

# Écoulements diphasiques incompressibles en milieux poreux

Thomas Crozon  
Mémoire stage de Master 2 MFA-AG  
encadré par Mazen Saad

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le degré topologique de Brouwer</b>	<b>2</b>
1.1	Définition et premières propriétés	2
1.2	Quelques applications du degré topologique de Brouwer	3
<b>2</b>	<b>Écoulement diphasique, incompressible, immiscible</b>	<b>5</b>
2.1	Présentation du problème physique	5
2.2	Mise en place des définitions mathématiques	6
2.2.1	Discrétisation en volumes finis du problème	9
2.3	Existence d'une solution faible	12
2.3.1	Existence et unicité des solutions approchées	12
2.3.2	Estimation $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ discrète	14
2.4	Résultat de compacité	18

### Résumé :

Dans ce rapport nous verrons en premier lieu un outil très puissant : le degré topologique de Brouwer ainsi que quelques applications de celui-ci. Nous appliquerons finalement ce résultat plus tard pour démontrer l'existence de solutions à un schéma que nous allons construire.

Ensuite nous présentons la situation physique dans laquelle nous nous plaçons qui nous amène au problème que l'on veut résoudre. Nous posons nos différentes définitions, puis nous découpons notre espace  $\Omega$  judicieusement en un maillage dit orthogonal. Ce maillage nous servira à créer un schéma numérique dit à volumes finis. Nous prouvons un certain nombre de résultats sur l'existence, l'unicité des solutions et la stabilité  $L^\infty$  de notre schéma. Puis nous faisons certaines estimations d'énergies qui nous permettent via des résultats de compacité de disposer d'une suite de solutions approchées commode. Cette suite de solutions nous permettra de montrer l'existence de solutions faibles à notre problème initial.

# 1 Le degré topologique de Brouwer

## 1.1 Définition et premières propriétés

On va présenter un outil d'analyse très puissant : le degré topologique de Brouwer. Il permet de démontrer un grand nombre de résultats d'existence et en particulier de points fixes. Nous allons notamment l'utiliser pour démontrer l'existence de solutions à un schéma volumes finis.

Le degré topologique donne un critère pour savoir si une équation de la forme  $f(x) = y$  d'inconnue  $x$  avec  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue admet une solution. Cependant le degré topologique ne donnera pas le nombre de solutions ( en fait elle n'indique que des solutions stables de notre équation ), ni si une telle équation n'admet pas de solutions.

**Theorem 1.** Soit  $d$  un entier naturel,  $\mathcal{A}$  l'ensemble des triplets  $(f, \Omega, y)$  où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$  et  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue telle que  $y \notin f(\partial\Omega)$ .

Il existe une unique application  $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$  ayant les propriétés suivantes :

- (normalisation)  $\Omega$  ouvert borné et  $y \in \Omega$  alors  $d(\text{Id}, \Omega, y) = 1$ .
- (additivité)  $\Omega$  ouvert borné  $y \in \mathbb{R}^d$  et  $\Omega_1, \Omega_2$  deux ouverts disjoints de  $\Omega$  tels que  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$  alors :  $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ .
- (invariance par homotopie) Soit  $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continues et  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ , alors :  $d(h(0, \cdot), \Omega, y(0)) = d(h(1, \cdot), \Omega, y(1))$

Ce  $d$  est ce que nous appelons le degré topologique de Brouwer.

Nous n'allons pas montrer en détail toute la construction du degré topologique en dimension finie pour cela il est possible de regarder le cours de Jérôme Droniou [DRO06]. Cette construction se fait en définissant le degré topologique sur des fonctions plus régulières, en des valeurs commodes pour se ramener au cas linéaires. Puis on procède par un argument de densité pour le prolonger à  $\mathcal{A}$ .

Le degré topologique possède quelques propriétés intéressantes, que nous allons démontrer :

**Proposition 2.** Le degré topologique de Brouwer vérifie :

- 1 Si  $d(f, \Omega, y) \neq 0$  alors il existe  $x$  dans  $\Omega$  tel que  $f(x) = y$ .
- 2  $\forall z \in \mathbb{R}^d$ ,  $d(f, \Omega, y) = d(f - z, \Omega, y - z)$
- 3 Soit  $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ ,  $r = \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$ . Si  $g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue et  $z \in \mathbb{R}^d$  sont tels que  $\sup_{\partial\Omega} (|g - f| + |y - z|) < r$  alors  $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z)$ .
- 4  $d(f, \Omega, \cdot)$  est constant sur les composantes connexes de  $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$ .
- 5  $\forall z \in \mathbb{R}^d$ ,  $d(f, \Omega, y) = d(f(\cdot - z), z + \Omega, y)$ .

*Démonstration.* 1 Par l'absurde si un tel  $x$  n'existe pas, alors  $y \notin f(\Omega)$  comme on a déjà par hypothèse  $y \notin f(\partial\Omega)$  alors  $y \notin f(\overline{\Omega})$ . On a alors par la propriété d'additivité :  $y \notin f(\overline{\Omega}) = f(\overline{\Omega} \setminus (\emptyset \cup \emptyset))$  implique que  $d(f, \Omega, y) = d(f, \emptyset, y) + d(f, \emptyset, y)$ . Mais comme on a clairement  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\emptyset \cup \emptyset))$ , on a :  $d(f, \emptyset, y) = d(f, \emptyset, y) + d(f, \emptyset, y)$  et donc :  $d(f, \emptyset, y) = 0$ . On en déduit  $d(f, \Omega, y) = 0$  ce qui est absurde.

2 On considère l'homotopie entre  $(f, y)$  et  $(f - z, y - z)$  :  $h(t, x) = (1 - t)f(x) + tz = f(x) - tz$  et  $y(t) = y - tz$ . Or comme  $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ , cette homotopie est bien définie ( $\forall t \in [0, 1], y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ ). Par invariance du degré par homotopie  $d(f, \Omega, y) = d(f - z, \Omega, y - z)$ .

3 De la même manière c'est l'invariance par homotopie du degré qui permet de conclure.

Puisque  $\partial\Omega$  et  $f$  est continue,  $f(\partial\Omega)$  est compact, donc à distance strictement positive de tout élément n'appartenant pas à cet ensemble. On considère  $h(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$  et  $y(t) = (1 - t)y + tz$ . S'il existe  $t \in [0, 1]$  et  $x \in \partial\Omega$  tel que  $h(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x) = (1 - t)y + tz = y(t)$ , alors  $|y - f(x)| \leq t|g(x) - f(x)| + t|y - z| < r$ , ce qui est absurde par

définition de  $r$ .

4 La propriété 3 nous indique que  $d(f, \Omega, \cdot)$  est localement sur  $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$ . Or  $\mathbb{Z}$  est discret, donc  $d(f, \Omega, \cdot)$  est constante sur chaque composante connexe.

5 Soit  $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ , on note  $T_{f, \Omega, y}(z) = d(f(\cdot - z), z + \Omega, y)$ . On a  $\partial(z + \Omega) = z + \partial\Omega$ , il est clair que  $y \notin f(\partial(z + \Omega) - z)$  pour tout  $z \in \mathbb{R}^d$ ,  $T_{f, \Omega, y}$  est donc défini sur  $\mathbb{R}^d$ .

On a  $T_{f, \Omega, y}(z_0 + z) = T_{f(\cdot - z_0), z_0 + \Omega, y}(z)$ , nous allons donc montrer que  $T_{f, \Omega, y}$  est constante au voisinage de 0 ce qui prouvera qu'elle est localement constante sur  $\mathbb{R}^d$  est donc constante.

On pose  $\Omega_s = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > s\}$  qui est un ouvert inclus dans  $\Omega$ . Comme  $y \notin f(\partial\Omega)$  il existe  $s > 0$  tel que  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s})$ , en effet si ce n'est pas le cas alors  $\forall s > 0, \exists y_s \in f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s})$  et donc par compacité on peut extraire une sous-suite de  $(x_s)$  (antécédents des  $y_s$ ) convergent vers  $x_i n \partial\Omega$  qui est un antécédent de  $y$  par  $f$ . On a  $\Omega_{2s} \subset \Omega_s$  et  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_s)$  et par additivité du degré topologique avec les ouverts disjoints  $\emptyset$  et  $\Omega_s$  et comme  $d(f, \emptyset, y) = 0$  on en déduit :  $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_s, y)$ .

De plus on a  $\forall z \in B(0, s) \Omega_s \subset \Omega + z$  et  $y \notin f(\overline{(z + \Omega) \setminus \Omega_s} - z)$  ( car  $\overline{(z + \Omega) \setminus \Omega_s} - z = \overline{\Omega} \setminus (\Omega_s - z) \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s}$  et  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s})$ ), l'additivité du degré donne donc aussi :  $d(f(\cdot - z), z + \Omega, y) = d(f(\cdot - z), \Omega_s, y)$  pour  $|z| < s$ .

On conclut alors grâce à l'invariance par homotopie du degré :  $h(t, x) = f(x - tz)$  sur  $\overline{\Omega_s}$  entre  $f$  et  $f(\cdot - z)$  qui sont correctement définies pour tout  $t$ . De plus  $\forall t \in [0, 1]$  et tout  $x \in \partial\Omega_s$ ,  $\text{dist}(x, \partial\Omega) = s$  (pour  $s$  assez petit), ce qui assure que  $\text{dist}(x - tz, \partial\Omega) \leq \text{dist}(x, \partial\Omega) + |tz| \leq 2s$ , on en déduit que  $x - tz_i n \overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s}$  et donc  $y \neq f(x - tz)$  autrement dit  $y \notin f(t, \partial\Omega_s)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On a donc  $d(f, \Omega_s, y) = d(f(\cdot - z), \Omega_s, y)$  pour tout  $z \in B(0, s)$  ce qui nous permet de conclure. □

La propriété qui va nous permettre d'avoir des résultats d'existence est la première. Si on arrive à montrer que le degré topologique d'une certaine application (munie d'un ouvert borné et d'un élément de  $\mathbb{R}$ ) est non-nulle alors ce sera gagné. La méthode dans la suite consistera à créer une homotopie entre l'identité et la fonction qui nous intéresse ce qui par l'invariance du degré par homotopie et la propriété 1 nous permettra de conclure à l'existence.

**Remark 3.** La propriété 3 nous dit que ce qui est vraiment important en fait c'est ce qui se passe au bord !

**Remark 4.** Il existe un outil similaire en dimension infini, le degré topologique de Schauder, on pourra le trouver dans le cours de Jérôme Droniou.

## 1.2 Quelques applications du degré topologique de Brouwer

On a quelques exemples d'applications du degré topologique.

Tout d'abord on peut s'en servir pour démontrer des théorèmes de point fixes ou des résultats de surjectivité.

**Theorem 5** (Point fixe de Brouwer). Soit  $\overline{B}$  la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^d$  et  $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  continue. Alors  $f$  a un point fixe : il existe  $x_i n \overline{B}$  tel que  $f(x) = x$ .

*Démonstration.* S'il existe un point fixe sur  $\partial B$ , alors pas besoin de continuer. Sinon on peut supposer que  $f(x) \neq x$  pour tout  $x \in \partial B$ . On a alors  $(Id - f, B, 0) \in \mathcal{A}$ . Nous allons montrer que son degré est non-nul.

Soit  $h(t, x) = x - tf(x)$  continue de  $[0, 1] \times \overline{B}$ . S'il existe  $t \in [0, 1]$  et  $x \in \partial B$  tel que  $h(t, x) = 0$  alors comme  $|x| = 1$  et  $f(\overline{B}) \subset \overline{B}$ , nécessairement  $t = 1$  et  $f(x) = x$ , ce qui contredit notre hypothèse.

Donc  $\forall t \in [0, 1], 0 \notin h(t, \partial B)$  et par invariance du degré par homotopie on obtient  $d(Id - f, B, y) = d(Id, B, y) = 1$ , d'où le résultat.  $\square$

Le degré topologique permet évidemment de déduire des informations sur l'image d'une application.

La première devient évidente grâce au degré topologique.

**Proposition 6.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue telle que  $f|_{\partial\Omega} = Id$ . Alors  $\Omega \subset f(\Omega)$ .

*Démonstration.* Soit  $y \in \Omega$  alors  $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$  et  $(Id, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ . On a par propriété du degré topologique :  $d(f, \Omega, y) = d(Id, \Omega, y) = 1$  et donc  $\Omega \subset f(\Omega)$ .  $\square$

**Proposition 7.** Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue telle que  $\frac{f(x).x}{|x|} \rightarrow \infty$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ . Alors  $f$  est surjective sur  $\mathbb{R}^d$ .

*Démonstration.* Soit  $y \in \mathbb{R}^d$  et  $h(t, x) = tf(x) + (1-t)x$  une homotopie naturelle entre  $f$  et  $Id$ . On va montrer que l'on peut choisir  $R$  de sorte que  $\forall t \in [0, 1] y \notin h(t, \partial B(0, R))$ .

En effet, on se donne  $x \in \partial B(0, R)$  et  $t \in [0, 1]$  tel que  $h(t, x) = y$ . On a alors  $x.y = x.h(t, x) = tx.f(x) + (1-t)|x|^2$  ce qui donne :  $|y| \geq (t\frac{f(x).x}{|x|} + (1-t)|x|) = (t\frac{f(x).x}{|x|} + (1-t)R)$

On prend  $R > |y| + 1$  tel que  $\frac{f(x).x}{|x|} > |y| + 1$  quand  $|x| \leq R$ , ce qui est possible par hypothèse sur le comportement à l'infini de  $f$ . On en déduit que  $|y| \geq t(|y| + 1) + (1-t)(|y| + 1) = 1 + |y|$  ce qui est absurde, donc  $\forall t \in [0, 1] y \notin h(t, \partial B(0, R))$ .

On utilise l'invariance par homotopie du degré pour obtenir :  $d(f, B(0, R), y) = d(Id, B(0, R), y) = 1$  ( puisque  $R > |y| + 1$  ), et donc on a la surjectivité de  $f$ .  $\square$

On peut même montrer le théorème fondamental de l'algèbre grâce au degré topologique.

**Theorem 8 (D'Alembert-Gauss).** Tout polynôme non constant à coefficients complexes a au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

On aura pour cela besoin d'un lemme :

**Lemma 9.** Soit  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  un polynôme sur  $\mathbb{C}$  avec  $a_n \neq 0$ . Pour tout  $R$  assez grand on a  $d(P, B(0, R), 0) = n$ .

*Démonstration.* Montrons en premier lieu le lemme.

On construit une homotopie entre  $P(z) = a_n z^n + Q(z)$  et  $a_n z^n$  :  $h(t, z) = (1-t)P(z) + ta_n z^n$ . A l'infini  $|Q(z)|$  est négligeable devant  $g(z)$ , il existe donc  $R > 0$  tel que  $|Q(z)| < |a_n z^n|$  quand  $|z| = R$ . On a donc pour tout  $t \in [0, 1], a_n z^n + tQ(z) = 0$  ne peut avoir de solution. On a donc par invariance du degré topologique par homotopie  $d(P, B(0, R), 0) = d(g, B(0, R), 0)$ .

On dispose d'une courbe  $\gamma$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  reliant  $a_n$  à 1.  $H(t, z) = \gamma(t)z^n$  est une homotopie entre  $a_n z^n$  et  $z^n$  qui vérifie bien  $0 \notin H(t, \partial B(0, R))$ . On a donc par invariance par homotopie et additivité :  $d(f, B(0, R), 0) = d(a_n z^n, B(0, R), 0) = d(z^n, B(0, 1), 0) = n$ . ( comme  $z^n$  est de classe  $C^\infty$  à valeurs régulières sauf en 0 on peut calculer son degré, voir [DRO06] pour plus de détails cela demande une connaissance plus approfondie de la construction du degré topologique).

Le lemme implique directement le théorème.  $\square$

On a pu voir que le degré topologique est un outil très puissant rendant presque trivial des résultats qui sont à première vue loin de l'être. La difficulté passe en fait dans la construction du degré.

## 2 Ecoulement diphasique, incompressible, immiscible

### 2.1 Présentation du problème physique

Je me suis inspiré ici des introductions des thèses de Ziad Khalil [KHA10] et de Clément Cancès [CAN08] pour la description physique du modèle.

La situation que nous voulons étudier est l'étude d'hydrocarbures dans un bassin sédimentaire. Les roches ici sont dites poreuses, elles laissent la possibilité d'un écoulement de fluide. En général l'hydrocarbure se trouve sous plusieurs phases qui peuvent être miscibles ou non, en présence d'autres phases. Nous nous placerons dans le cas où nous avons de l'hydrocarbure sous forme liquide avec de l'eau, et les deux ne se mélangent pas et sont supposés incompressibles. Il faut penser à un mélange d'eau (d'indice  $w$  pour water) et de l'huile (d'indice  $o$  pour oil). Nous supposons de plus que les phases sont saturantes, c'est-à-dire qu'elles emplissent totalement notre milieu poreux.

**Definition 10.** On prendra comme notations

- Dans notre approche macroscopique des milieux poreux, nous définissons la porosité  $\phi = \frac{\text{Volume fluide}}{\text{Volume total}}$
- $u = \frac{\text{Volume d'huile}}{\text{Volume fluide}}$  désignera la saturation de la phase d'huile. On aura alors la saturation de la phase d'eau qui sera  $1 - u$ , puisque nous sommes dans le cas de phases saturantes.
- $p_o$  et  $p_w$  sont les pressions respectives de la phase d'huile et de la phase d'eau.
- $\rho_o$  et  $\rho_w$  sont les masses volumiques respectives de la phase d'huile et de la phase d'eau.
- $\vec{g}$  désigne le vecteur de gravitation.

On a la conservation volumique de chaque phase qui nous donne les équations pour chaque phase :

$$\phi \partial_t u + \text{div}(\phi u \vec{v}_o) = 0$$

$$\phi \partial_t (1 - u) + \text{div}(\phi (1 - u) \vec{v}_w) = 0$$

où  $\vec{v}_o$  et  $\vec{v}_w$  désignent la vitesse de chaque phase.

On s'inspire de la loi de Darcy dans le cas monophasique (provenant des équations de Stokes), pour énoncer un analogue (pas démontré) formel dans le cas diphasique.

$$\phi u \vec{v}_o = -K \frac{k_{r,o}}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o \vec{g})$$

$$\phi (1 - u) \vec{v}_w = -K \frac{k_{r,w}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w \vec{g})$$

avec

**Definition 11.** On a les définit :

- avec  $K$  est le tenseur de perméabilité intrinsèque du milieu, c'est-à-dire la manière dont le milieu permet l'écoulement en son sein. Par la suite le milieu sera supposé isotrope (l'écoulement est le même suivant toute direction) et donc  $K$  sera simplement un entier positif.
- $\mu_o$  et  $\mu_w$  les viscosités dynamiques.
- $k_{r,o}$  et  $k_{r,w}$  sont des termes correctifs prenant en compte le fait que les deux fluides présents dans le même milieu se gênent mutuellement. Ces fonctions sont supposées lipschitziennes, positives, monotones, et vérifient :  $k_{r,o}(u) \leq u$  et  $k_{r,w}(u) \leq (1 - u)$ .

on peut donc injecter ces termes dans nos équations. On constate que l'on a comme inconnues  $u, p_o$  et  $p_w$ . Ils nous manquent une équation, c'est là que la pression capillaire intervient. On définit la pression capillaire  $\pi$  comme suit :

$$p_o - p_w = \pi(u)$$

Après un travail de réécriture de notre système d'équation on peut mettre les choses sous la forme :

$$\phi \partial_t u + \operatorname{div}(\vec{q} f(u) - \lambda(u)(\nabla \pi(u) - (\rho_o - \rho_w) \vec{g})) = 0$$

où

- Definition 12.**
1.  $\vec{q}$  est un vecteur régulier à divergence nulle.
  2.  $f$  est une fonction croissante et lipschitzienne vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .
  3.  $\lambda$  fonction lipschitzienne positive vérifiant  $\lambda(0) = \lambda(1) = 0$  et  $\lambda(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .
  4.  $\pi$  fonction strictement croissante et positive.

$\Omega$  milieu poreux hétérogène constitué d'une apposition de différents sous milieux homogènes isotropes et polygonaux  $\Omega_i$  ( $i \in \{0, \dots, N\}$ ).

On cherche à comprendre les mécanismes liés à la pression capillaire et au changement de domaines  $\Omega_i$  et à leur propriété (pression capillaire en particulier).

On néglige donc tous les termes convectifs, on va donc faire les hypothèses suivantes

- $\vec{q} = 0$ .
- $\rho_o = \rho_w$ .

On se retrouve alors avec une équation dans chaque  $\Omega_i$  de la forme :

$$\phi_i \partial_t u - \operatorname{div}(\lambda_i \nabla \pi_i(u)) = 0$$

.  $\lambda_i \nabla \pi_i$  peut être vu comme un flux.

On note  $\Gamma_{i,j}$  l'interface entre  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  et  $\vec{n}_i$  (ou  $n_i$ ) la normale sortante de  $\Omega_i$ .

La conservation de la masse au niveau de interfaces impose :

$$\nabla \lambda_i \nabla \pi_i \cdot \vec{n}_i + \nabla \lambda_j \nabla \pi_j \cdot \vec{n}_j = 0.$$

On impose aussi le raccord des pressions de chaque phase et donc le raccord des pressions capillaires :  $\pi_i(u_i) = \pi_j(u_j)$ .

**Remark 13.** On aura donc une condition de compatibilité :  $\pi_i(1) = \pi_j(1)$  et  $\pi_i(0) = \pi_j(0)$ .

Le problème à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \phi_i \partial_t u - \operatorname{div} \lambda_i \nabla \pi_i(u) = 0 \text{ dans } \Omega_i \times (0, T) \\ \pi_i(u_i) = \pi_j(u_j) \text{ sur } \Gamma_{i,j} \times (0, T) \\ \lambda_i \nabla \pi_i \cdot \vec{n}_i + \lambda_j \nabla \pi_j \cdot \vec{n}_j = 0 \text{ sur } \Gamma_{i,j} \times (0, T) \\ \lambda_i \nabla \pi_i \cdot \vec{n}_i = 0 \text{ sur } (\partial \Omega \cap \partial \Omega_i) \times (0, T) \\ u(., 0) = u_0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

## 2.2 Mise en place des définitions mathématiques

A partir d'ici, je me suis très fortement inspiré du chapitre 2 de la thèse de Clément Cancès [CAN08].

Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 3$ ) qui représente notre milieu poreux. On suppose qu'il existe  $\Omega_i$  ouverts polygonaux en nombre fini ( $\Omega_i \subset \Omega$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ ) tels que  $\cup_{i \in \{1, \dots, N\}} \overline{\Omega_i} = \overline{\Omega}$  et  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , ce sont nos sous-domaines homogènes et isotropes. On sépare  $\Omega$  en sous-domaines  $\Omega_i$  en raison de différentes propriétés physiques du au différents types de roche (ce que l'on appelle la lithologie). L'interface entre deux sous-domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  sera noté  $\Gamma_{i,j}$ .

Ici  $u$  désigne la saturation en huile de notre milieu poreux.

Sur chaque sous domaine  $\Omega_i$ , on veut que  $u$  (elle dépendra du temps et de l'espace  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ ) vérifie le système suivant :

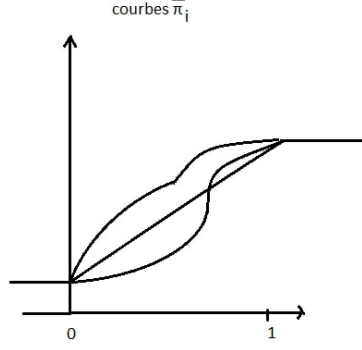


FIGURE 1 – exemples de courbes  $\bar{\pi}_i$

$$\begin{cases} \phi_i \partial_t u - \operatorname{div}(\lambda_i(u) \nabla \bar{\pi}_i(u)) = 0 \text{ dans } \Omega_i \times (0, T) \\ \pi_i(u_i) = \pi_j(u_j) \text{ sur } \Gamma_{i,j} \times (0, T) \\ \lambda_i(u) \nabla \bar{\pi}_i(u) \cdot \vec{n}_i + \lambda_j(u) \nabla \bar{\pi}_j(u) \cdot \vec{n}_j = 0 \text{ sur } \Gamma_{i,j} \times (0, T) \\ \lambda_i(u) \nabla \bar{\pi}_i(u) \cdot \vec{n}_i = 0 \text{ sur } (\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (2)$$

On fait l'hypothèse que la pression capillaire  $\bar{\pi}_i$  associée au sous-domaine  $\Omega_i$  est une fonction dépendant de la saturation  $u$ .

De même la mobilité globale  $\lambda_i$  associée au sous-domaine  $\Omega_i$  dépendant de  $u$ .

$u_0 \in L^\infty(\Omega)$  désigne la donnée initiale pour la saturation, elle  $0 \leq u_0 \leq 1$  presque partout sur  $\Omega$  ce qui vient du fait que ce soit une saturation, c'est une propriété que nous aimerions conserver pour garder un sens physique.

On fait les hypothèses, loin d'être dénuées de sens d'un point de vue physique, suivantes sur nos grandeurs caractéristiques :

**Hypothèse 1.**  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ , la fonction  $\bar{\pi}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et satisfait :

- $\forall s \leq 0, \bar{\pi}_i(s) = \bar{\pi}_i(0)$
- $\forall s \geq 1, \bar{\pi}_i(s) = \bar{\pi}_i(1)$
- $\bar{\pi}_i|_{[0,1]} \in C^1([0,1], \mathbb{R})$  est croissante (donc lipschitzienne).
- $\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, \bar{\pi}_i(0) = \bar{\pi}_j(0)$
- $\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, \bar{\pi}_i(1) = \bar{\pi}_j(1)$

Ces dernières hypothèses nous permettront de faire le raccord au niveau du passage entre deux sous-domaines différents, puisque nous voudrions conserver la pression capillaire aux interfaces (en un certain sens).

**Hypothèse 2.**  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ , la fonction  $\lambda_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continue et satisfait

- $\forall s \leq 0, \lambda_i(s) = \lambda_i(0)$
- $\forall s \geq 1, \lambda_i(s) = \lambda_i(1)$
- $\forall s \in ]0, 1[, \lambda_i(s) > 0$ .

On peut définir la fonction  $\lambda : \left( \bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} \Omega_i \right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  quand  $x$  est dans  $\Omega_i$ . Ce qui la définit presque-partout sur  $\Omega \times \mathbb{R}$ .

On note  $C_\lambda = \max_i (\sup_{s \in \mathbb{R}} |\lambda_i(s)|)$ .

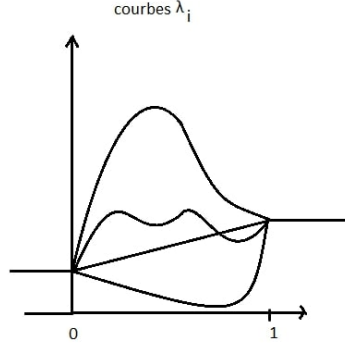


FIGURE 2 – exemples de courbes  $\lambda_i$

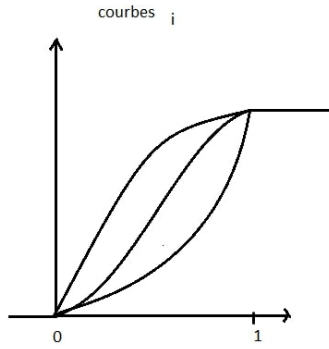


FIGURE 3 – exemples de courbes  $\psi_i$

Maintenant on va définir quelques fonctions pour réécrire les équations plus simplement, en faisant quelques constats en passant.

**Definition 14.**  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  on définit  $\psi_i : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ s & \longmapsto \int_0^s \lambda_i(a) \overline{\pi}_i'(a) da \end{cases}$ .

- $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\psi_i|_{[0,1]}$  est dérivable et strictement croissante.
- $\forall s \leq 0$ ,  $\psi_i(s) = \psi_i(0)$
- $\forall s \geq 1$ ,  $\psi_i(s) = \psi_i(1)$
- On note  $L_\psi$  une constante de Lipschitz pour tout les  $\psi_i$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

On peut maintenant écrire nos équations comme suit :

$$\begin{cases} \phi_i \partial_t u - \Delta \psi_i(u) = 0 \text{ dans } \Omega_i \times (0, T) \\ \pi_i(u_i) = \pi_j(u_j) \text{ sur } \Gamma_{i,j} \times (0, T) \\ \nabla \psi_i(u) \cdot \vec{n}_i + \nabla \psi_j(u) \cdot \vec{n}_j = 0 \text{ sur } \Gamma_{i,j} \times (0, T) \\ \nabla \psi_i(u) \cdot \vec{n}_i = 0 \text{ sur } (\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \times (0, T) \\ u(., 0) = u_0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (3)$$

Maintenant on va définir une fonction qui nous sera utile par la suite.

**Definition 15.**  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  on définit  $\pi_i : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ s & \longmapsto \int_{\overline{\pi}_i(0)}^{\overline{\pi}_i(s)} \sqrt{\min_{j \in \{1, \dots, N\}} (\lambda_j \circ \overline{\pi}_j^{-1}(a))} da \end{cases}$ .



- $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\pi_i|_{[0,1]}$  est dérivable et strictement croissante.
- $\forall s \leq 0, \pi_i(s) = \pi_i(0)$
- $\forall s \geq 1, \pi_i(s) = \pi_i(1)$
- $\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, \forall (s_i, s_j) \in \mathbb{R}^2$  alors on a :  $\bar{\pi}_i(s_i) = \bar{\pi}_j(s_j) \Leftrightarrow \pi_i(s_i) = \pi_j(s_j)$ .

De la même façon on définit presque partout sur  $\Omega \times \mathbb{R}$  :  $\pi(s, x) = \pi_i(s)$  et  $\psi(s, x) = \psi_i(s)$  si  $x$  est dans  $\Omega_i$ .

On va maintenant définir pour nous ce qu'est un solution faible à notre problème :

**Definition 16** (Solution faible). Une fonction  $u$  est dite solution faible du problème si elle satisfait :

- 1  $u \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ ,  $0 \leq u \leq 1$  presque partout sur  $\Omega \times (0, T)$ .
- 2  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\psi_i(u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega_i))$ .
- 3  $\Pi(u, \cdot) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .
- 4  $\forall h \in \mathcal{D}(\Omega \times ]0, T])$ 

$$\int_{\Omega} \int_0^T u(x, t) \partial_t h(x, t) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) h(x, 0) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \int_0^T \nabla \psi_i(u(x, t)) \cdot \nabla h(x, t) dx dt = 0.$$

**Remark 17.** Le point 1 dit que l'on veut conserver le sens physique de  $u$  c'est-à-dire que  $u$  puisse toujours désigner une saturation.

Le point 2 et 3 nous permettent de pouvoir considérer le point 4 ( en particulier d'avoir nos gradient dans  $L^2$ ).

Le point 4 est une réécriture variationnelle de notre équation de base en utilisant la propriété de la divergence.

### 2.2.1 Discrétisation en volumes finis du problème

On va maintenant découper notre domaine  $\Omega$  en tenant compte des sous-domaines  $\Omega_i$ . Ce maillage aura la particularité d'être orthogonal.

**Definition 18** (Maillage admissible de  $\Omega$ ).  $\mathcal{T}$  ensemble d'ouverts bornés convexes inclus dans  $\Omega$  appelés volumes de contrôle,  $\mathcal{E}$  famille de sous-ensemble de  $\bar{\Omega}$  contenus dans un hyperplan de  $\mathbb{R}^d$  de mesure strictement positive,  $(x_K)_{K \in \mathcal{T}}$  famille de points ( centres des volumes de contrôle ) satisfaisant les propriétés :

- 1  $\exists i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $K \subset \Omega_i$ , on note  $\mathcal{T}_i = \{K \in \mathcal{T} | K \subset \Omega_i\}$ .
- 2  $\bigcup_{K \in \mathcal{T}_i} \bar{K} = \bar{\Omega}_i$ .
- 3  $\forall K \in \mathcal{T}$ , il existe un sous-ensemble  $\mathcal{E}_K$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $\partial K = \bar{K} \setminus \overset{\circ}{K} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{\sigma}$ . De plus  $\mathcal{E} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \mathcal{E}_K$ .
- 4  $\forall (K, L) \in \mathcal{T}^2$  avec  $K \neq L$ , soit la mesure de  $\bar{K} \cap \bar{L}$  est de mesure nulle ou  $\bar{K} \cap \bar{L} = \bar{\sigma}$  pour  $\sigma \in \mathcal{E}$ .

Dans ce dernier cas, on notera  $\sigma = K|L$  et :

- $\mathcal{E}_i = \{\sigma \in \mathcal{E}, \exists (K, L) \in \mathcal{T}_i^2, \sigma = K|L\}$
- $\mathcal{E}_{ext} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \partial \Omega\}$ .
- $\mathcal{E}_{ext,i} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \partial \Omega_i \cap \partial \Omega\}$
- $\mathcal{E}_{\Gamma_{ij}} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \exists (K, L) \in \mathcal{T}_i \times \mathcal{T}_j, \sigma = K|L\}$ .
- $\mathcal{F} = \bigcup_{i,j} \mathcal{E}_{\Gamma_{ij}}$ .

Et  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall K \in \mathcal{T}_i$ , on notera :

- $\mathcal{N}_K = \{L \in \mathcal{T}, \exists \sigma \in \mathcal{E}, \sigma = K|L\}$ .
- $\mathcal{N}_{K,i} = \{L \in \mathcal{T}_i, \exists \sigma \in \mathcal{E}_i, \sigma = K|L\}$ .
- $\mathcal{F}_K = \{L \in \mathcal{T}, \exists j \neq i, \exists \sigma \in \Gamma_{i,j}, \sigma = K|L\}$ .
- $\mathcal{E}_{K,i} = \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_i$ .
- $\mathcal{E}_{K,ext} = \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}$ .

5 La famille de points  $(x_K)_{K \in \mathcal{T}}$  est telle que  $x_K \in K$  ( pour tout  $K$  ) et, si  $\sigma = K|L$ , il est supposé que le segment  $(x_K, x_L)$  est orthogonal à  $\sigma$ .

6 On notera si  $K$  et  $L$  sont dans le même  $\Omega_i$  :  $D_{K|L}$  le diamant associé à l'interface  $K|L$  le volume constitué des cônes de base  $K|L$  et de pointes respectives  $x_K$  et  $x_L$ .

Si  $K \in \Omega_i$  et  $L \in \Omega_j$  avec  $i \neq j$ , alors  $\sigma = K|L \subset \Gamma_{i,j}$ , et on note les demi-diamants :  $D_{K,\sigma}$  le diamant associé à  $K$  et à l'interface  $K|L$  le volume constitué u cône de base  $\sigma$  et de pointe  $x_K$ .

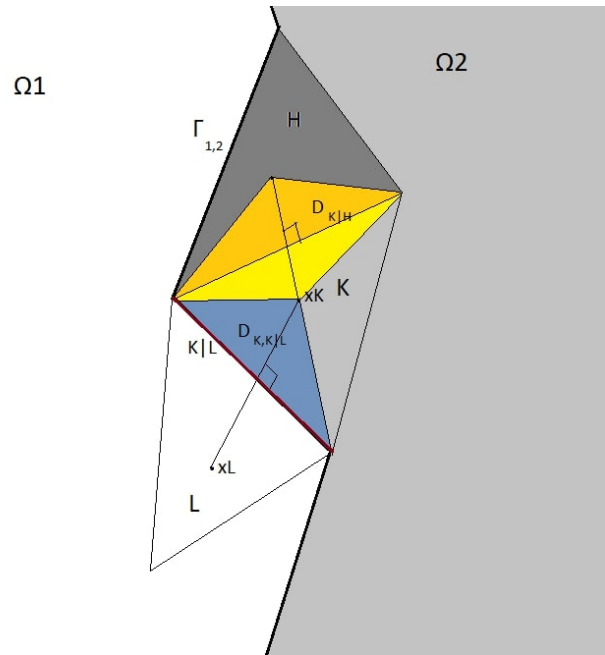


FIGURE 4 – illustration de quelques notations

7 Pour un volume de contrôle  $K$  on note  $m(K)$  sa mesure.  $\forall \sigma \in \mathcal{E}$ , on note  $m(\sigma)$  la  $(d - 1)$ -mesure de Lebesgue de  $\sigma$ .

Si  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ , on note  $\tau_{K,\sigma}$  la transmissibilité de  $K$  au travers de  $\sigma$ , définie par :  $\tau_{K,\sigma} = \frac{m(\sigma)}{d(x_K,\sigma)}$ .

On définit aussi  $\tau_{K|L} = \frac{m(\sigma)}{d(x_K,x_L)}$ .

On a :  $\forall \sigma = K|L \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{ext}$ ,  $\frac{1}{\tau_{K|L}} = \frac{1}{\tau_{K,K|L}} + \frac{1}{\tau_{L,K|L}}$ .

8 La taille du maillage est définie par :

$size(\mathcal{T}) = \max_{K \in \mathcal{T}} diam(K)$ .

On définit un facteur géométrique lié à la régularité du maillage :

$reg(\mathcal{T}) = \max_{K \in \mathcal{T}} (Card(\mathcal{E}_K), \max_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{diam(K)}{d(x_K,\sigma)})$

On appelle cela la discrétisation en espace de notre domaine  $\Omega$ .

On va maintenant découper le temps :

**Definition 19.** On appelle discrétisation uniforme de  $(0, T)$ , le découpage de cet intervalle donné par un entier  $M$  tel que  $\delta t = \frac{T}{M+1}$ , avec  $(t_n)_{n \in \{0, \dots, M\}}$  où  $t_n = n\delta t$ ,  $t_0 = 0$  et  $t_{M+1} = T$ .

**Definition 20.** On appelle discrétisation en volumes finis de  $\mathcal{D}$  de  $\Omega \times (0, T)$  une famille  $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, (x_K)_{K \in \mathcal{T}}, M, (t_n)_{n \in \{0, \dots, M\}})$  où  $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, (x_K)_{K \in \mathcal{T}})$  est un maillage admissible de  $\Omega$  et  $(t_n)_{n \in \{0, \dots, M\}}$  une discrétisation de  $(0, T)$ .

On définit :  $size(\mathcal{D}) = \max(size(\mathcal{T}, \delta t))$  et  $reg(\mathcal{D}) = reg(\mathcal{T})$ .

Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation de  $\Omega \times (0, T)$ . L'objectif va être de définir une fonction  $u_{\mathcal{D}}$ , constante par volume de contrôle sur nos intervalles de temps, qui sera une solution approchée de notre problème. Pour ce faire on va construire un schéma qui nous donnera cette solution approchée.

Nous allons utiliser la méthode des volumes finis pour définir un tel schéma. Le principe de la méthode des volumes finis est d'intégrer notre équation sur les volumes de contrôles puis d'approcher chaque termes par une expression simplifiée mais pertinente. Pour plus de détail on peut se référer au livre [REH97].

En premier lieu définissons la condition initiale discrétisée :  $u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x) dx$ ,  $\forall K \in \mathcal{T}$ . On remarque que l'on a  $\forall K \in \mathcal{T} 0 \leq u_K^0 \leq 1$ .

On intègre donc notre équation sur un volume de contrôle  $K \in \mathcal{T}$  inclus dans  $\Omega_i$  :

$$\int_K \partial_t u dx - \int_K \operatorname{div} \nabla \psi_i(u) dx = 0$$

On utilise le théorème de la divergence faisant le lien entre la divergence sur un volume et le flux par sa frontière :

$$\int_K \partial_t u dx - \int_{\partial K} \nabla \psi_i(u) \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

où  $\vec{n}$  est la normale sortante

On obtient en se souvenant que la frontière de  $K$  se découpe grâce à notre discrétisation de l'espace, en distinguant les interfaces séparant des volumes de contrôle dans le même sous-domaine :

$$\int_K \partial_t u dx - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K,i}} \int_{\sigma} \nabla \psi_i(u) \cdot \vec{n} d\sigma - \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \int_{\sigma} \nabla \psi_i(u) \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

On va maintenant approximer chaque terme.

Pour la dérivée temporelle on prendra :  $\partial_t u(t_{n+1}, x) \approx \frac{u(t_{n+1}, x_K) - u(t_n, x_K)}{\delta t}$  pour  $x \in K$ .

On aura alors  $\int_K \partial_t u dx \approx m(K) \frac{u(t_{n+1}, x_K) - u(t_n, x_K)}{\delta t}$ .

Le schéma va être dit implicite en temps, pour plus de précision voir le livre de Grégoire Allaire, Analyse numérique et optimisation.

Pour approximer les flux au travers de notre  $\sigma$  sortant de  $K$  on va tirer parti du fait que notre maillage est orthogonal : on prendra  $\nabla \psi(u)(t_{n+1}, x) \cdot \vec{n} \approx \frac{\psi(u(t_{n+1}, x_{K,\sigma})) - \psi(u(t_{n+1}, x_K))}{d(x_K, \sigma)}$  où  $x_{K,\sigma}$  sera choisit de sorte à vérifier une condition de transmission. On aura alors :  $\int_{\sigma} \nabla \psi(u)(t_{n+1}, x) \cdot \vec{n} d\sigma \approx m(\sigma) \frac{\psi(u(t_{n+1}, x_{K,\sigma})) - \psi(u(t_{n+1}, x_K))}{d(x_K, \sigma)} = \tau_{K,\sigma} (\psi(u(t_{n+1}, x_{K,\sigma})) - \psi(u(t_{n+1}, x_K)))$ .

On définit les couples  $u_{K,K|L}^{n+1}$  et  $u_{L,K|L'}^{n+1}$  conjointement à  $(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$  la solution de notre schéma à partir de  $(u_K^n)_{K \in \mathcal{T}}$  ( on itère à partir de  $(u_K^0)_{K \in \mathcal{T}}$  défini plus haut). Ils sont solutions du schéma implicite au volumes finis :

$$\begin{cases} m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K,i}} \tau_{K,\sigma} (\psi(u_K^{n+1}, x_K) - \psi(u_{K,\sigma}^{n+1}, x_K)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} (\psi(u_K^{n+1}, x_K) - \psi(u_{K,\sigma}^{n+1}, x_K)) \\ = 0 \end{cases} \quad (4)$$

et vérifient les relations de transmissions pour chaque interface  $K|L$  :

$$\begin{cases} \tau_{K,\sigma} (\psi(u_K^{n+1}, x_K) - \psi(u_{K,\sigma}^{n+1}, x_K)) + \tau_{L,\sigma} (\psi(u_L^{n+1}, x_L) - \psi(u_{L,\sigma}^{n+1}, x_L)) = 0 \\ \pi(u_{K,\sigma}^{n+1}, x_K) = \pi(u_{L,\sigma}^{n+1}, x_L) \end{cases} \quad (5)$$

Nous verrons qu'un tel schéma admet une solution et que celle-ci est unique ( sous réserve de quelques hypothèses).

A partir de  $(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}, m \in \{0, \dots, M\}}$  on définira donc  $(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}, n \in \{0, \dots, M\}}$  via notre schéma, ce qui nous permettra d'obtenir une solution approchée de notre équation de départ.

**Definition 21.** Soit  $\mathcal{D}$  un discrétisation de  $\Omega \times (0, T)$ . La solution du problème associé à la discrétisation est définie presque partout sur  $\Omega \times (0, T)$  par :

$\forall x \in K, \forall t \in (t_n, t_{n+1}), \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \{0, \dots, M\} : u_{\mathcal{D}}(x, t) = u_K^{n+1}$  où  $(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}, n \in \{0, \dots, M\}}$  est l'unique solution de notre schéma implicite au volumes finis.

Nous faisons une hypothèse supplémentaire.

**Hypothèse 3.**  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $(\psi_i \circ \pi_i^{(-1)})$  est une fonction continue, lipschitzienne sur  $[0, 1]$ .

Le but ici sera de montrer le théorème suivant :

**Theorem 22** (Convergence vers la solution faible). Soit  $\xi \in \mathbb{R}$ .

On considère une famille de discrétisations admissibles de  $\Omega \times (0, T)$  telle que  $\forall \mathcal{D}$  dans cette famille on a  $\text{reg}(\mathcal{D}) \leq \xi$ . Pour chaque discrétisation admissible donnée  $\mathcal{D}$  dans cette famille, on note  $u_{\mathcal{D}}$  la solution approchée.

Alors, sous nos différentes hypothèses (1, 2 et 3) :  $u_{\mathcal{D}} \rightarrow u \in L^p(\Omega \times (0, T))$ ,  $\forall p \in [1, +\infty[$  quand  $\text{reg}(\mathcal{D}) \rightarrow 0$  où  $u$  est l'unique solution faible au problème.

De plus on a le résultat de régularité :  $u \in C^0([0, T], L^p(\Omega))$ ,  $\forall p \in [1, +\infty[$ .

### 2.3 Existence d'une solution faible

On se donne donc  $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de discrétisations admissibles de  $\Omega \times (0, T)$ . On pose l'hypothèse du théorème précédent.

**Hypothèse 4.** On suppose la régularité de ces discrétisations bornée :  $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, \text{reg}(\mathcal{D}_m) \leq \xi$ .

#### 2.3.1 Existence et unicité des solutions approchées

L'objectif de cette partie est de montrer que notre schéma est bien construit, c'est-à-dire qu'il admet bien des solutions et qu'on a unicité de celle-ci.

Nous prenons les notations suivantes :

**Definition 23.**  $\forall K \in \mathcal{T}, \forall \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{F}, \forall n \in \{0, \dots, M+1\}$  :

- $\psi_K^n = \psi(u_K^n, x_K)$
- $\psi_{K,\sigma}^n = \psi(u_{K,\sigma}^n, x_K)$
- $\pi_K^n = \pi(u_K^n, x_K)$
- $\pi_{K,\sigma}^n = \pi(u_{K,\sigma}^n, x_K)$
- $\bar{\pi}_K^n = \bar{\pi}(u_K^n, x_K)$
- $\bar{\pi}_{K,\sigma}^n = \bar{\pi}(u_{K,\sigma}^n, x_K)$

**Lemma 24.**  $\forall K \in \mathcal{T}, \forall L \in \mathcal{N}_K, \forall n \in \{0, \dots, M\}, \forall (u_K^{n+1}, u_L^{n+1}) \in \mathbb{R}^2$  il existe un unique couple  $(u_{K,\sigma}^{n+1}, u_{L,\sigma}^{n+1}) \in [0, 1]^2$  solution de la condition de transmissibilité.

*Démonstration.* On suppose dans un premier temps que  $x_K$  et  $x_L$  sont dans le même sous-domaine  $\Omega_i$ . La condition de transmissibilité peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \tau_{K,\sigma}(\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}) + \tau_{L,\sigma}(\psi_L^{n+1} - \psi_{L,\sigma}^{n+1}) = 0 \\ u_{K,\sigma}^{n+1} = u_{L,\sigma}^{n+1} \end{cases}$$

Grâce à la stricte croissance de  $\pi_i$  sur  $[0, 1]$  on peut identifier les  $u$  plutôt que les  $\pi(u)$ .

D'où :

$$\begin{cases} \psi_{K,\sigma}^{n+1} = \frac{1}{\tau_{K,\sigma} + \tau_{L,\sigma}} (\tau_{K,\sigma} \psi_K^{n+1} + \tau_{L,\sigma} \psi_L^{n+1}) \\ u_{K,\sigma}^{n+1} = u_{L,\sigma}^{n+1} \end{cases}$$

$\frac{1}{\tau_{K,\sigma} + \tau_{L,\sigma}} (\tau_{K,\sigma} \psi_K^{n+1} + \tau_{L,\sigma} \psi_L^{n+1})$  admet un unique antécédent par  $\psi_i$  dans  $[0, 1]$  ( car  $\psi_i$  est continue et strictement croissante).

On suppose que  $(x_K, x_L) \in \Omega_i \times \Omega_j$  avec  $i \neq j$ . On a alors la condition de transmission :

$$\begin{cases} u_{K,\sigma}^{n+1} = \bar{\pi}_i^{-1}(\bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1}) \\ \tau_{K,\sigma}(\psi_K^{n+1} - \psi_i(\bar{\pi}_i^{-1}(\bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1}))) + \tau_{L,\sigma}(\psi_L^{n+1} - \psi_{L,\sigma}^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Ce qui se réécrit :

$$\begin{cases} u_{K,\sigma}^{n+1} = \bar{\pi}_i^{-1}(\bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1}) \\ \tau_{K,\sigma}\psi_i(\bar{\pi}_i^{-1}(\bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1})) + \tau_{L,\sigma}\psi_L^{n+1} = \tau_{K,\sigma}\psi_K^{n+1} + \tau_{L,\sigma}\psi_L^{n+1} \end{cases}$$

Par hypothèses  $\bar{\pi}_i(0) = \bar{\pi}_j(0)$  et  $\bar{\pi}_i(1) = \bar{\pi}_j(1)$  ce qui implique :  $\forall u_{L,\sigma}^{n+1} \in [0, 1], u_{K,\sigma}^{n+1} \in [0, 1]$ .

L'application  $\theta : z \mapsto \tau_{K,\sigma}\psi_i(\bar{\pi}_i^{-1}(\bar{\pi}_j(z))) + \tau_{L,\sigma}\psi_j(z)$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  ce qui implique l'unicité des solutions. On obtient l'existence par le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que  $\theta(0) = 0$  et  $\theta(1) = \tau_{K,\sigma}\psi_i(1) + \tau_{L,\sigma}\psi_j(1)$ .

On notera  $u_{K,\sigma}^{n+1} = g(u_K^{n+1}, u_K^{n+1})$ , on constate directement que  $g$  est croissante selon les deux coordonnées (et définie sur  $\mathbb{R}^2$ ).  $\square$

on a supposé que  $u_0 \in L^\infty(\Omega), 0 \leq u_0 \leq 1$  presque partout sur  $\Omega$ . On a donc  $\forall K \in \mathcal{T} u_K^0 \in [0, 1]$ . On veut que notre schéma conserve ce sens physique à chaque itération (que  $u$  puisse continuer à représenter une saturation), c'est ce que l'on désigne par  $L^\infty$ -stabilité.

**Proposition 25.** Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible de  $\Omega \times (0, T)$ , soit  $(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}, n \in \{0, \dots, M\}}$  une solution du schéma, alors  $\forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \{0, \dots, M\} : 0 \leq u_K^{n+1} \leq 1$ .

*Démonstration.* On a bien notre résultat au temps  $t_0$ .

Le schéma peut être réécrit :

$$m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in \mathcal{N}_{K,i}} \tau_{K|L} (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}) = 0$$

On va maintenant considérer la fonction, où  $K \in \Omega_i$  :

$$H_K(a, (a_L)_{L \in \mathcal{T}}) = \frac{a + \lambda_K a_K + \frac{\delta t}{m(K)} (\sum_{L \in \mathcal{N}_{K,i}} \tau_{K|L} (\psi_i(a_L) - \psi_i(a_K)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} (\psi_i(a_{K,\sigma}) - \psi_i(a_K)))}{1 + \lambda_K}$$

où  $\lambda_K = \frac{\delta t \psi_i}{m(K)} (\sum_{L \in \mathcal{N}_{K,i}} \tau_{K|L} + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma}) > 0$

et avec  $a_{K,K|L} = g(a_K, a_L)$  donné dans la démonstration précédente ( $g$  est croissante selon les deux coordonnées). On voit alors que  $H_K$  est croissante elle aussi selon tout ses coordonnées, et même strictement quand on se place sur  $[0, 1]$  pour chaque coordonnée (seul la croissance en  $a_K$  est un peu cachée, il faut voir que la décroissance due aux  $-\psi_i(a_K)$  dans les sommes est compensée par le  $\lambda_K a_K$  et par la stricte croissance sur  $[0, 1]$  en chaque coordonnée de  $g$ ).

On suppose avoir l'encadrement  $0 \leq u_K^i \leq 1$  pour tout  $K \in \mathbb{T}$  et  $i \in \{0, \dots, n\}$ , montrons qu'il est conservé pour  $n + 1$ .

On dispose d'un  $K \in \mathcal{T}$  tel que  $u_K^{n+1} = \max_{L \in \mathcal{T}} u_L^{n+1}$ . On suppose que  $u_K^{n+1} > 1$ .

On a alors :

$$1 < u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\delta t}{m(K)} (\sum_{L \in \mathcal{N}_{K,i}} \tau_{K|L} (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}))$$

$$= H_K(u_K^n, (u_L^{n+1})_{L \in \mathcal{T}}) \leq H_K(1, (u_K^{n+1})_{L \in \mathcal{T}}) = \frac{1 + \lambda_K u_K^{n+1}}{1 + \lambda_K} < u_K^{n+1}$$

ce qui est absurde donc nécessairement  $u_K^{n+1} \leq 1$ .

On fait le même raisonnement en supposant  $u_K^{n+1} = \min_{L \in \mathcal{T}} u_L^{n+1} < 0$ . On a alors :

$$0 > u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\delta t}{m(K)} (\sum_{L \in \mathcal{N}_{K,i}} \tau_{K|L} (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}))$$

$$= H_K(u_K^n, (u_L^{n+1})_{L \in \mathcal{T}}) \geq H_K(0, (0)_{L \in \mathcal{T}}) = 0, \text{ ce qui est absurde donc nécessairement } u_K^{n+1} \geq 0.$$

On a donc un schéma  $L^\infty$ -stable pour toute famille vérifiant le schéma.  $\square$

Maintenant il reste le plus important l'existence et l'unicité, ce qui montrera que notre schéma est bien construit. Cette méthode pour démontrer l'existence de solutions à de tels schéma via le degré topologique de Brouwer a été utilisé dans le chapitre 2 de la thèse de Clément Cancès et dans la thèse de Konstantin Brenner.

**Proposition 26.** Soit  $\mathcal{D}$  un discrétisation admissible. Il existe une unique solution au schéma.

*Démonstration.* Nous allons tout d'abord démontrer l'existence.

On rappelle que pour tout interface  $\sigma = K|L$ ,  $u_{K,\sigma}^{n+1}$  est fonction continue de  $(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$ . On définit

l'homotopie :  $h : \begin{cases} \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}} \times [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}} \\ ((u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}, t) & \longmapsto (v_K(t))_{K \in \mathcal{T}} \end{cases}$  avec

$$v_K(t) = \frac{u_K^{n+1} - tu_K^n}{\delta t} m(K) + t \left( \sum_{L \in \mathcal{N}_{K,i}} \tau_{K|L} (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}) \right)$$

où les  $(u_K^n)_{K \in \mathcal{T}}$  sont supposé déjà connus.

On remarque que  $h(x, t) = \frac{m(K)}{\delta t} Id(x) + tf(x)$  avec  $f$  borné sur  $\mathbb{R}^{\#\mathcal{T}}$ . On peut donc se placer sur une boule assez grande de  $\mathbb{R}^{\#\mathcal{T}}$  pour  $(0) \notin h(\partial B(0, R), t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On a alors  $h$  restreint à  $B(0, R) \times [0, 1]$  qui est une homotopie valide dans le cadre de l'application de l'invariance par homotopie du degré topologique. On a alors  $1 = d(Id, B(0, R), 0) = d(\frac{m(K)}{\delta t} Id, B(0, R), 0) = d(h(\cdot, 0), B(0, R), 0) = d(h(\cdot, 1), B(0, R), 0)$ . Cela implique l'existence de solutions à notre schéma en volumes finis implicite.

Maintenant occupons nous de l'unicité d'une telle solution.

On suppose que le problème d'unicité se déclare au temps  $n + 1$ , on se donne deux solution à notre schéma  $(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$  et  $(v_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$ . Elles vérifient pour tout  $K \in \mathcal{T}$  :

$$\max(u_K^{n+1}, v_K^{n+1}) \leq H_K(u_K, (\max(u_L^{n+1}, v_L^{n+1}))_{L \in \mathcal{T}})$$

$$\min(u_K^{n+1}, v_K^{n+1}) \geq H_K(u_K, (\min(u_L^{n+1}, v_L^{n+1}))_{L \in \mathcal{T}})$$

On somme le max moins le min sur les  $K$  en multipliant par  $m(K)(1 + \lambda_K)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)(1 + \lambda_K) (\max(u_K^{n+1}, v_K^{n+1}) - \min(u_K^{n+1}, v_K^{n+1})) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)(1 + \lambda_K) |u_K^{n+1} - v_K^{n+1}| \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)(1 + \lambda_K) (H_K(u_K, (\max(u_L^{n+1}, v_L^{n+1}))_{L \in \mathcal{T}}) - H_K(u_K, (\min(u_L^{n+1}, v_L^{n+1}))_{L \in \mathcal{T}})) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \lambda_K |u_K^{n+1} - v_K^{n+1}| \end{aligned}$$

En remarquant que les termes en temps  $n$  s'annulent directement par soustraction, les termes de flux à travers les interfaces s'annulent en sommant sur tout les  $K$  grâce au changement de signe en se plaçant d'un côté ou de l'autre de l'interface  $K|L$ , ou encore pour le dernier terme via les relations de transmissions qu'elles vérifient.

Finalement :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) |u_K^{n+1} - v_K^{n+1}| \leq 0$$

d'où l'unicité. □

### 2.3.2 Estimation $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ discrète

On pose donc l'espace des fonctions constantes par volumes de contrôle.

**Definition 27.** Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible de  $\Omega \times (0, T)$ . On note  $\chi(\mathcal{D})$  l'espace fonctionnel :  $\chi(\mathcal{D}) = \{v \in L^\infty(\Omega \times (0, T)), \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \{0, \dots, M\}, \exists v_K^{n+1}, v(x, t) = v_K^{n+1} p.p. K \times (t_n, t_{n+1})\}$

On peut alors réécrire la schéma volumes finis sous une écriture dite variationnelle équivalente à celle vue précédemment :  $\forall v = (v_K)_{K \in \mathcal{T}} \in \chi(\mathcal{D})$  on a

$$\begin{cases} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} v_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K,i}} \tau_{K,\sigma} v_K (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}) + \\ \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} v_K (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Que l'on peut encore réécrire :  $\forall v = (v_K)_{K \in \mathcal{T}} \in \chi(\mathcal{D})$  on a

$$\begin{cases} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} v_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K,i}} \tau_{K|L} v_K (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) + \\ \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} v_K (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

On va alors poser la semi-norme notre espace fonctionnel pour chaque sous-domaine  $\Omega_i$ .

**Definition 28** (semi-norme discrète sur  $L^2(0, T; H^1(\Omega_i))$ ).  $|v|_{1,\mathcal{D},i}^2 = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_i} \tau_{K|L} (v_K^{n+1} - v_L^{n+1})^2$  où  $v \in \chi(\mathcal{D})$ .

On voit que ceci est une semi-norme. En effet on a  $|v|_{1,\mathcal{D},i}^2 = 0 \Leftrightarrow v$  est une fonction constante sur chaque composante connexe de  $\Omega_i$  (toujours dans  $\chi(\mathcal{D})$ ). On peut voir que l'on peut réécrire la norme à l'aide d'un gradient discret ce qui justifie la dénomination.

Montrons un petit lemme :

**Lemma 29.**  $\mathcal{D}$  discrétisation discrète admissible de  $\Omega \times (0, T)$ . Soit  $u_{\mathcal{D}}$  la solution discrète du schéma. Soit  $\sigma \in \Gamma_{i,j}$  pour des  $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$ ,  $\sigma = K|L$ ,  $K \in \mathcal{T}_i$ ,  $L \in \mathcal{T}_j$ .

Alors :

$$0 \leq (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K,\sigma}^{n+1}) \leq (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1})$$

$$0 \leq (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\pi_K^{n+1} - \pi_{K,\sigma}^{n+1}) \leq (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\pi_K^{n+1} - \pi_L^{n+1})$$

*Démonstration.* On a pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,  $\psi(\cdot, x_K)$  et  $\bar{\pi}(\cdot, x_K)$  sont des fonctions croissantes (strictement sur  $[0, 1]$ ).

Donc :  $(\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K,\sigma}^{n+1}) \geq 0$ .

De plus  $(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) = (\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K,\sigma}^{n+1} + \bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1})$  par la condition de transmission.

Finalemnt :

$$\begin{aligned} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) &= (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K,\sigma}^{n+1}) + (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) \\ &= (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K,\sigma}^{n+1}) + (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) \\ &= (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K,\sigma}^{n+1}) + \frac{\tau_{L,\sigma}}{\tau_{K,\sigma}} (\psi_L^{n+1} - \psi_{L,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) \geq (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K,\sigma}^{n+1}) \end{aligned}$$

Grâce à la relation de transmission et la croissance de nos fonctions qui nous garantit la positivité. On fait exactement la même chose avec  $\pi$  à la place de  $\bar{\pi}$ .  $\square$

**Definition 30.** On notera  $\eta_i : s \mapsto \int_0^s \sqrt{\lambda_i a} \bar{\pi}'_i(a) da$ .

C'est une fonction croissante positive dans  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ .

Elle vérifie  $\forall (a, b) \in [0, 1]^2, \forall i \in \{1, \dots, N\} : 0 \leq (\eta_i(a) - \eta_i(b))^2 \leq (\psi_i(a) - \psi_i(b))(\bar{\pi}_i(a) - \bar{\pi}_i(b))$  (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

**Proposition 31.** Sous nos hypothèses, soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible de  $\Omega \times (0, T)$ ,  $u_{\mathcal{D}}$  solution approchée pour notre schéma. Alors il existe  $C$  dépendant seulement de  $\bar{\pi}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |\eta_i(u_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D},i}^2 &\leq C \\ 0 \leq \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{F}, \sigma=K|L} \tau_{K,\sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) &\leq C \end{aligned}$$

*Démonstration.* Terme d'accumulation :

Nous allons utiliser notre écriture variationnelle avec  $v = (\bar{\pi}_K^{n+1})$  que nous sommes sur les  $n \in \{0, M\}$ .

$$\sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}} \bar{\pi}_K^{n+1} (m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K,i}} \tau_{K|L} (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \tau_{K,\sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1})) = 0$$

Soit  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $K \in \mathcal{T}_i$ . Comme  $\bar{\pi}_i$  est une fonction croissante  $g_i : s \mapsto \int_0^s \bar{\pi}_i(a) da$  est convexe.

On a alors par convexité :  $(u_K^{n+1} - u_L^{n+1}) \bar{\pi}_K^{n+1} \geq g_i(u_K^{n+1}) - g_i(u_K^n)$ .

Donc

$$\sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (u_K^{n+1} - u_K^n) \bar{\pi}_K^{n+1} \geq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (g_i(u_K^{n+1}) - g_i(u_K^0)) \geq -m(\Omega) \int_0^1 \max_{i \in \{1, \dots, N\}} |\bar{\pi}_i(a)| da.$$

Terme de diffusion :

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{i=1}^N \sum_{K|L \in \mathcal{E}_i} \tau_{K|L} (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) (\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) \geq \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_i} \tau_{K|L} (\eta_K^{n+1} - \eta_L^{n+1})^2$$

avec  $\eta_K^{n+1} = \eta_i(u_K^{n+1})$  où  $K \subset \Omega_i$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^N |\eta_i(u_D)|_{1,D,i}^2 = \sum_{i=1}^N \delta t \sum_{n=0}^M \sum_{K|L \in \mathcal{E}_i} \tau_{K|L} (\eta_K^{n+1} - \eta_L^{n+1})^2 \leq \sum_{i=1}^N \delta t \sum_{n=0}^M \sum_{K|L \in \mathcal{E}_i} \tau_{K|L} (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) (\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) \\ &= \delta t \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^M \sum_{K|L \in \mathcal{E}_i} \tau_{K|L} (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) \bar{\pi}_K^{n+1} - \tau_{K|L} (\psi_K^{n+1} - \psi_L^{n+1}) \bar{\pi}_L^{n+1} = (2 \sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}} -m(K) (u_K^{n+1} - u_K^n) \bar{\pi}_K^{n+1}) \\ &\quad - \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{F}} \tau_{K,\sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}) (\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) \leq (2m(\Omega) \int_0^1 \max_{i \in \{1, \dots, N\}} |\bar{\pi}_i(a)| da) - 0 = C \end{aligned}$$

Ce grâce à notre identité du début. Par lemme, le dernier terme de la dernière égalité est positif, et par notre travail du début nous pouvons le majorer, ce qui bien le premier résultat voulu.

La seconde vient inégalité vient directement de l'inégalité

$$0 \leq (2 \sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}} -m(K) (u_K^{n+1} - u_K^n) \bar{\pi}_K^{n+1}) - \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{F}} \tau_{K,\sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K,\sigma}^{n+1}) (\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1})$$

Finalement on a bien nos deux inégalités.  $\square$

On va donc élargir notre semi-norme à  $\Omega$  tout entier.

**Definition 32** (semi-norme discrète  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ). Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation de  $\Omega \times (0, T)$  admissible. On définit sur la semi-norme discrète  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  de  $v \in \chi(\mathcal{D})$  par :

$$|v|_{1,\mathcal{D}}^2 = \sum_{i=1}^N |v|_{1,D,i}^2 + \sum_{\sigma=K|L} \tau_{K|L} (v(x_K, t^{n+1}) - v(x_L, t^{n+1}))^2.$$

On constate cette fois encore que l'on a bien une semi-norme et que l'on a  $|v|_{1,\mathcal{D}}^2 = 0 \Leftrightarrow v$  est constante sur chaque composante connexe de  $\Omega$ .

On peut définir un gradient discret :

**Definition 33.** Soit  $f \in \chi\mathcal{D}$  on va pouvoir définir le gradient constant par demi-diamant :

si  $x \in D_{K|L}$  pour  $K$  et  $L$  dans le même  $\Omega_i$

$$\nabla_h v(x) = d \frac{v_L - v_K}{d(x_K, x_L)} \vec{n}_{KL}$$

si  $x \in D_{K,\sigma}$  avec  $\sigma \in \Gamma_{i,j}$  alors

$$\nabla_h v(x) = d \frac{v_{K,\sigma} - v_K}{d(x_K, \sigma)} \vec{n}_{K,\sigma}$$

où  $v_{K,\sigma}$  est l'unique solution qui permet de vérifier les conditions de transmissions et  $\vec{n}_{K,\sigma}$  est le vecteur normal sortant.



**Lemma 34.** Sous nos hypothèses,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\pi_i \circ \eta_i^{(-1)}$  admet comme constante de Lipschitz.

*Démonstration.* Soit  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $a \in ]0, \eta_i(1)[$  et  $b \in ]0, \eta_i(1)[$ ,  $b \neq a$ . On écrit  $A = \eta_i^{(-1)}(a)$ ,  $B = \eta_i^{(-1)}(b)$ .

On a :

$$\frac{\bar{\pi}_i \circ \eta_i^{(-1)}(b) - \bar{\pi}_i \circ \eta_i^{(-1)}(a)}{b - a} = \frac{\bar{\pi}_i(B) - \bar{\pi}_i(A)}{\eta_i(B) - \eta_i(A)}$$

On note  $I(A, B)$  l'intervalle  $[A, B]$  si  $B \geq A$  ou  $[B, A]$  sinon.

Par définition de  $\eta_i$  on a :

$$\min_{C \in I(A, B)} \sqrt{\lambda_i(C)} (\bar{\pi}_i(B) - \bar{\pi}_i(A)) \leq \eta_i(A) - \eta_i(B) \leq \max_{C \in I(A, B)} \sqrt{\lambda_i(C)} (\bar{\pi}_i(B) - \bar{\pi}_i(A))$$

(si l'on a  $I(A, B) = [A, B]$ , sinon on inverse  $A$  et  $B$ )

Par théorème des valeurs intermédiaires on dispose de  $C$  dans l'intérieur de  $I(A, B)$  tel que :

$$\sqrt{\lambda_i(C)} (\bar{\pi}_i(B) - \bar{\pi}_i(A)) = \eta_i(A) - \eta_i(B).$$

On a donc :

$$\frac{\bar{\pi}_i(B) - \bar{\pi}_i(A)}{\eta_i(B) - \eta_i(A)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(C)}}$$

Par continuité de  $\eta_i^{(-1)}$  :  $(\bar{\pi}_i \circ \eta_i^{(-1)})'(a) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \circ \eta_i^{(-1)}(a)}}$  en faisant tendre  $b$  vers  $a$ .

On pose  $F : \begin{cases} [\bar{\pi}_i(0), \bar{\pi}_i(1)] & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ p & \longmapsto \int_{\bar{\pi}_i(0)}^p \min_{j \in \{1, \dots, N\}} (\sqrt{\lambda_j \circ \bar{\pi}_j^{(-1)}}) da \end{cases}$ .

On a  $\pi_i = F \circ \bar{\pi}_i$ . Par suite :

$$(\pi_i \circ \eta_i^{(-1)})'(a) = F'(\bar{\pi}_i \circ \eta_i^{(-1)}(a)) (\bar{\pi}_i \circ \eta_i^{(-1)})'(a) = \frac{F'(\bar{\pi}_i \circ \eta_i^{(-1)}(a))}{\sqrt{\lambda_i \circ \eta_i^{(-1)}(a)}}$$

Par définition de  $F$  on a  $F'(\bar{\pi}_i(y)) \leq \sqrt{\lambda_i(y)}$ .

On a alors  $0 \leq (\pi_i \circ \eta_i^{(-1)})'(a) \leq 1$  et donc  $\pi_i \circ \eta_i^{(-1)}$  est 1-lipschitzienne.  $\square$

**Proposition 35** (Estimation discrète  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ).  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible de  $\Omega \times (0, T)$ ,  $u_{\mathcal{D}} \in \chi(\mathcal{D})$  solution approchée. Alors il existe une constante  $C$  dépendant seulement de  $\Omega$ ,  $\bar{\pi}_i, i \in \{1, \dots, N\}$  telle que :  $|\pi(u_{\mathcal{D}}, \cdot)|_{1, \mathcal{D}}^2 \leq C$ .

*Démonstration.* Par la première estimation d'énergie sur  $\eta_i$  sur chaque  $\Omega_i$  et puisque  $\pi_i \circ \eta_i^{(-1)}$  est 1-lipschitzienne, on a :

$$\sum_{i=1}^N |\pi_i(u_{\mathcal{D}})|_{1, \mathcal{D}, i} \leq NC.$$

On considère le cas où  $\sigma = K|L \in \mathcal{F}$ . On a  $\bar{\pi}_{K, \sigma}^{n+1} = \bar{\pi}_{L, \sigma}^{n+1}$ . La seconde estimation d'énergie sur  $\eta$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{F}} \tau_{K, \sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K, \sigma}^{n+1}) (\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K, \sigma}^{n+1}) + \tau_{L, \sigma} (\psi_L^{n+1} - \psi_{L, \sigma}^{n+1}) (\bar{\pi}_L^{n+1} - \bar{\pi}_{L, \sigma}^{n+1}) \\ & = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{F}} \tau_{K, \sigma} (\psi_K^{n+1} - \psi_{K, \sigma}^{n+1}) (\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1}) \leq C \end{aligned}$$

$\sigma \in \mathcal{F}$ ,  $K$  tel que  $\sigma \in \mathcal{E}_K$  alors on a :  $(\eta_K^{n+1} - \eta_{K, \sigma}^{n+1})^2 \leq (\psi_K^{n+1} - \psi_{K, \sigma}^{n+1}) (\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K, \sigma}^{n+1})$ .

Toujours par caractère 1-lipschitzien de  $\pi_i \circ \eta_i^{(-1)}$  :

$$(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K,\sigma}^{n+1})^2 \leq (\eta_K^{n+1} - \eta_{K,\sigma}^{n+1})^2 \text{ et } (\bar{\pi}_L^{n+1} - \bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1})^2 \leq (\eta_L^{n+1} - \eta_{L,\sigma}^{n+1})^2.$$

On a donc :

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{F}} [\tau_{K,\sigma}(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_{K,\sigma}^{n+1})^2 + \tau_{L,\sigma}(\bar{\pi}_L^{n+1} - \bar{\pi}_{L,\sigma}^{n+1})^2] \leq C$$

On a par convexité de  $x \mapsto x^2$  :

$$(x - y)^2 = 4(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \leq 2((1 + \frac{\tau_{K,\sigma}}{\tau_{K|L}})x^2 + (1 + \frac{\tau_{L,\sigma}}{\tau_{K|L}})y^2) = 2\frac{\tau_{K,\sigma}}{\tau_{K|L}}x^2 + 2\frac{\tau_{L,\sigma}}{\tau_{K|L}}y^2$$

$$\text{Par suite : } \tau_{K|L}(\pi_K^{n+1} - \pi_L^{n+1})^2 \leq 2\frac{\tau_{K,\sigma}}{\tau_{K|L}}(\pi_K^{n+1} - \pi_{K,\sigma}^{n+1})^2 + 2\frac{\tau_{L,\sigma}}{\tau_{K|L}}(\pi_L^{n+1} - \pi_{L,\sigma}^{n+1})^2.$$

Finalement, on a bien :

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{F}} \tau_{K|L}(\bar{\pi}_K^{n+1} - \bar{\pi}_L^{n+1})^2 \leq 2C$$

Ce qui nous permet de conclure en prenant  $C' = NC + 2C$ .  $\square$

De plus par notre hypothèse sur le caractère lipschitzien de  $\psi_i \circ \eta_i^{(-1)}$ , on peut conclure de la même façon à l'existence d'une constante  $C$  dépendant seulement de  $\Omega, \bar{\pi}_i, i \in \{1, \dots, N\}$  telle que :  $|\psi(u_{\mathcal{D}}, \cdot)|_{1,\mathcal{D}}^2 \leq C$ .

Grâce à nos estimations d'énergie nous pouvons donc prendre quelle que soit la discrétisation  $\mathcal{D}$  la même constante  $C$  indépendante dépendant seulement de  $\Omega, \bar{\pi}_i, i \in \{1, \dots, N\}$  telle que :

$$\begin{cases} |\eta(u_{\mathcal{D}}, \cdot)|_{1,\mathcal{D}}^2 \leq C \\ |\pi(u_{\mathcal{D}}, \cdot)|_{1,\mathcal{D}}^2 \leq C \\ |\psi(u_{\mathcal{D}}, \cdot)|_{1,\mathcal{D}}^2 \leq C \end{cases} \quad (8)$$

## 2.4 Résultat de compacité

On va utiliser un résultat de compacité sur les espaces  $L^p(\Omega)$  avec  $p \in [1, +\infty]$ , pour cela nous pouvons nous référer au livre [BRE83].

**Theorem 36** (Fréchet-Kolmogorov). *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert et  $\omega \subset\subset \Omega$  (ouvert relativement compact dans  $\Omega$ ). Soit  $F$  un sous-ensemble borné de  $L^p(\Omega)$  avec  $p \in [1, +\infty]$ .*

*On suppose que  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta < \text{dist}(\omega, \mathbb{C}\Omega)$  tels que :  $\|\tau_{hf} - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon, \forall h \in \mathbb{R}^d$  avec  $|h| < \delta$  et  $\forall f \in F$ .*

*Alors  $F|_{\omega}$  est relativement compact dans  $L^p(\omega)$ .*

Nous en déduisons le corollaire suivant dans le cas  $L^2$ .

**Corollary 37.** *Soit  $Q$  un sous-ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  tel que :*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [\sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n(\cdot + \delta) - v_n(\cdot)\|_{L^2(Q)}] = 0.$$

*Alors  $\exists v \in L^2(Q)$  telle que à extraction près  $v_n \rightarrow v$  quand  $n \rightarrow \infty$  dans  $L^2(Q)$ .*

Nous voulons appliquer le critère de compacité de Kolmogorov à  $(\eta_i(u_{\mathcal{D}}))_{m \in \mathbb{N}}$  où  $(\mathcal{D}_{m \in \mathbb{N}})$  est une suite de maillages (discrétisations) admissibles de  $\Omega \times (0, T)$  tel que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{size}(\mathcal{D}_m) = 0$ . Les  $\eta_i(u_{\mathcal{D}})$  sont bien dans  $L^2$  et même dans n'importe que  $L^p(\Omega \times (0, T))$  puisque les volumes de contrôles sont finis et la fonctions est constante par volume de contrôle.

$\Omega \times (0, T)$  est un ouvert borné et  $(\eta_i(u_{\mathcal{D}}))_{m \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de  $L^2(\Omega \times (0, T))$  (par  $L^\infty$ -stabilité) que l'on peut étendre sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  en les posant comme nulles sur  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \Omega \times (0, T)$ .

Maintenant nous avons besoin d'informations sur les translates pour pouvoir appliquer le corollaire.

Nous ne démontrons pas les résultats sur les translats, pour cela nous pouvons nous référer au livre

[REH97] ou aux thèse [KHA10], [BRE11], [ENC04] ou [CAN08].

Nous avons l'estimation pour les translatsés en espace :

**Proposition 38.** Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible de  $\Omega \times (0, T)$ , soit  $u_{\mathcal{D}} \in \chi(\mathcal{D})$  solution donnée par notre schéma, soit  $i \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , et  $\Omega_{i,\xi}$  le sous-ensemble ouvert de  $\Omega_i$  défini par :  $\Omega_{i,\xi} = \{x \in \Omega_i \mid [x, x + \xi] \subset \Omega_i\}$ .

Alors, il existe  $C$  dépendant seulement de  $\Omega_i$  tel que :

$$\int_0^T \int_{\Omega_{i,\xi}} |\eta_i(u_{\mathcal{D}}(x + \xi, t)) - \eta_i(u_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx dt \leq |\xi| (|\xi| + C \text{size}(\mathcal{D})) |\eta_i(u_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D},i}$$

On en déduit :

**Proposition 39.** On prend les mêmes hypothèses et notations. Il existe  $C$  dépendant seulement de  $\Omega_i$  tel que :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\eta(u_{\mathcal{D}}(x + \xi, t)) - \eta(u_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx dt \leq C |\xi| (|\xi| + \text{size}(\mathcal{D})) |\eta(u_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D}}$$

Et maintenant l'estimation sur les translatsés en temps :

**Proposition 40.** Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible de  $\Omega \times (0, T)$ , soit  $u_{\mathcal{D}} \in \chi(\mathcal{D})$  solution donnée par notre schéma. Soit  $\omega_i \subset \bar{\omega}_i \subset \Omega_i$  sous-ensemble ouvert de  $\Omega_i$ .

On suppose  $\text{size}(\mathcal{T})$  est assez petit pour assurer que :  $\omega_i \subset \Omega_{i,\text{size}(\mathcal{T})} = \{x \in \Omega_i \mid \overline{B(x, \text{size}(\mathcal{T}))} \subset \Omega_i\}$ .

On pose  $\eta_{\mathcal{D},\omega_i} = \eta_i(u_{\mathcal{D}})$  sur  $\omega_i \times (0, T)$  et 0 sur  $\mathbb{R}^{(d+1)} \setminus (\omega_i \times (0, T))$ . Alors  $\forall \tau \in \mathbb{R}$ , on a l'inégalité suivante :  $\|\eta_{\mathcal{D},\omega_i}(\cdot, \cdot + \tau) - \eta_{\mathcal{D},\omega_i}\|_{L^2}^2 \leq C\tau$  où  $C$  est une constante qui dépend seulement de  $\mathcal{T}$ ,  $\Omega$ ,  $d$ ,  $\psi_i$ ,  $\bar{\pi}_i$ .

On peut maintenant appliquer le critère de Kolmogorov. Les translatsés en espace-temps peuvent être estimées via nos estimées en espace et en temps. Comme nous disposons de  $C$  telle que  $|\eta(u_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D}} \leq C$ , le résultat s'en déduit immédiatement.

On a le même genre d'estimations sur les translatsées pour  $\pi(u_{\mathcal{D}}, \cdot)$  et  $\psi_i(u_{\mathcal{D}}, \cdot)$ , à notre hypothèse  $\psi_i \circ \eta_i^{(-1)}$  et notre résultat  $\pi_i \circ \eta_i^{(-1)}$ .

Finalement, on dispose à extractions près d'une suite  $(u_{\mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\begin{cases} \eta(u_{\mathcal{D}_m}, \cdot) \text{ converge vers } f \text{ dans } L^2(\Omega \times (0, T)) \\ \psi(u_{\mathcal{D}_m}, \cdot) \text{ converge vers } g \text{ dans } L^2(\Omega \times (0, T)) \\ \pi(u_{\mathcal{D}_m}, \cdot) \text{ converge vers } h \text{ dans } L^2(\Omega \times (0, T)) \end{cases} \quad (9)$$

Comme  $\Omega \times (0, T)$  est borné ( donc de mesure de Lebesgue finie) on a ,par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ces convergences dans  $L^1(\Omega \times (0, T))$ .

On rappelle maintenant ce quelques résultats et définitions.

**Proposition 41.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  où l'on considère mesure de Lebesgue. On le dual topologique :  $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$ ;

**Définition 42.** Soit  $E$  un espace de Banach,  $E'$  son dual topologique. On dit qu'une suite  $(f_n)$  de  $E'$  converge vers  $f$  au sens  $\star$ -faible si :  $\forall a \in E$   $f_n(a)$  converge vers  $f(a)$ , on notera alors  $f_n \rightharpoonup f$ . On pose alors la topologie sur  $\star$ -faible sur  $E'$ .

**Proposition 43.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$ . Alors il existe une sous-suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $u \in L^\infty(\Omega)$  telle que  $u_n \rightharpoonup u$ .

Comme nous avons  $0 \leq u_{\mathcal{D}_m} \leq 1$  presque partout, il existe  $u \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$  telle que à extraction près nous avons :

$$u_{\mathcal{D}_m} \rightharpoonup u \text{ pour la topologie } \star\text{-faible de } L^\infty(\Omega \times (0, T))$$

Nous disposons du résultat suivant :

**Lemma 44** (Lemme de Minty). Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone continue. Soit  $(u_n)$  telle que :  $(u_n)$  converge au sens  $L^\infty$   $\star$ -faible vers  $u$  et  $\alpha(u_n)$  converge vers dans  $L^1$  vers  $\beta$ . Alors  $\alpha(u) = \beta$ .

Il nous permet de dire que nous avons toujours à extraction près :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\mathcal{D}_m} \rightharpoonup u \text{ pour la topologie } \star\text{-faible de } L^\infty(\Omega \times (0, T)) \\ \eta(u_{\mathcal{D}_m}, \cdot) \text{ converge vers } \eta(u, \cdot) \text{ dans } L^1(\Omega \times (0, T)) \\ \psi(u_{\mathcal{D}_m}, \cdot) \text{ converge vers } \psi(u, \cdot) \text{ dans } L^1(\Omega \times (0, T)) \\ \pi(u_{\mathcal{D}_m}, \cdot) \text{ converge vers } \pi(u, \cdot) \text{ dans } L^1(\Omega \times (0, T)) \end{array} \right. \quad (10)$$

Nous voulons montrer l'existence de solutions faibles.

**Proposition 45.** Sous nos hypothèses, avec  $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  des discrétisations telles que  $\text{reg}(\mathcal{D}_m) \leq \xi$  et  $\text{size}(\mathcal{D}_m) \rightarrow 0$  lorsque  $m$  diverge. Soit  $(u_{\mathcal{D}_m})$  la suite de solutions approchées correspondantes. Alors il existe une sous-suite de solutions approchées qui converge dans  $L^q(\Omega \times (0, T))$  pour tout  $q$  dans  $[1, +\infty[$  vers  $u$ . De plus  $u$  est une solution faible à notre problème (au sens de notre définition).

*Démonstration.* □

Pour la preuve nous pouvons nous référer à [KHA10].

## Références

- [BRE83] Haim BREZIS. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1983.
- [BRE11] Konstantin BRENNER. *Méthodes de volumes finis sur maillages quelconques pour des systèmes d'évolution non linéaires*, 2011.
- [CAN08] Clément CANCES. *Ecoulements diphasiques en milieux poreux hétérogènes : modélisation et analyse*, 2008.
- [DRO06] Jerome DRONIOU. *Degré topologique et applications*. 2006.
- [ENC04] Guillaume ENCHERY. *Modèles et schémas numériques pour la simulation de genèse de bassins sédimentaires*, 2004.
- [KHA10] Ziad KHALIL. *Ecoulement diphasique compressible et immiscible en milieu poreux : analyse mathématique et numérique*, 2010.
- [REH97] Thierry GALLOUET Robert EYMARD and Raphaële HERBIN. *Finite Volume Methods*. 1997.