

Méthode numériques hypocoercives pour les équations cinétiques des plasmas.

Bastien Grosse

13 septembre 2023

Résumé

Ce rapport a été réalisé dans le cadre du stage de M2 MACS sous la supervision de Frédéric Hérau et de Mehdi Badsì. Le stage s'est porté sur des méthodes spectrales conservant l'hypocoercivité des équations de Fokker-Planck et de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP) issues de la physique des plasmas. La première partie du rapport expose la notion d'hypocoercivité ainsi que les techniques de preuve utilisées. Une seconde partie est consacrée à l'étude de l'article [1] qui propose une méthode numérique hypocoercive pour l'équation de Fokker-Planck basée sur la décomposition de Hermite en vitesse. Ensuite, on propose un schéma numérique pour le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck en essayant d'utiliser les mêmes idées. Ce schéma n'est pas satisfaisant, ce qui nous amène à étudier le système de VPFP dans un cadre plus théorique dans une dernière partie. On expose une preuve d'hypocoercivité H^1 , qui fonctionne seulement sous l'hypothèse non raisonnable que la longueur de Debye doit être suffisamment grande. On utilise ensuite la décomposition de Hermite en vitesse pour établir une preuve d'hypocoercivité L^2 sans condition sur la longueur de Debye. Ceci motive la définition d'un schéma de volumes finis basé sur cette décomposition.

Remerciements

Je tiens à remercier mes encadrants de stage, Mehdi Badsı et Frédéric Hérau, pour leur disponibilité et leur encadrement bienveillant et chaleureux. Je remercie également mes enseignants pour leurs cours captivants et leur bienveillance tout au long de ce master. Enfin, j'aimerais remercier le laboratoire Jean Leray pour son accueil.

Table des matières

1	Plasmas et équations cinétiques	4
1.1	Qu'est-ce qu'un plasma ?	4
1.2	Equation de Boltzmann et de Fokker-Planck	4
1.2.1	Equation de Fokker-Planck	5
1.2.2	Système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck	6
1.3	Hypocoercivité	7
2	Méthode numérique hypocoercive pour l'équation de Fokker-Planck	9
2.1	Projection de l'EDP sur la base de Hermite	10
2.2	Discretisation en espace et temps	12
2.3	Expérimentations	13
3	Schéma de splitting pour Vlasov-Poisson Fokker-Planck	17
3.1	Projection sur la base de Hermite	17
3.2	Discretisation de l'équation de Fokker-Planck	18
3.3	Résolution de l'équation de Poisson non-linéaire	19
3.4	Algorithme de splitting	21
3.5	Expérimentations	21
3.5.1	Cas test 1	21
3.6	Conclusion	22
4	Etude du système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck	26
4.1	Introduction et notations	26
4.2	Estimations d'énergie	27
4.3	Etude de l'état d'équilibre	31
4.4	Hypocoercivité H^1	33
4.5	Hypocoercivité L^2	38
4.5.1	Résultats préliminaires	39
4.5.2	Etude du problème linéarisé	42
4.6	Schéma de volumes finis et expérimentations	45
4.7	Expérimentations	47
4.7.1	Cas $\delta = 1$	48
4.7.2	Cas $\delta = 0.3$	48
4.8	Conclusion	49
5	Annexe : Bases de Hermite	58
5.1	Polynômes et fonctions de Hermite	58
5.2	Approximation de fonctions par série de Hermite	60

1 Plasmas et équations cinétiques

1.1 Qu'est-ce qu'un plasma ?

Un plasma est un tout d'abord gaz ionisé : les électrons (charges électriques négatives) portés par les atomes du gaz ont reçus une excitation assez importante pour se libérer de l'attraction des noyaux atomiques (charges électriques positives).

Pour être qualifié de plasma, un gaz ionisé doit exhiber deux principales caractéristiques (voir [2]). Premièrement, le gaz doit être quasi-neutre, c'est-à-dire que le gaz doit être assez homogène électriquement pour que localement en tout point, la charge totale soit environ nulle. Ceci exprime entre autre que pour être un plasma, le gaz doit être un bon conducteur électrique, rééquilibrant les charges électriques lorsque des défauts apparaissent. Ceci s'exprime en terme physique en disant que la longueur de Debye δ^2 est très petite devant la longueur caractéristique L du système. Ensuite, on doit observer des comportements collectifs parmi les particules chargées. L'apparition d'une densité de charges non nulle en un point crée l'apparition d'un champ électrique. Une force électromagnétique va alors apparaître et va agir sur les particules. Ainsi, les particules s'influencent mutuellement à distance contrairement à un gaz neutre. On peut, par exemple, observer des ondes se former dans un plasma.

Une large partie de l'univers est constituée de plasma : les étoiles, les nébuleuses ainsi que le milieu interstellaire sont constitués de plasmas de températures et de propriétés différentes. Sur Terre, on peut également observer des plasmas naturels lors d'orages sous forme de foudre. Enfin, il existe des plasmas artificiels. Un exemple est l'utilisation de plasmas dans les tokamaks pour réaliser la fusion nucléaire.



FIGURE 1 – Plasma artificiel dans un tokamak.

1.2 Equation de Boltzmann et de Fokker-Planck

Comme un plasma est constitué d'un nombre énorme de particules, on ne peut pas envisager de simuler les particules constituant le plasma pour simuler le plasma à l'échelle macroscopique. Pour modéliser un plasma, on utilise l'approche de la physique statistique. On cherche à calculer la densité de probabilité de présence des particules d'une espèce donnée dans l'espace des phases. On se place dans l'espace \mathbb{R}^N , avec $N = 1, 2$ ou 3 . Du point de vue de la physique classique, un électron dans un plasma est repéré au temps t par N coordonnées d'espaces x ainsi que N composantes de son vecteur quantité de mouvement p . Rappelons également que $p = mv$ avec v la vitesse de la particule et m sa masse. Ainsi, un électron est repéré par $2N$ coordonnées (x, p) dans l'espace des phases \mathbb{R}^{2N} . Notons f la densité de probabilité de position dans l'espace des phases des électrons, qui dépend de t , de x et de p . Ainsi, si $dx^N dv^N$ est un élément de volume de l'espace des phases, la probabilité qu'une particule se trouve dans cet élément à l'instant t vaut $f(t, x, v)dx^N dv^N$. Notons \mathbf{F} la force totale s'exerçant sur un électron.

On suppose qu'il n'y a pas de collision entre les particules. La conservation du nombre de particules pendant l'évolution du système entre t et $t + dt$ dans un volume infinitésimal s'exprime par l'équation :

$$f(t + dt, x + \frac{p}{m}dt, p + dt\mathbf{F})dx^N dv^N \Big|_{t+dt} = f(t, x, p)dx^N dv^N \Big|_t$$

L'élément infinitésimal, bien que déformé par la transformation du système, a le même volume. En divisant par ce volume multiplié par dt puis en passant à la limite $dt \rightarrow 0$, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

Elle est appelée équation de Boltzmann sans collisions. S'il y a des collisions entre les particules, la conservation des particules dans l'élément de volume entre deux instants n'est plus respectée. Si dN_{coll} est la variation infinitésimale du nombre de particules due aux collisions, on définit le noyau de collision $\mathcal{L}(f)$ par l'égalité $dN_{coll} = \mathcal{L}(f)dx^N dv^N dt$. Le noyau de collision représente la variation du nombre de particules par collisions par unité de volume et de temps. En effectuant le même passage à la limite de précédemment, on déduit l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial p} = \mathcal{L}(f)$$

C'est l'équation de Boltzmann avec collisions. L'expression de \mathcal{L} est à choisir selon la modélisation des chocs entre particules. L'équation aux dérivées partielles obtenue est une équation cinétique, en référence au fait que f dépend de la vitesse $v = \frac{p}{m}$ qui est alors une variable.

On doit maintenant détailler les hypothèses utilisées pour établir l'équation de Fokker-Planck et le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Dans toute la suite, $N = 1$.

1.2.1 Equation de Fokker-Planck

Les hypothèses sont les suivantes :

- On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Le plasma est non-relativiste et on néglige le champ magnétique B .
- Un champ électrostatique extérieur E est imposé. Ce champ dérive d'un potentiel Φ également imposé. Le champ électrique autoconsistant \tilde{E} produit par les particules du plasma est négligeable devant le champ E .
- Le plasma évolue dans un tore \mathbb{T} de dimension 1. Cette hypothèse permet de ne pas traiter les effets de bords.
- Le noyau de collision est l'opérateur de Fokker-Planck $\mathcal{L}(f) = \partial_v(vf + \partial_v f)$.

Sous ces hypothèses, la force électromagnétique s'écrit $\mathbf{F} = -qE$ où $-q$ est la charge de l'électron.

L'équation de Fokker-Planck, traduisant dans ce contexte l'évolution de la densité électronique f dans le plasma est

$$\partial_t f + v \partial_x f - E \partial_v f = \partial_v(vf + \partial_v f)$$

On introduira cependant les paramètres positifs ε et $\tau(\varepsilon)$. ε est le rapport entre le libre parcours moyen d'un électron et l'échelle typique de longueur. Si $\tau(\varepsilon) \sim \varepsilon$ en 0, la limite $\frac{t}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ correspond au comportement en temps long du plasma. L'équation de Fokker-Planck prend la forme suivante :

$$\partial_t f + \frac{1}{\varepsilon}(v \partial_x f - E \partial_v f) = \frac{1}{\tau(\varepsilon)} \partial_v(vf + \partial_v f)$$

Remarquons qu'il y a bien conservation de la masse pour ce modèle de plasma. On note dx la mesure de Haar normalisée sur le tore.

En intégrant l'équation sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, on obtient si f est régulière :

$$\frac{d}{dt} \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f dx dv = \frac{1}{\tau(\varepsilon)} \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \partial_v(vf + \partial_v f) dx dv = 0$$

Ceci montre qu'il n'y a pas de destruction ni de production d'électron. On notera la masse m dans toute la suite.

Par contre il n'y a pas conservation de la quantité de mouvement. En effet, en multipliant par v puis en intégrant l'équation comme précédemment on obtient par le même genre de calcul que

$$\frac{d}{dt} \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f v dx dv + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{T}} E \rho dx = -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f v dx dv$$

où $\rho(t, x)$ est la densité spatiale d'électrons, $\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv$.

L'énergie cinétique n'est pas non plus conservée. On montre que

$$\frac{d}{dt} \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f v dx dv + \int_{\mathbb{T}} E \int_{\mathbb{R}} f v^2 dv dx = -\frac{2}{\tau(\varepsilon)} \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f v^2 dx dv + \frac{m}{\tau(\varepsilon)}$$

La seule loi de conservation à préserver au niveau numérique sera la conservation de la masse. Remarquons que la non conservation des différents moments est due au choix du noyau de collision, et à la présence d'un champ électrique non-nul.

On note

$$\mathcal{M}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

la Maxwellienne. Lorsque $\frac{t}{\varepsilon} \rightarrow \infty$, la densité f converge (dans un espace fonctionnel approprié dépendant de la régularité des données) vers une densité stationnaire $f_{\infty}(x, v) = \rho_{\infty}(x) \mathcal{M}(v)$, où

$$\rho_{\infty}(x) = c_0 e^{\Phi(x)}$$

La constante c_0 étant donnée par la conservation de la masse d'électrons.

1.2.2 Système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck

Les hypothèses sont les suivantes :

- Le plasma est composé de deux espèces : les électrons chargés "-" et les ions de charge "+".
- Les ions sont beaucoup plus lourds que les électrons et ne se déplacent pas. Leur densité spatiale $n_i(x)$ est stationnaire.
- On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Le plasma est non-relativiste et on néglige le champ magnétique B .
- Le plasma évolue dans un tore \mathbb{T} de dimension 1. Cette hypothèse permet de ne pas traiter les effets de bords.
- Le noyau de collision est l'opérateur de Fokker-Planck $\mathcal{L}(f) = \partial_v(vf + \partial_v f)$.

Les équations de Maxwell sont sous ces hypothèses :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(E) &= q \frac{n_i - \rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot}(E) &= 0 \\ \operatorname{div}(B) &= 0 \\ \operatorname{rot}(B) &= 0 \end{aligned}$$

Comme $\text{rot}(E) = 0$ et que \mathbb{T} est compact et connexe, l'existence d'un potentiel ϕ dont dérive le champ électrique E découle du théorème de décomposition de Helmholtz-Hodge. On a alors $E = -\nabla\phi$. On en déduit alors l'équation de Poisson :

$$-\Delta\phi = q \frac{n_i - \rho}{\varepsilon_0}$$

En réalité, on va devoir prendre en compte l'effet d'écrantage. Pour ce faire, introduisons la *longueur de Debye* λ_D . Cette longueur est un paramètre fondamental du plasma. Elle représente la longueur maximale à partir de laquelle la quasi-neutralité n'est plus respectée. Elle est en pratique faible devant l'échelle typique de longueur du système L . Sa valeur exprimée en mètres varie de 10^{-4} pour des plasmas artificiels de tokamak, 10^{-3} dans l'ionosphère terrestre et 10 dans le milieu interstellaire. En posant $\delta = \frac{\lambda_D}{L}$, et en posant à 1 les autres constantes, l'équation de Poisson devient

$$-\delta^2 \Delta\phi = n_i - \rho$$

On obtient alors le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck :

$$\begin{cases} \partial_t f + \frac{1}{\varepsilon}(v\partial_x f - E\partial_v f) = \frac{1}{\tau(\varepsilon)}\partial_v(vf + \partial_v f) \\ -\delta^2 \Delta\phi = n_i - \rho \\ E = -\nabla\phi \end{cases}$$

Le potentiel électrique est dit *autoconsistant*. Ce système est non-linéaire du fait du couplage entre l'équation de Fokker-Planck et l'équation de Poisson via le potentiel électrique.

Le plasma est globalement neutre et la masse d'électrons se conserve, ce qui donne les égalités :

$$\int_{\mathbb{T}} \rho(t, x) dx = \int_{\mathbb{T}} n_i(x) dx := m > 0 \quad \forall t \geq 0$$

On peut formellement identifier l'état d'équilibre de ce système, qui s'écrit :

$$\begin{cases} -\delta^2 \partial_{xx} \phi_{\infty}(x) &= \frac{n_i(x) - ce^{\phi_{\infty}(x)}}{m} \\ c &= \frac{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi_{\infty}(x)} dx}{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi_{\infty}(x)} \mathcal{M}(v) dv} \\ f_{\infty}(x, v) &= ce^{\phi_{\infty}(x)} \mathcal{M}(v) \end{cases}$$

Remarquons que ϕ_{∞} est défini à une constante près et que si n_i est constante alors $\phi_{\infty} = 0$ est une solution de l'équation non-linéaire.

1.3 Hypocoercivité

Du point de vue de la physique comme des mathématiques, il est intéressant d'étudier le comportement asymptotique de la solution de l'équation de Fokker-Planck. Une inégalité du type

$$\|f - f_{\infty}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C\theta(t)\|f_0 - f_{\infty}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

avec θ une fonction monotone décroissante de limite nulle en l'infini donnerait une vitesse de retour à l'équilibre voir un temps de retour à l'équilibre explicite. De plus, un schéma numérique préservant cette propriété serait stable pour la norme considérée.

On peut alors se demander si cette propriété est vraie dans le cas de l'équation de Fokker-Planck. Pour étudier le retour vers l'état asymptotique de f pour l'équation de Fokker-Planck, utilisons une approche perturbative. En écrivant que $f = f_{\infty} + f_{\infty}h$ avec h la nouvelle inconnue,

on établit l'EDP vérifiée par h . On définit aussi le sous espace fermé de $L^2(f_\infty dx dv)$ des fonctions à moyenne nulle $V = \{h \in L^2(f_\infty dx dv) \mid \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} h f_\infty dx dv = 0\}$. Définissons le produit scalaire pour tout $f, g \in L^2(f_\infty dx dv)$:

$$\langle f, g \rangle := \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f g f_\infty dx dv$$

L'équation vérifiée par h est la suivante :

$$\begin{cases} \partial_t h + \frac{1}{\tau(\varepsilon)}(v - \partial_v) \partial_v h + \frac{1}{\varepsilon}(v \partial_x h - E \partial_v h) = 0 \\ h_0 \in V \end{cases}$$

Dans ce cadre perturbatif, l'équation cinétique de Fokker-Planck est donc constituée de 3 parties : une dérivée temporelle, un opérateur de transport $T = v \partial_x - E_\infty \partial_v$ et un opérateur de collision $L = (v - \partial_v) \partial_v$, agissant seulement en vitesse. Ces opérateurs sont définis sur des sous-espaces de $L^2(f_\infty dx dv)$. Sur les sous-espaces sur lesquels ces opérateurs sont définis, on vérifie que T est antisymétrique et L est autoadjoint. De plus, $\langle Lh, h \rangle = \|\partial_v h\|^2$ par intégration par partie. Dans un premier temps, ignorons le transport. On s'intéresse au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \frac{1}{\tau(\varepsilon)} Lh = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} h_0 \mathcal{M}(v) dv = 0 \end{cases}$$

Le théorème de Hille-Yosida donne l'existence d'une solution forte à ce problème d'évolution et de plus en tout temps, $\int_{\mathbb{R}} h \mathcal{M}(v) dv = 0$. Prenons le produit scalaire de l'équation d'évolution par h :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h\|^2 &= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \langle Lh, h \rangle \\ &= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|\partial_v h\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|h\|^2 \end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé l'inégalité de Poincaré-Wirtinger pour la mesure de probabilité $\mathcal{M}(v) dv$ et le fait que $\int_{\mathbb{R}} h \mathcal{M}(v) dv = 0$. En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient le retour à l'équilibre à vitesse exponentielle :

$$\|h\| \leq e^{-\frac{t}{\tau(\varepsilon)}} \|h_0\|$$

Ceci est une conséquence directe de la coercivité de L sur le sous espace fermé de V des fonctions h telles que $\int_{\mathbb{R}} h \mathcal{M}(v) dv = 0$. Le caractère coercif se montre comme il suit, en utilisant une intégration par partie et l'inégalité de Poincaré-Wirtinger qui se simplifie grâce à la condition supplémentaire :

$$\langle Lh, h \rangle = \|\partial_v h\|^2 \geq \|h - \int_{\mathbb{R}} h \mathcal{M}(v) dv\|^2 = \|h\|^2$$

On peut se demander ce qu'il se passe alors pour l'équation complète. En réitérant les mêmes calculs, on obtient que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h\|^2 &= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \langle Lh, h \rangle \\
&= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|\partial_v h\|^2 \\
&\leq -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|h - \int_{\mathbb{R}} h \mathcal{M}(v) dv\|^2
\end{aligned}$$

Il n'est pas possible de conclure avec le calcul précédent. Néanmoins, on peut montrer qu'il existe $C > 1, \kappa > 0$ tels que l'inégalité suivante soit vraie :

$$\|h\|^2 \leq C \|h_0\|^2 e^{-\kappa t}$$

Ainsi, le retour vers l'équilibre s'effectue à vitesse exponentielle pour l'équation de Fokker-Planck. Cette inégalité est très proche de celle trouvée dans le cas coercif. C'est une manifestation du caractère hypocoercif de l'opérateur $\frac{1}{\varepsilon}T + \frac{1}{\tau(\varepsilon)}L$. Cet opérateur n'est pas coercif dans V mais la solution du problème d'évolution associée possède la propriété de retour à l'équilibre à vitesse exponentielle. Les méthodes utilisées pour exhiber le taux de convergence exponentielle a été développée par Hérau, Nier et Helffer (voir [6], [8]). La notion d'hypocoercivité est développée par Villani dans [9].

Les preuves d'hypocoercivité suivent le schéma suivant, comme présenté par Frédéric Hérau dans son cours de master [5]. Dans un premier temps, on choisit l'espace de Hilbert et la norme dans laquelle on veut prouver l'hypocoercivité. Ensuite, on définit une fonctionnelle $\mathcal{E}(h)$ équivalente à la norme choisie, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que pour tout h dans l'espace fixé,

$$a\|h\|^2 \leq \mathcal{E}(h) \leq b\|h\|^2$$

L'entropie doit pouvoir être dérivée en temps. Dans cette perspective, on utilisera des estimations a priori obtenues en supposant la solution de l'équation dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En employant des équivalences de normes qui utilisent des inégalités de type Poincaré, on doit montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(h) \leq -\kappa \mathcal{E}(h)$$

Le lemme de Gronwall montre que $\mathcal{E}(h) \leq \mathcal{E}(h_0)e^{-\kappa t}$. Enfin, l'équivalence avec la norme montre que

$$\|h\|^2 \leq \frac{b}{a} \|h_0\|^2 e^{-\kappa t}$$

2 Méthode numérique hypocoercive pour l'équation de Fokker-Planck

Cette section récapitule l'article de Filbet et Blaustein [1]. Dans cet article, l'équation de Fokker-Planck est projetée sur la base des fonctions de Hermite, ce qui fait apparaître un système hyperbolique vérifié par les coefficients. Cette astuce permet une lecture facile des différentes propriétés de l'équation de Fokker-Planck, ainsi qu'une démonstration simple d'hypocoercivité dans une norme L^2 . Ensuite, le système hyperbolique est discrétisé par une méthode

des volumes finis. Cette discrétisation permet de préserver l'hypocoercivité pour les normes discrètes. Pour plus de détails sur les fonctions de Hermite, on renvoie à l'annexe (5).

Un avantage de cette méthode est de faire disparaître la variable vitesse et donc de diviser par 2 la dimension du problème. Un autre avantage est qu'expérimentalement, on mesure les premiers moments de f (densité, vitesse fluide...) et donc il est intéressant de simuler directement les moments plutôt que f .

2.1 Projection de l'EDP sur la base de Hermite

On considère un potentiel $\Phi \in W^{2,\infty}(\mathbb{T})$, et on note $E = -\partial_x \Phi$ le potentiel électrique associé. L'équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution de la densité d'électrons f pour ce potentiel extérieur imposé s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t f + \frac{1}{\varepsilon}(v\partial_x f + E\partial_v f) &= \frac{1}{\tau(\varepsilon)}(vf + \partial_v f) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, t > 0 \\ f_0 \in L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R}, dx dv) &\text{donnée} \end{cases}$$

Attention : le signe devant le champ E est ici "+" et pas "-" comme dans l'introduction. Ceci ne change rien à part que l'état stationnaire s'écrit $f_\infty(x, v) = c_0 e^{-\Phi(x)} \mathcal{M}(v)$.

L'estimation d'énergie suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} (f - f_\infty)^2 f_\infty^{-1} dx dv = -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \left(\partial_v \left(\frac{f}{f_\infty} \right) \right)^2 f_\infty dx dv$$

montre que un espace de Hilbert naturel pour cette étude est $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}, f_\infty^{-1} dx dv)$. Ainsi, on va projeter la densité f sur la base des fonctions de Hermite. On trouvera alors un système d'une infinité d'EDP portant sur les coefficients de f dans cette base. On résoudra par la suite ce système pour résoudre l'équation de Fokker-Planck.

On exprime alors f comme sa série de Hermite :

$$f(t, x, v) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t, x) \psi_k(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\rho_\infty(x)} D_k(t, x) \psi_k(v)$$

où on définit $D_k(t, x) := \frac{C_k(t, x)}{\sqrt{\rho_\infty(x)}}$.

En remplaçant f par cette série dans l'EDP et en utilisant les propriétés des fonctions de Hermite, on trouve alors que D_k vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \partial_t D_k + \frac{1}{\varepsilon}(\sqrt{k} \mathcal{A} D_{k-1} - \sqrt{k+1} \mathcal{A}^* D_{k+1}) &= -\frac{k}{\tau(\varepsilon)} D_k \quad \forall x \in \mathbb{T}, t > 0 \\ D_k(t = 0, \cdot) &\text{donnée} \end{cases} \quad (1)$$

\mathcal{A} et \mathcal{A}^* sont des opérateurs différentiels adjoints dans $L^2(\mathbb{T}, dx)$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u &= \partial_x u - \frac{E}{2} u \\ \mathcal{A}^* u &= -\partial_x u - \frac{E}{2} u \end{cases}$$

La décomposition de la densité stationnaire f_∞ dans la base de Hermite donne

$$\begin{cases} D_{0,\infty}(x) &= \sqrt{\rho_\infty(x)} \\ D_{k,\infty}(x) &= 0, \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

Rappelons que f tend vers f_∞ lorsque $\frac{t}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$. En particulier, tous les moments d'ordre $k \geq 1$ doivent tendre vers 0 quand $\frac{t}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$. Il n'y a pas de conservation de ces moments sauf de la masse. On peut d'ailleurs la démontrer dans ce cadre. Ici la masse vaut $\int_{\mathbb{T}} D_0(t, x) \sqrt{\rho_\infty(x)} dx$. Un calcul direct montre que $\mathcal{A} \sqrt{\rho_\infty(x)} = 0$, et donc

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{A}^* D_1 \sqrt{\rho_\infty(x)} dx = \int_{\mathbb{T}} D_1 \mathcal{A} \sqrt{\rho_\infty(x)} dx = 0$$

On multiplie alors l'équation

$$\partial_t D_0 - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}^* D_1 = 0$$

par $\sqrt{\rho_\infty}$, puis on intègre sur le tore et on intervertit intégrale en espace et dérivée en temps pour obtenir que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} D_0(t, x) \sqrt{\rho_\infty(x)} dx = 0$$

La masse est donc constante. Cette propriété est très importante et devra être conservée au niveau discret pour assurer le retour à l'équilibre.

Dans ce contexte, la norme dans $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}, f_\infty^{-1} dx dv)$ est

$$\|D\|_{L^2} := \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \|D_{k,0}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2} \quad (\text{Inégalité de Parseval})$$

et l'estimation d'énergie devient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D(t) - D_\infty\|_{L^2}^2 = -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} k \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

On énonce alors le théorème d'hypocoercivité en norme L^2 et en régime fortement collisionnel.

Théorème 1 (Filbet & Blaustein [1]). *Supposons que $\frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \rightarrow \tau_0 < +\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Soit $(D_{k,0})_{k \in \mathbb{N}}$ la donnée initiale.*

Sous la condition initiale $\|D(t=0)\|_{L^2} < +\infty$, on a que

$$\|D - D_\infty\|_{L^2} \leq \sqrt{3} \|D(t=0) - D_\infty\|_{L^2} \exp\left(-\frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \kappa t\right)$$

κ valant $\frac{1}{C(1+\tau_0)}$, où C ne dépend que de Φ .

La preuve repose sur l'utilisation de l'entropie suivante :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|D(t) - D_\infty\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon} < \mathcal{A} D_1, u >_{L^2(\mathbb{T})}$$

Elle est constituée de deux termes : la norme L^2 de notre espace de Hilbert, à laquelle on ajoute un second terme. Ce terme dépend de u , la solution du problème aux limites elliptique suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A} \mathcal{A}^* u & = D_0 \\ \int_{\mathbb{T}} u \sqrt{\rho_\infty} dx & = 0 \\ u & \in H^2(\mathbb{T}) \end{cases}$$

Ce terme permet de retrouver la dissipation en $\|D_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$, qui est absente de l'estimation d'énergie 2.1

2.2 Discrétisation en espace et temps

On choisit $N_x \in \mathbb{N}$. Soit un intervalle $[0, L]$, et $dx = \frac{L}{N_x}$. Pour simplifier les notations, on considère un maillage uniforme. On définit $x_{j+\frac{1}{2}} = jdx$ pour $j = 0, \dots, N_x$, et $x_j = (j - \frac{1}{2})dx$ pour $j = 1, \dots, N_x$. On définit les cellules $K_j =]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$, pour $j = 1, \dots, N_x$. Soit $dt > 0$ le pas de temps. La discrétisation en temps se fera aux instants $t_n = ndt$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On approche $D_k(t_n, x_j)$ par $D_{k,j}^n$, qui est une approximation de type volumes finis utilisant la formule du point milieu :

$$D_{k,j}^n = \frac{1}{dx} \int_{K_j} D_k(t_n, x) dx \approx D_k(t_n, x_j)$$

Maintenant, on choisit de faire un schéma d'Euler implicite en temps : disposant de $D_{k,j}^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq N_x$ et n fixé, on calculera les $D_{k,j}^{n+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq N_x$ en résolvant

$$\frac{D_{k,j}^{n+1} - D_{k,j}^n}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} (\sqrt{k}(\tilde{\mathcal{A}} D_{k-1}^{n+1})_j - \sqrt{k+1}(\tilde{\mathcal{A}}^* D_{k+1}^{n+1})_j) = -\frac{k}{\tau(\varepsilon)} D_{k,j}^{n+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq N_x \quad (2)$$

Pour la discrétisation en espace, on doit discrétiser les opérateurs adjoints. Blaustein et Filbet choisissent les discrétisations suivantes : si $(u_j)_{1 \leq j \leq N_x}$ est une suite finie de réels, on la prolonge par $u_0 = u_{N_x}$ et $u_{N_x+1} = u_1$, et les opérateurs discrets $\tilde{\mathcal{A}}$ et $\tilde{\mathcal{A}}^*$ sont définis par

$$\begin{cases} (\tilde{\mathcal{A}}u)_j &= \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2dx} - \frac{E_j}{2}u_j \\ (\tilde{\mathcal{A}}^*u)_j &= -\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2dx} - \frac{E_j}{2}u_j \end{cases}$$

On constate qu'il reste désormais un degré de liberté à fixer, qui est le choix de discrétisation E_j du champ $E(x_j)$. On va fixer ce choix de manière à ce que le schéma préserve l'état stationnaire.

Lemme 1. *Le schéma préserve l'état stationnaire si et seulement si*

$$E_j = \frac{\sqrt{\rho_\infty(x_{j+1})} - \sqrt{\rho_\infty(x_{j-1})}}{dx \sqrt{\rho_\infty(x_j)}}$$

Démonstration. Pour ce faire, considérons que $D_{k,j}^n$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq j \leq N_x$ est la discrétisation de l'état stationnaire à n fixé. Ainsi $D_{k,j}^n = 0$ si $k \neq 0$ et $D_{0,j}^n = \sqrt{\rho_\infty(x_j)}$ sinon. On suppose que l'état stationnaire est préservé entre les instants n et $n+1$, soit $D_{k,j}^n = D_{k,j}^{n+1}$. Toutes les équations du système 2 sont triviales, sauf celles données pour $k=1$, ce qui donne $(\tilde{\mathcal{A}} D_0^n)_j = 0$ pour tout j . En isolant E_j pour tout $1 \leq j \leq N_x$, on trouve alors que

$$E_j = \frac{\sqrt{\rho_\infty(x_{j+1})} - \sqrt{\rho_\infty(x_{j-1})}}{dx \sqrt{\rho_\infty(x_j)}}$$

Réciproquement, si la discrétisation du champ électrique est la précédente, on vérifie directement que l'état stationnaire est préservé. □

Ce choix est nécessaire et suffisant pour préserver l'état stationnaire. En fait, on retrouve au niveau discret que l'état stationnaire doit être élément du noyau de l'opérateur \mathcal{A} . La préservation de l'état stationnaire est capitale pour observer l'hypocoercivité, car si l'état stationnaire n'est pas préservé, on ne peut pas espérer s'en approcher arbitrairement près en temps long.

Blaustein et Filbet prouvent que ce schéma préserve le caractère hypocoercif de l'équation de Fokker-Planck, c'est-à-dire que l'on observe au niveau discret le retour à l'équilibre à vitesse exponentielle.

Théorème 2. *Supposons que $\frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \rightarrow \tau_0 < +\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Soit $(D_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ la donnée initiale. Il existe $C_0 > 0$ dépendant de Φ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 0$, on a*

$$\|D^n - D_\infty\|_{L^2} \leq \sqrt{3} \|D^0 - D_\infty\|_{L^2} \left(1 + \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \kappa_0 dt\right)^{-\frac{n}{2}}$$

κ_0 valant $\frac{1}{C_0(1 + \tau_0)}$.

D'un point de vue pratique, la matrice issue du schéma d'Euler implicite est carrée non symétrique, de dimension $(P + 1) * N_x \times (P + 1) * N_x$ où P est le paramètre de troncature de la série de Hermite. Elle croît donc très vite selon les paramètres choisis. Heureusement elle est très creuse, et peut être efficacement codée dans un format creux comme CSR. Lorsque la matrice est en format plein, et que l'on utilise la résolution par décomposition LU offerte par LAPACK, même pour des paramètres raisonnables, on observe que l'erreur peut s'accumuler au fur et à mesure de la simulation, rendant les résultats médiocres à partir d'un temps peu élevé. Il faut en fait utiliser un solveur préconditionné, par exemple le solveur itératif GEMRES préconditionné par le solveur LU. Ce solveur est proposé pour les matrices sous format CSR par la librairie STRUMPACK ou bien PETSc.

2.3 Expérimentations

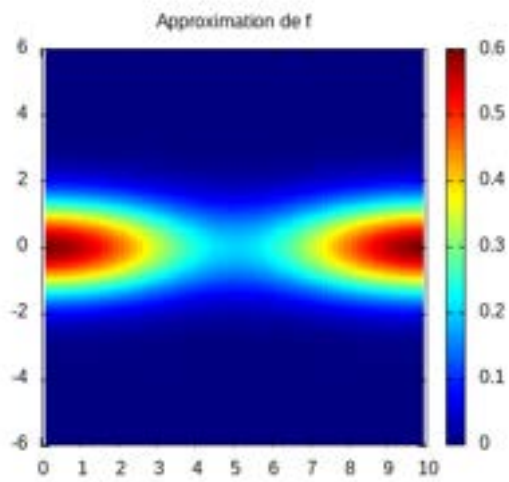
On reproduit dans cette section l'expérimentation déjà menée dans [1]. Le cas test utilisé est le suivant. La donnée initiale est

$$f_0(x, v) = \left(1 + \delta \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) \mathcal{M}(v)$$

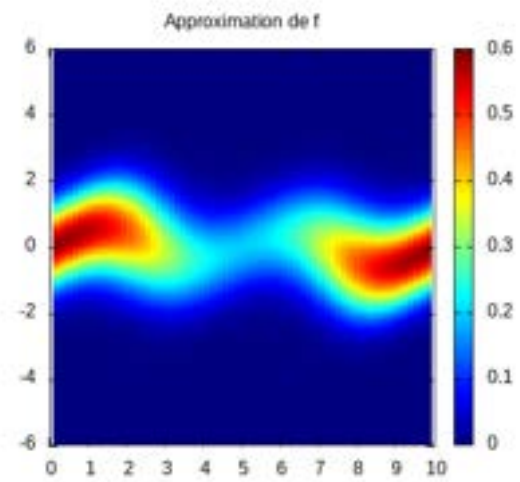
avec $\delta = 0.5, L = 10$. On calcule les 200 premiers modes de Hermite et la discrétisation en espace se fait avec $N_x = 64$. Le pas de temps est fixé à $5 \cdot 10^{-3}$. La fonction $\tau(\varepsilon)$ vaut $5\varepsilon^2$. On étudie alors l'évolution des normes $\|f - f_\infty\|_{L^2(f_\infty^{-1})}$ et $\|f - \rho \mathcal{M}\|_{L^2(f_\infty^{-1})}$.

Sur la figure 2 on représente la solution approchée à différentes dates pour $\varepsilon = 1$, ainsi que l'état stationnaire théorique. On peut observer l'allure du système dans le plan de phase.

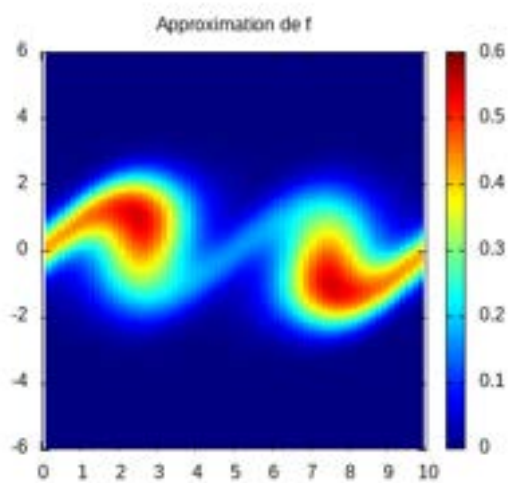
Sur la figure 3, on représente l'évolution de $\|f - \rho \mathcal{M}\|_{L^2(f_\infty^{-1})}$ avec une échelle logarithmique en ordonnée pour différentes valeurs de ε . On représente aussi la droite d'interpolation et on calcule sa pente. On peut remarquer des oscillations de la courbe dont il est fait mention dans [1]. De plus, on remarque que plus ε est petit, plus le plasma est collisionnel et plus le retour à l'équilibre s'effectue rapidement. Pour la valeur la plus petite, les courbes des différentes normes deviennent horizontales lorsqu'elles rejoignent l'erreur machine.



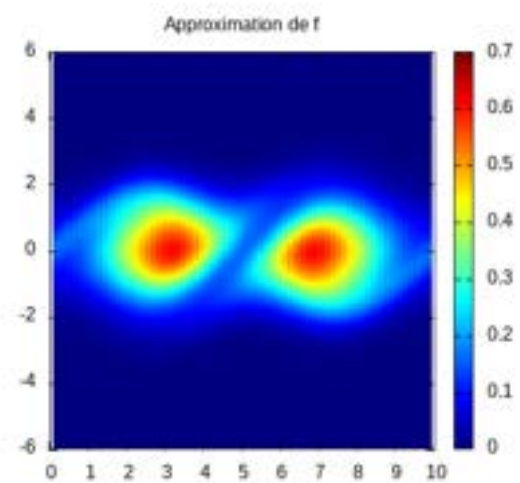
(a) $t = 0$



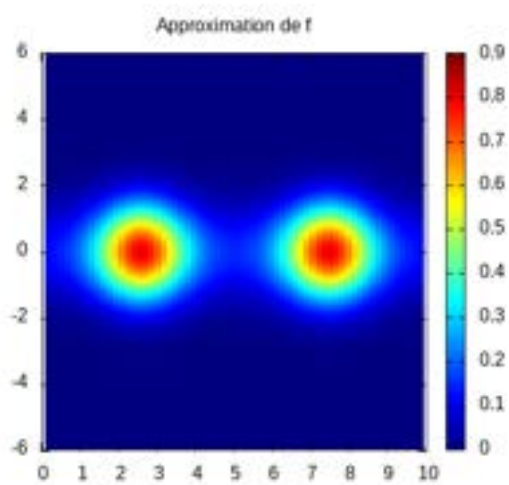
(b) $t = 0.5$



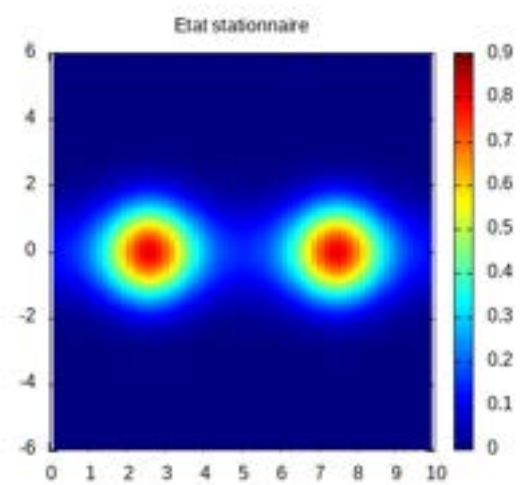
(c) $t = 1.5$



(d) $t = 3$

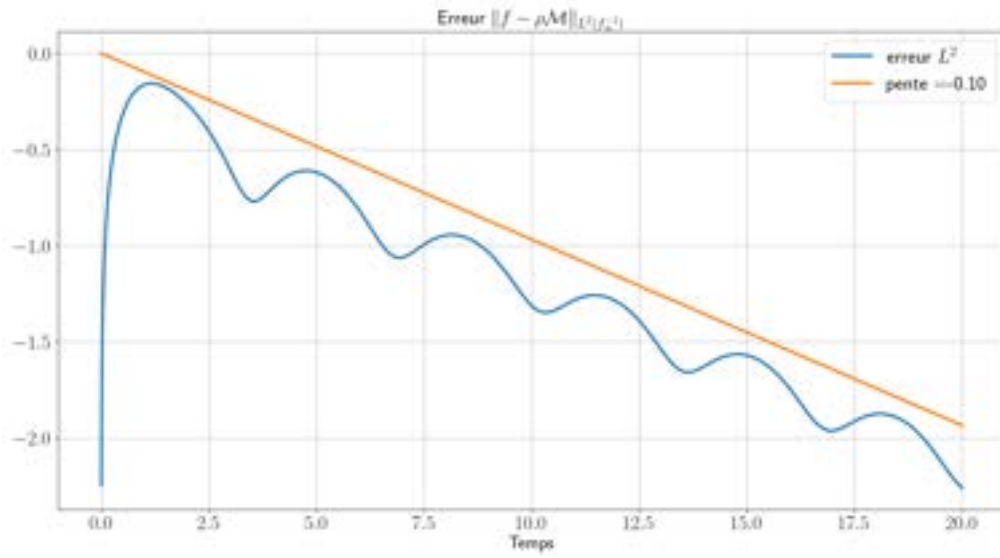


(e) $t = 20$

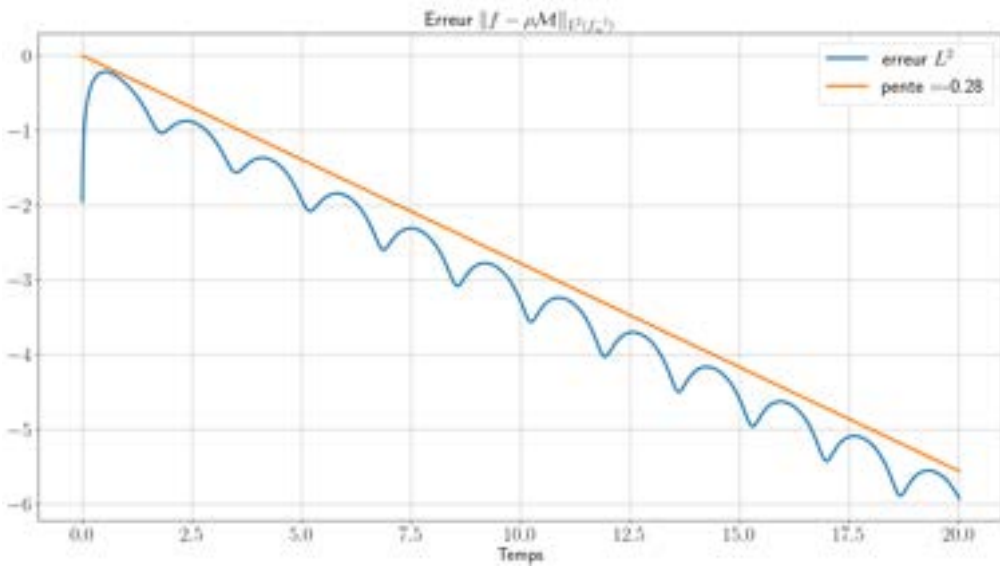


(f) Etat stationnaire.

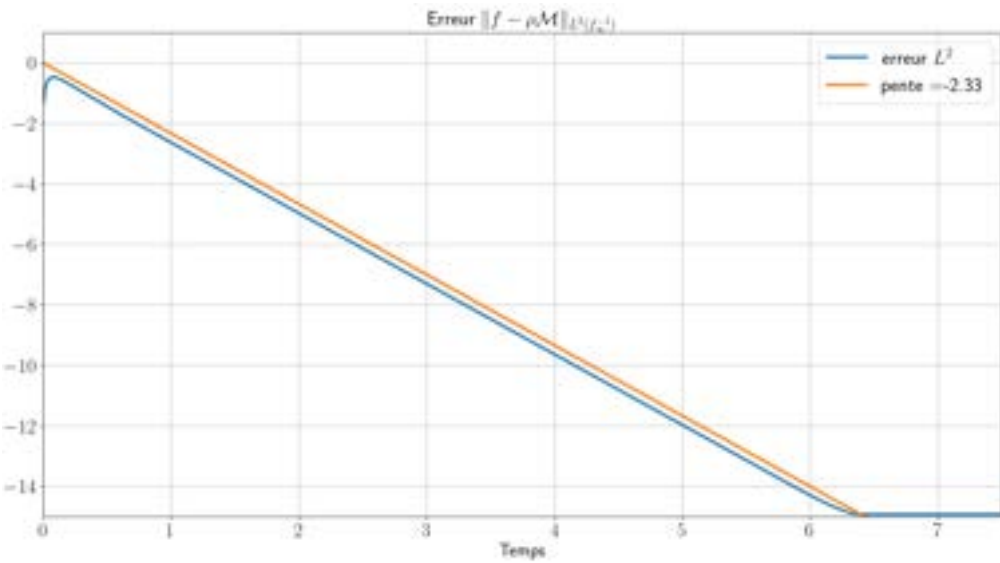
FIGURE 2 – Cas test 1.



(a) $\varepsilon = 1$

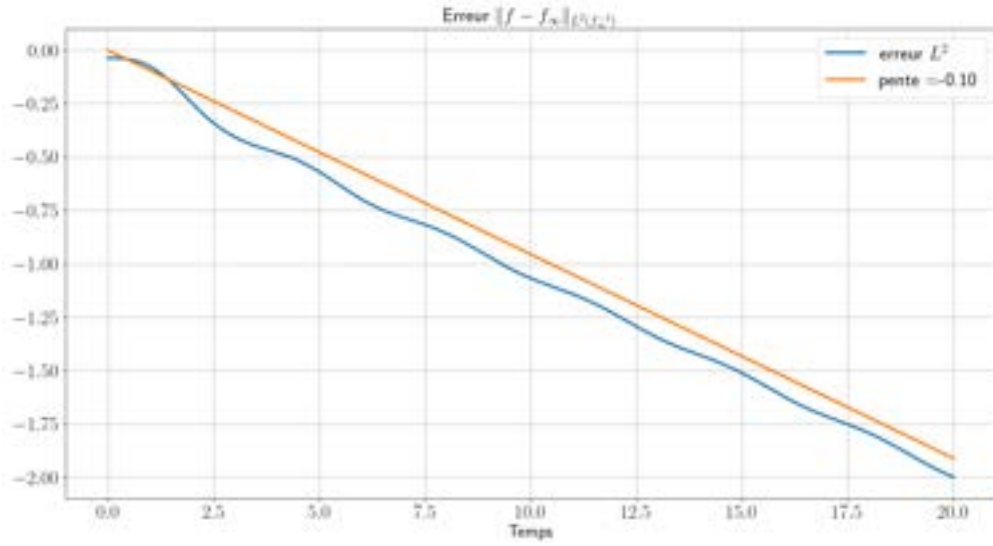


(b) $\varepsilon = 0.5$

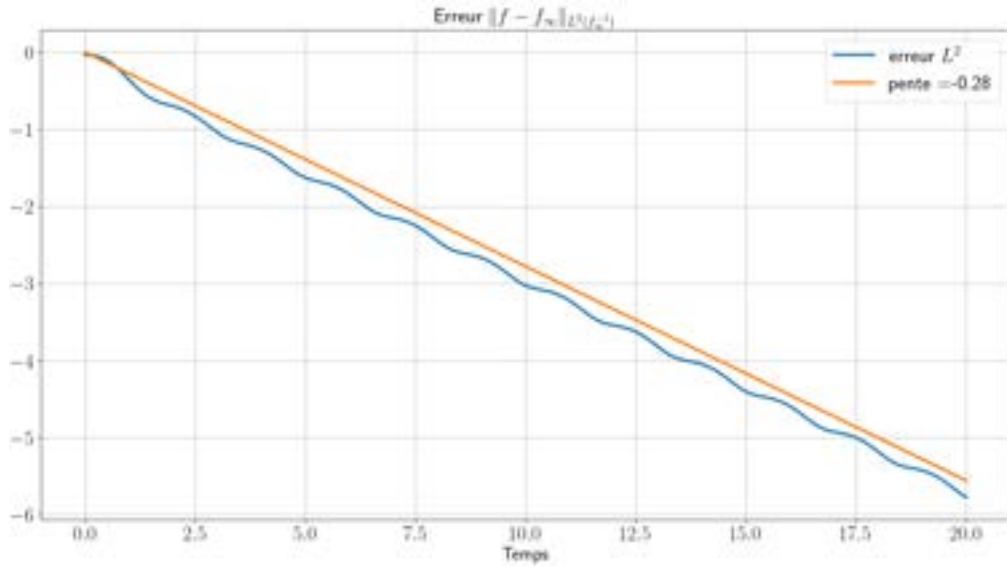


(c) $\varepsilon = 0.1$

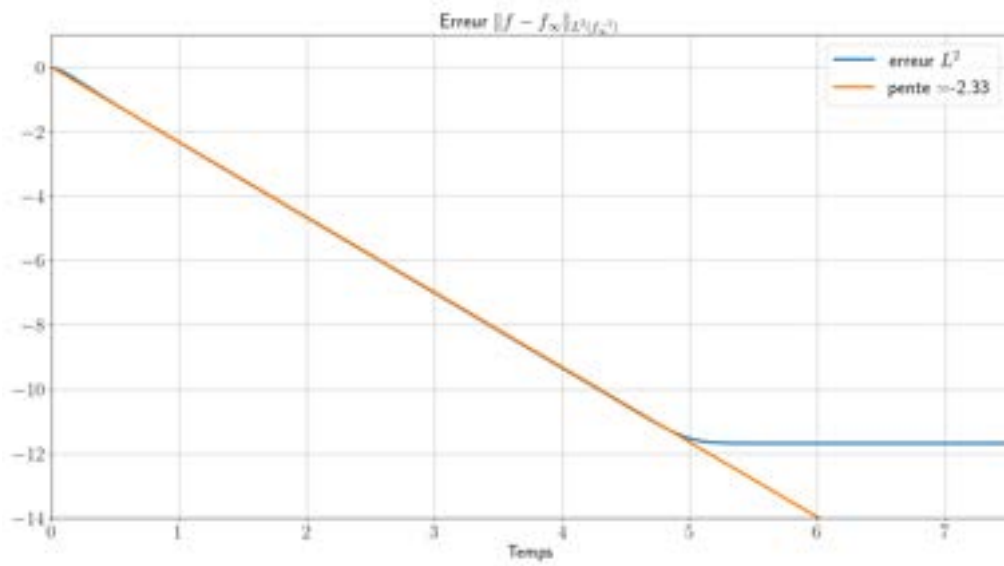
FIGURE 3 – Cas test 1.



(a) $\varepsilon = 1$



(b) $\varepsilon = 0.5$



(c) $\varepsilon = 0.1$

FIGURE 4 – Cas test 1.

3 Schéma de splitting pour Vlasov-Poisson Fokker-Planck

Essayons d'adapter le schéma précédent au système non-linéaire de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck, avec longueur de Debye fixée à 1.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t f + \frac{1}{\varepsilon}(v\partial_x f - E\partial_v f) & = & \frac{1}{\tau(\varepsilon)}(vf + \partial_v f) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, t > 0 \\ -\partial_{xx}\Phi & = & n_i - \rho \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, t \geq 0 \\ E & = & -\partial_x \Phi \\ f(0, \cdot, \cdot) \in L^1_x(\mathbb{T}, dx) \cap L^2_v(\mathbb{R}, dv) & = & \text{donnée} \end{array} \right.$$

Le but de cette section est d'essayer naïvement de transformer ce système en un système hyperbolique de structure similaire au cas de Fokker-Planck, puis d'analyser les nouvelles difficultés rencontrées. On proposera par la suite des pistes pour éliminer ces difficultés.

3.1 Projection sur la base de Hermite

On décompose f dans la base des fonction de Hermite :

$$f(t, x, v) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t, x) \psi_k(v) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}} D_k(t, x) \psi_k(v)$$

où on définit $D_k(t, x) := \frac{C_k(t, x)}{e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}}}$. Ce choix permettra de mettre le système sous la même forme que précédemment, avec les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{A}^* de la même forme qu'avant. Ce choix ne demande pas de résoudre l'équation non-linéaire de Poisson non-linéaire dont Φ_∞ est solution.

On injecte cette série de Hermite dans l'EDP de Fokker-Planck pour en déduire le système d'équations sur D_k , pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t D_k + \frac{1}{\varepsilon}(\sqrt{k}\mathcal{A}_t D_{k-1} - \sqrt{k+1}\mathcal{A}_t^* D_{k+1}) & = & -\left(\frac{k}{\tau(\varepsilon)} + \frac{\partial_t \Phi}{2}\right) D_k \quad \forall x \in \mathbb{T}, t > 0 \\ D_k(t = 0, \cdot) & = & \text{donnée} \end{array} \right.$$

Il apparait maintenant dans le système un terme $\partial_t \Phi$. \mathcal{A}_t et \mathcal{A}_t^* sont des opérateurs différentiels adjoints dans $L^2(\mathbb{T}, dx)$ et dépendent de t

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{A}_t u & = & \partial_x u + \frac{E(t, \cdot)}{2} u \\ \mathcal{A}_t^* u & = & -\partial_x u + \frac{E(t, \cdot)}{2} u \end{array} \right.$$

Les opérateurs dépendent maintenant du temps. Ils restent adjoints dans $L^2(\mathbb{T}, dx)$. L'équation de Poisson linéaire devient alors une équation de Poisson non-linéaire :

$$-\partial_{xx}\Phi(t, x) = n_i(x) - D_0(t, x)e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}}$$

Comme pour Fokker-Planck linéaire, la masse $\int_{\mathbb{T}} D_0(t, x)e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}} dx$ doit se conserver et doit valoir en tout temps $m = \int_{\mathbb{T}} n_i(x) dx$.

Pour établir la conservation de la masse, on multiplie l'EDP portant sur $\partial_t D_0$ par $e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}}$. On utilise la règle de dérivation d'un produit et on intègre pour obtenir que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{T}} D_0(t, x) e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}} dx \right) - \int_{\mathbb{T}} \mathcal{A}_t^* D_1 e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}} dx = 0$$

Ensuite, on réalise une intégration par partie pour obtenir que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{T}} D_0(t, x) e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}} dx \right) + \int_{\mathbb{T}} D_1 \mathcal{A}_t e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}} dx = 0$$

Comme $\mathcal{A}_t e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}} = 0$, on obtient la propriété attendue. Il faudra également préserver cette propriété au niveau discret.

3.2 Discrétisation de l'équation de Fokker-Planck

On reprend les mêmes notations que pour le premier schéma de Filbet et Blaustein.

Le schéma d'Euler implicite s'écrit alors, $\forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq N_x$:

$$\frac{D_{k,j}^{n+1} - D_{k,j}^n}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} (\sqrt{k} (\tilde{\mathcal{A}}_{n+1} D_{k-1}^{n+1})_j - \sqrt{k+1} (\tilde{\mathcal{A}}_{n+1}^* D_{k+1}^{n+1})_j) = - \left(\frac{k}{\tau(\varepsilon)} + \frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n}{2dt} \right) D_{k,j}^{n+1}$$

La première différence est l'introduction d'une différence finie pour approcher $\partial_t \Phi$. La deuxième différence est que les opérateurs discrets $\tilde{\mathcal{A}}_n^*, \tilde{\mathcal{A}}_n$ dépendent du temps :

$$\begin{cases} (\tilde{\mathcal{A}}_{n+1} u)_j &= \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2dx} + \frac{E_j^{n+1}}{2} u_j \\ (\tilde{\mathcal{A}}_{n+1}^* u)_j &= -\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2dx} + \frac{E_j^{n+1}}{2} u_j \end{cases}$$

On doit alors choisir la discrétisation de E_j^{n+1} qui préserve l'état stationnaire.

Lemme 2. *L'état stationnaire est préservé si et seulement si*

$$E_j^{n+1} = -\frac{\sqrt{\rho_\infty(x_{j+1})} - \sqrt{\rho_\infty(x_{j-1})}}{dx \sqrt{\rho_\infty(x_j)}} = -\frac{e^{\frac{\Phi_\infty(x_{j+1})}{2}} - e^{\frac{\Phi_\infty(x_{j-1})}{2}}}{dx e^{\frac{\Phi_\infty(x_j)}{2}}}$$

La preuve du lemme est analogue en tout point au lemme prouvé pour le schéma résolvant l'équation de Fokker-Planck.

Cette différence finie est consistante avec $E = -\partial_x \Phi$.

On voit que pour utiliser ce schéma, il faut connaître $D_{k,j}^n$ pour tout k, j ainsi que Φ_j^{n+1}, Φ_j^n pour tout j . On doit alors calculer le potentiel sur deux instants précédents et alterner la résolution de l'équation de Fokker-Planck et la résolution de Poisson non-linéaire.

Conservation de la masse Ce schéma n'est a priori pas conservatif. En effet on aimerait que

$$\sum_{j=1}^{N_x} dx D_{0,j}^{n+1} e^{\frac{\Phi_j^{n+1}}{2}} = \sum_{j=1}^{N_x} dx D_{0,j}^n e^{\frac{\Phi_j^n}{2}}$$

Mais en procédant comme dans le cas continu (multiplication par $dx e^{\frac{\Phi_j^n}{2}}$, sommation sur j , intégration par partie discrète) on obtient que

$$\sum_{j=1}^{N_x} dx \frac{D_{0,j}^{n+1} - D_{0,j}^n}{dt} e^{\frac{\Phi_j^n}{2}} = - \sum_{j=1}^{N_x} dx \frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n}{2dt} e^{\frac{\Phi_j^n}{2}} D_{0,j}^{n+1}$$

Cette égalité ne permet pas de conclure : le terme de droite n'est pas forcément nul, et le facteur $e^{\frac{\Phi_j^n}{2}}$ ne permet pas de faire apparaître les deux intégrales discrètes simultanément dans le terme de gauche. Pour résoudre le problème de non-conservativité, on doit changer de procédure pour calculer D_0 . En particulier, l'apparition du terme $\partial_t \Phi$ est dramatique. On propose alors de changer l'équation actuelle sur D_0 :

$$\partial_t D_0 - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}_t^* D_1 = -\frac{\partial_t \Phi}{2} D_0$$

On multiplie l'équation par $e^{\frac{\Phi}{2}}$, on utilise la règle de dérivation d'un produit pour trouver l'équation

$$\partial_t C_0 - \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{\Phi}{2}} \mathcal{A}_t^* D_1 = 0$$

car $C_0 = e^{\frac{\Phi}{2}} D_0$. Il n'y a alors plus de non linéarité. Le schéma discrétiserait alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t C_0 - \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{\Phi}{2}} \mathcal{A}_t^* D_1 & = 0 \\ C_0 & = e^{\frac{\Phi}{2}} D_0 \\ \partial_t D_k + \frac{1}{\varepsilon} (\sqrt{k} \mathcal{A}_t D_{k-1} - \sqrt{k+1} \mathcal{A}_t^* D_{k+1}) & = - \left(\frac{k}{\tau(\varepsilon)} + \frac{\partial_t \Phi}{2} \right) D_k \quad \forall k \geq 1 \\ D_k(t=0, \cdot) & \text{donnée} \end{array} \right.$$

Du point de vue de l'étude théorique du système, rien ne devrait changer (on a juste utilisé la définition de C_0). Pour le schéma, la première équation donne bien la conservation de C_0 donc de la masse.

3.3 Résolution de l'équation de Poisson non-linéaire

Supposons que l'on connaisse $D_0(t_n, x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. On souhaite résoudre l'équation de Poisson non-linéaire sur le tore, avec conditions aux limites périodiques et condition de moyenne nulle :

$$-\partial_{xx} \phi(x) + D_0(t_n, x) e^{\frac{\phi(x)}{2}} - n_i(x) = 0$$

Définissons alors l'application

$$\begin{aligned} F : C^2(\mathbb{T}) &\mapsto C^0(\mathbb{T}) \\ \phi &\mapsto -\partial_{xx} \phi + D_0(t_n, \cdot) e^{\frac{\phi}{2}} - n_i \end{aligned}$$

Trouver la solution de l'EDP non linéaire au sens classique revient à trouver le zéro de F . On propose d'utiliser la méthode de Newton.

F est différentiable au sens de Fréchet, sa différentielle étant

$$\begin{aligned} d_\phi F : C^2(\mathbb{T}) &\mapsto C^0(\mathbb{T}) \\ h &\mapsto -\partial_{xx} h + \frac{D_0(t_n, \cdot)}{2} e^{\frac{\phi}{2}} h \end{aligned}$$

Soit $v \in C^0(\mathbb{T})$. Calculer $u = (d_\phi F)^{-1}.v$ revient à résoudre l'EDP suivante :

$$\begin{cases} v &= -\partial_{xx}u + \frac{D_0(t_n, \cdot)}{2} e^{\frac{\phi}{2}} u \\ u &\in C^2(\mathbb{T}) \end{cases}$$

On se propose alors d'approcher u par la troncature de rang K de sa série de Fourier puis d'appliquer la méthode de collocation. On veut approcher $u(x)$ par une somme de Fourier :

$$u(x) \approx \sum_{k=-K}^K c_k e^{\frac{2ik\pi x}{L}}$$

Les inconnues sont alors les coefficients dans la base de Fourier. Pour ce faire, on part du fait que l'EDP est vérifiée sur les centres des cellules $x_{j+\frac{1}{2}} = (j - \frac{1}{2})dx$, $\forall j = 1, \dots, N_x$:

$$v(x_{j+\frac{1}{2}}) = \sum_{k=-K}^K c_k \left(\left(\frac{2k\pi}{L} \right)^2 + \frac{D_0(t_n, x_{j+\frac{1}{2}})}{2} \right) e^{\frac{\phi(x_{j+\frac{1}{2}})}{2}} e^{\frac{2ik\pi}{L} x_{j+\frac{1}{2}}}$$

Si la contrainte $N_x \geq 2K + 1$ est satisfaite, alors on peut former un système linéaire carré qu'il faut inverser pour calculer les c_k . Les points de collocations peuvent être choisis équirépartis si $2K$ divise $N_x - 1$.

Supposons maintenant que l'on connaisse le vecteur $\hat{\Phi}^n \in \mathbb{C}^{2K+1}$ des coefficients de Fourier de Φ^n , et que l'on connaisse $D_{0,j}^n$ pour tout $1 \leq j \leq N_x$. L'algorithme de Newton prend la forme suivante.

Etape 1 : initialisation On choisit $\hat{u}_0 \in \mathbb{C}^{2K+1}$. On note le compteur $p = 0$.

Etape 2 : itérations Tant que la convergence n'est pas atteinte, on répète le calcul suivant :

— On assemble la matrice $M \in M_{2K+1}(\mathbb{C})$ de coefficients

$$M_{j,k} = \left(\left(\frac{2k\pi}{L} \right)^2 + \frac{D_{0,j}^n}{2} \right) e^{\frac{u_p(x_{j+\frac{1}{2}})}{2}} e^{\frac{2ik\pi}{L} x_{j+\frac{1}{2}}}$$

où u_p est la somme de Fourier associée à \hat{u}_p .

— On assemble le second membre $b \in \mathbb{C}^{2K+1}$ de coefficients $b_j = F(u_p)(x_{j+\frac{1}{2}})$.

— On résout le système $Mx = b$.

— On calcule $\hat{u}_{p+1} = \hat{u}_p - x$, le coefficient associé à la valeur moyenne est remis à 0, puis p est incrémenté de 1.

Etape 3 : résultat Le vecteur \hat{u}_p obtenu à la convergence est le vecteur $\hat{\Phi}^{n+1}$ des coefficients de Fourier du potentiel Φ^{n+1} à l'instant $n + 1$.

Remarque On a été obligé, pour la programmation de cet algorithme, de remettre le coefficient associé à la moyenne à 0 à la fin de l'étape 2. Si cette opération n'est pas faite, on obtient un overflow. Le fait que la matrice de collocation est très mal conditionnée et que la valeur moyenne du potentiel se retrouve dans une exponentielle à chaque itération peut expliquer ce problème. Cette approche n'est pas rigoureuse.

3.4 Algorithme de splitting

On assemble alors un algorithme qui permet de simuler le système de Vlasov-Poisson Fokker-Planck à partir des deux précédents solveurs. N_x, K sont deux entiers fixés avant l'initialisation et correspondent au paramètres de troncature des séries de Fourier et le nombre de cellules du maillage. T est le temps final.

Etape 1 : initialisation $t^0 = 0$. On fixe $n = 0$. Les valeurs $D_{k,j}^0$ sont données. On calcule le potentiel initiale à $t = 0$ en résolvant l'équation de Poisson linéaire :

$$-\partial_{xx}\Phi^0 = n_i(x) - \rho(x)$$

Pour ce faire, on approche Φ^0 par sa série de Fourier tronquée au rang K . La valeur moyenne est fixée à 0.

Itérations Tant que $t^n < T$, on répète les opérations suivantes.

Le pas de temps dt prend la valeur $\min(dt, T - t^n)$ (ainsi toutes les itérations se font avec le même pas de temps sauf la dernière. La simulation s'arrêtera alors bien au temps T).

La date est incrémentée : $t^{n+1} = t^n + dt$. Comme les coefficients de Hermite et le potentiel sont connus au temps t^n , on peut :

- Premièrement calculer Φ^{n+1} par l'algorithme de Newton (demande de connaître $D_{0,j}^n$);
- Ensuite calculer les coefficients de Hermite $D_{k,j}^{n+1}$ pour tout k, j (demande de connaître $D_{k,j}^n$ pour tout k, j , Φ^{n+1} , Φ^n).

Le compteur n est incrémenté de 1.

Fin La simulation est arrivée à terme.

Supposons que le potentiel stationnaire Φ_∞ soit de la forme $\sum_{k=-K}^K c_k e^{\frac{2ik\pi x}{L}}$, et que l'on sache calculer de manière exacte les coefficients de Fourier de $n_i - \rho$ lors de la résolution de Poisson linéaire dans l'initialisation. Alors (erreurs machine près) :

- Le solveur pour Poisson non-linéaire va préserver le potentiel. En effet, le second membre b issu de la méthode de collocation sera nul, donc la solution du système x aussi, donc $\hat{u}_{p+1} = \hat{u}_p$.
- Le solveur de Fokker-Planck va également respecter l'état stationnaire. Il a été conçu spécifiquement dans ce but.

Ceci est vrai à la première itération. Par récurrence, l'état stationnaire sera préservé après toutes les itérations en temps. La seconde hypothèse peut être réalisée en prenant un grand nombre de points et une méthode de Newton-Cotes d'ordre élevé (il ne faut pas dépasser l'ordre 7 à cause du phénomène de Runge).

3.5 Expérimentations

3.5.1 Cas test 1

Le premier cas test est une perturbation de l'état stationnaire :

$$f(0, x, v) = \left(1 + \delta \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) \mathcal{M}(v) e^{\Phi_\infty(x)}$$

avec $L = 10, \delta = 0.5$.

On choisit le potentiel stationnaire comme

$$\Phi_\infty(x) = 0.1 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 0.9 \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

L'état stationnaire est de la forme

$$f_\infty(x, v) = c_0 e^{\Phi_\infty(x)} \mathcal{M}(v)$$

Moyennant utilisation d'un logiciel de calcul formel (Geogebra) on peut calculer

$$c_0 = 1 + \delta \frac{\int_{\mathbb{T}} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) e^{\Phi_\infty(x)} dx}{\int_{\mathbb{T}} e^{\Phi_\infty(x)} dx}. \text{ Les coefficients de Hermite sont initialement } D_k(0, x) = 0 \text{ si } k \neq 0 \text{ et } D_0(0, x) = \left(1 + \delta \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) e^{\Phi_\infty(x) - \frac{\Phi(0, x)}{2}}.$$

On dispose de toutes les données pour effectuer la simulation. Les paramètres sont :

- $N_x = 61$;
- $K = 10$ (troncature des série de Fourier) ;
- $P = 100$ (troncature des séries de Hermite) ;
- $T = 20$
- $L = 10$
- $dt = 0.005$
- $\tau(\varepsilon) = 5\varepsilon^2$.

On étudie l'évolution de différentes normes pour $\varepsilon = 1, 0.5, 0.1$:

$$\begin{aligned} \|f - \rho \mathcal{M}\|_{L^2(f_\infty^{-1})} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} D_k(t, x)^2 \frac{e^{\Phi(t, x)}}{\rho_\infty(x)} dx \right)^{1/2} \\ \|\rho - \rho_\infty\|_{L^2(\rho_\infty^{-1})} &= \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{(e^{\frac{\Phi(t, x)}{2}} D_0(t, x) - \rho_\infty(x))^2}{\rho_\infty(x)} \right)^{1/2} \\ \|f - f_\infty\|_{L^2(f_\infty^{-1})} &= \left(\|f - \rho \mathcal{M}\|_{L^2(f_\infty^{-1})}^2 + \|\rho - \rho_\infty\|_{L^2(\rho_\infty^{-1})}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

On obtient les figures 5 et 6. On vérifie expérimentalement que la masse est constante et que le schéma est conservatif. Les différentes normes L^2 tendent vers 0 mais presque sans oscillations.

3.6 Conclusion

En tentant naïvement d'adapter le même schéma au système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck, on a donc vu plusieurs difficultés apparaître. On a écrit les schémas en utilisant les variables D_k car on voulait obtenir un système d'une structure similaire à celui obtenu pour Fokker-Planck. Néanmoins, ce choix a causé les difficultés suivantes :

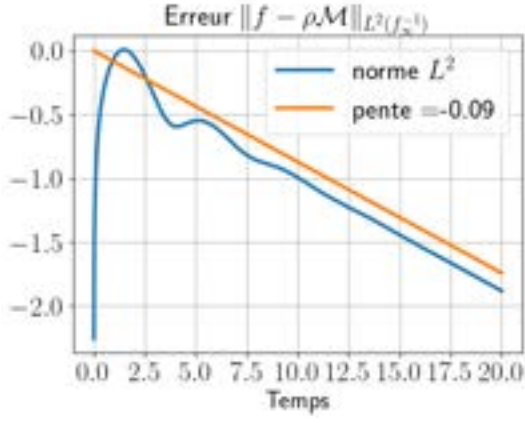
- Les opérateurs différentiels dépendent du temps. Ainsi, la matrice utilisée pour résoudre l'équation de Fokker-Planck dépend du temps. Elle doit être formée à chaque itération ce qui prend beaucoup de temps.
- Le terme $\partial_t \Phi$ est apparu, qui complique l'étude du schéma.
- La conservativité du schéma est obtenue en écrivant en variable C_k l'équation sur le premier moment. On peut se demander s'il n'est alors pas plus pertinent d'écrire le schéma entier sur les coefficients C_k .
- L'équation de Poisson est devenue non-linéaire. Sa résolution aurait été beaucoup plus simple si elle était restée linéaire.

De plus, l'étude théorique de l'hypocoercivité du système non-linéaire de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck s'effectue sous forme perturbative, c'est à dire que l'on écrit

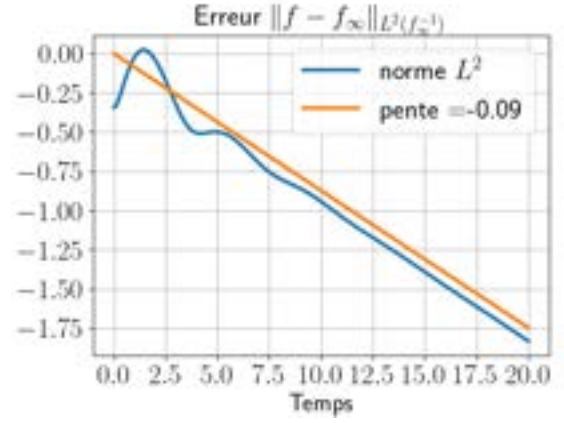
$$f = f_\infty + f_\infty h$$

h est une perturbation autour de l'état d'équilibre f_∞ . Les preuves d'hypocoercivité se placent alors sous l'hypothèse que h est assez petite. Ainsi, il serait plus simple d'étudier et résoudre l'équation cinétique vérifiée par h .

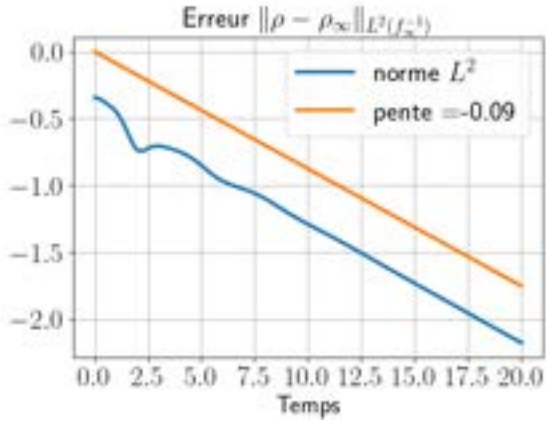
En prenant compte de ces différentes remarques, on va étudier plus rigoureusement le système sous forme perturbative.



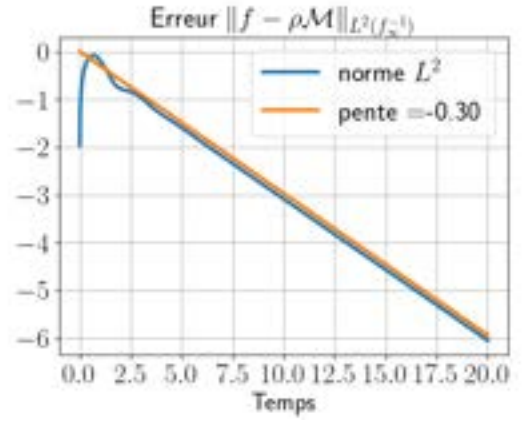
(a) $\varepsilon = 1$



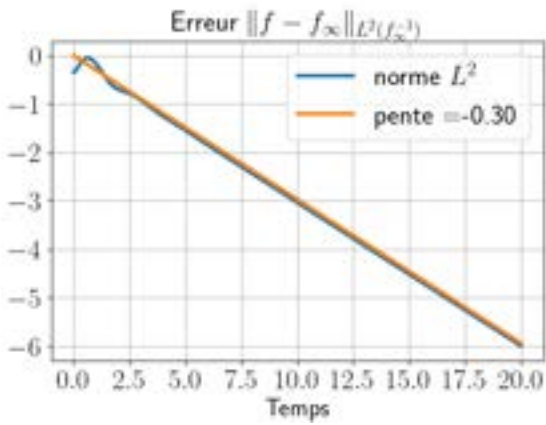
(b) $\varepsilon = 1$



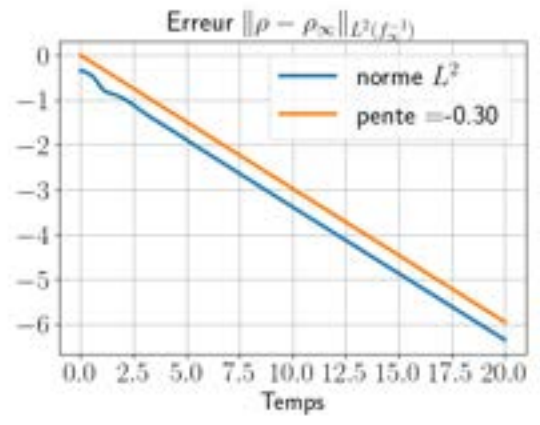
(c) $\varepsilon = 1$



(d) $\varepsilon = 0.5$

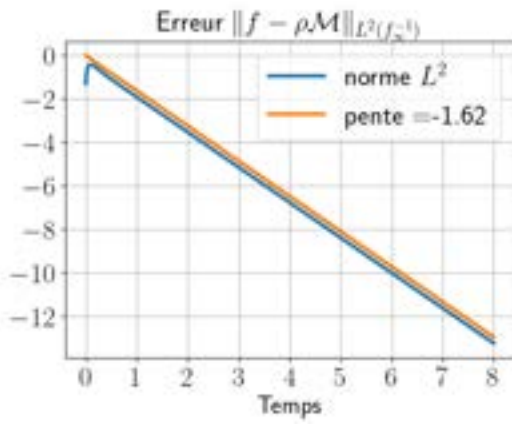


(e) $\varepsilon = 0.5$

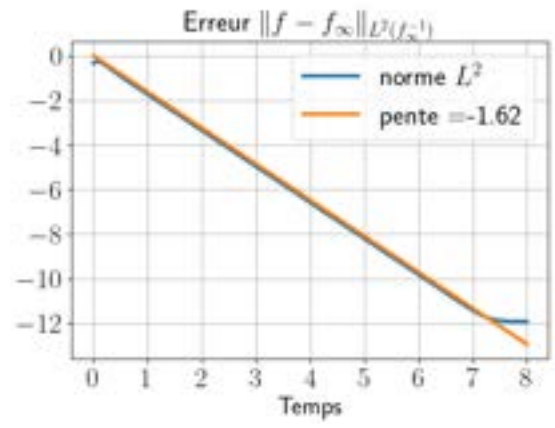


(f) $\varepsilon = 0.5$

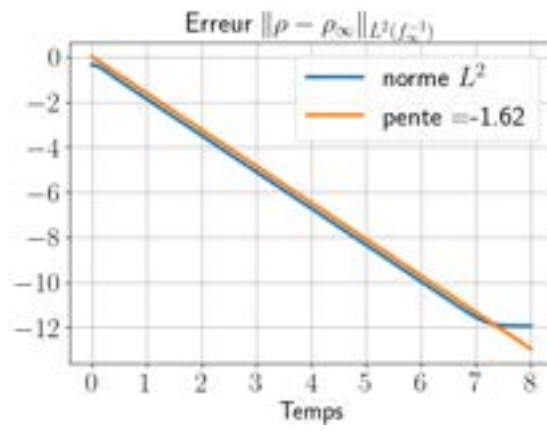
FIGURE 5 – Cas test 1.



(a) $\varepsilon = 0.1$



(b) $\varepsilon = 0.1$



(c) $\varepsilon = 0.1$

FIGURE 6 – Cas test 1.

4 Etude du système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck

4.1 Introduction et notations

Rappelons le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t f + \frac{1}{\varepsilon}(v\partial_x f - E\partial_v f) & = & \frac{1}{\tau(\varepsilon)}(vf + \partial_v f) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, t > 0 \\ -\delta^2 \partial_{xx} \phi(t, x) & = & n_i(x) - \rho(t, x) \quad \forall x \in \mathbb{T}, t \geq 0 \\ E(t, x) & = & -\partial_x \phi(t, x) \quad \forall x \in \mathbb{T}, t \geq 0 \\ f(0, \cdot, \cdot) \in L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) & \text{donnée} & \end{array} \right. \quad (3)$$

Le plasma est globalement neutre et la masse d'électrons se conserve, ce qui donne les égalités :

$$\int_{\mathbb{T}} \rho(t, x) dx = \int_{\mathbb{T}} n_i(x) dx := m > 0 \quad \forall t \geq 0$$

On peut formellement identifier l'état d'équilibre de ce système, qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\delta^2 \partial_{xx} \phi_{\infty}(x) & = & n_i(x) - \frac{ce^{\phi_{\infty}(x)}}{m} \\ c & = & \frac{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi_{\infty}(x)} dx}{ce^{\phi_{\infty}(x)}} \\ \rho_{\infty}(x) & = & ce^{\phi_{\infty}(x)} \\ f_{\infty}(x, v) & = & \rho_{\infty}(x) \mathcal{M}(v) \end{array} \right. \quad (4)$$

La question de la convergence vers l'équilibre se pose alors naturellement. Contrairement à l'équation de Fokker-Planck linéaire, on doit supposer que la condition initiale est assez proche de l'état d'équilibre pour obtenir la convergence vers l'équilibre à vitesse exponentielle : c'est une approche dite "perturbative". Il est naturel d'effectuer le changement de variable suivant : on écrit que $f = f_{\infty} + f_{\infty}h$, où h est la perturbation relative par rapport à l'état d'équilibre. On injecte cette expression dans le système pour en déduire le système vérifié par h .

On calcule :

$$\begin{aligned} \partial_x f_{\infty} &= -E_{\infty} f_{\infty} \\ \partial_v f_{\infty} &= -v f_{\infty} \\ \partial_t f &= f_{\infty} \partial_t h \\ v \partial_x f &= -v E_{\infty} f_{\infty} - E_{\infty} v f_{\infty} h + v f_{\infty} \partial_x h \\ -E \partial_v f &= E v f_{\infty} + E v f_{\infty} h - E f_{\infty} \partial_v h \\ \partial_v(\partial_v f + v f) &= \partial_v \left(\mathcal{M} \partial_v \left(\frac{f}{\mathcal{M}} \right) \right) \\ &= \partial_v (f_{\infty} \partial_v h) \\ &= -v f_{\infty} \partial_v h + f_{\infty} \partial_v^2 h \end{aligned}$$

On pose $\psi := \phi - \phi_{\infty}$, d'où $E_h := \partial_x \psi = E_{\infty} - E$. Le système obtenu pour la perturbation h est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t h + \frac{1}{\varepsilon}(-v \partial_x \psi - E_{\infty} \partial_v h + v \partial_x h + \partial_x \psi (\partial_v h - v h)) & = & \frac{1}{\tau(\varepsilon)}(\partial_v^2 h - v \partial_v h) \quad \forall t > 0 \\ -\delta^2 \partial_{xx} \psi & = & -\int_{\mathbb{R}} h f_{\infty} dv \quad \forall t \geq 0 \\ h(0, \cdot, \cdot) = h_0 \in \mathcal{H}_0 & \text{donnée} & \end{array} \right.$$

Définissons un espace fonctionnel adapté à l'étude de ce dernier problème. Notons $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}, f_\infty dx dv)$. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} uv f_\infty dx dv$$

et de la norme

$$\|u\| = \left(\int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} u^2 f_\infty dx dv \right)^{1/2}$$

On définit aussi le sous espace fermé des fonctions à moyenne nulle $\mathcal{H}_0 = \{f \in \mathcal{H} \mid \langle f, 1 \rangle = 0\}$.

Posons les opérateurs suivants définis sur $H^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R}, f_\infty dx dv)$:

$$A = \partial_v, \quad B = v\partial_x - E_\infty\partial_v, \quad C = \partial_x$$

Les adjoints de ces opérateurs dans \mathcal{H} sont

$$A^* = v - \partial_v, \quad B^* = -B$$

En utilisant ces notations ainsi que $L = \frac{1}{\tau(\varepsilon)} A^* A + \frac{1}{\varepsilon} B$, le système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t h + Lh - \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi v &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi A^* h \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, t > 0 \\ -\partial_{xx} \psi &= -\int_{\mathbb{R}} h f_\infty dv \quad \forall x \in \mathbb{T}, t \geq 0 \\ E_h &= \partial_x \psi \quad \forall x \in \mathbb{T}, t \geq 0 \\ h_0 \in \mathcal{H}_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (5)$$

Par la suite, on utilisera plusieurs identités algébriques pour établir les estimations d'énergie nécessaires à la preuve d'hypocoercivité dans le cas linéaire :

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= \partial_v(v\partial_x - E_\infty\partial_v) - v\partial_v\partial_x + E_\infty\partial_v^2 \\ &= \partial_x \\ [B, C] &= BC - CB \\ &= -\partial_{xx}\phi_\infty\partial_v \\ [A, A^*] &= AA^* - A^*A \\ &= 1 \\ \langle ABh, Ch \rangle + \langle Ah, CBh \rangle &= \|Ch\|^2 + \langle Ah, \partial_{xx}\phi_\infty Ah \rangle \\ \langle h, -Lh \rangle &= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|Ah\|^2 \end{aligned}$$

4.2 Estimations d'énergie

Par la suite, on voudrait donner une preuve d'hypocoercivité pour le système de VPFP perturbatif (5). On commencera par étudier le problème linéarisé suivant, obtenu en supprimant le terme non linéaire du système de départ (5) :

$$\begin{cases} \partial_t h + Lh - \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi v &= 0 \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, t > 0 \\ -\delta^2 \partial_{xx} \psi &= -\int_{\mathbb{R}} h f_\infty dv \quad \forall x \in \mathbb{T}, t \geq 0 \\ h_0 \in \mathcal{H}_0 \text{ donnée} \end{cases} \quad (6)$$

La première étape sera de dériver en temps une entropie bien choisie. Les estimations d'énergie suivantes donnent des valeurs des dérivées en temps de plusieurs normes pour une solution $h \in \mathcal{H}_0$ de (6) régulière (par exemple dans l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$).

Proposition 1. *Si h est une fonction régulière vérifiant le système (6), alors les quatre égalités suivantes sont vérifiées.*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|Ah\|^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Ah\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} (\|Ah\|^2 + \|A^2 h\|^2) - \frac{1}{\varepsilon} \langle Ch, Ah \rangle$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Ch\|^2 = -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|CAh\|^2 - \frac{1}{\varepsilon} \langle \partial_{xx} \phi_\infty Ah, Ch \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle \partial_{xx} \psi v, Ch \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Ah, Ch \rangle &= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} (\langle Ah, Ch \rangle + 2 \langle A^2 h, ACh \rangle) - \frac{1}{\varepsilon} (\|Ch\|^2 + \langle Ah, \partial_{xx} \phi_\infty Ah \rangle) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} (\langle \partial_x \psi, Ch \rangle + \langle \partial_{xx} \psi v, Ah \rangle) \end{aligned}$$

Démonstration. Tout d'abord, on établit l'équation de continuité du flux. On multiplie l'équation par f_∞ puis on intègre sur \mathbb{R} . On obtient 3 intégrales qu'on traite séparément :

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t h f_\infty dv + \int_{\mathbb{R}} Lh f_\infty dv - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi v f_\infty dv = 0$$

La première vaut $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} h f_\infty dv$ car f_∞ est indépendante du temps. La troisième vaut

$$-\frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi \int_{\mathbb{R}} \partial_v f_\infty dv = 0$$

car ψ est indépendant de v . Pour la deuxième intégrale,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} Lh f_\infty dv &= \frac{1}{\tau(\varepsilon)} \langle A^* Ah, 1 \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} Bh f_\infty dv \\ &= \frac{1}{\tau(\varepsilon)} \langle Ah, A1 \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} Bh f_\infty dv \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} Bh f_\infty dv \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \int_{\mathbb{R}} v h f_\infty dv \end{aligned}$$

L'équation de continuité du flux est donc, si $j(t, x) = \int_{\mathbb{R}} v h f_\infty dv$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} h f_\infty dv = -\frac{1}{\varepsilon} \partial_x j(t, x)$$

Un autre calcul préliminaire est le suivant.

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x \psi v, h \rangle &= \int_{\mathbb{T}} \partial_x \psi j dx \\
&= - \int_{\mathbb{T}} \psi \partial_x j dx \\
&= \varepsilon \int_{\mathbb{T}} \psi \left(\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} h f_{\infty} dv \right) dx \\
&= \varepsilon \delta^2 \int_{\mathbb{T}} \psi \partial_t \partial_{xx} \psi dx \\
&= -\varepsilon \delta^2 \int_{\mathbb{T}} \partial_x \psi \partial_t \partial_x \psi dx \\
&= -\frac{\varepsilon \delta^2}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2
\end{aligned}$$

On dérive maintenant $\|h\|^2$ selon t .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h\|^2 &= \langle \partial_t h, h \rangle = \langle h, -Lh + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi v \rangle \\
&= \langle h, -Lh + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi v \rangle \\
&= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|Ah\|^2 + \langle h, \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi v \rangle \\
&= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|Ah\|^2 - \frac{\delta^2}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\
&= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|Ah\|^2 - \frac{\delta^2}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2
\end{aligned}$$

On dérive maintenant $\|Ah\|^2$ selon t .

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Ah\|^2 = -\langle Ah, ALh \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle A(\partial_x \psi v), Ah \rangle$$

Or,

$$\begin{aligned}
\|A^* Ah\|^2 &= \langle AA^* Ah, Ah \rangle \\
&= \langle [A, A^*] Ah, Ah \rangle + \langle A^* AAh, Ah \rangle \quad (\text{car } AA^* = 1 + A^* A) \\
&= \|Ah\|^2 + \|A^2 h\|^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
-\langle ALh, Ah \rangle &= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|A^* A\|^2 - \frac{1}{\varepsilon} \langle ABh, Ah \rangle \\
&= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} (\|Ah\|^2 + \|A^2 h\|^2) - \frac{1}{\varepsilon} \langle [A, B] h, Ah \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle BAh, Ah \rangle \\
&= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} (\|Ah\|^2 + \|A^2 h\|^2) - \frac{1}{\varepsilon} \langle Ch, Ah \rangle
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} \langle A(\partial_x \psi v), Ah \rangle &= \frac{1}{\varepsilon} \langle \partial_x \psi A^* Av, h \rangle \\
&= -\frac{\delta^2}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \quad (\text{car } A^* Av = v)
\end{aligned}$$

On dérive maintenant $\|Ch\|^2$ selon t .

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Ch\|^2 = -\langle Ch, CLh \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle C(\partial_x \psi v), Ch \rangle$$

Or,

$$\begin{aligned}
-\langle CLh, Ch \rangle &= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \langle CA^* Ah, Ch \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle CBh, Ch \rangle \\
&= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \langle CAh, CAh \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle [B, C] h, Ch \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle BCh, Ch \rangle \quad (CA = AC) \\
&= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} \|CAh\|^2 - \frac{1}{\varepsilon} \langle \partial_{xx} \phi_\infty Ah, Ch \rangle \quad (B^* = -B)
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle C(\partial_x \psi v), Ch \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \langle \partial_{xx} \psi v, Ch \rangle$$

On dérive maintenant $\langle Ah, Ch \rangle$ selon t .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle Ah, Ch \rangle &= -\langle Ch, ALh \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle A(\partial_x \psi v), Ch \rangle \\
&\quad - \langle Ah, CLh \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle C(\partial_x \psi v), Ah \rangle
\end{aligned}$$

Puisque

$$-\frac{1}{\tau(\varepsilon)} (\langle AA^* Ah, Ch \rangle + \langle Ah, CA^* Ah \rangle) = -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} (\langle Ah, Ch \rangle + 2 \langle A^2 h, ACh \rangle)$$

et que

$$-\frac{1}{\varepsilon} (\langle ABh, Ch \rangle + \langle Ah, CBh \rangle) = -\frac{1}{\varepsilon} (\|Ch\|^2 + \langle Ah, \partial_{xx} \phi_\infty Ah \rangle)$$

on obtient que

$$\begin{aligned}
-\langle Ch, ALh \rangle - \langle Ah, CLh \rangle &= -\frac{1}{\tau(\varepsilon)} (\langle Ah, Ch \rangle + 2 \langle A^2 h, ACh \rangle) \\
&\quad - \frac{1}{\varepsilon} (\|Ch\|^2 + \langle Ah, \partial_{xx} \phi_\infty Ah \rangle)
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{1}{\varepsilon} (\langle A(\partial_x \psi v), Ch \rangle + \langle C(\partial_x \psi v), Ah \rangle) = \frac{1}{\varepsilon} (\langle \partial_x \psi, Ch \rangle + \langle \partial_{xx} \psi v, Ah \rangle)$$

On conclut en rassemblant les différentes expressions.

□

4.3 Etude de l'état d'équilibre

Dans cette partie, on étudie l'existence de l'état d'équilibre satisfaisant (4), ainsi que ses propriétés de régularité. On va également déduire des estimations L^p sur la densité stationnaire.

Proposition 2. *Supposons que la densité ionique n_i soit dans $L^\infty(\mathbb{T})$. Alors l'EDP non-linéaire (4) admet une unique solution ϕ_∞ dans $\{u \in H^2(\mathbb{T}) \mid \int_{\mathbb{T}} u dx = 0\}$.*

De plus, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a que

$$\|\rho_\infty\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|n_i\|_{L^p(\mathbb{T})} \quad (7)$$

Enfin, le principe du maximum implique les inégalités suivantes :

$$\inf_{\mathbb{T}} n_i \leq \inf_{\mathbb{T}} \rho_\infty \leq \|\rho_\infty\|_\infty \leq \|n_i\|_\infty \quad (8)$$

$$\frac{1}{\|n_i\|_\infty} \leq \inf_{\mathbb{T}} \frac{1}{\rho_\infty} \leq \left\| \frac{1}{\rho_\infty} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\inf_{\mathbb{T}} n_i} \quad (9)$$

Remarque La solution ϕ_∞ est à moyenne nulle dans l'énoncé au dessus. En réalité, ce potentiel stationnaire n'est défini qu'à une constante près. La condition de moyenne nulle permet d'obtenir l'unicité. En effet, supposons que ϕ_∞ soit une solution et soit $r \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} -\delta^2 \partial_{xx}(r + \phi_\infty(x)) &= -\delta^2 \partial_{xx} \phi_\infty(x) \\ &= n_i(x) - \frac{m}{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi_\infty} dx} e^{\phi_\infty(x)} \\ &= n_i(x) - \frac{m}{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi_\infty + r} dx} e^{\phi_\infty(x) + r} \end{aligned}$$

et donc $\phi_\infty + r$ est aussi solution.

Démonstration. Définissons la fonction

$$\begin{aligned} J : \{u \in H^1(\mathbb{T}) \mid \int_{\mathbb{T}} u dx = 0\} &\mapsto \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \frac{\delta^2}{2} \int_{\mathbb{T}} \partial_x \phi^2 dx - \int_{\mathbb{T}} n_i \phi dx + m \ln \left(\int_{\mathbb{T}} e^\phi \right) \end{aligned}$$

Cette fonction est coercive. Par l'inégalité de Poincaré sur le tore, on peut équiper l'espace de définition de la norme $\|\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{T})}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\mathbb{T})}$. J est constituée de 3 termes. Par les inégalités de Cauchy-Schwartz et Poincaré pour le second terme et l'inégalité de Jensen pour le troisième terme,

$$J(\phi) \geq \frac{\delta^2}{2} \|\partial_x \phi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - c_p \|n_i\|_{L^2} \|\partial_x \phi\|_{L^2} + m \ln \left(\exp \left(\int_{\mathbb{T}} \phi dx \right) \right)$$

Mais comme ϕ est de moyenne nulle, on a que

$$J(\phi) \geq \frac{\delta^2}{2} \|\partial_x \phi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - c_p \|n_i\|_{L^2} \|\partial_x \phi\|_{L^2}$$

ce qui montre la coercivité.

J est strictement convexe. En effet, le second membre est linéaire donc convexe. Le troisième terme est convexe en vertu de l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
m \ln \left(\int_{\mathbb{T}} \exp(t\phi_1 + (1-t)\phi_2) dx \right) &\leq m \ln \left(\left(\int_{\mathbb{T}} \exp(\phi_1) dx \right)^t \left(\int_{\mathbb{T}} \exp(\phi_2) dx \right)^{1-t} \right) \\
&\leq tm \ln \left(\int_{\mathbb{T}} \exp(\phi_1) dx \right) + m(1-t) \left(\int_{\mathbb{T}} \exp(\phi_2) dx \right)
\end{aligned}$$

Le premier terme est strictement convexe. J est strictement convexe et coercive sur un espace de Banach donc elle admet un unique point de minimum global.

On vérifie que J est Fréchet-différentiable de classe C^1 . On en déduit que l'unique point critique de J correspond au point de minimum global.

Puisque la différentielle de J en ϕ appliquée à h est

$$d_\phi J.h = \delta^2 \int_{\mathbb{T}} \partial_x \partial_x h dx - \int_{\mathbb{T}} n_i h dx + m \frac{\int_{\mathbb{T}} e^\phi h dx}{\int_{\mathbb{T}} e^\phi dx}$$

on trouve que le point de minimum global, noté à partir de maintenant ϕ_∞ , est tel que pour toute $h \in H^1(\mathbb{T})$ à moyenne nulle,

$$\delta^2 \int_{\mathbb{T}} \partial_x \phi_\infty \partial_x h dx = \int_{\mathbb{T}} n_i h dx - m \frac{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi_\infty} h dx}{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi_\infty} dx}$$

Remarquons que l'égalité est vérifiée aussi pour les fonctions constantes, donc elle est vraie pour toute $h \in H^1(\mathbb{T})$, et en particulier pour toute $h \in C^\infty(\mathbb{T})$.

Comme $n_i - \frac{m}{\int_{\mathbb{T}} e^\phi dx} e^\phi \in L^2(\mathbb{T})$, on en déduit que $\phi_\infty \in H^2(\mathbb{T})$. En faisant une intégration par partie et en utilisant la densité de $C^\infty(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$, on en déduit que ϕ_∞ vérifie l'EDP suivante :

$$-\delta^2 \partial_{xx} \phi_\infty = n_i - \frac{m}{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi_\infty} dx} e^{\phi_\infty}$$

Réciproquement si une fonction de $H^2(\mathbb{T})$ vérifie l'équation presque partout alors c'est l'unique point de minimum global ϕ_∞ . On a donc montré l'existence et l'unicité d'une solution.

Dans la suite, on pose $\tilde{\phi}_\infty = \phi_\infty - \ln \left(\delta^2 \frac{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi_\infty} dx}{m} \right)$. Elle vérifie l'équation

$$-\partial_{xx} \tilde{\phi}_\infty = \frac{n_i}{\delta^2} - e^{\tilde{\phi}_\infty}$$

dont la formulation faible est : $\forall h \in H^1(\mathbb{T})$,

$$\int_{\mathbb{T}} \partial_x \tilde{\phi}_\infty \partial_x h dx = \int_{\mathbb{T}} \frac{n_i}{\delta^2} h dx - \int_{\mathbb{T}} e^{\tilde{\phi}_\infty} h dx$$

Soit G une fonction de $C^1(\mathbb{R})$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et nulle sur $] -\infty, 0]$.

Posons $h = G \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\|n_i\|_\infty}{\delta^2} \right)$ dans la dernière équation. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} (\partial_x \tilde{\phi}_\infty)^2 e^{\tilde{\phi}_\infty} G' \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\|n_i\|_\infty}{\delta^2} \right) dx &= \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{n_i}{\delta^2} - \frac{\|n_i\|_\infty}{\delta^2} \right) G \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\|n_i\|_\infty}{\delta^2} \right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{T}} \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\|n_i\|_\infty}{\delta^2} \right) G \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\|n_i\|_\infty}{\delta^2} \right) dx
\end{aligned}$$

Le membre de gauche est positif. Dans le membre de droite, la première intégrale est négative. On en déduit alors que la dernière intégrale est négative, mais comme $tG(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \int_{\mathbb{T}} \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\|n_i\|_\infty}{\delta^2} \right) G \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\|n_i\|_\infty}{\delta^2} \right) dx \leq 0$$

ce qui veut dire que presque partout dans \mathbb{T} , $e^{\tilde{\phi}_\infty} \leq \frac{\|n_i\|_\infty}{\delta^2}$. Finalement si $\rho_\infty(x) = \frac{m}{\int_{\mathbb{T}} e^{\phi} dx} e^{\phi(x)}$, alors

$$\rho_\infty(x) \leq \|n_i\|_\infty \text{ presque partout dans le tore}$$

Si maintenant G est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$ négative, strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et nulle sur $[0, +\infty[$, on peut répéter le même raisonnement. Posons $h = G \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{\delta^2} \right)$ dans la dernière équation. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} (\partial_x \tilde{\phi}_\infty)^2 e^{\tilde{\phi}_\infty} G' \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{\delta^2} \right) dx &= \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{n_i}{\delta^2} - \frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{\delta^2} \right) G \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{\delta^2} \right) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{T}} \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{\delta^2} \right) G \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{\delta^2} \right) dx \end{aligned}$$

Le membre de gauche est positif. Dans le membre de droite, la première intégrale est négative. On en déduit alors que la dernière intégrale est négative, mais comme $tG(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \int_{\mathbb{T}} \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{\delta^2} \right) G \left(e^{\tilde{\phi}_\infty} - \frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{\delta^2} \right) dx \leq 0$$

ce qui veut dire que presque partout dans \mathbb{T} , $e^{\tilde{\phi}_\infty} \geq \frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{\delta^2}$. Finalement

$$\inf_{\mathbb{T}} n_i \leq \rho_\infty(x) \leq \|n_i\|_\infty \text{ presque partout dans le tore}$$

ce qui implique les inégalités dans $L^\infty(\mathbb{T})$.

Pour prouver les estimations dans les autres espaces L^p , reprenons l'équation vérifiée par $\tilde{\phi}_\infty$. Soit $p \geq 1$. On la multiplie par $e^{(p-1)\tilde{\phi}_\infty}$, puis on intègre et on réalise une intégration par partie pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{T}} e^{p\tilde{\phi}_\infty} dx \leq \int_{\mathbb{T}} e^{p\tilde{\phi}_\infty} dx + (p-1) \int_{\mathbb{T}} (\partial_x \tilde{\phi}_\infty)^2 e^{(p-1)\tilde{\phi}_\infty} dx \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{n_i}{\delta^2} e^{(p-1)\tilde{\phi}_\infty} dx$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve alors que

$$\|e^{\tilde{\phi}_\infty}\|_{L^p(\mathbb{T})}^p \leq \frac{1}{\delta^2} \|n_i\|_{L^p(\mathbb{T})} \|e^{\tilde{\phi}_\infty}\|_{L^p(\mathbb{T})}^{p-1}$$

ce qui donne la borne L^p , $1 \leq p < \infty$. □

4.4 Hypocoercivité H^1

Une preuve d'hypocoercivité à déjà été fourni par Herda et Rodrigues dans [4], où la preuve est faite en deux temps. Dans un premier temps, les termes dépendant de ψ sont ignorés pour considérer l'équation linéaire $\partial_t h + Lh = 0$. L'hypocoercivité est démontrée pour ce système linéaire. Dans un second temps, une preuve par point fixe permet de montrer l'hypocoercivité du système non-linéaire entier. La preuve donnée dans [4] permet d'obtenir des constantes

explicites selon $\tau(\varepsilon)$ et δ et permet d'étudier des équations limites. La difficulté rencontrée est qu'il faut supposer δ assez grande pour conclure. Ceci présente un problème car δ est un paramètre plutôt voué à être petit dans un plasma en vertu de la quasi-neutralité.

Nous allons refaire une partie de la preuve pour montrer d'où vient la contrainte sur δ . Nous n'essayerons pas d'obtenir des constantes explicites. Le système sur lequel nous allons travailler est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + Lh - \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi v & = 0 \quad \forall t > 0 \\ -\delta^2 \partial_{xx} \psi & = -\int_{\mathbb{R}} h f_{\infty} dv \quad \forall t \geq 0 \\ h(t, \cdot, \cdot) \in \mathcal{H}_0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Ce système est linéaire.

Une propriété importante de l'espace fonctionnel \mathcal{H}_0 auquel la perturbation h appartient est l'existence de l'inégalité de Poincaré suivante. Elle nous permettra de prouver l'hypocoercivité.

Proposition 3. (voir ([4]) Il existe une constante $K > 0$ telle que pour toute fonction $h \in \mathcal{H}_0$,

$$\|h\|^2 \leq K \|e^{\phi_{\infty}}\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})} \|e^{-\phi_{\infty}}\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})} (\|Ch\|^2 + \|Ah\|^2)$$

On notera $K_{\phi_{\infty}} := K \|e^{\phi_{\infty}}\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})} \|e^{-\phi_{\infty}}\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})}$ la constante de Poincaré dans \mathcal{H}_0 .

Définissons l'entropie par

$$\mathcal{E}(h) = \alpha_1 (\|h\|^2 + \delta^2 \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2) + \alpha_2 \varepsilon (\|Ah\|^2 + \delta^2 \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2) + \alpha_3 \varepsilon \|Ch\|^2 + \alpha_4 \varepsilon \langle Ah, Ch \rangle$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$ sont à fixer. La proposition suivante donne un encadrement de l'entropie par la norme $\|h\|_{H^1}^2 = \|h\|^2 + \|Ah\|^2 + \|Ch\|^2$.

Proposition 4. Si il existe $\eta > 0$ tel que $\alpha_2 - \frac{\alpha_4}{2\eta} > 0$ et $\alpha_3 - \frac{\alpha_4\eta}{2} > 0$ alors il existe $m, M > 0$ tels que

$$m(\|h\|_{H^1}^2 + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2) \leq \mathcal{E}(h) \leq M(\|h\|_{H^1}^2 + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2)$$

Démonstration. La preuve repose sur l'utilisation de l'inégalité de Young avec $\eta > 0$:

$$|\alpha_4 \varepsilon \langle Ah, Ch \rangle| \leq \frac{\alpha_4 \varepsilon}{2\eta} \|Ah\|^2 + \frac{\alpha_4 \varepsilon \eta}{2} \|Ch\|^2$$

On obtient l'encadrement suivant :

$$\alpha_1 \|h\|^2 + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_4}{2\eta} \right) \varepsilon \|Ah\|^2 + \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_4\eta}{2} \right) \varepsilon \|Ch\|^2 + \delta^2 (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon) \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \mathcal{E}(h)$$

et

$$\mathcal{E}(h) \leq \alpha_1 \|h\|^2 + \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_4}{2\eta} \right) \varepsilon \|Ah\|^2 + \left(\alpha_3 + \frac{\alpha_4\eta}{2} \right) \varepsilon \|Ch\|^2 + \delta^2 (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon) \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

Sous l'hypothèse de l'énoncé, on pose alors $m = \min \left(\alpha_1, \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_4}{2\eta} \right) \varepsilon, \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_4\eta}{2} \right) \varepsilon \right)$ et $M = \max \left(\alpha_1, \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_4}{2\eta} \right) \varepsilon, \left(\alpha_3 + \frac{\alpha_4\eta}{2} \right) \varepsilon \right)$. On obtient le résultat. \square

On se sert maintenant des estimations d'énergie et de l'entropie \mathcal{E} pour montrer le résultat de convergence vers l'état stationnaire suivant :

Proposition 5. *Sous l'hypothèse suivante sur la longueur de Debye δ :*

$$\frac{1}{\delta^2} < \sqrt{\frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{K}} \frac{1}{c_p \|n_i\|_{\infty}}$$

(K étant fourni par la proposition 3) il existe des constantes $C, \kappa > 0$ dépendant de $\varepsilon, \tau(\varepsilon)$ telles que si h est solution de (6) alors

$$\|h\|_{H^1} \leq C \|h_0\|_{H^1} e^{-\kappa t}$$

Démonstration. On calcule $\frac{d\mathcal{E}(h)}{dt}$ en utilisant les estimations d'énergie (1) :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}(h)}{dt} &= -\frac{2\alpha_1}{\tau(\varepsilon)} \|Ah\|^2 - \frac{2\alpha_2\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} (\|Ah\|^2 + \|A^2h\|^2) - 2\alpha_2 \langle Ch, Ah \rangle \\ &\quad - \frac{2\alpha_3\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} \|ACh\|^2 - 2\alpha_3 \langle \partial_{xx}\phi_{\infty}Ah, Ch \rangle + 2\alpha_3 \langle \partial_{xx}\psi v, Ch \rangle \\ &\quad - \frac{\alpha_4\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} (\langle Ah, Ch \rangle + 2 \langle A^2h, ACh \rangle) - \alpha_4 (\|Ch\|^2 + \langle Ah, \partial_{xx}\phi_{\infty}Ah \rangle) \\ &\quad + \alpha_4 (\langle \partial_x\psi, Ch \rangle + \langle \partial_{xx}\psi v, Ah \rangle) \end{aligned}$$

Dans cette expression, 5 produits scalaires n'ont pas de signe. On majore en prenant la valeur absolue :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}(h)}{dt} &\leq \left(\alpha_4 \|\partial_{xx}\phi_{\infty}\|_{\infty} - \frac{2\alpha_1}{\tau(\varepsilon)} - \frac{2\alpha_2\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} \right) \|Ah\|^2 - \frac{2\alpha_2\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} \|A^2h\|^2 - \frac{2\alpha_3\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} \|ACh\|^2 \\ &\quad + \left(2\alpha_2 + \frac{\alpha_4\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} + 2\alpha_3 \|\partial_{xx}\phi_{\infty}\|_{\infty} \right) |\langle Ch, Ah \rangle| - \alpha_4 \|Ch\|^2 \\ &\quad + \frac{2\alpha_4\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} |\langle A^2h, ACh \rangle| + 2\alpha_3 |\langle \partial_{xx}\psi v, Ch \rangle| + \alpha_4 |\langle \partial_x\psi, Ch \rangle| + \alpha_4 |\langle \partial_{xx}\psi v, Ah \rangle| \end{aligned}$$

Puis en utilisant l'inégalité de Young, avec $\eta, \mu, \nu, \omega, \theta > 0$:

$$\begin{aligned} \left(2\alpha_2 + \frac{\alpha_4\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} + 2\alpha_3 \|\partial_{xx}\phi_{\infty}\|_{\infty} \right) |\langle Ch, Ah \rangle| &\leq \frac{1}{2\theta} \left(2\alpha_2 + \frac{\alpha_4\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} + 2\alpha_3 \|\partial_{xx}\phi_{\infty}\|_{\infty} \right)^2 \|Ah\|^2 + \frac{\theta}{2} \|Ch\|^2 \\ \frac{2\alpha_4\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} |\langle A^2h, ACh \rangle| &\leq \frac{\alpha_4\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} \left(\frac{\|A^2h\|^2}{\eta} + \eta \|ACh\|^2 \right) \\ 2\alpha_3 |\langle \partial_{xx}\psi v, Ch \rangle| &\leq \alpha_3 \left(\frac{\|\partial_{xx}\psi v\|^2}{\nu} + \nu \|Ch\|^2 \right) \\ \alpha_4 |\langle \partial_{xx}\psi v, Ah \rangle| &\leq \frac{\alpha_4}{2} \left(\frac{\|\partial_{xx}\psi v\|^2}{\omega} + \omega \|Ah\|^2 \right) \\ \alpha_4 |\langle \partial_x\psi, Ch \rangle| &\leq \frac{\alpha_4}{2} \left(\frac{\|\partial_x\psi\|^2}{\mu} + \mu \|Ch\|^2 \right) \end{aligned}$$

Il faut majorer les différentes normes faisant intervenir ψ .

En utilisant directement l'équation de Poisson,

$$\begin{aligned}
\|\partial_{xx}\psi v\|^2 &= \int_{\mathbb{T}} (\partial_{xx}\psi)^2 \rho_{\infty} dx \\
&\leq \|\rho_{\infty}\|_{\infty} \|\partial_{xx}\psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \|\rho_{\infty}\|_{\infty} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{R}} h f_{\infty} dv \right)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \|\rho_{\infty}\|_{\infty} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{R}} h^2 \rho_{\infty}^2 \mathcal{M}(v) dv dx \quad (\text{Jensen en } v) \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \|\rho_{\infty}\|_{\infty}^2 \|h\|^2
\end{aligned}$$

Prenons c_p la constante de Poincaré sur le tore, c'est-à-dire la constante minimale telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{T})$ de moyenne nulle,

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq c_p \|\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

En considérant la formulation variationnelle de l'équation de Poisson pour le potentiel, en la testant sur ψ , et en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré on obtient que

$$\frac{\delta^2}{c_p^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \delta^2 \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \|\sqrt{\rho_{\infty}}\|_{\infty} \|h\| \|\psi\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|\sqrt{\rho_{\infty}}\|_{\infty} \|h\| c_p \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{L^2(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{\delta^2} c_p^2 \|\sqrt{\rho_{\infty}}\|_{\infty} \|h\| \\
\|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{\delta^2} c_p \|\sqrt{\rho_{\infty}}\|_{\infty} \|h\|
\end{aligned}$$

On a donc la majoration

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}(h)}{dt} &\leq \left(\alpha_4 \|\partial_{xx}\phi_{\infty}\|_{\infty} - \frac{2\alpha_1}{\tau(\varepsilon)} - \frac{2\alpha_2\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} + \frac{1}{2\theta} \left(2\alpha_2 + \frac{\alpha_4\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} + 2\alpha_3 \|\partial_{xx}\phi_{\infty}\|_{\infty} \right)^2 + \frac{\alpha_4\omega}{2} \right) \|Ah\|^2 \\
&+ \left(-\alpha_4 + \frac{\theta}{2} + \alpha_3\nu + \frac{\mu}{2}\alpha_4 \right) \|Ch\|^2 \\
&+ \left(\frac{\alpha_3}{\delta^2\nu} \|\rho_{\infty}\|_{\infty}^2 + \frac{\alpha_4}{2\delta^2\omega} \|\rho_{\infty}\|_{\infty}^2 + \frac{\alpha_4}{2\mu\delta^4} c_p^2 \|\sqrt{\rho_{\infty}}\|_{\infty}^2 \right) \|h\|^2 \\
&+ \left(\frac{\alpha_4\varepsilon}{\tau(\varepsilon)\eta} - \frac{2\alpha_2\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} \right) \|A^2h\|^2 \\
&+ \left(\frac{\alpha_4\varepsilon\eta}{\tau(\varepsilon)} - \frac{2\alpha_3\varepsilon}{\tau(\varepsilon)} \right) \|ACH\|^2
\end{aligned}$$

On veut que les deux derniers termes soient négatifs. Ainsi, on obtient les conditions :

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &\geq \frac{\alpha_4\eta}{2} \\
\alpha_2 &\geq \frac{\alpha_4}{2\eta}
\end{aligned}$$

On prendra l'égalité pour ces deux conditions, donc

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_4 \eta}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_4}{2\eta}$$

On veut que les deux premiers termes soient strictement négatifs. Remarquons que α_1 n'apparaît que dans le premier terme, et donc que l'on pourra toujours choisir α_1 assez grand pour que ce terme soit strictement négatif. On se concentre alors sur le deuxième terme. Il existe $\alpha_4 > 0$ tel que le deuxième terme soit négatif si et seulement si :

$$-1 + \frac{\nu\eta}{2} + \frac{\mu}{2} < 0$$

Cette condition est vérifiée pour des paramètres μ, ν, η suffisamment petits.

On choisit donc α_4 respectant cette dernière condition.

Enfin, on souhaite contrôler le troisième terme par les deux premiers, via l'inégalité de Poincaré dans \mathcal{H}_0 (voir proposition 3). On peut supposer que les deux premiers termes ont la même valeur $-\beta < 0$ et le troisième vaut $\gamma > 0$. Si $k > 1$ on va avoir :

$$\frac{d\mathcal{E}(h)}{dt} \leq -\beta \left(1 - \frac{1}{k}\right) (\|Ah\|^2 + \|Ch\|^2) - \frac{\beta}{kK_{\phi_\infty}} \|h\|^2 + \gamma \|h\|^2$$

Ainsi, on va devoir montrer que $\gamma - \frac{1}{kK_{\phi_\infty}}\beta < 0$, avec $k > 1$.

Cette dernière condition sur les paramètres est explicitement :

$$\frac{1}{kK_{\phi_\infty}} \left((-1 + \frac{\nu\eta}{2} + \frac{\mu}{2})\alpha_4 + \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\eta\alpha_4}{2\delta^2\nu} \|\rho_\infty\|_\infty^2 + \frac{\alpha_4}{2\delta^2\omega} \|\rho_\infty\|_\infty^2 + \frac{\alpha_4}{2\mu\delta^4} c_p^2 \|\sqrt{\rho_\infty}\|_\infty^2 < 0$$

Encore une fois, cette inégalité a une solution $\alpha_4 > 0$ si et seulement si

$$\frac{1}{kK_{\phi_\infty}} \left(-1 + \frac{\nu\eta}{2} + \frac{\mu}{2} \right) + \frac{\eta}{2\delta^2\nu} \|\rho_\infty\|_\infty^2 + \frac{1}{2\delta^2\omega} \|\rho_\infty\|_\infty^2 + \frac{1}{2\mu\delta^4} c_p^2 \|\sqrt{\rho_\infty}\|_\infty^2 < 0$$

Supposons maintenant que $k > 1$ soit fixé. On peut choisir ν assez petit, $\eta = \nu^2$ et ω assez grands tels que quelque soit $\varepsilon' > 0$,

$$\frac{1}{kK_{\phi_\infty}} \frac{\nu\eta}{2} + \frac{\eta}{2\delta^2\nu} \|\rho_\infty\|_\infty^2 + \frac{1}{2\delta^2\omega} \|\rho_\infty\|_\infty^2 < \varepsilon'$$

Donc pour tout $\varepsilon' > 0$,

$$-\frac{1}{kK_{\phi_\infty}} + \frac{\mu}{2kK_{\phi_\infty}} + \frac{1}{2\mu\delta^4} c_p^2 \|\sqrt{\rho_\infty}\|_\infty^2 + \varepsilon' < 0$$

Finalement on obtient que la condition est

$$-\frac{\mu}{kK_{\phi_\infty}} + \frac{\mu^2}{2kK_{\phi_\infty}} + \frac{1}{2\delta^4} c_p^2 \|\sqrt{\rho_\infty}\|_\infty^2 < 0$$

Le membre de gauche est un polynôme de degré 2 en μ . Cette inéquation a une solution en μ si et seulement si le discriminant est strictement positif, c'est-à-dire si

$$\frac{1}{kc_p^2 K_{\phi_\infty}} > \frac{1}{\delta^4} \|\sqrt{\rho_\infty}\|_\infty^2$$

En utilisant les inégalités trouvées dans (8), on remarque que cette inégalité est vraie dès que

$$\frac{1}{\delta^2} < \sqrt{\frac{\inf_{\mathbb{T}} n_i}{kK}} \frac{1}{c_p \|n_i\|_\infty}$$

Ainsi, la longueur de Debye doit être choisie assez grande en fonction de la densité ionique donnée.

Enfin, en posant $C > 0$ une constante adéquate et en utilisant la proposition (4) :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}(h)}{dt} &\leq -\left(1 - \frac{1}{k}\right) \beta(\|Ah\|^2 + \|Ch\|^2) - \left(+\frac{1}{kK_{\phi_\infty}}\beta - \gamma\right) \|h\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \beta(\|Ah\|^2 + \|Ch\|^2) - \frac{1}{2K_{\phi_\infty}}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \beta\|h\|^2 - \left(+\frac{1}{kK_{\phi_\infty}}\beta - \gamma\right) \|h\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \beta(\|Ah\|^2 + \|Ch\|^2) - \frac{1}{2K_{\phi_\infty}}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \beta \frac{\delta^4}{(c_p \|\sqrt{\rho_\infty}\|_\infty)^2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{kK_{\phi_\infty}}\beta - \gamma\right) \|h\|^2 \\ &\leq -C(\|h\|^2 + \|Ah\|^2 + \|Ch\|^2 + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2) \\ &\leq -\frac{C}{M} \mathcal{E}(h) \end{aligned}$$

Après utilisation du lemme de Gronwall et la proposition (4) :

$$\mathcal{E}(h) \leq \mathcal{E}(h_0) e^{-\frac{C}{M}t} \leq M \|h_0\|^2 e^{-\frac{C}{M}t}$$

□

On remarque que le terme problématique dans la preuve est $\langle \partial_x \psi, Ch \rangle$.

Nos majorations ont peut-être été trop grossières. On va prouver l'hypocoercivité L^2 en utilisant une décomposition dans la base de Hermite. On aura une lecture plus complète de chaque termes, on pourra effectuer des majorations plus précises et de plus, la projection du système sur la base de Hermite pourrait être utilisée dans le cadre d'un schéma numérique.

4.5 Hypocoercivité L^2

On va essayer de prouver l'hypocoercivité pour la norme de \mathcal{H}_0 . Pour ce faire, on va projeter l'équation (5) sur la base des polynômes de Hermite. Remarquons que $\int_{\mathbb{R}} h^2 \mathcal{M}(v) dv < \infty$ pour presque tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{T}$. Ainsi, une base hilbertienne adaptée est la base des polynômes de Hermite normalisés $(\tilde{H}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, qui est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(v) dv)$ muni du produit scalaire usuel (voir annexe (5)).

En utilisant ces deux relations, on montre que la base de Hermite diagonalise l'opérateur A^*A :

$$\begin{aligned} A^*A\tilde{H}_k &= (v\partial_v - \partial_{vv})\tilde{H}_k \\ &= k\tilde{H}_k \end{aligned}$$

Les coefficients de h dans cette base sont les fonctions de temps et d'espace $C_k(t, x)$, mais on préférera travailler avec les coefficients $D_k(t, x) = C_k(t, x)\sqrt{\rho_\infty(x)}$, d'où

$$h(t, x, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k(t, x)}{\sqrt{\rho_\infty(x)}} \tilde{H}_k(v)$$

Les coefficients $D_k, k \in \mathbb{N}$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t D_k + \frac{1}{\varepsilon}(\sqrt{k+1} \mathcal{A} D_{k+1} - \sqrt{k} \mathcal{A}^* D_{k-1}) &= -\frac{k}{\tau(\varepsilon)} D_k + \mathbb{1}_{k=1} \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi \sqrt{\rho_\infty} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{k} \partial_x \psi D_{k-1} \\ \delta^2 \partial_{xx} \psi &= D_0 \sqrt{\rho_\infty} \end{cases} \quad (10)$$

$\mathcal{A}, \mathcal{A}^*$ sont deux opérateurs linéaires définis sur $H^1(\mathbb{T})$, adjoints dans $L^2(\mathbb{T})$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u &= \partial_x u - \frac{E_\infty}{2} u \\ \mathcal{A}^*u &= -\partial_x u - \frac{E_\infty}{2} u \end{cases}$$

La version linéarisée du système est la suivante :

$$\begin{cases} \partial_t D_k + \frac{1}{\varepsilon}(\sqrt{k+1} \mathcal{A} D_{k+1} - \sqrt{k} \mathcal{A}^* D_{k-1}) &= -\frac{k}{\tau(\varepsilon)} D_k + \mathbb{1}_{k=1} \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \psi \sqrt{\rho_\infty} \\ \delta^2 \partial_{xx} \psi &= D_0 \sqrt{\rho_\infty} \end{cases} \quad (11)$$

4.5.1 Résultats préliminaires

Les estimations d'énergies obtenues précédemment ne changent pas. On écrit l'expression des différentes normes en utilisant la base de Hermite :

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ \|Ah\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ \|Ch\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{A}^* D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ \langle Ah, Ch \rangle &= - \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k+1} \int_{\mathbb{T}} D_{k+1} \mathcal{A}^* D_k dx \end{aligned}$$

On peut établir la conservation de la masse pour le système. En multipliant la première équation de 10 par $\sqrt{\rho_\infty}$, puis en intégrant sur le tore, on obtient que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} D_0 \sqrt{\rho_\infty} dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{T}} \mathcal{A} D_1 \sqrt{\rho_\infty} dx = 0$$

On passe à l'adjoint dans la dernière intégrale, puis on remarque que $\mathcal{A}^* \sqrt{\rho_\infty} = 0$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{T}} D_0(t, x) \sqrt{\rho_\infty(x)} dx = 0$$

On aura besoin de l'inégalité de Poincaré suivante pour établir l'existence et l'unicité de l'équation elliptique

Proposition 6. *Il existe une constante $C_{\phi_\infty} > 0$ dépendant de l'état stationnaire telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{T})$ respectant la condition $\int_{\mathbb{T}} u \sqrt{\rho_\infty} dx = 0$,*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_{\phi_\infty} \|\mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde : supposons qu'une telle constante n'existe pas. Alors il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonction de $H^1(\mathbb{T})$ telle que

$$\|\mathcal{A}^* u_n\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{n} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$. Par inégalité triangulaire, on obtient que

$$\|\partial_x u_n\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{n} + \frac{\|E_\infty\|_\infty}{2}$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\mathbb{T})$. Le théorème de Rellich (voir [3]) énonce alors qu'il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $u \in L^2(\mathbb{T})$. Comme $\mathcal{A}^* u_{n_k} = \mathcal{A}^* u_{n_k} - \frac{E_\infty}{2} u + \frac{E_\infty}{2} u$, on obtient en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\frac{1}{n_k} + \frac{\|E_\infty\|_\infty}{2} \|u - u_{n_k}\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq \|\partial_x u_{n_k} + \frac{E_\infty}{2} u\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

Ceci montre que $\lim_{k \rightarrow \infty} \partial_x u_{n_k} = -\frac{E_\infty}{2} u$ dans $L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, $u \in H^1(\mathbb{T})$ et $\partial_x u = -\frac{E_\infty}{2} u$. Cette dernière équation s'intègre et donne que $u(x) = C \exp(\frac{\phi_\infty(x)}{2})$.

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\langle u_{n_k}, \sqrt{\rho_\infty} \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0$, un passage à la limite donne que $\langle u, \sqrt{\rho_\infty} \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0 = C \|\rho_\infty\|_{L^1(\mathbb{T})}$.

Comme $\|\rho_\infty\|_{L^1(\mathbb{T})} > 0$, ceci implique que $C = 0$ puis $u = 0$, mais constitue une contradiction avec le fait que $\|u\|_{L^2(\mathbb{T})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k}\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$. □

Pour prouver l'hypocoercivité, on va avoir besoin d'étudier spécifiquement une EDP elliptique. L'entropie qui sera utilisée contiendra un terme faisant apparaître la solution de cette équation pour une donnée bien choisie.

Proposition 7. *Pour tout $g \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\int_{\mathbb{T}} g \sqrt{\rho_\infty} dx = 0$, le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} \mathcal{A} \mathcal{A}^* u &= g \\ \int_{\mathbb{T}} u \sqrt{\rho_\infty} dx &= 0 \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in H^2(\mathbb{T})$.

Démonstration. Soit v un élément d'un espace fonctionnel V . On multiplie l'EDP par v puis on intègre par partie pour obtenir

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{A}^* u \mathcal{A}^* v dx = \int_{\mathbb{T}} g v dx$$

On pose $V = \{v \in L^2(\mathbb{T}) \mid \langle v, \sqrt{\rho_\infty} \rangle = 0\}$. La formulation variationnelle demande de trouver $u \in V$ telle que pour tout $v \in V$, la dernière égalité soit vraie. On va utiliser le théorème de Lax-Milgram. Le membre de gauche est une forme bilinéaire. Sa coercivité découle de l'inégalité de Poincaré sur V . En effet, en utilisant cette dernière ainsi que l'inégalité triangulaire,

$$\|\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq 2 \left(1 + \frac{\|E_\infty\|_\infty^2}{4C_{\phi_\infty}} \right) \|\mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

d'où

$$\min \left(C_{\phi_\infty}, \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\|E_\infty\|_\infty^2}{4C_{\phi_\infty}} \right)} \right) \|u\|_{H^1(\mathbb{T})}^2 \leq \|\mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

La continuité se montre comme il suit :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} \mathcal{A}^* u \mathcal{A}^* v dx \right| &\leq \|\mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})} \|\mathcal{A}^* v\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq \max \left(1, \frac{\|E_\infty\|_\infty}{2} \right) \|u\|_{H^1(\mathbb{T})} \|v\|_{H^1(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

La continuité du membre de droite est évidente. Il existe donc une unique solution $u \in V$ à la formulation variationnelle par le théorème de Lax-Milgram. En testant la formulation faible sur $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$, puis en utilisant la continuité de la forme linéaire et l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$\left| \int_{\mathbb{T}} \mathcal{A}^* u \partial_x \phi dx \right| \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{T})} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{T})} + \left| \int_{\mathbb{T}} \mathcal{A}^* u \frac{E_\infty}{2} \phi dx \right| \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{T})} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{T})} + \frac{\|E_\infty\|_\infty}{2} \|\mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

ce qui montre que $\mathcal{A}^* u \in H^2(\mathbb{T})$, et que $u \in H^2(\mathbb{T})$. Ainsi, en considérant la formulation faible appliquée à $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$, on peut passer à l'adjoint et déduire que

$$\int_{\mathbb{T}} (\mathcal{A} \mathcal{A}^* u - g) \phi dx = 0$$

On en déduit par densité dans $L^2(\mathbb{T})$ que $\mathcal{A} \mathcal{A}^* u = g$ presque partout dans le tore. \square

Maintenant que l'équation 7 admet une unique solution, on va avoir besoin de diverses estimations sur la solution. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8. *Soit $g \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\int_{\mathbb{T}} g \sqrt{\rho_\infty} dx = 0$. Soit u la solution du problème aux limites 7 associée. Alors :*

- $\|\mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_{\phi_\infty} \|g\|_{L^2(\mathbb{T})}$;
- $\|\mathcal{A}^{*2} u\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq (1 + \|E_\infty\|_\infty C_{\phi_\infty}) \|g\|_{L^2(\mathbb{T})}$;
- Si de plus $g = -D_0$, alors $\|\partial_t \mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|D_1\|_{L^2(\mathbb{T})}$.

Démonstration. En testant la formulation faible du problème aux limites sur la solution u puis en utilisant l'inégalité de Poincaré pour \mathcal{A}^* , on obtient :

$$\|\mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{T})} \|u\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_{\phi_\infty} \|g\|_{L^2(\mathbb{T})} \|\mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

ce qui donne la première inégalité.

Ensuite, on écrit que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^{*2} u\| &= \| -\mathcal{A} \mathcal{A}^* u + (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) \mathcal{A}^* u \|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \| -\mathcal{A} \mathcal{A}^* u - E_\infty \mathcal{A}^* u \|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq \|g\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|E_\infty\|_\infty C_{\phi_\infty} \|g\|_{L^2(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire et la première inégalité de l'énoncé.

Pour la troisième inégalité, on dérive en temps l'EDP du problème aux limites 7 puis on utilise la première ligne du système 10 pour obtenir que

$$\partial_t \mathcal{A} \mathcal{A}^* u = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A} D_1$$

Ceci donne que

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \langle \partial_t u, \partial_t \mathcal{A} \mathcal{A}^* u \rangle \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \langle \partial_t u, \mathcal{A} D_1 \rangle \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \langle \partial_t \mathcal{A}^* u, D_1 \rangle \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_t \mathcal{A}^* u\|_{L^2(\mathbb{T})} \|D_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

4.5.2 Etude du problème linéarisé

L'objectif de cette section est de montrer l'hypocoercivité du système linéarisé (11) en norme L^2 . Premièrement, on doit définir une entropie adaptée au problème. On aimerait montrer la décroissance exponentielle de la quantité

$$\|h\|^2 + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

Or, la première estimation d'énergie obtenue à 1 et l'écriture de $\|Ah\|$ dans la base de Hermite montre que la dérivée en temps donne bien une dissipation en tout les coefficients D_k , sauf pour D_0 qui en est absent. On doit donc ajouter un terme dont la dérivée en temps donne $-\|D_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$. On procède comme dans l'article de Filbet et Blaustein ([1]). L'entropie que l'on considère est définie par

$$\mathcal{E}(h) = \alpha_1 \frac{1}{2} \left(\|h\|^2 + \delta^2 \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \right) + \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon} \langle \mathcal{A} D_1, u \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \quad (12)$$

où u est la solution du problème aux limites 7 avec donnée $-D_0$ et $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

La première chose à établir est un encadrement de l'entropie par la norme d'intérêt.

Proposition 9. *Sous les hypothèses $\alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon} C_{\phi_\infty} < \frac{\alpha_1}{2}$ et $\delta \leq 1$, il existe deux constantes $m, M > 0$ telles que*

$$m(\|h\|^2 + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2) \leq \mathcal{E}(h) \leq M(\|h\|^2 + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2)$$

Les constantes sont explicites :

$$\begin{aligned} m &= \min \left(\alpha_1 \frac{\delta^2}{2}, \frac{\alpha_1}{2} - \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon} C_{\phi_\infty} \right) \\ M &= \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon} C_{\phi_\infty} \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} | \langle \mathcal{A}D_1, u \rangle_{L^2(\mathbb{T})} | &= | \langle D_1, \mathcal{A}^*u \rangle_{L^2(\mathbb{T})} | \\ &\leq C_{\phi_\infty} \|D_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \|D_0\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq C_{\phi_\infty} \|h\|^2 \end{aligned}$$

Le résultat est alors immédiat. □

On peut maintenant passer à la preuve d'hypocoercivité L^2 pour le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Contrairement au cas H^1 , on n'a pas besoin de l'hypothèse que δ soit assez grande. Ceci est rassurant d'un point de vue physique car δ est en réalité très petite.

Proposition 10. *Sous l'hypothèse que $h_0 \in L^2(f_\infty dx dv)$, il existe des constantes $C, \kappa > 0$ telles que si h est une solution de (6) alors*

$$\|h\|^2 + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq C(\|h\|^2 + \|\partial_x \psi|_{t=0}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2) e^{-\kappa t}$$

Démonstration. On commence par dériver en temps notre entropie \mathcal{E} . Le premier terme de l'entropie se dérive en utilisant la première équation de 1. Le second terme se dérive en appliquant \mathcal{A} à la deuxième équation du système 10, ce qui donne

$$\partial_t \mathcal{A}D_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{2} \mathcal{A}^2 D_2 - \mathcal{A} \mathcal{A}^* D_0 \right) - \frac{1}{\tau(\varepsilon)} \mathcal{A}D_1 + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}(\partial_x \psi \sqrt{\rho_\infty})$$

Ainsi, la dérivée de l'entropie est

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(h) &= -\frac{\alpha_1}{\tau(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} k \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \langle \sqrt{2} \mathcal{A}^2 D_2 - \mathcal{A} \mathcal{A}^* D_0, u \rangle \\ &\quad - \frac{\alpha_2}{\varepsilon} \langle \mathcal{A}D_1, u \rangle \\ &\quad + \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \langle \mathcal{A}(\partial_x \psi \sqrt{\rho_\infty}), u \rangle \\ &\quad + \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon} \langle \mathcal{A}D_1, \partial_t u \rangle \end{aligned}$$

En utilisant la définition de u et en passant à l'adjoint dans la première ligne, on obtient alors que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(h) &= -\frac{\alpha_1}{\tau(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} k \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \|D_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &\quad - \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \langle \sqrt{2} \mathcal{A}^2 D_2, u \rangle \\ &\quad - \frac{\alpha_2}{\varepsilon} \langle \mathcal{A}D_1, u \rangle \\ &\quad + \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \langle \mathcal{A}(\partial_x \psi \sqrt{\rho_\infty}), u \rangle \\ &\quad + \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon} \langle \mathcal{A}D_1, \partial_t u \rangle \end{aligned}$$

Les termes strictement négatifs sont regroupés sur la première ligne. On constate que le choix de u a effectivement permis de récupérer de la dissipation en D_0 . On doit maintenant majorer les termes non-signés, et les compenser par les termes de la première ligne.

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz, de Young puis les majorations de la proposition 8, on obtient que

$$\begin{aligned}
| -\alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} < \sqrt{2} \mathcal{A}^2 D_2, u > | &\leq \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} (1 + \|E_\infty\|_\infty C_{\phi_\infty}) \left(\frac{\|D_2\|_{L^2(\mathbb{T})}^2}{\eta} + \eta \|D_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \right) \\
| \frac{\alpha_2}{\varepsilon} < \mathcal{A} D_1, u > | &\leq \frac{\alpha_2 C_{\phi_\infty}}{2\varepsilon} \left(\frac{\|D_2\|_{L^2(\mathbb{T})}^2}{\theta} + \theta \|D_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \right) \\
| \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon} < \mathcal{A} D_1, \partial_t u > | &\leq \frac{\alpha_2 \tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \|D_1\|_{L^2(\mathbb{T})}^2
\end{aligned}$$

avec $\eta, \theta > 0$. Il reste alors un dernier terme à majorer qui dépend du champ électrique. Remarquons d'abord que pour tout $g \in H^1(\mathbb{T})$, $\partial_x g = \sqrt{\rho_\infty} \mathcal{A} \left(\frac{g}{\sqrt{\rho_\infty}} \right)$. On va montrer que le dernier terme est dissipatif, ce qui nous permet de conclure.

$$\begin{aligned}
\alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} < \mathcal{A}(\partial_x \psi \sqrt{\rho_\infty}), u > &= \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} < \partial_x \psi \sqrt{\rho_\infty}, \mathcal{A}^* u > \\
&= -\alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} < \psi, \partial_x (\sqrt{\rho_\infty} \mathcal{A}^* u) > \quad (\text{IPP}) \\
&= -\alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} < \psi, \sqrt{\rho_\infty} \mathcal{A} \mathcal{A}^* u > \\
&= \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} < \psi, \sqrt{\rho_\infty} D_0 > \\
&= \delta^2 \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} < \psi, \partial_{xx} \psi > \quad (\text{équation de Poisson}) \\
&= -\delta^2 \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \quad (\text{IPP})
\end{aligned}$$

Donc en rassemblant toutes les estimations,

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}}{dt} &\leq \left(-\frac{\alpha_1}{\tau(\varepsilon)} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2 \eta} (1 + \|E_\infty\|_\infty C_{\phi_\infty}) + \frac{\alpha_2 C_{\phi_\infty}}{2\varepsilon\theta} + \frac{\alpha_2 \tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\
&+ \alpha_2 \left(-\frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} (1 + \|E_\infty\|_\infty C_{\phi_\infty}) \eta + \frac{C_{\phi_\infty}}{2\varepsilon} \theta \right) \|D_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\
&- \delta^2 \alpha_2 \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2
\end{aligned}$$

Remarquons que α_1 n'est présent que dans le premier terme et est précédé du signe moins. On peut toujours choisir α_1 assez grand pour rendre le premier terme négatif. Passons au second terme. On peut rendre $\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon^2} (1 + \|E_\infty\|_\infty C_{\phi_\infty}) \eta + \frac{\alpha_2 C_{\phi_\infty}}{2\varepsilon} \theta$ arbitrairement petit, en rendant $\theta, \eta > 0$ arbitrairement petits. Le second terme est donc négatif.

Enfin, le dernier terme est négatif : c'est la dissipation selon la norme du potentiel.

Il existe alors $\beta, \gamma, \omega > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}}{dt} &\leq -\beta \sum_{k=1}^{\infty} k \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \gamma \|D_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \omega \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\
&\leq -\min(\beta, \gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \omega \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2
\end{aligned}$$

Posant $C > 0$ une constante appropriée, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}}{dt} &\leq -C(\|h\|^2 + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2) \\
&\leq -\frac{C}{M} \mathcal{E}(h)
\end{aligned}$$

Enfin en utilisant le lemme de Gronwall et l'encadrement de l'entropie, on obtient

$$\|h\|^2 + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \mathcal{E}(h) \leq \frac{M}{m} (\|h_0\|^2 + \|\partial_x \psi(t=0)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2) e^{-\frac{C}{M}t}$$

□

Cette fois, la valeur de la longueur de Debye ne nous a pas posé de souci. Il y a bien retour à l'équilibre en norme L^2 pour le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck linéarisé.

Pour établir l'hypocoercivité du système entier (10), il faudrait procéder par exemple par point fixe.

4.6 Schéma de volumes finis et expérimentations

On utilise la façon de procéder de Filbet et Blaustein pour définir un schéma de volumes finis à partir du système (10). On réutilise exactement les mêmes notations que pour les schémas précédents.

On choisit $N_x \in \mathbb{N}$. Soit un intervalle $[0, L]$, et $dx = \frac{L}{N_x}$. Pour simplifier les notations, on considère un maillage uniforme. On définit $x_{j+\frac{1}{2}} = jdx$ pour $j = 0, \dots, N_x$, et $x_j = (j - \frac{1}{2})dx$ pour $j = 1, \dots, N_x$. On définit les cellules $K_j =]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$, pour $j = 1, \dots, N_x$. Soit $dt > 0$ le pas de temps. La discrétisation en temps se fera aux instants $t_n = ndt$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On approche $D_k(t_n, x_j)$ par $D_{k,j}^n$, qui est une approximation de type volumes finis utilisant la formule du point milieu :

$$D_{k,j}^n = \frac{1}{dx} \int_{K_j} D_k(t_n, x) dx \approx D_k(t_n, x_j)$$

De même, on approche $\psi(t_n, x_j)$ par ψ_j^n avec la méthode des points milieux :

$$\psi_j^n = \frac{1}{dx} \int_{K_j} \psi(t, x) dx \approx D_k(t_n, x_j)$$

Pour résoudre l'équation de Poisson, on utilise le schéma de volumes finis classique avec conditions de Dirichlet. On peut ensuite éventuellement soustraire sa moyenne à la solution obtenue pour obtenir une solution de moyenne nulle. Pour obtenir ce schéma, on intègre l'équation sur une cellule K_j :

$$-(\partial_x \psi(t_n, x_{j+1/2}) - \partial_x \psi(t_n, x_{j-1/2})) = -\frac{1}{\delta^2} \int_{K_j} D_0(t_n, x) \sqrt{\rho_\infty(x)} dx$$

puis on utilise une approximation de la dérivée pour $1 \leq j \leq N_x - 1$

$$\partial_x \psi(t_n, x_{j+1/2}) \approx \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{dx}$$

Pour les cas $j = 0$ et $j = N_x$, on pose $\psi_0^n = \psi_{N_x+1}^n = 0$ pour respecter la condition de Dirichlet homogène et les dérivées deviennent

$$\partial_x \psi(t_n, x_{1/2}) \approx \frac{\psi_1^n}{dx/2} ; \partial_x \psi(t_n, x_{N_x+1/2}) \approx \frac{-\psi_{N_x}^n}{dx/2}$$

Maintenant, on choisit de faire un schéma d'Euler implicite en temps pour l'équation de Vlasov-Fokker-Planck, avec une discrétisation spatiale similaire à celle de Filbet et Blaustein. La seule différence est le choix d'une différence centrée pour approcher $\partial_x \psi$ dans cette équation. Disposant de $D_{k,j}^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq N_x$ et n fixé, on calculera les ψ_j^n et $D_{k,j}^{n+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq N_x$ en résolvant le système suivant, $\forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq N_x$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\frac{\psi_2^n}{dx} + \frac{3\psi_1^n}{dx} & = & -\frac{dx}{\delta^2} D_{0,1}^n \sqrt{\rho_\infty(x_1)} \\ -\frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{dx} & = & -\frac{dx}{\delta^2} D_{0,j}^n \sqrt{\rho_\infty(x_j)} \\ -\frac{\psi_{N_x-1}^n}{dx} + \frac{3\psi_{N_x}^n}{dx} & = & -\frac{dx}{\delta^2} D_{0,N_x}^n \sqrt{\rho_\infty(x_{N_x})} \\ \frac{D_{k,j}^{n+1} - D_{k,j}^n}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} (\sqrt{k+1} (\mathcal{A} D_{k+1}^{n+1})_j - \sqrt{k} (\mathcal{A}^* D_{k-1}^{n+1})_j) & = & -\frac{k}{\tau(\varepsilon)} D_{k,j}^{n+1} \\ & & + \mathbb{1}_{k=1} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2dx} \sqrt{\rho_\infty(x_j)} \\ & & + \sqrt{k} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2dx} D_{k-1,j}^{n+1} \end{array} \right.$$

Pour la discrétisation en espace, on doit discrétiser les opérateurs adjoints. Blaustein et Filbet choisissent les discrétisations suivantes : si $(u_j)_{1 \leq j \leq N_x}$ est une suite finie de réels, on la prolonge par $u_0 = u_{N_x}$ et $u_{N_x+1} = u_1$, et les opérateurs discrets \mathcal{A} et \mathcal{A}^* sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\mathcal{A}u)_j & = & \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2dx} - \frac{E_{\infty,j}}{2} u_j \\ (\mathcal{A}^*u)_j & = & -\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2dx} - \frac{E_{\infty,j}}{2} u_j \end{array} \right.$$

Les trois premières équations du système donnent une matrice constante au cours des itérations, mais la dernière équation donne une matrice dont les coefficients dépendent du potentiel et n'est donc pas constante.

Ce schéma préserve automatiquement l'état stationnaire qui est la fonction nulle. En effet, puisque tous nos opérateurs sont linéaires, si la donnée initiale est nulle alors la solution reste nulle au cours du temps.

Il reste un degré de liberté à fixer, qui est le choix de $E_{\infty,j}$. Pour ce schéma, ce choix ne modifie pas le caractère well-balanced mais la conservation de la masse. Le lemme suivant donne un choix possible de discrétisation pour préserver la masse.

Lemme 3. *Si pour tout $1 \leq j \leq N_x$,*

$$E_{\infty,j} = -\frac{\sqrt{\rho_{\infty}(x_{j+1})} - \sqrt{\rho_{\infty}(x_{j-1})}}{dx\sqrt{\rho_{\infty}(x_j)}}$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{N_x} dx D_{0,j}^{n+1} \sqrt{\rho_{\infty}(x_j)} = \sum_{i=0}^{N_x} dx D_{0,j}^n \sqrt{\rho_{\infty}(x_j)}$$

et le schéma est conservatif.

Démonstration. Prenons l'équation d'évolution sur le moment D_0 issue de 4.6. On la multiplie par $\sqrt{\rho_{\infty}(x_j)}$ pour tout $1 \leq j \leq N_x$ puis on somme sur j , ce qui donne :

$$\frac{1}{dt} \sum_{i=0}^{N_x} D_{0,j}^{n+1} \sqrt{\rho_{\infty}(x_j)} - D_{0,j}^n \sqrt{\rho_{\infty}(x_j)} = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{N_x} (\mathcal{A} D_1^{n+1}) \sqrt{\rho_{\infty}(x_j)}$$

On peut alors effectuer une intégration par partie discrète dans le membre de droite pour obtenir que

$$\frac{1}{dt} \sum_{i=0}^{N_x} D_{0,j}^{n+1} \sqrt{\rho_{\infty}(x_j)} - D_{0,j}^n \sqrt{\rho_{\infty}(x_j)} = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{N_x} (\mathcal{A}^* \sqrt{\rho_{\infty}})_j D_{1,j}^{n+1}$$

On s'aperçoit que $(\mathcal{A}^* \sqrt{\rho_{\infty}})_j$ s'annule si $E_{\infty,j}$ est donné par l'énoncé. Ceci entraîne alors la conservation de la masse. □

Nous ne prouvons pas plus de propriétés sur ce schéma par manque de temps. Une première propriété serait le caractère hypocoercif du schéma linéarisé, c'est-à-dire dans lequel on enlève le terme quadratique. Nous allons réaliser quelques simulations et comparer aux résultats obtenus pour le schéma naïf obtenu section 3.

4.7 Expérimentations

Pour nos simulations, on va étudier l'évolution de différentes normes :

$$\begin{aligned} \|f - f_{\infty}\|_{L^2(f_{\infty}^{-1} dx dv)} &= \|h\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2} \\ \|f - \rho \mathcal{M}\|_{L^2(f_{\infty}^{-1} dx dv)} &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \|D_k\|_{L^2(\mathbb{T})}^2} \\ \|\rho - \rho_{\infty}\|_{L^2(f_{\infty}^{-1} dx dv)} &= \|D_0\|_{L^2(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

ainsi que la norme $\|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathbb{T})}$. Notre cas test est le suivant. On choisit le potentiel stationnaire ϕ_∞ comme

$$\phi_\infty(x) = 0.1 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 0.9 \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

On va prendre une donnée initiale de la forme

$$f_0(x, v) = (1 + \gamma h_0(x)) f_\infty(x, v)$$

Ainsi la perturbation ne dépend que de x . Un calcul de la masse donne que

$$m = \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f_0(x, v) dx dv = m \left(1 + \gamma \frac{\int_{\mathbb{T}} h_0(x) \exp(\phi_\infty(x)) dx}{\int_{\mathbb{T}} \exp(\phi_\infty(x)) dx} \right)$$

Cette situation n'est possible que si $\int_{\mathbb{T}} h_0(x) \exp(\phi_\infty(x)) dx = 0$. On choisit alors

$$h_0(x) = \exp(-\phi_\infty(x)) - \frac{1}{\int_{\mathbb{T}} \exp(\phi_\infty(x)) dx}$$

La masse m a alors une valeur arbitraire, qu'on peut fixer à 1. Grâce à un logiciel de calcul formel, on peut alors calculer la constante c_0 :

$$c_0 = \frac{m}{\int_{\mathbb{T}} \exp(\phi_\infty(x)) dx} = \frac{1}{\int_{\mathbb{T}} \exp(\phi_\infty(x)) dx} \approx 0.82151486106$$

Initialement, le seul moment non nul est D_0 et vaut

$$D_0(0, x) = \gamma \left(\exp(-\phi_\infty(x)) - \frac{1}{\int_{\mathbb{T}} \exp(\phi_\infty(x)) dx} \right) \sqrt{\rho_\infty(x)}$$

4.7.1 Cas $\delta = 1$

On fixe la longueur de Debye δ égale à 1, et $\gamma = 0.5$. Le paramètre ε est fixé à 1 et $\tau(\varepsilon) = 5\varepsilon^2$. On tronque la série de Hermite au rang 30 et on prend un pas $N_x = 100$ et $dt = 0.01$.

Les courbes donnant l'évolution des différentes normes en échelle logarithmique pour les ordonnées sont données figure (7). On voit que toutes les courbes sont approximativement des droites, ce qui montre leur décroissance à vitesse exponentielle. On vérifie sur le dernier graphe que l'erreur ponctuelle est de l'ordre de 10^{-7} .

On peut réitérer l'expérience en abaissant le nombre de points N_x (8) ou en abaissant le rang de troncature K (9). On constate que ceci n'a pas d'impact sur le retour à l'équilibre.

4.7.2 Cas $\delta = 0.3$

On prend cette fois une longueur de Debye δ valant 0.3 et on réalise la même expérience. On prend $K = 30$, $N_x = 100$. On constate que sur la figure 10, le retour vers l'équilibre se réalise. A partir du temps $t = 55$ environs, les courbes d'erreurs s'infléchissent et deviennent horizontales. Nous n'avons pas trouvé d'erreur dans le code expliquant ce comportement. Il est possible que le seuil d'arrêt dans la méthode itérative utilisée pour la résolution des systèmes linéaires ne soit pas suffisante. On vérifie que l'erreur ponctuelle est de l'ordre de 10^{-6} , et il semble donc peut probable qu'une erreur dans l'expression de la donnée initiale en soit la cause.

On peut diminuer K pour le passer à 10. On obtient alors la figure 11. On voit que dans un premier temps il semble y avoir retour vers l'équilibre, mais dans un second temps le schéma diverge à vitesse exponentielle. L'erreur ponctuelle atteint des valeurs de l'ordre de 10.

Dans une troisième configuration, on laisse $K = 30$ mais on prend $N_x = 50$. On obtient alors la figure 12. On voit que dans un premier temps il semble y avoir retour vers l'équilibre, mais

dans un second temps le schéma diverge à vitesse exponentielle. L'erreur ponctuelle atteint des valeurs de l'ordre de 10^4 .

Pour les longueurs de Debye plus petites que 1, les choix de paramètres de troncature K et de discrétisation spatiale N_x sont très importants pour observer le retour à l'équilibre.

Essayons de situer la source de ce problème. On effectue les simulations pour les mêmes paramètres, mais cette fois ci avec la version linéarisée du schéma, c'est-à-dire le schéma obtenu en ignorant le terme bilinéaire. On obtient alors les figures (13) et (14). On constate sur celles-ci que le retour à l'équilibre se fait sans problème. Ainsi, c'est le terme non-linéaire qui impose le choix de N_x et K pour obtenir le retour à l'équilibre.

4.8 Conclusion

Ce dernier schéma semble aussi bien du point de vue théorique que pratique meilleur que le schéma naïf proposé plus tôt. On sait prouver l'hypocoercivité du système continu linéarisé et il paraît plausible de montrer l'hypocoercivité pour le même système linéarisé discret sans hypothèse sur la longueur de Debye. Il reste néanmoins à traiter le système non-linéaire et le système non-linéaire discret. On s'attend sur ce dernier point à trouver une condition sur les paramètres de discrétisation pour observer le caractère hypocoercif. Enfin, ce schéma n'est pas idéal car il demande de recalculer la matrice d'itération à chaque itération.

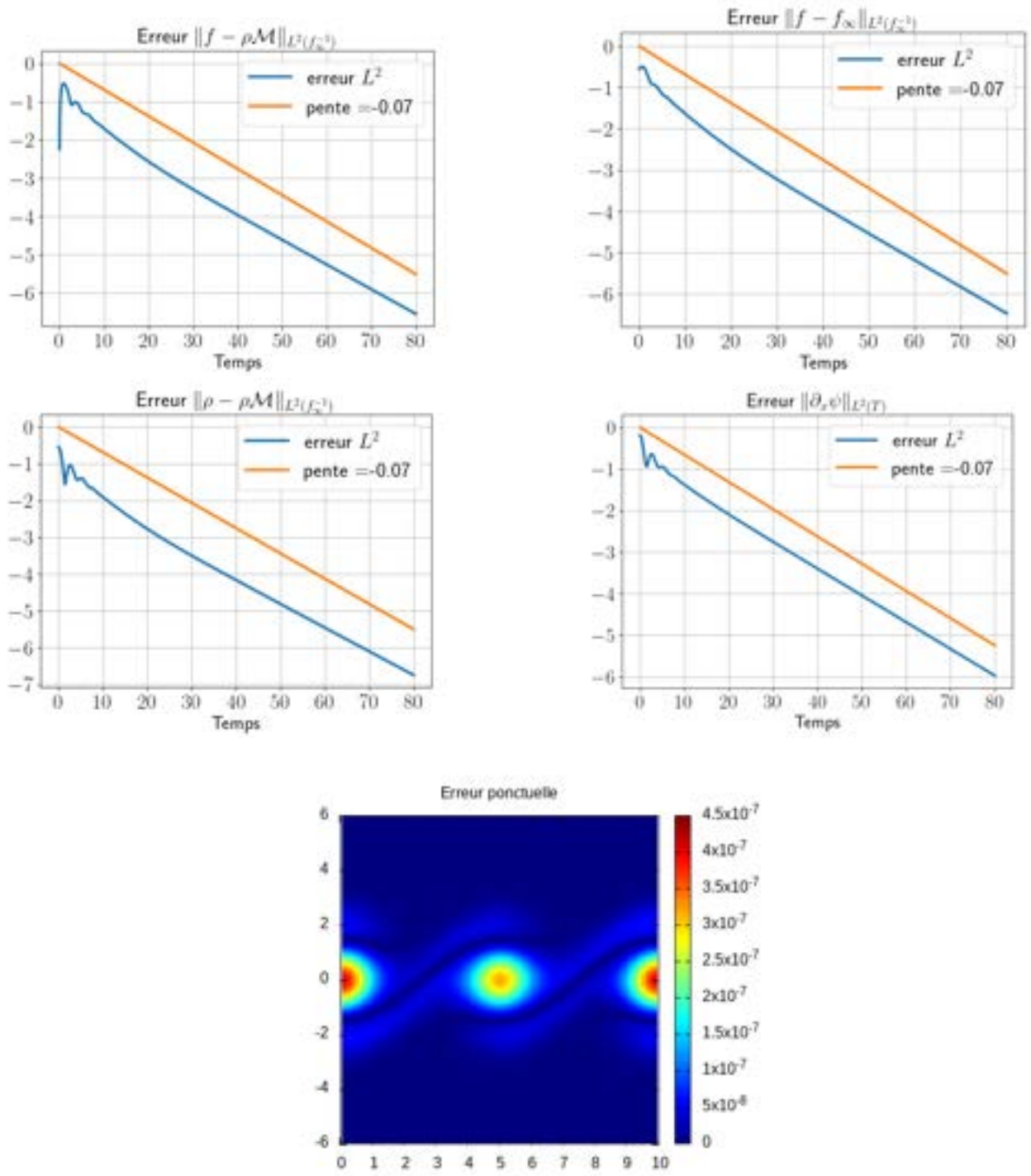


FIGURE 7 – Paramètres : $\delta = 1$, $K = 30$, $N_x = 100$

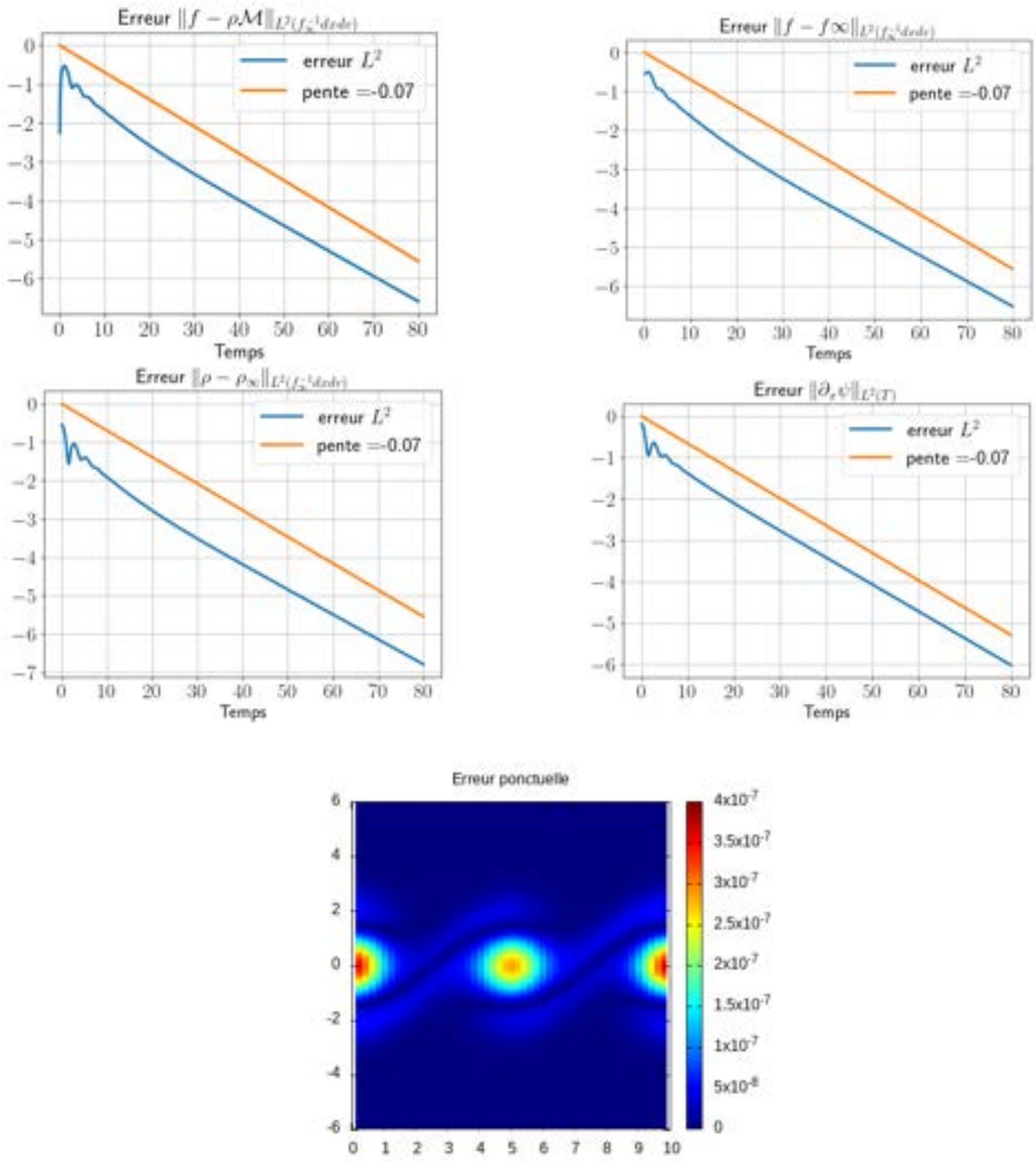


FIGURE 8 – Paramètres : $\delta = 1$, $K = 30$, $N_x = 50$

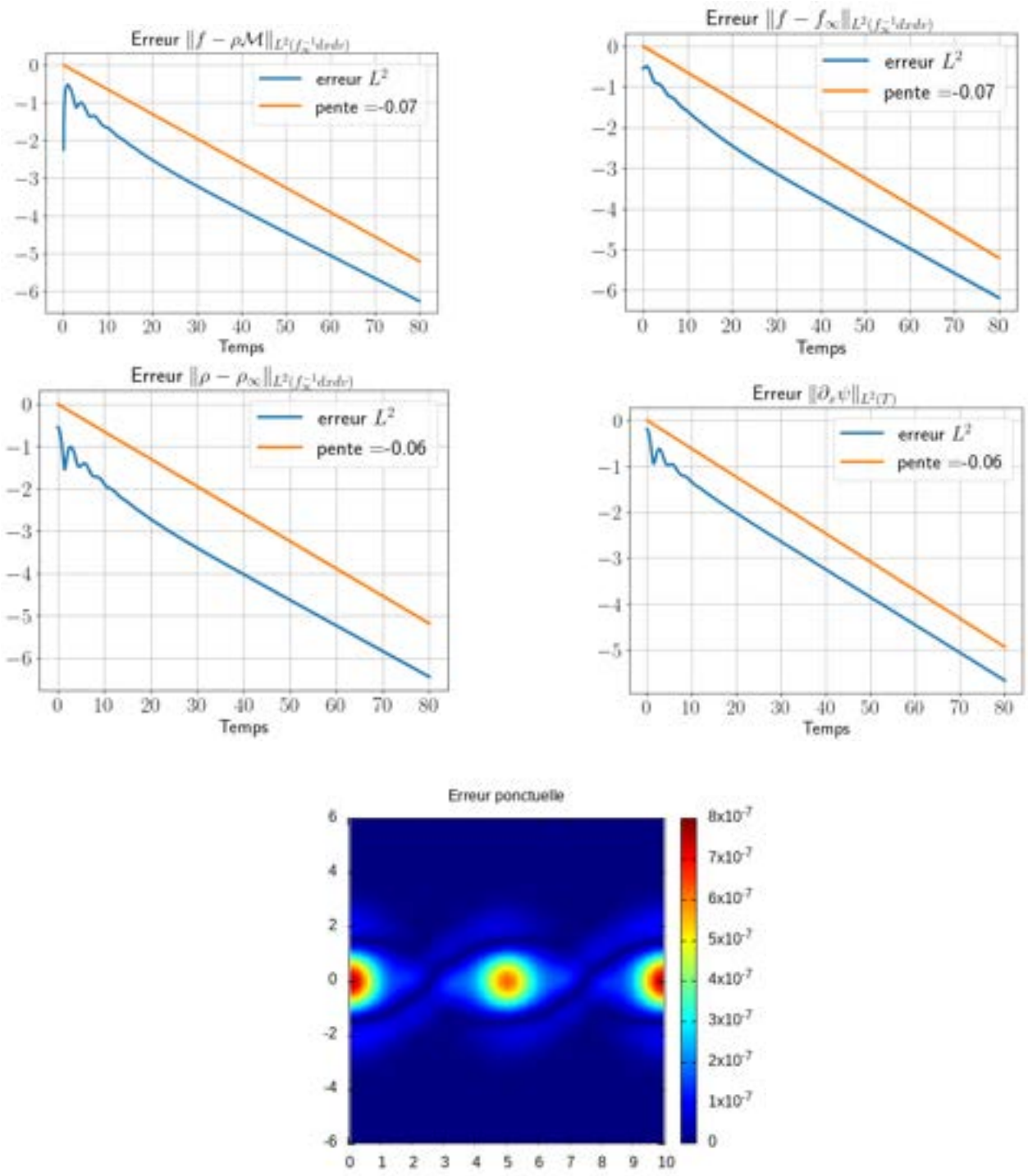


FIGURE 9 – Paramètres : $\delta = 1$, $K = 10$, $N_x = 100$

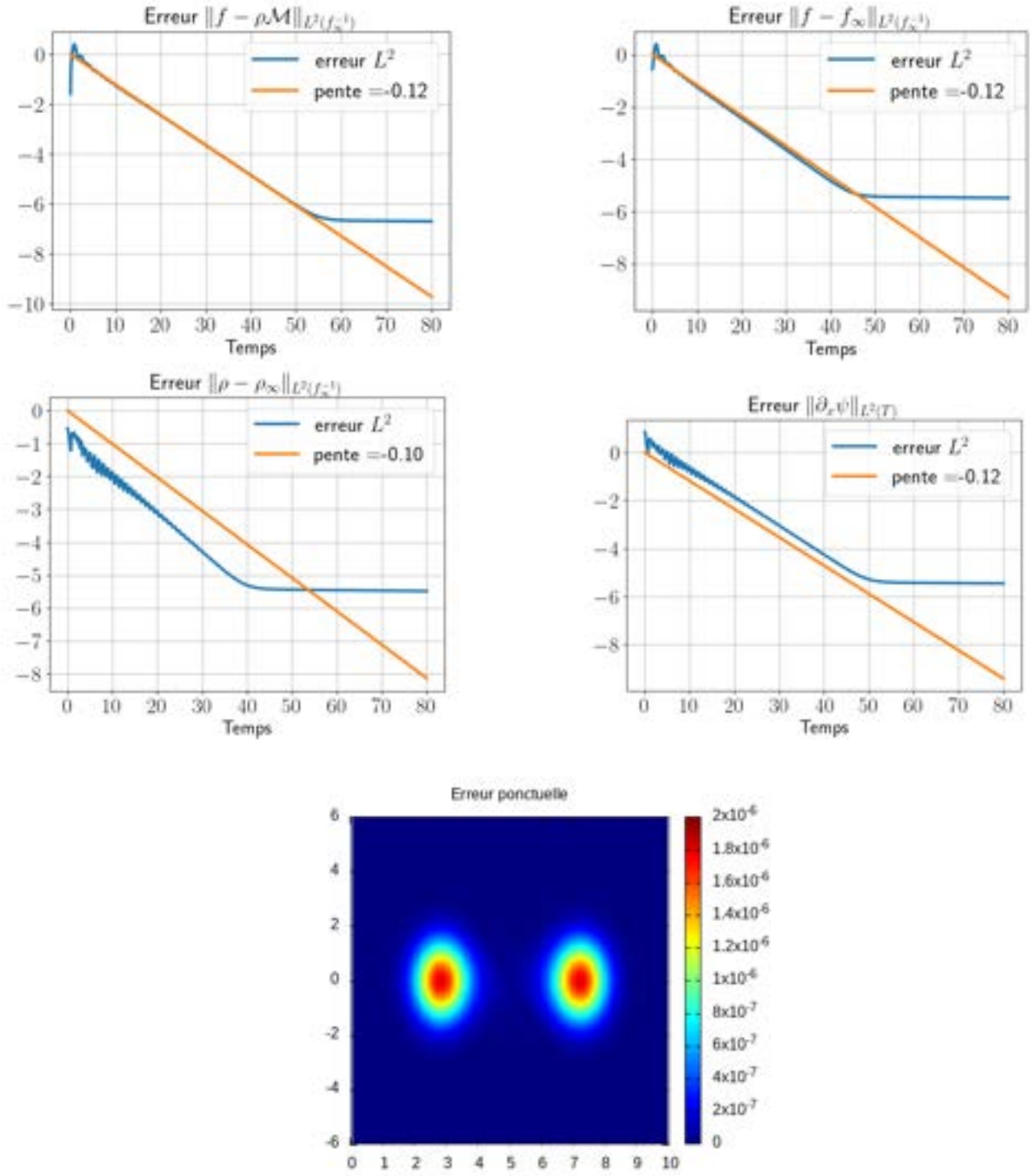


FIGURE 10 – Paramètres : $\delta = 0.3$, $K = 30$, $N_x = 100$.

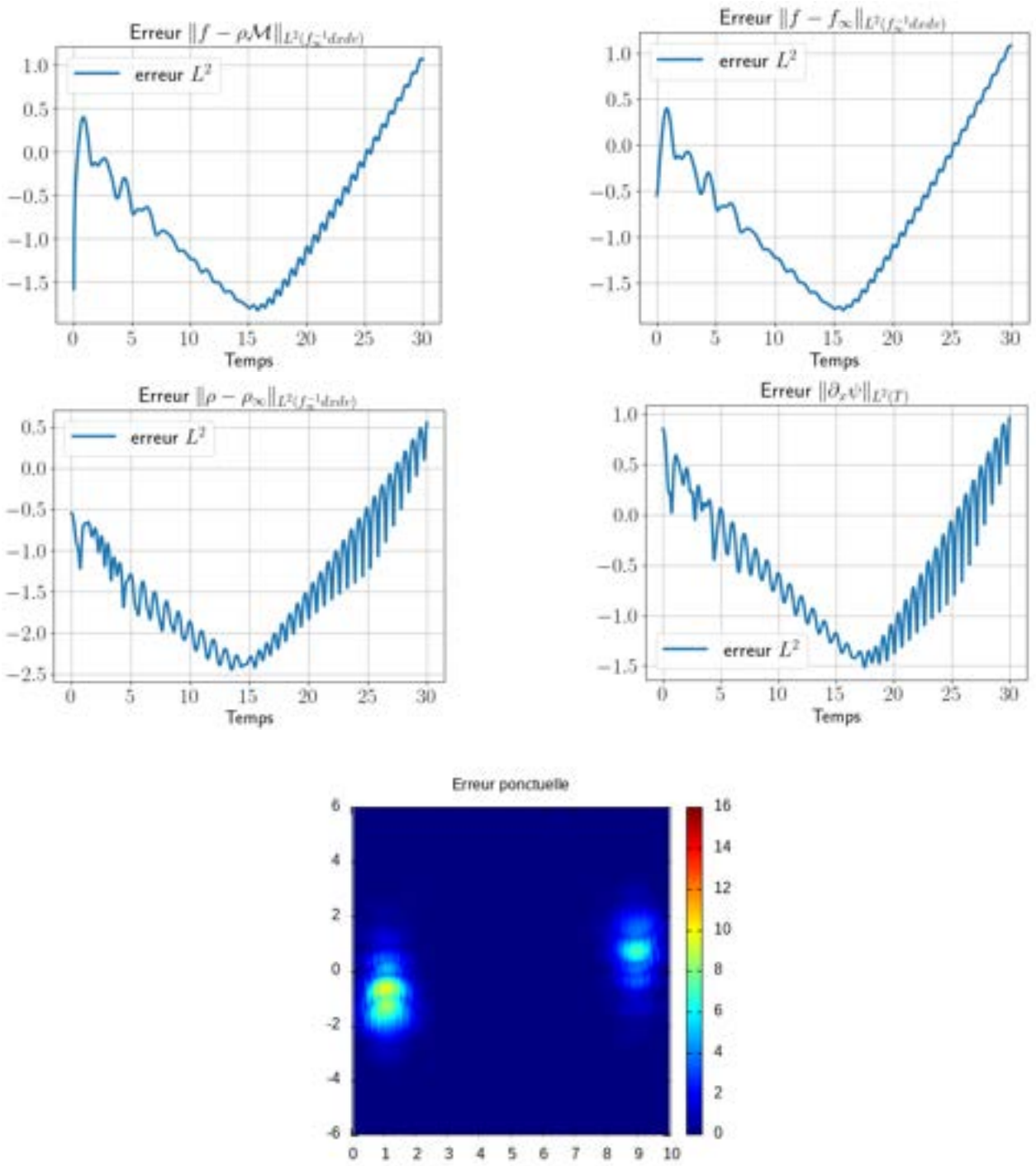


FIGURE 11 – Paramètres : $\delta = 0.3$, $K = 10$, $N_x = 100$.

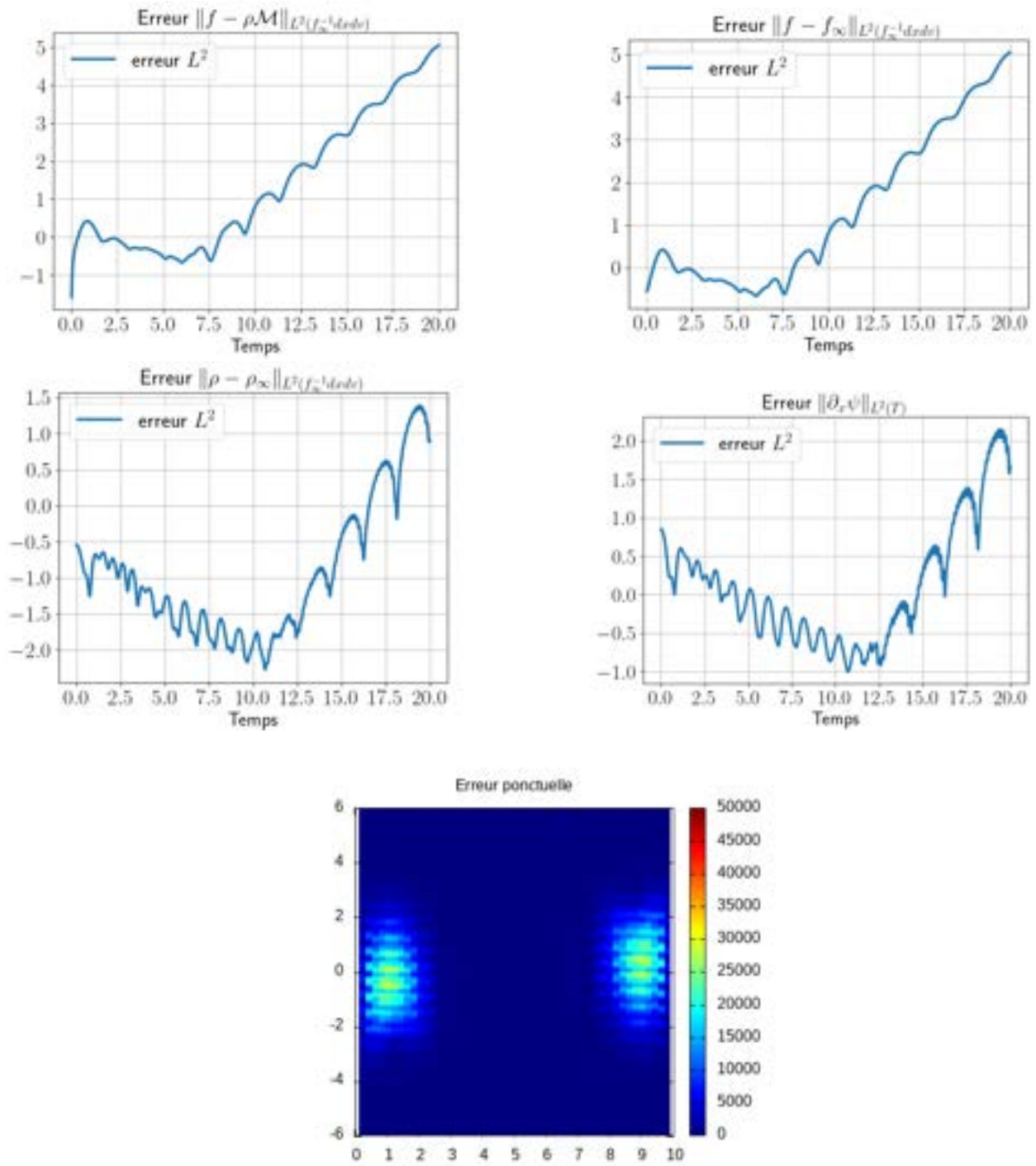


FIGURE 12 – Paramètres : $\delta = 0.3$, $K = 30$, $N_x = 50$.

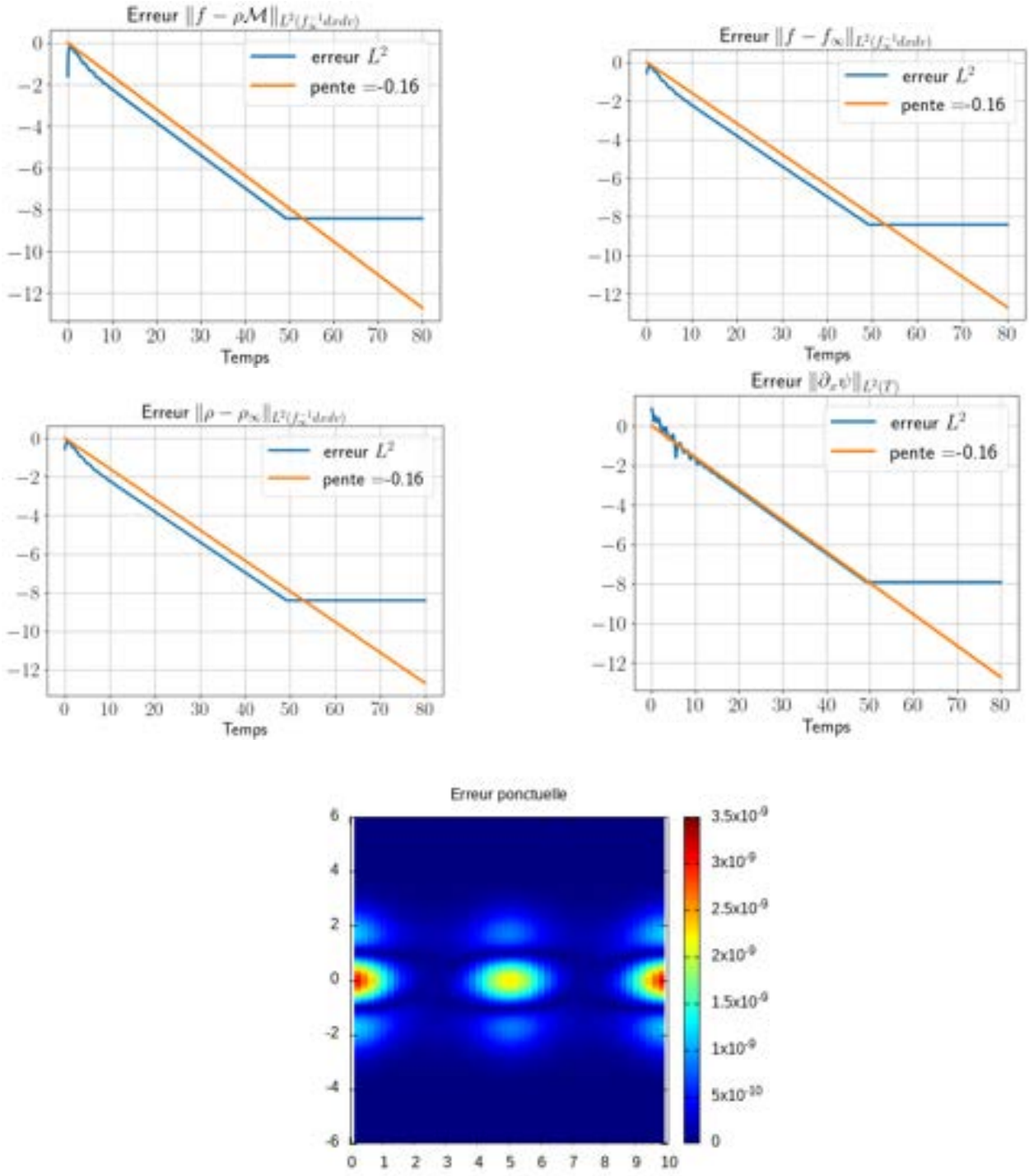


FIGURE 13 – Système linéarisé. Paramètres : $\delta = 0.3$, $K = 30$, $N_x = 50$.

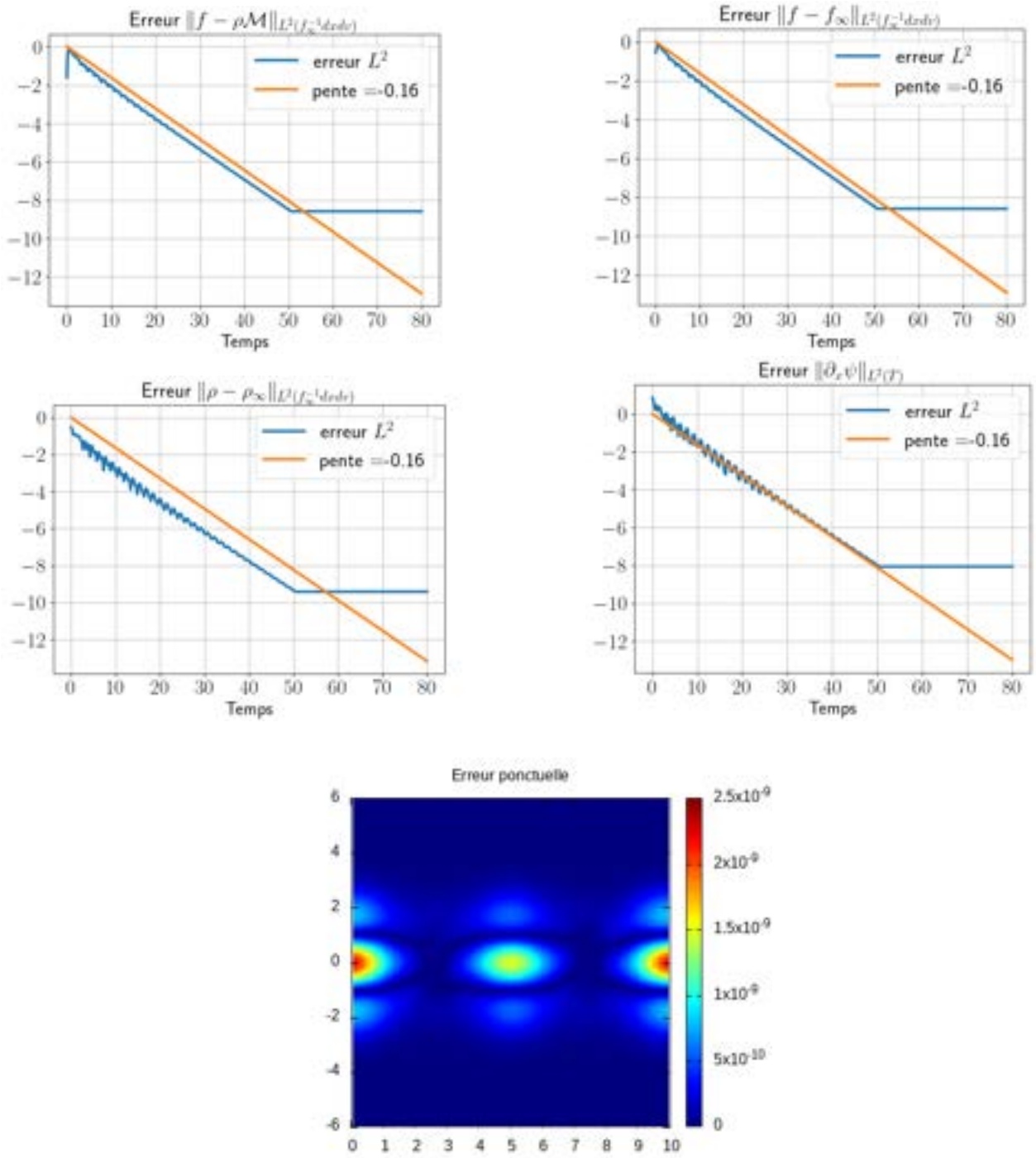


FIGURE 14 – Système linéarisé. Paramètres : $\delta = 0.3$, $K = 30$, $N_x = 50$.

5 Annexe : Bases de Hermite

L'étude de l'hypocoercivité L^2 ainsi que la construction de méthode numérique la préservant est facilitée par l'utilisation de bases hilbertiennes adaptées. Dans notre cas, nous utiliserons les bases des fonctions de Hermite et des polynômes de Hermite. Dans la première partie de cette annexe, des définitions et des rappels sont faits sur ces familles de fonctions. Dans une seconde partie, on s'intéresse à l'approximation de fonctions par troncature de leur série dans la base des fonctions de Hermite. On montre que la série de fonctions de Hermite associée aux fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R})$ converge normalement et donc ponctuellement. On montre que la positivité d'une fonction $C_c^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas préservée par troncature de sa série dans la base des fonctions de Hermite. Or, la conservation de la positivité d'une densité de particule par une méthode numérique est une propriété importante. En fait, les méthodes numériques s'appuyant sur la projection dans cette base hilbertienne donnent des approximations de type L^2 et pas ponctuelles : ainsi les schémas numériques approchent les moments

$$\int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) \psi_k(v) \mathcal{M}(v)^{-1} dv$$

pour k inférieur à un paramètre de troncature, mais n'approche pas les valeurs de f aux points du maillage.

5.1 Polynômes et fonctions de Hermite

On considère les polynômes d'Hermite "probabilistes" $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Ces polynômes sont définis par

$$H_k(v) = (-1)^k e^{\frac{v^2}{2}} \frac{d^k}{d^k v} e^{-\frac{v^2}{2}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ces polynômes sont orthogonaux dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(v)dv)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(v)g(v)\mathcal{M}(v)dv$$

Ainsi, ils forment une base orthogonale de cet espace de Hilbert. On obtient une base hilbertienne $(\tilde{H}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(v)dv)$ en renormalisant les polynômes de Hermite,

$$\tilde{H}_k = \frac{H_k}{\sqrt{k!}}$$

Les polynômes de Hermite vérifient les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} H_{k+1}(v) &= vH_k(v) - kH_{k-1}(v) \\ H'_k(v) &= kH_{k-1}(v) \end{aligned}$$

On obtient alors facilement que les polynômes de Hermite renormalisés vérifient les relations de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} v\tilde{H}_k(v) &= \sqrt{k+1}\tilde{H}_{k+1}(v) + \sqrt{k}\tilde{H}_{k-1}(v) \\ \tilde{H}'_k(v) &= \sqrt{k}\tilde{H}_{k-1}(v) \end{aligned}$$

en posant $\tilde{H}_{-1} = 0$.

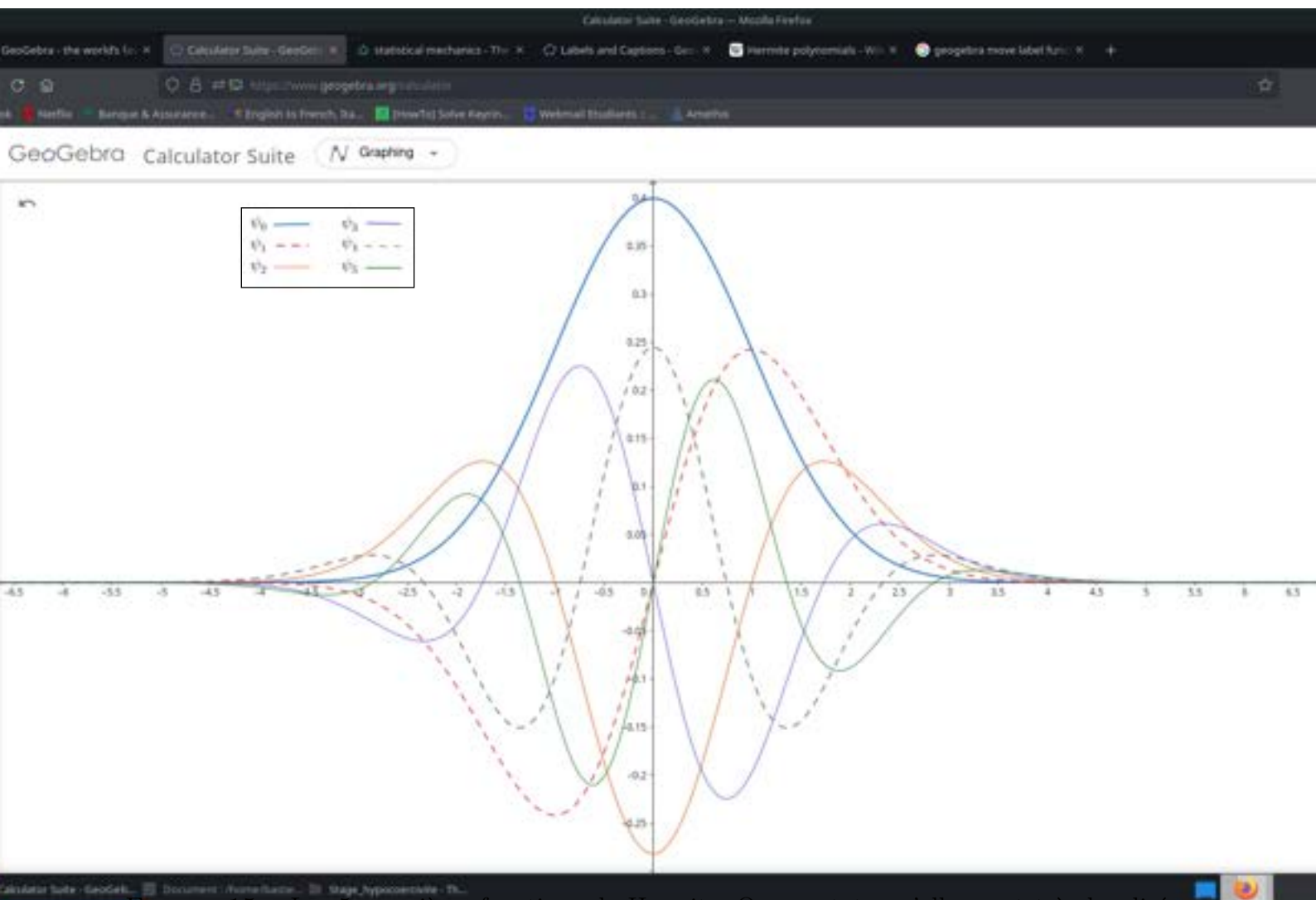


FIGURE 15 – Les 5 premières fonctions de Hermite. On constate qu'elles sont très localisées autour de l'origine.

Ces fonctions constituent une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(v)^{-1}dv)$ donc pour tout $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_k(v) \psi_l(v) \mathcal{M}^{-1}(v) dv = \delta_{k,l}$$

Enfin, les fonctions de Hermite vérifient les propriétés de récurrence suivante : on pose $\psi_{-1} = 0$, $\psi_0 = \mathcal{M}(v)$ et

$$\begin{aligned} v\psi_k(v) &= \sqrt{k}\psi_{k-1}(v) + \sqrt{k+1}\psi_{k+1}(v) \\ \psi'_k(v) &= \sqrt{k}\psi_{k-1}(v) - v\psi_k(v) \end{aligned}$$

Enfin, l'inégalité de Cramer [7] énonce que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{(n!)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(\sqrt{2}x) \right| = 1$$

et implique que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\psi_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

5.2 Approximation de fonctions par série de Hermite

Commençons par la propriété suivante :

Proposition 11. *Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors la série de fonctions*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle \phi, \psi_k \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}(v)dv)} \psi_k(v)$$

converge ponctuellement vers ϕ .

Démonstration. Les coefficients de la série se réécrivent comme

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(v) \frac{H_k(v)}{(k!)^{1/2}} dv$$

En remarquant que $H_k = \frac{H'_{k+1}}{k+1}$, on peut effectuer 3 intégrations par parties successives pour obtenir que

$$\langle \phi, \psi_k \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}(v)dv)} = - \int_{\mathbb{R}} \phi'''(v) \frac{H_{k+3}(v)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k!)^{1/2}} dv$$

En utilisant l'inégalité de Cramer et en écrivant que le support de ϕ est inclus dans un intervalle $[-A, A]$, on obtient la majoration suivante :

$$\langle \phi, \psi_k \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}(v)dv)} \leq \|\phi'''\|_{\infty} \int_{-A}^A e^{v^2/2} dv \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)(k+3)}}$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Cramer, on trouve alors que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle \phi, \psi_k \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}(v)dv)}| \|\psi_k\|_{\infty} \leq \frac{\|\phi'''\|_{\infty}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A e^{v^2/2} dv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)(k+3)}} < +\infty$$

La série converge normalement et elle définit une fonction continue. On sait de plus, par la théorie des espaces de Hilbert que

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \phi, \psi_k \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}(v)dv)} \psi_k$$

dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}(v)dv)$ et donc presque partout sur \mathbb{R} . L'égalité a lieu partout puisque les deux membres sont continus. □

Maintenant que l'on sait que l'on peut écrire une fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ comme sa somme de fonctions Hermite, on peut vouloir l'approcher par la série tronquée. Soit $K \in \mathbb{N}$ le rang de troncature. On fait l'approximation suivante :

$$\phi(v) \approx \sum_{k=0}^K \langle \phi, \psi_k \rangle_{L^2(\mathcal{M}(v)^{-1}(v)dv)} \psi_k(v)$$

Or,

$$\sum_{k=0}^K \langle \phi, \psi_k \rangle_{L^2(\mathcal{M}(v)^{-1}(v)dv)} \psi_k(v) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^K \frac{1}{k!} H_k(v) H_k(x) \right) \phi(x) dx \mathcal{M}(v)$$

Fixons v . Supposons que ϕ soit une fonction positive laissée variable. La somme dans l'intégrale est alors une somme finie de polynômes, c'est donc un polynôme nommé $P_{K,v}$. De plus, comme les polynômes de Hermite H_k sont unitaires et de degré k , c'est un polynôme de degré k et de coefficient dominant $H_K(v)$.

Si K est impair, et que $H_K(v) \neq 0$, alors la $P_{K,v}$ est un polynôme de degré impair. Il admet $-\infty$ comme limite en l'infini. Ainsi, il suffit de choisir ϕ dont le support est assez loin de l'origine pour que l'intégrale soit négative. De plus, on s'aperçoit que l'on peut étendre son support arbitrairement loin en l'infini pour faire tendre cette intégrale vers $-\infty$.

Si K est pair et que $H_K(v) < 0$, alors par les mêmes arguments on peut faire tendre l'intégrale vers $-\infty$ en considérant une fonction ϕ dont le support est assez étendu et loin de l'origine. L'ensemble des v qui correspondent à ce cas est une zone bornée de \mathbb{R} .

Enfin, si K est pair mais que $H_K(v) > 0$, on ne peut plus utiliser d'argument basé sur le degré. On conjecture néanmoins que $P_{K,v}$ est strictement négative sur un intervalle, pour tout K pair. Ainsi, on devrait encore pouvoir choisir ϕ une fonction plateau dont le support est contenu dans cet intervalle pour rendre l'intégrale négative. On pourrait de plus faire tendre l'intégrale vers $-\infty$ en multipliant ϕ par un réel arbitrairement grand.

Même s'il manque une preuve du dernier cas pour conclure, on voit que pour tout rang de troncature K impair, il existe une infinité de fonctions infiniment dérivables et à supports compacts pour lesquelles la positivité n'est pas respectée.

Références

- [1] A. Blaustein and F. Filbet. On a discrete framework of hypocoercivity for kinetic equations, 2022.
- [2] F. F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Number vol. 1 in Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Springer, 1984.
- [3] H. Brézis et P.G. Ciarlet et J. L. Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1999.
- [4] M. Herda and L. M. Rodrigues. Large-time behavior of solutions to vlasov-poisson-fokker-planck equations : From evanescent collisions to diffusive limit. *Journal of Statistical Physics*, 170(5) :895–931, feb 2018.
- [5] F. Hérau. Lecture notes on hypocoercivity, m2 course, master lebesgue, 2021.
- [6] F. Hérau and F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the fokker-planck equation with a high-degree potential. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 171 :151–218, 02 2004.
- [7] J. Indritz. An inequality for hermite polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc*, 12 : 981–983, 1961.
- [8] F. Nier and B. Helffer. *Hypoelliptic Estimates and Spectral Theory for Fokker-Planck Operators and Witten Laplacians*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [9] C. Villani. *Hypocoercivity*. Number n°s 949 à 951 in Hypocoercivity. American Mathematical Society, 2009.