Quantification des sous-variétés lagrangiennes des cotangents symplectiques conformes

Le doctorant étudiera les sous-variétés lagrangiennes exactes du cotangent d'une variété Q muni d'une structure localement conformément symplectique définie par une forme fermée η sur Q.

Les variétés localement conformément symplectiques sont des variétés munies d'un atlas dont les changements de cartes dilatent la forme symplectique standard $dp \wedge dq$. De manière équivalente on définit une variété localement conformément symplectique par la donnée d'une variété M, une 2-forme ω non dégénérée et une 1-forme fermée h telles que : $d\omega = \eta \wedge \omega$.

Ces structures ont un regain de popularité pour deux raisons. Tout d'abord les travaux de V. Apostolov et G. Dlousky montrent qu'une telle structure existe toujours sur une surface complexe (non nécessairement Kählerienne) et que celle-ci domine la structure complexe. Ensuite les travaux d'Eliashberg-Murphy montrent que l'existence d'une telle structure (sans condition de domination) est flexible.

Dans un travail récent, B. Chantraine et E. Murphy ont mis en évidence un phénomène de rigidité d'intersection lagrangienne dans les variétés localement conformément symplectiques données par $(T^*Q, dp \wedge dq - \eta \cdot pdq, \eta)$: toute déformation générique de la section nulle intersecte celle-ci en au moins autant de points que l'homologie de Novikov de η a de nombre de Betti.

Le projet de thèse prétend pousser plus loin l'étude des lagrangiennes dans ces fibrés cotangents au moyen des faisceaux. L'existence d'une contactisation de ces fibrés (par ailleurs contactomorphe à l'espace de Jets standard) permet de construire des lagrangiennes en prenant le micro-support de faisceaux sur $Q \times \mathbb{R}$. Le doctorant adaptera ensuite les méthodes développées par Guillermou qui montre l'existence d'un tel faisceau pour toute lagrangienne exacte dans le cotangent standard.

Un des points essentiel de la preuve est qu'une lagrangienne exacte donne un relevé legendrien sans corde de Reeb (pour le champ de Reeb standard), ce qui permet de déplacer le relevé legendrien de lui-même et de “couper un faisceau défini pour la double copie”. Le champ apparaissant dans le contexte localement conformément symplectique est différent. La thèse s'articulera sur trois aspects :

1. Quelles conditions sur η garantissent la “déplaçabilité” pour le champ de Reeb sur la contactisation de $(T^*Q, dp \wedge dq - \eta \cdot pdq, \eta)$? Cette partie aura une saveur géométrique et nécessitera une étude de la dynamique hamiltonienne dans ces fibrés cotangents.
2. Sous celles-ci, quelles conséquences obtient-on sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes exactes ? Une conjecture naturelle étant qu'elles ont le type d'homotopie de la section nulle. Cette partie aura une saveur topologie et géométrie algébrique.
3. Lorsque la “déplaçabilité” n'est pas satisfaite, peut-on trouver des obstructions à l'existence de tels faisceaux (notamment en donnant des contre-exemples à la conjecture précédente) ?

Le sujet est relativement inexploré et donne une grande latitude au candidat pour ses travaux (tant du point de vue géométrique que du point de vue algébrique). Mais il reste connexe à une branche très active de la topologie symplectique (l'étude microlocale des faisceaux) ce qui placera ses travaux de manière pertinente dans ce sujet.