendez-vous pour une reprise en janvier après les examens.

*

* * * *

*

Activités 2016-2017
deuxième semestre

Séance du 25 janvier 2017

Pour démarrer la nouvelle année, voici des problèmes nouveaux.

Problème 2016-17(17). *Si $n \neq 6$, les seuls automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont les automorphismes intérieurs.*

Problème 2016-17(18). *Soit $p \geq 5$ un entier premier. Il faut démontrer que*

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \mod p^3 ,$$

et l'on pourra commencer par montrer que, pour u et v entiers :

$$\frac{u}{v} = S_1 := \sum_{0<k<p} \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0 \mod p^2$$

$$\text{et} \quad \frac{u}{v} = S_2 := \sum_{0<k<p} \frac{1}{k^2} \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0 \mod p\,.$$

Nous attaquons immédiatement ce problème **(18)** en remarquant que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ étant un corps, modulo p il y a bijection entre les $0 < k < p$ et les $1/k$, si bien que la somme S_2 des $1/k^2$ est congrue modulo p à la somme des k^2, qui vaut $\frac{1}{6}\,(p-1)\,p\,(2p-1) \equiv 0 \bmod p$, soit la dernière affirmation.

Pour la somme S_1, elle vaut

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{0<k<p} \Big(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k}\Big) = \frac{p}{2} \sum_{0<k<p} \frac{1}{pk - k^2}\,;$$

la dernière somme écrite est congrue à $-S_2$ modulo p, d'où $S_1 \equiv 0 \bmod p^2$.

On écrit alors $S_1^2 - S_2 = 2 \sum_{0<j<k<p} (1/jk)$, puis

$$\binom{2p-1}{p-1} = \prod_{0<k<p} \frac{p+k}{k} = \prod_{0<k<p} \Big(1 + \frac{p}{k}\Big) = 1 + p\,S_1 + p^2\,\frac{S_1^2 - S_2}{2} + \frac{n\,p^3}{m}\ ,$$

et comme tous les dénominateurs de ces formules sont inversibles dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et donc aussi dans $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$, on voit que tous les termes écrits sont $\equiv 0 \bmod p^3$ sauf le premier terme qui vaut 1 ; la preuve est donc complète. ∎

Problème 2016-17(19). *Dans un espace affine, le complémentaire d'un convexe différent d'un demi-espace est-il toujours non-convexe ?*

Séance du 1er février 2017

Nous écoutons un exposé tendant à prouver que le *lemme de Baire* est équivalent à l'*axiome du choix dépendant* (axiome du choix dénombrable ?).

Soit X un ensemble, et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur cet ensemble vérifiant : $\forall x \in X$, $\exists y \in X\ :\ x\,\mathcal{R}\,y$. Par l'axiome du choix dépendant, on peut en déduire qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que $\forall n,\ x_n\,\mathcal{R}\,x_{n+1}$.

Il s'agit maintenant de montrer ce résultat en utilisant le lemme de Baire plutôt que l'axiome du choix dépendant. On définit une distance sur les suites en posant $d(x,y) = 2^{-\min\{n; x_n \neq y_n\}}$, et cette distance fait de l'espace des suites un espace complet. On introduit alors $F_n = \{\, (x_i)\,;\, \forall i > n\,,\ x_n \not\mathcal{R}\, x_i\,\}$ qui est un fermé d'intérieur vide : en effet, étant donnée une suite $x = (x_i) \in F_n$, pour chaque $j > n$ fixé on modifie cette suite en posant $y_i^j = x_i$ pour $i \neq j$, et $y_j^j = y$ pour un $y \in X$ vérifiant $x_n \,\mathcal{R}\, y$, ce qui définit une suite y^j de suites $\notin F_n$ et tendant vers x. Alors la réunion des F_n est d'intérieur vide et son complémentaire est dense et donc non vide. Un élément (x_i) de ce complémentaire vérifie que $\forall i$, $\exists j > i$ tel que $x_i \,\mathcal{R}\, x_j$, et on peut en extraire une sous-suite *explicite* (sans utilisation de l'axiome du choix dépendant) en prenant *le plus petit entier $j > i$ ayant cette propriété.*

À propos du lemme de Baire, on signale que ce dernier permet de démontrer le résultat suivant.

> **Problème 2016-17(20).** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_x tel que $f^{(n_x)}(x) = 0$. Alors f est polynomiale.*

Mais on signale aussi que démontrer ce résultat avec le lemme de Baire est plutôt compliqué, alors qu'on le peut aussi démontrer sans ce lemme d'une façon relativement élémentaire.

Pour montrer cela, on commence par établir les deux lemmes suivants sur les fonctions à valeurs réelles. **Lemme 1 :** *Si $([a_n, b_n])$ est une suite croissante d'intervalles et si $f : \cup_n [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ est telle que $f_{|[a_n,b_n]}$ est polynomiale pour tout n, alors f est elle-même polynomiale.* **Lemme 2 :** *Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ est polynomiale sur tout sous-intervalle où elle ne s'annule pas, alors f est elle-même polynomiale.* Ce deuxième lemme consiste à remarquer que si x est un zéro isolé de f, f est polynomiale à droite et à gauche de x, et comme elle est C^∞ en x, les deux polynômes coïncident, et elle est donc aussi polynomiale au voisinage de x.

On peut alors résoudre le problème **(20)** en démontrant sa contraposée : *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ non polynomiale, il existe au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(x) \neq 0$ pour tout n.* Et pour cela, on construit une suite $([a_n, b_n])$ de segments emboîtés (avec $a_n < b_n$) sur lesquels f n'est pas polynomiale, et telle que $f^{(n)}$ ne s'annule pas sur $[a_n, b_n]$: c'est essentiellement le lemme 2 qui permet cette construction.

Séance du 8 février 2017

Théorème de *Futurama* : c'est le problème suivant.

> **Problème 2016-17(21).** *On dispose d'une machine opérant sur des paires d'individus, et qui échange leurs esprits ; mais cette machine possède une mémoire, et ne peut échanger les esprits d'une paire de corps ayant déjà été soumise à cette machine.*
>
> *On suppose que cette machine a opéré un certain nombre d'échanges successifs dans une population de n individus, et on voudrait l'utiliser pour rendre à chaque corps son esprit d'origine. Il s'agit de démontrer qu'il suffit d'adjoindre deux nouveaux individus n'ayant jamais été soumis à la machine pour effectuer cette opération.*

On se convainc facilement sur une population à deux ou trois individus que l'on ne pourra pas toujours revenir à l'état initial sans ajouter de nouveaux individus.

Revenant au problème **(19)** du 25 janvier, voici une autre façon de poser le problème : *décrire les partitions d'un espace affine E en deux parties convexes non vides A et B.* Prenant les intérieurs U et V de A et de B (on est dans un espace affine dont la direction est un espace normé), ce sont deux parties ouvertes disjointes, et par le théorème d'Hahn-Banach, ces deux parties sont situées de part et d'autre d'un hyperplan fermé H. Notant H_+ et H_- les deux demi-espaces ouverts de bord H, on a donc $U \subset H_+$ et $V \subset H_-$ (ou le contraire) ; on a même $U = H_+$ et $V = H_-$ car sinon on aurait $A \cup B \neq E$, et il en résulte que $A = H_+ \cup (A \cap H)$ et $B = H_- \cup (B \cap H)$, et que $A \cap H$ et $B \cap H$ forment une partition de l'espace affine H en deux parties convexes. On voit donc quelle description on peut donner de ces partitions, notamment par récurrence sur la dimension de l'espace dans le cas de la dimension finie.

Reste que la question posée avait un sens pour un espace affine quelconque, même dépourvu de topologie ; il conviendrait de lui trouver une réponse indépendante d'une quelconque topologie.

Du nouveau sur le problème **(13)** du 26 octobre 2016 : décrire les réunions de suites croissantes de boules. Nous avions fait la conjecture que ces réunions pouvaient être de trois types : *soit une boule (quand la suite des rayons reste bornée), soit l'espace tout entier, soit, à translation près, la réunion des homothétiques de la boule unité dans des homothéties centrées en un même point du bord de cette boule unité et de rapports tendant vers l'infini.* Or il semblerait que cette conjecture ne soit pas correcte ; pour le voir, on considère dans $\mathbb{R}^3$ la norme $N(x) = \max\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,,\ |x_1| + |x_3|\big)$ qui mélange les normes 1, 2 et ∞ ; on pense que dans ce cas, en choisissant bien les centres et les rayons, on peut obtenir comme réunion le demi-espace $\{x_1 > 0\}$, qui n'est pas du troisième type décrit dans la conjecture.

Séance du 15 février 2017

Nous écoutons un exposé : *L'énigme des divisions du disque.*

Cet exposé s'inspire d'une série de vidéos mathématiques que l'on trouve sur YouTube, et qui se nomme 3blue1brown.

On prend n points situés sur le bord d'un disque, puis on relie par un segment chacune des paires de ces points. Supposant que parmi tous ces segments il n'y en a jamais trois concourants, il s'agit de compter le nombre de régions délimitées dans ce disque par ces segments. Notant R_n le nombre de régions obtenues lorsque l'on part de n points, les premières valeurs se calculent aisément : $R_1 = 1(= 2^0)$, $R_2 = 2(= 2^1)$, $R_3 = 4(= 2^2)$, $R_4 = 8(= 2^3)$, $R_5 = 16(= 2^4)$; mais si l'on va jusqu'à $n = 6$, on découvre avec stupeur que $R_6 = 31(< 32 = 2^5)$! Poursuivant le calcul, on trouve encore $R_7 = 57$, $R_8 = 99$, $R_9 = 163$ puis $R_{10} = 256(= 2^8)$.

Peut-on expliquer pourquoi on trouve d'abord des puissances de 2 dans la suite R_n, puis plus de puissances de 2 pour $6 \leq n \leq 9$, et à nouveau une puissance de 2 pour $n = 10$?

Pour effectuer le calcul du nombre de régions, on va faire appel à la théorie des graphes, qui affirme que pour un graphe planaire connexe fini, $s - a + r = 2$ où s désigne le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes, et r le nombre de régions délimitées par les arêtes, en comptant aussi la région extérieure. Pour l'application à notre problème, nous considérons le graphe dont les sommets sont les n points donnés au début plus les points d'intersection deux à deux des segments qui se coupent ; dont les arêtes sont les n arcs de cercle découpés sur le bord du disque par les n points choisis plus les morceaux des segments tracés comme découpés par les sommets ; et dont les régions sont celles que nous voulons compter plus la région extérieure.

Ce graphe compte alors un nombre de sommets égal à $n + \binom{n}{4}$ puisque les points d'intersection deux à deux des segments sont en bijection avec les quadruplets de points pris parmi les n points donnés sur le cercle. Pour le décompte des arêtes : les arcs de cercle sont au nombre de n ; les segments tracés au nombre de $\binom{n}{2}$; et chaque point d'intersection rajoute deux nouvelles arêtes, si bien que le nombre total d'arêtes se trouve égal à $n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$. Comme le nombre de régions est égal à $R_n + 1$, on obtient la relation

$$n + \binom{n}{4} - n - \binom{n}{2} - 2\binom{n}{4} + R_n + 1 = 2, \quad \text{soit} \quad R_n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

On remarque en particulier que ce nombre ne dépend pas de la position des n points donnés au départ tant que l'on suppose que les segments tracés ne sont jamais trois à trois concourants.

Et les puissances de 2 ? On utilise ici les propriétés des coefficients binomiaux (triangle de Pascal) : pour tout n, $1 = \binom{n}{0}$, et $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ pour tous $0 < k < n$. Ces relations nous permettent de récrire

$$R_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4} = \sum_{k=0}^{4} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$$

tant que $n-1 \leq 4$, soit $n \leq 5$. De plus, pour $n = 10$, on a $R_{10} = \sum_{k=0}^{4} \binom{9}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} = \frac{1}{2}\, 2^9$, ce qui explique que l'on trouve encore une puissance de 2 pour $n = 10$.

Pour finir, on va justifier la formule d'Euler $s - a + r = 2$. On définit les cycles d'un graphe, les arbres couvrants qui sont des sous-graphes connexes sans cycles contenant tous les sommets, et le graphe dual. On observe en outre que chaque cycle du graphe de départ découpe le graphe dual en deux parties connexes (et réciproquement). Le dual d'un arbre couvrant A sera le sous-graphe du graphe dual ayant pour arêtes celles qui correspondent aux arêtes du graphe de départ qui ne sont pas arêtes de A. On établit alors le **Lemme** : *Le dual d'un arbre couvrant d'un graphe est un arbre couvrant du graphe dual.* Et on termine la preuve ainsi : le nombre de sommets de l'arbre couvrant A vaut s, celui des sommets de l'arbre dual A^* vaut $s^* = r$, et la somme des nombres b et b^* des arêtes de ces deux arbres vaut $b + b^* = a$; alors $s - a + r = s - b - b^* + s^*$, et cela vaut 2 puisque $s - b = 1$ pour tout arbre à s sommets et b arêtes (pour le voir, partir de la racine).

Séance du 1er mars 2017

Voici un problème de géométrie, que l'on peut aussi voir comme un problème de mécanique (moments d'inertie).

> **Problème 2016-17(22).** *Soient (abc) un triangle équilatéral de centre g, D une droite passant par g, et α, β et γ les projections orthogonales de a, b et c sur D. Il s'agit de trouver une démonstration aussi élégante que possible des relations $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = g\alpha^2 + g\beta^2 + g\gamma^2 = \frac{1}{2}\,(ga^2 + gb^2 + gc^2)$.*

En particulier, ces identités montrent que ces sommes ne dépendent pas de la direction de la droite D. Il est facile d'observer que l'une quelconque de ces trois égalités entraîne les deux autres, puisque par Pythagore $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + g\alpha^2 + g\beta^2 + g\gamma^2 = ga^2 + gb^2 + gc^2$ et que l'on échange les deux premières sommes en tournant la droite D d'un angle droit. Il devrait y avoir une preuve qui utilise seulement que $ga = gb = gc$ et que $\overrightarrow{ga} \bullet \overrightarrow{gb} = -\frac{1}{2}\, ga^2$, mais elle ne se laisse pas trouver !

On peut considérer l'approche suivante : la quantité $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$ représente le moment d'inertie par rapport à l'axe D du solide formé des trois sommets du triangle ; si l'on note

$\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite D, ce moment d'inertie est une forme quadratique de $\overrightarrow{u}$ dont nous introduisons la matrice J dans une base orthonormée choisie et fixée ; alors dans toute base orthonormée cette matrice devient ${}^tP\,J\,P$ pour une matrice orthogonale P. Si l'on choisit la première base orthonormée $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ en sorte que $\overrightarrow{ga} = k\,\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{gb} = k\,(-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\jmath})$ et $\overrightarrow{gc} = k\,(-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\jmath})$, on voit facilement que $J = \frac{3}{2}\,k^2\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ en sorte que le moment d'inertie vaut $\frac{3}{2}\,k^2 = \frac{1}{2}\,(ga^2 + gb^2 + gc^2)$ dans toutes les directions.

Avec cette même approche, on voit facilement que l'on a un résultat analogue dans l'espace avec un tétraèdre régulier : avec des notations analogues, on a $g\alpha^2+g\beta^2+g\gamma^2+g\delta^2 = \frac{1}{2}\,(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2) = \frac{1}{3}\,(ga^2 + gb^2 + gc^2)$, avec encore un résultat analogue pour les projections sur un plan passant par g, ce qui correspond à une autre façon de lire la formule précédente.

Toujours du côté de la géométrie, on pose aussi le problème suivant.

> **Problème 2016-17(23).** *Énoncer et démontrer un théorème sur les tétraèdres qui soit analogue au théorème de Morley pour les triangles : dans un triangle quelconque, les trisectrices des angles se coupent deux à deux en trois points sommets d'un triangle qui est toujours équilatéral.*

Un participant propose de chercher une démonstration de Morley consistant à calculer les coordonnées barycentriques des intersections de trisectrices, en vue de passer ensuite au cas des tétraèdres, mais il ne convainc pas grand monde ! Concernant l'énoncé, on peut faire les remarques suivantes : les bissectrices d'un triangle sont les lieux des points équidistants à deux côtés, ce qui explique leur concours ; l'analogue pour les tétraèdres sont les plans bissecteurs des angles dièdres, qui sont les lieux des points équidistants à deux faces, et qui donc passent tous les six par un même point ; il faudrait, dans une perspective à la Morley, considérer les plans trisecteurs des angles dièdres ...

Et voici un autre problème, motivé par la fameuse question de l'existence des nombres parfaits impairs. Notons $\sigma(n)$ la somme de tous les diviseurs de l'entier $n > 1$, y compris 1 et n ; cet entier n est alors dit *parfait* si $\sigma(n) = 2n$ (n est égal à la somme de ses diviseurs propres). Euclide a montré que pour tout $n > 1$ tel que $p = 2^n - 1$ soit premier, l'entier $2^{n-1}p$ est parfait, et Euler a montré (beaucoup plus tard !) qu'il n'y a pas d'autre nombre parfait pair. Reste la question des nombres parfaits impairs, dont on ne connaît aucun exemple. Si l'on voulait montrer qu'il n'existe aucun nombre parfait impair, il suffirait par exemple de montrer que pour n impair, le quotient $\sigma(n)/n$ ne peut être entier.

Or dans le livre de Pascal Boyer, *Algèbre et Géométrie*, Calvage et Mounet, Paris 2015, figure la preuve de l'identité

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \left(\sum_{\substack{(a_1,\dots,a_k)\\ \Sigma_i i^2 a_i = n}} \frac{1}{\Sigma_i a_i} \;\; (-2)^{(\Sigma_i a_i)-1} \;\; \frac{(\Sigma_i a_i)!}{a_1! \dots a_k!} \right) ;$$

dans cette expression, tous les termes sont entiers sauf le $1/\Sigma_i a_i$, et la question est donc d'essayer de montrer que la plupart des termes sont entiers, mais que ceux qui ne le sont pas ne se compensent pas.

Séance du 8 mars 2017

On revient sur le problème **(9)** du 19 octobre 2016 : *déterminer les entiers k tels que toute suite de k entiers > 1 consécutifs contient un élément premier avec tous les autres.* Le point de départ consiste à noter p le plus petit facteur premier d'un entier $a > 1$, et à observer que les entiers les plus proches de a non premiers avec a sont $a \pm p$; avec pour corollaire que si on note d la distance de a à l'extrémité la plus éloignée de la suite, l'entier a est premier avec tous les autres si et seulement si $p > d$. Ce préliminaire étant posé, on examine la situation cas par cas.

Si la suite contient un seul nombre impair ($1 \leq k \leq 3$), celui-ci vérifie $p \geq 3$ et $d \leq 1$. Si la suite contient deux impairs (consécutifs, $3 \leq k \leq 5$), l'un au moins n'est pas divisible par 3 et vérifie donc $p \geq 5$ et $d \leq 3$. Si la suite contient trois impairs (consécutifs, $5 \leq k \leq 7$), l'un au moins n'est divisible ni par 3 ni par 5 et vérifie donc $p \geq 7$ et $d \leq 5$. Les difficultés arrivent à partir des suites contenant quatre impairs (consécutifs, $7 \leq k \leq 9$) : si un seul de ces impairs est divisible par 3, la suite contient au moins un impair vérifiant $p \geq 11$ et $d \leq 7$; mais si deux de ces impairs sont divisibles par 3, ce sont les deux des extrémités, et parmi les deux autres, on en trouve un vérifiant $p \geq 7$ et $d \leq 5$. Si la suite contient cinq impairs (consécutifs, $9 \leq k \leq 11$), l'un d'eux vérifie $p \geq 11$ et $d \leq 9$.

La suite devient plus délicate. S'il y a six impairs dont au plus trois divisibles par 3 ou 5, on en trouve un tel que $p \geq 13$ et $d \leq 11$, tandis que s'il y en a quatre divisibles par 3 ou 5, on en trouve un tel que $p \geq 11$ et $d \leq 7$. S'il y a sept impairs : si au plus trois sont divisibles par 3 ou 5, on en trouve un avec $p \geq 17$ et $d \leq 13$; s'il y en a trois divisibles par 3, on en trouve un avec $p \geq 13$ et $d \leq 11$; et dans les autres cas, on en a deux divisibles par 3 et deux autres divisibles par 5, et on en trouve alors un avec $p \geq 11$ et $d \leq 9$. Passons à huit impairs : s'il y en a au plus cinq divisibles par 3, 5 ou 7, on en trouve un avec $p \geq 17$ et $d \leq 15$; s'il y en a exactement quatre divisibles par 5 ou 7, on en trouve un avec $p \geq 13$ et $d \leq 11$; enfin dans les autres cas, il y en a cinq divisibles par 3 ou 5, *et si l'on suppose* $15 \leq k \leq 16$*, c'est-à-dire* $k < 17$, les trois impairs restants ont pour ensemble de valeurs de d : $\{9, 11, 12\}$ ou $\{8, 10, 13\}$, et comme deux de ces nombres impairs vérifient aussi $p \geq 11$ et $p \geq 13$ respectivement, on trouve encore dans ce cas un entier de la suite qui est premier avec tous les autres.

Pour $k = 17$, la suite commençant à 2184 et se terminant à 2200 ne contient aucun élément premier avec tous les autres : ils vérifient tous $p \leq 13$, et cette suite contient deux éléments divisibles par 11, à savoir 2189 et 2200, ainsi que deux éléments divisibles par 13, à savoir 2184 et 2197. On présente aussi des exemples pour $k = 18$, 19, 20 et 21. On n'a pas de démonstration montrant qu'il existe toujours des suites de k entiers consécutifs, lorsque $k \geq 17$, dont aucun ne soit premier avec tous les autres. Il reste donc une part de mystère dans ce problème.

Nous reprenons ensuite le problème **(12)** du 26 octobre 2016 : *Notant* $S(U) = \sum_{x \in U} x$ *pour toute partie finie* $U \subset \mathbb{N}$*, on veut déterminer les entiers n tels que toute partie* $W \subset [\![1, n^2]\!]$ *de cardinal n contienne deux parties U et V disjointes non vides telles que* $S(U) = S(V)$. La remarque de base consiste à remarquer que la condition écrite ci-dessus sur W équivaut à dire que S n'est pas injective sur $\mathscr{P}(W)$: en effet, si $S(U) = S(V)$ pour deux parties $U \neq V$ de W, alors on a aussi $S(U') = S(V')$ pour $U' = U \setminus (U \cap V)$ et $V' = V \setminus (U \cap V)$ qui sont deux parties non vides disjointes de W.

Comme $S(W) \subset [\![0, n^3]\!]$, on voit immédiatement que l'application S ne peut pas être injective lorsque $2^n = \mathrm{card}(\mathscr{P}(W)) > \mathrm{card}([\![0, n^3]\!]) = n^3 + 1$, c'est-à-dire lorsque $n \geq 10$; tous les nombres $n \geq 10$ ont donc la propriété voulue. Par ailleurs, l'application S est injective sur $\mathscr{P}(W_n)$ lorsque $W_n = \{2^0, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$ par unicité de l'écriture des entiers en base 2, et $W_n \subset [\![1, n^2]\!]$ lorsque $2^{n-1} \leq n^2$, c'est-à-dire lorsque $n \leq 6$; aucun nombre $n \leq 6$ n'a donc la propriété voulue. Le nombre $n = 7$ non plus car S est injective sur $\mathscr{P}(W)$ pour $W = \{20, 36, 42, 45, 47, 48, 49\} \subset [\![1, 49]\!]$: pour le vérifier, il suffit de calculer les 128 sommes $S(U)$ pour $U \in \mathscr{P}(W)$!

Nous n'avons pas pu décider pour $n = 8$ et $n = 9$, mais les tentatives pour trouver des W telles que S soit injective sur $\mathscr{P}(W)$ laissent penser que **Conjecture :** *tous les nombres $n \geq 8$ ont la propriété voulue.*

Enfin, dans un troisième temps, nous écoutons une solution du problème **(21)** du 8 février (théorème du Futurama) : *Une machine effectue des transpositions entre les esprits de deux corps, mais garde le souvenir des transpositions effectuées et ne peut traiter à nouveau des paires de corps déjà passées par la machine. La machine ayant été utilisée un certain nombre de fois, on a ainsi obtenu une permutation des esprits d'une population de n individus, et on veut maintenant rendre à chaque corps son esprit en utilisant encore cette même machine. Ce n'est pas toujours possible, mais ça le devient si l'on rajoute deux nouveaux personnages n'ayant jamais eu affaire à la machine, et il faut expliquer comment.*

Utilisant la décomposition de la permutation obtenue en cycles à supports disjoints, on va d'abord expliquer comment utiliser les deux personnages vierges a et b pour remettre en ordre un cycle $(1, 2, \dots, k)$: on effectue successivement les transpositions $(a, 1)$, $(a, 2)$, $\dots$, $(a, k-1)$, ce qui conduit au nouvel état décrit par la permutation $\sigma(1) = a$, $\sigma(j) = j$ pour $1 < j < k$, $\sigma(k) = 1$, $\sigma(a) = k$ et $\sigma(b) = b$; on effectue alors les transpositions (b, k), puis $(b, 1)$ et (a, k), ce qui conduit cette fois à l'état décrit par la permutation $\tau(j) = j$ pour $1 \leq j \leq k$, $\tau(a) = b$ et $\tau(b) = a$. Le bilan de toutes ces opérations (qui n'utilisent que des transpositions différentes, et faisant intervenir a ou b), c'est que le cycle a été remis en ordre au prix de l'interversion des esprits de a et b. On effectue donc cette opération successivement sur tous les cycles composant la permutation de départ : s'il y a un nombre pair de cycles, on retombe alors directement sur l'état initial où chacun a retrouvé son esprit, tandis que s'il y en a un nombre impair, il faut opérer encore une dernière transposition (a, b) pour rendre son esprit à chacun des deux auxiliaires a et b. ∎

Séance du 15 mars 2017

On reparle un peu des problèmes des séances précédentes sans beaucoup progresser. Puis on présente un nouveau problème.

> **Problème 2016-17(24).** *On considère des suites réelles $u = (u(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ dont on définit la* variation totale *comme* $\mathrm{Var}(u) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u(j+1) - u(j)|$. *On considère aussi les moyennes de cette suite définies par*
> $$(m_r u)(j) = \frac{1}{2r+1} \sum_{k=-r}^{r} u(j+k)$$
> *puis la* suite maximale *Mu définie par $Mu(j) = \sup_{r\in\mathbb{N}} (m_r|u|)(j)$. Il s'agit d'étudier la conjecture affirmant que* $\mathrm{Var}(Mu) \leq \mathrm{Var}(u)$.

On peut commencer par faire quelques remarques : on a facilement que $\mathrm{Var}(|u|) \leq \mathrm{Var}(u)$, et on peut donc se restreindre à des suites positives. La variation est invariante par translation, et la variation d'une somme est inférieure à la somme des variations, d'où $\mathrm{Var}(m_r u) \leq \mathrm{Var}(u)$. On peut aussi remarquer que si $\mathrm{Var}(u) < \infty$, ce qui est le seul cas à traiter, alors u est différence de deux suites croissantes bornées, et on peut même choisir ces deux suites en sorte que la variation de u soit égale à la somme des variations des deux suites croissantes ; par ailleurs, la conjecture semble bien clairement vérifiée dans le cas des suites croissantes. Mais tout cela ne résout pas le problème !

Sur le mode devinette :

Problème 2016-17(25). *Montrer qu'il existe deux nombres irrationnels $x > 0$ et y tels que x^y soit rationnel.*

La solution consiste à partir de l'identité $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$: si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, prendre $x = y = \sqrt{2}$, et si c'est irrationnel, prendre $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2}$. Le côté frustrant de cette astuce, c'est que l'on ne sait pas lequel de ces deux couples fonctionne. Pour la prochaine fois, nous pourrions essayer de décider lequel des deux est vrai, ou trouver un autre exemple.

Séance du 22 mars 2017

On commence par justifier qu'une famille de points du plan sans point d'accumulation est au plus dénombrable : en effet, chaque boule fermée de rayon $n \in \mathbb{N}$ n'en contient qu'un nombre fini par compacité, et le tour est joué.

On fait ensuite remarquer que les transpositions $(1, k)$ pour $2 \leq k \leq n$ engendrent tout le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de n éléments, mais qu'il n'y a pas d'ensemble plus petit de transpositions qui engendrent tout le groupe : cela résulte d'un argument de connexité sur un graphe.

On évoque ensuite un nouveau problème.

Problème 2016-17(26). L'hydre de Kirby. *Étant donné l'hydre (qui a une structure d'arbre), on cherche à en couper toutes les têtes (sommets terminaux de l'arbre). Mais pour chaque tête coupée située à distance n du corps (racine de l'arbre), l'hydre peut dupliquer un nombre arbitraire mais fini de fois la structure subsistant au-dessus de chaque sommet de la même branche situé à une distance $\leq n-2$ du corps. Il s'agit de démontrer que l'on parvient à couper toutes les têtes en un temps fini.*

Il semblerait qu'avec le seul secours de l'arithmétique de Peano il ne soit pas possible de démontrer ce résultat, mais que l'on y arrive en associant à chaque étape un nombre ordinal en sorte que la suite des ordinaux ainsi obtenue soit strictement décroissante, car paraît-il, toute suite strictement décroissante d'ordinaux arrive à 0 en un temps fini ! On signale en outre que cela est voisin d'un théorème de Goodstein sur une suite d'entiers obtenue en écrivant u_n en base n *totale* (y compris les exposants), et en définissant $u_{n+1} + 1$ comme la même expression en remplaçant les n par des $n + 1$ partout : une telle suite se termine nécessairement par 0 en un temps fini (mais probablement long) !

On revient ensuite sur le problème **(25)** du 15 mars : on ne sait toujours pas si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou pas, mais on sait trouver une solution explicite au problème : on a $x^y = 2 \in \mathbb{Q}$ pour $x = \sqrt{3}$ et $y = \dfrac{\ln 4}{\ln 3}$; de plus, $x = p/q$ entraîne que $p^2 = 3\,q^2$, et dans la décomposition en facteurs premiers de ce nombre, le facteur 3 apparaît un nombre pair de fois dans p^2 et un nombre impair de fois dans $3\,q^2$, si bien que x est irrationnel par unicité de la décomposition en facteurs premiers ; et $y = p/q$ entraîne que $q \ln 4 = p \ln 3$, soit $3^p = 2^{2q}$, et il en résulte que y est irrationnel à nouveau par unicité de la décomposition en facteurs premiers.

On propose encore des variantes du problème **(22)** du 1er mars.

Problème 2016-17(22^{bis}). *Soient un polygone régulier P de centre g, D une droite passant par g, et $m(D)$ le moment d'inertie par rapport à D du système formé de masses égales situées aux sommets de P. Montrer que $m(D)$ ne dépend pas de la direction de D. Autres variantes :*

- *Remplacer les masses aux sommets de P par le pourtour de P pourvu d'une masse linéique constante ;*
- *Ou par le polygone P plein, de masse surfacique constante ;*
- *Résoudre les mêmes problèmes dans l'espace avec des polyèdres réguliers.*

Pour la première variante, on considère le polygone régulier dont les sommets sont situés à distance 1 de l'origine et faisant des angles de $2k\pi/n$ avec l'axe des x, pour $1 \leq k \leq n$, et la droite D faisant l'angle θ avec ce même axe des x. Alors on a

$$m(D) = \textstyle\sum_{k=1}^n \sin^2\big(\frac{2k\pi}{n} - \theta\big) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \big(1 - \cos\big(\frac{4k\pi}{n} - 2\theta\big)\big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big(n - \mathscr{R}e\,\big(\textstyle\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{(4ik\pi/n)-2i\theta}\big)\big) = \frac{n}{2} - \mathscr{R}e\left(\mathrm{e}^{(4i\pi/n)-2i\theta}\,\frac{1-\mathrm{e}^{4i\pi}}{2\,(1-\mathrm{e}^{4i\pi/n})}\right) = \frac{n}{2}$$

si $n \notin \{1, 2\}$, et cela résout la première variante. Pour passer au pourtour, on écrit une intégrale le long d'un côté de P d'un système de n masses ponctuelles invariant par rotation de $2\pi/n$, système pour lequel on vient de résoudre le problème, et pour passer au polygone plein, on raisonne de même.

Dans le problème dans l'espace avec des polyèdres réguliers et pour le système formé des sommets, on peut calculer la matrice d'inertie dans une base orthonormée à l'aide des coordonnées des sommets dans les cas du tétraèdre, du cube et de l'octaèdre, ce qui donne la matrice identité fois une constante ; le problème est ainsi résolu. Mais comment passer au système formé des arêtes ? ou des faces ? ou d'un polyèdre plein ? Et comment traiter le dodécaèdre et l'icosaèdre dont les coordonnées des sommets sont compliquées à calculer ? On évoque encore quelques minutes les techniques de construction de ces deux derniers polyèdres. Suite à une prochaine fois !

Séance du 29 mars 2017

Nouveau problème.

Problème 2016-17(27). *Montrer que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et tout entier $n > 0$, il existe un $x_n \in \big[\frac{1}{n}, 1\big]$ tel que $f(x_n) = f\big(x_n - \frac{1}{n}\big)$. Et à l'inverse, montrer que pour tout $\alpha \in\,]0,1] \setminus \{\,\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\,\}$ il existe une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0) = f(1) = 0$, mais $f(x) \neq f(x-\alpha)$ pour tout $x \in [0, 1-\alpha]$.*

Nous discutons longuement la deuxième affirmation en essayant diverses fonctions qui ne marchent pas. Il y a seulement dans le cas $\alpha > \frac{1}{2}$ que nous observons que la fonction $\sin(2\pi x)$ est solution du problème. Nous poursuivrons cette question la semaine prochaine.

Séance du 5 avril 2017

Reprenant le problème **(27)** de la semaine dernière, nous en donnons une solution.

Pour la première affirmation, nous remarquons que

$$\textstyle\sum_{k=1}^n \big(f\big(\frac{k}{n}\big) - f\big(\frac{k-1}{n}\big)\big) = f(1) - f(0) = 0,$$

si bien qu'il y a au moins un j et un $k \in [\![1,n]\!]$ tels que l'on ait $f\big(\frac{j}{n}\big) - f\big(\frac{j-1}{n}\big) \leq 0$ et $f\big(\frac{k}{n}\big) - f\big(\frac{k-1}{n}\big) \geq 0$; alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $f(x) - f\big(x - \frac{1}{n}\big)$ s'annule quelque part sur l'intervalle $\subset \big[\frac{1}{n}, 1\big]$ de bornes $\frac{j}{n}$ et $\frac{k}{n}$.

Et pour la deuxième affirmation, lorsque $\alpha \in \,]0,1] \setminus \{\, \frac{1}{n}\, ;\, n \in \mathbb{N}^* \,\}$, il suffit de prendre la fonction $f(x) = \sin^2(\pi x/\alpha) - x \sin^2(\pi/\alpha)$: en effet, cette fonction est clairement continue et vérifie $f(0) = f(1) = 0$; en outre, la fonction $x \mapsto f(x) - f(x-\alpha)$ est constante et vaut $-\alpha \sin^2(\pi/\alpha) < 0$ puisque $\alpha > 0$ et que $\sin(\pi/\alpha) \neq 0$ quand α n'est pas l'inverse d'un entier. ∎

Et voici encore un autre problème.

Problème 2016-17(28). *Soient $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une densité de probabilité (i.e. $\int m(x)\,dx = 1$), et $\overline{u} = \int u(x)\, m(x)\, dx$ l'espérance de u. A-t-on toujours l'inégalité*

$$\int \Big(u(x) - \overline{u}\Big)^2 m(x)\, dx \leq \int \Big(u'(x)\Big)^2 m(x)\, dx \ \ ?$$

Cette question est motivée par le fait que cela est vrai pour la loi uniforme sur $[0,1]$, ce qui peut se démontrer par les séries de Fourier, ainsi que pour la loi normale centrée réduite, ce qui se prouve avec les polynômes d'Hermite. Mais pour une loi de proba quelconque ?

Séance du 12 avril 2017

On discute aujourd'hui d'un problème de "partage sans envie" d'un gâteau. À deux joueurs, l'un coupe et l'autre choisit. À trois joueurs, c'est déjà plus compliqué.

Variante : trois personnes A, B et C se partagent trois chambres 1, 2 et 3. Dans l'idée d'utiliser le lemme de Sperner, on repère les points d'un triangle (simplexe) par leurs coordonnées barycentriques.

Ce sont là deux problèmes probablement intéressants, mais dont l'énoncé n'est pour le moment pas encore très clair. Il conviendra de le clarifier à l'avenir.

On reparle aussi du puzzle consistant à remplir un carré de 1×1 par des rectangles de $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n+1}$, mais sans nouvelle idée.

Séance du 26 avril 2017

On revient au problème du 12 avril en essayant de le formaliser proprement : il s'agit de partager un gâteau entre n personnes en sorte que chacun ait une part qui le satisfasse (dans le problème d'origine, il s'agit de la répartition des prix dans une colocation).

Problème 2016-17(29). *Soient E un ensemble de n personnes, et P_G l'ensemble des découpages possibles du gâteau en parts de tailles x_1, …, x_n, avec $x_1 + \ldots + x_n = 1$. On définit une fonction de préférence*

$$p : E \times P_G \ni (A, (x_1, \ldots, x_n)) \longmapsto x_i,$$

où x_i est la part préférée de l'individu A, et qui a les propriétés suivantes :

- $x_i = 0 \ \Rightarrow\ \forall A,\ p(A,x) \neq x_i$;
- *si $x^k \to x$ est telle que $p(A,x^k) = x_i^k$ pour tout k avec le même i, alors $p(A,x) = x_i$.*

Le problème consiste alors à montrer qu'il existe un découpage x appartenant à P_G tel que $A \mapsto p(A,x)$ soit une bijection de E sur x.

L'idée de la preuve est d'utiliser le lemme de Sperner ; pour un triangle, celui-ci affirme que : si un grand triangle est découpé en petits triangles et que chaque sommet du découpage est numéroté 1, 2 ou 3 avec les règles que le grand triangle a un sommet numéroté 1, un autre numéroté 2 et le troisième numéroté 3, et qu'en outre chaque côté de ce grand triangle ne contient des sommets que de deux numéros ; alors il existe un petit triangle dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3. Mais on peine à préciser le problème pour pouvoir utiliser le lemme. On tente de reformaliser de la façon suivante.

> **Problème 2016-17(29$^{\mathbf{bis}}$).** *On pose* $[n] = \{1, \ldots, n\}$*, on définit le simplexe* $S = \{\, (x_i)_{i \in [n]} \,;\, \min_i x_i \geq 0,\ \text{et}\ \sum_i x_i = 1 \,\}$*, et on se donne* $p : [n] \times S \to [n]$ *tel que* $p(i, x)$ = *indice de la part choisie par l'individu* i*. On cherche alors* $x \in S$ *et* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *tels que* $p(i, x) = \sigma(i)$ *pour tout* $i \in [n]$.

On soulève alors la question : existe-t-il une telle fonction p avec la propriété de continuité mentionnée plus haut ? Pour que cela puisse exister, il faudrait plutôt que p soit à valeurs dans $\mathscr{P}([n])$ (un individu pouvant ainsi avoir plusieurs préférences), mais il faudrait alors reformuler la propriété de continuité. Les hypothèses sur p deviendraient ainsi :
- $x_{p(i,x)} > 0$ pour tout $i \in [n]$ et tout $x \in S$;
- si $x^\nu \to y$ dans S et si $j \in p(i, x^\nu)$ pour tout ν, alors $j \in p(i, y)$.

Il resterait alors à mettre en place l'argument du type Sperner.

Mais c'était la dernière séance de l'année car voici venir bientôt la saison des examens.

*

*　　*　　*　　*

*