



MASTER MATHÉMATIQUES
Mathématiques Fondamentales et Appliquées
Master 2
2020-2021

**Fonctions propres du Laplacien
et conditions au bord**

UFR Sciences et techniques

Keraval Yann

Encadrant : Rivière Gabriel

Université de Nantes
UFR Sciences et techniques
2 chemin de la Houssinière
44300 NANTES
2020-2021

Table des matières

1	Introduction	3
2	Notations	4
3	Le cas de la dimension 1	6
3.1	Construction du Laplacien de Robin	6
3.2	Propriétés spectrales	8
3.3	Description du spectre	10
4	Laplacien de Robin	12
4.1	Quelques résultats fonctionnels	13
4.2	Construction du Laplacien	16
4.3	Propriétés spectrales	30
5	Régularité des valeurs propres	30
5.1	Le cas de la dimension finie	31
5.2	Extension à notre problème	38
6	Quelques résultats sur le spectre de Robin	43
7	Conclusion	47

1 Introduction

Cette étude est basée sur les premières parties de l'article [1].

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine bornée du plan avec un bord lisse $\Gamma := \partial\Omega$.

On note \mathbf{n} la normale extérieure à Γ et $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} := \nabla f \cdot \mathbf{n}$ (avec $z \cdot \xi := {}^t z \cdot \xi = \sum_{j=1}^d z_j \xi_j$ pour tout $z, \xi \in \mathbb{C}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$) la dérivée dans la direction de \mathbf{n} d'une fonction $f \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ sur Γ au sens de la trace (cf. théorème 4.1).

Pour $\sigma \geq 0$, on considère le problème de Robin au bord (sur $\mathbf{L}^2(\Omega)$) :

$$\begin{cases} -\Delta f = \lambda f \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \sigma f = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} , \quad (1.1)$$

où $(\lambda, f) \in \mathbb{C} \times \mathbf{H}^2(\Omega)$.

Le cas $\sigma = 0$ correspond à la condition de Neumann au bord et on utilise $\sigma = \infty$ comme raccourci pour la condition de Dirichlet au bord : $f|_{\Gamma} = 0$ (i.e. $f \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$).

Nous ne travaillerons pas sur la condition de Dirichlet, mais nous pouvons maintenant voir les conditions de Robin au bord comme une famille liant la condition de Neumann et la condition de Dirichlet.

Soient $0 \leq \lambda_0^\sigma \leq \lambda_1^\sigma \leq \dots$ les valeurs propres associées (non nulles si $\sigma > 0$).

Dans ce mémoire, nous allons étudier le Laplacien de Robin, une fois bien défini et ses premières propriétés démontrées, nous nous pencherons sur ses valeurs propres, leur régularité, et sur l'écart de Robin-Neumann :

$$d_n(\sigma) := \lambda_n^\sigma - \lambda_n^0 . \quad (1.2)$$

Afin de nous éclaircir un peu les idées, nous commencerons par étudier le cas de la dimension 1 (section 3), le problème se reformulant alors :

$$\begin{cases} -f'' = \lambda f \\ -f'(0) + \sigma f(0) = 0 \\ f'(1) + \sigma f(1) = 0 \end{cases} ,$$

où $(\lambda, f) \in \mathbb{C} \times \mathbf{H}^2([0; 1])$.

Dans ce cas particulier, le problème au bord ne représente pas un grand enjeu, la régularité elliptique s'obtient directement car le Laplacien coïncide avec la dérivée seconde, le domaine de l'opérateur est donc bien plus aisé à décrire qu'en dimension 2.

De plus, les solutions sont bien plus explicites qu'en dimension 2, elles sont de la forme :

$$\cos(k_n(\sigma) \cdot) + \frac{\sigma}{k_n(\sigma)} \sin(k_n(\sigma)) ,$$

où $0 < k_0(\sigma)^2 \leq k_1(\sigma)^2 \leq \dots$ sont les valeurs propres du Laplacien de Robin (pour $\sigma > 0$), les $k_n(\sigma)$ étant les solutions strictement positives de l'équation :

$$(y^2 - \sigma^2) \sin y = 2y\sigma \cos y .$$

Cela nous permet de mieux appréhender les objets étudiés et les propriétés qui peuvent en découler.

Nous poursuivrons ensuite sur une partie (section 4) visant à définir proprement le Laplacien de Robin tout en introduisant les premières propriétés importantes qui lui sont associées.

L'enjeu de cette partie est sur la régularité elliptique du Laplacien de Robin, il nous faudra montrer la régularité des dérivées secondes (toujours définies dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) à partir des dérivées d'ordre inférieure, du Laplacien et de la condition au bord, ceci se traduisant par l'inégalité :

$$\exists C > 0 : \forall f \in \mathbf{H}^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \sigma f = 0 \Rightarrow \|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) ,$$

la définition des normes étant rappelée dans la section suivante.

L'avant dernière partie (section 5) servira à appréhender un résultat de régularité sur les valeurs propres qui nous sera utile pour étudier l'écart de Robin-Neumann.

De la même façon que nous aurons introduit le Laplacien de Robin à l'aide du modèle jouet de la dimension 1, nous allons introduire la régularité des valeurs propres à l'aide du cas de la dimension finie.

Nous étudierons donc le cas des matrices, ce qui revient à vouloir résoudre l'équation suivante :

$$\det(M(z) - \lambda) = 0 ,$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M : D \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ analytique (pour $d \in \mathbb{N}^*$ et D un domaine réel ou complexe).

Des exemples pourront nous servir de modèle jouet, le résultat de régularité ne sera cependant pas trivial. Ce résultat nécessite l'introduction de nombreux objets et de plusieurs résultats autour de ces objets, cette partie sera donc un peu dense et moins explicitée que les autres car elle s'éloigne un peu trop de l'étude du Laplacien de Robin.

Nous tenterons tout de même de donner suffisamment de détails pour que les problématiques soient comprises, et une fois le cas des matrices passé, nous pourrons revenir à notre cas et travailler un peu sur le Laplacien de Robin. Cette section se conclura sur un résultat de régularité sur les valeurs propres du Laplacien obtenu à l'aide de la résolvante compacte de ce dernier.

La dernière partie (section 6) de cette étude sera consacrée à quelques résultats sur l'écart de Robin-Neumann, nous montrerons en particulier que :

$$d_n(\sigma) = \int_0^\sigma \int_\Gamma |u_{n,\tau}|^2 \, dS \, d\tau ,$$

où, pour tout $\tau \in [0; \sigma]$, $u_{n,\tau}$ est une fonction propre $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -normalisée de \mathcal{L}_τ associée à λ_n^τ . Ainsi que le résultat géométrique suivant (en admettant la loi de Weyl) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n(\sigma) = \frac{2 \text{Vol}(\Gamma)}{\text{Vol}(\Omega)} \cdot \sigma .$$

Notre étude étant maintenant introduite, il ne reste plus qu'à la commencer avec, en préliminaire, quelques notions et notations.

2 Notations

Précisons quelques notions et notations que nous allons utiliser tout au long de ce mémoire.

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné.

On rappelle la notation $z \bullet \xi := {}^t z \cdot \xi = \sum_{j=1}^d z_j \xi_j$ pour tout $z, \xi \in \mathbb{C}^d$.

Étant donné un ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$, on note $V \subset\subset U$ si \bar{V} est compact et inclus dans U .

On note $\mathcal{D}(U)$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{C}^\infty(U)$ à support compact, $\mathcal{D}'(U)$ son dual, dont les éléments sont appelés distributions sur U , et $\mathbf{C}^\infty(\bar{U})$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{C}^\infty(U)$ dont toutes les dérivées se prolongent par continuité sur \bar{U} .

Remarque 2.1. On a l'inclusion $\mathcal{D}(U) \subset \mathbf{C}^\infty(\bar{U})$.

On suppose les espaces de Lebesgue $\mathbf{L}^2(U)$ et $\mathbf{L}^\infty(U)$ connus, ainsi que les espaces de Sobolev $\mathbf{H}^k(U)$, $\mathbf{H}_{\text{loc}}^k(U)$ et $\mathbf{H}_0^k(U)$ (avec $k \neq 0$ pour ce dernier espace), les notations utilisées étant celles du livre d'analyse fonctionnelle de Brézis [2].

Remarque 2.2. Ces espaces sont des $\mathbf{C}^\infty(\bar{U})$ -modules et on pourra abusivement remplacer U par \bar{U} dans leurs notations.

On note $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^\infty(U)}$ la norme usuelle sur $\mathbf{L}^\infty(U)$, donnée par :

$$\forall f \in \mathbf{L}^\infty(U) := \inf \{C > 0 \mid \text{Vol}(\{x \in U \mid |f(x)| > C\}) = 0\}$$

où $\text{Vol} B := \int_B 1 \, dx = \int_U \mathbb{1}_B \, dx$ désigne la mesure de Lebesgue sur U d'un borélien $B \subset U$.

Remarque 2.3. Le couple $(\mathbf{L}^\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^\infty(U)})$ est un \mathbb{C} -espace de Banach et $\mathbf{C}^\infty(\bar{U})$ est un sous-espace fermé de ce dernier, ainsi le couple $(\mathbf{C}^\infty(\bar{U}), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^\infty(U)})$ est un \mathbb{C} -espace de Banach.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(U)}$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{L}^2(U)$, donné par :

$$\forall f, g \in \mathbf{L}^2(U), \quad \langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(U)} := \int_U f \bar{g} \, dx .$$

On considère les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}^n(U)}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) définis par récurrence avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}^0(U)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(U)}$ (en rappelant que $\mathbf{H}^0(U) = \mathbf{L}^2(U)$) et, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, g \in \mathbf{H}^n(U)$:

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{H}^n(U)} = \langle f, g \rangle_{\mathbf{H}^{n-1}(U)} + \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n \leq d} \langle \partial_{k_1} \dots \partial_{k_n} f, \partial_{k_1} \dots \partial_{k_n} g \rangle_{\mathbf{L}^2(U)} .$$

Et on note $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^n(U)} : f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathbf{H}^n(U)}}$ les normes induites.

Remarque 2.4. Les couples $(\mathbf{L}^2(U), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(U)})$ et $(\mathbf{H}^k(U), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}^k(U)})$ sont des \mathbb{C} -espaces de Hilbert.

Étant donnée une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ paramétrée par une immersion (i.e. différentielle injective) injective $P = (P_1, \dots, P_d) \in \mathbf{C}^1(]0; 1[, \mathbb{R}^d)$, l'intégrale d'une fonction $f \in \mathbf{L}^1(\mathcal{C})$ est donnée par :

$$\int_{\mathcal{C}} f \, dS = \int_0^1 f(P(t)) \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^d |P'_j(t)|^2} \, dt ,$$

où dS désigne la mesure surfacique sur \mathcal{C} .

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathcal{C})}$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{L}^2(\mathcal{C})$, donné par :

$$\forall f, g \in \mathbf{L}^2(\mathcal{C}), \quad \langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathcal{C})} := \int_{\mathcal{C}} f \bar{g} \, dS .$$

Et on note $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{C})} : f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathcal{C})}}$ la norme induite.

Remarque 2.5. Le couple $(\mathbf{L}^2(\mathcal{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathcal{C})})$ est un \mathbb{C} -espace de Hilbert.

Étant donnée une fonction $F = (F_1, \dots, F_n) \in \mathbf{C}^1(U, \mathbb{R}^d)$, on note $D_x F := (\partial_l F_j(x))_{j,l \in [1;d]}$ la matrice Jacobienne de F en $x \in U$.

Étant donnés deux opérateurs non bornés $(T_0, \text{Dom } T_0)$ et $(T_1, \text{Dom } T_1)$ sur un même espace vectoriel, on note :

$$(T_0, \text{Dom } T_0) \subset (T_1, \text{Dom } T_1) ,$$

pour signifier que $\text{Dom } T_0 \subset \text{Dom } T_1$ et $T_1|_{\text{Dom } T_0} = T_0$, i.e. $(T_1, \text{Dom } T_1)$ est un prolongement (pas nécessairement continu) de $(T_0, \text{Dom } T_0)$ sur $\text{Dom } T_1$

Étant donné un anneau A , on note $\mathcal{M}_d(A)$ le A -module des matrices carrés de taille d à coefficients dans A .

Remarque 2.6. Si A est un \mathbb{C} -module, il en est de même pour $\mathcal{M}_d(A)$.

Tout ceci étant introduit, nous pouvons commencer notre étude.

3 Le cas de la dimension 1

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas $\Omega =]0; 1[$ (avec $\Gamma = \{0; 1\}$), beaucoup plus simple à aborder que le cas de la dimension 2, cas que nous étudierons dans les sections suivantes.

Ce cas particulier nous servira de modèle jouet pour aborder plus intuitivement le problème de Robin, se réécrivant ici de la manière suivante :

$$\begin{cases} -f'' = \lambda f \\ -f'(0) + \sigma f(0) = 0 \\ f'(1) + \sigma f(1) = 0 \end{cases} , \quad (3.1)$$

où $(\lambda, f) \in \mathbb{C} \times \mathbf{H}^2([0; 1])$.

3.1 Construction du Laplacien de Robin

On sait, d'après [2, Chapitre 8], que $\mathbf{H}^1([0; 1]) \subset \mathbf{C}^0([0; 1])$ et que

$$\exists C_\infty > 0 : \forall f \in \mathbf{H}^1([0; 1]), \quad \|f\|_{\mathbf{L}^\infty([0; 1])} \leq C_\infty \|f\|_{\mathbf{H}^1([0; 1])} , \quad (3.2)$$

on fixe une telle constante C_∞ .

Soit $\sigma \geq 0$, on introduit la forme hermitienne suivante sur $\mathbf{H}^1([0; 1])$

$$\mathcal{Q}_\sigma(f, g) = \int_0^1 f' \bar{g}' \, dx + \sigma (f(1)\bar{g}(1) + f(0)\bar{g}(0)) . \quad (3.3)$$

Pour tous $f, g \in \mathbf{H}^1([0; 1])$, en utilisant (3.2) et Hölder, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_\sigma(f, g)| &\leq \int_0^1 |f'g'| \, dx + \sigma (|f(1)g(1)| + |f(0)g(0)|) \\ &\leq \|f'\|_{\mathbf{L}^2([0; 1])} \|g'\|_{\mathbf{L}^2([0; 1])} + 2\sigma C_\infty^2 \|f\|_{\mathbf{H}^1([0; 1])} \|g\|_{\mathbf{H}^1([0; 1])} \\ &\leq (1 + 2\sigma C_\infty^2) \|f\|_{\mathbf{H}^1([0; 1])} \|g\|_{\mathbf{H}^1([0; 1])} \quad , \end{aligned}$$

ainsi la forme hermitienne \mathcal{Q}_σ est continue. De plus, on a

$$\mathcal{Q}_\sigma(f, f) + \|f\|_{\mathbf{L}^2([0; 1])}^2 = \|f\|_{\mathbf{H}^1([0; 1])}^2 + \sigma (|f(1)|^2 + |f(0)|^2) \geq \|f\|_{\mathbf{H}^1([0; 1])}^2 \quad ,$$

i.e. la forme hermitienne $\mathcal{Q}_\sigma + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2([0; 1])}$ est coercive, on peut ainsi appliquer le théorème de Lax-Milgram à \mathcal{Q}_σ : pour

$$\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma := \left\{ f \in \mathbf{H}^1([0; 1]) \mid \mathcal{Q}_\sigma(f, \cdot) \text{ est continu pour } \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2([0; 1])} \right\} \quad , \quad (3.4)$$

l'opérateur non borné $(\mathcal{L}_\sigma, \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma)$ sur $\mathbf{L}^2([0; 1])$ défini par

$$\forall (f, g) \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \times \mathbf{H}^1([0; 1]) \quad , \quad \mathcal{Q}_\sigma(f, g) = \langle \mathcal{L}_\sigma f, g \rangle_{\mathbf{L}^2([0; 1])} \quad (3.5)$$

est fermé, à domaine dense (dans $\mathbf{L}^2([0; 1])$ et $\mathbf{H}^1([0; 1])$ pour les normes respectives) et auto-adjoint.

L'opérateur ainsi défini est le **Laplacien de Robin**.

On utilisera la notation suivante :

$$\mathcal{L}_N := \mathcal{L}_0 \quad . \quad (3.6)$$

On introduit la norme du graphe du Laplacien de Robin $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\sigma}$ définie par

$$\forall f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \quad , \quad \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma} := \|f\|_{\mathbf{L}^2([0; 1])} + \|f''\|_{\mathbf{L}^2([0; 1])} \quad . \quad (3.7)$$

Proposition 3.1. *Le Laplacien de Robin est décrit par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_\sigma = -\partial_x^2 \\ \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma = \{ f \in \mathbf{H}^2([0; 1]) \mid f'(1) + \sigma f(1) = 0 \text{ et } -f'(0) + \sigma f(0) = 0 \} \end{array} \right. \quad .$$

Démonstration. Soit $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$, en appliquant une intégration par parties, on obtient

$$\forall g \in \mathcal{D}]0; 1[\quad , \quad \mathcal{Q}_\sigma(f, g) = \langle f, -\bar{g}'' \rangle_{\mathcal{D}']0; 1[} = \langle -f'', \bar{g} \rangle_{\mathcal{D}']0; 1[} \quad .$$

L'opérateur $g \in \mathcal{D}]0; 1[\mapsto \langle -f'', \bar{g} \rangle_{\mathcal{D}']0; 1[}$ est continu pour $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2([0; 1])}$, donc s'étend par densité en un opérateur continu (pour $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2([0; 1])}$) sur $\mathbf{L}^2([0; 1])$.

En appliquant le théorème de représentation de Riesz à ce dernier opérateur, on obtient $f'' \in \mathbf{L}^2([0; 1])$, puis en prenant sa restriction à $\mathbf{H}^1([0; 1])$, on obtient $\mathcal{L}_\sigma f = -f''$, i.e.

$$(\mathcal{L}_\sigma, \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma) \subset (-\partial_x^2, \mathbf{H}^2([0; 1])) \quad . \quad (3.8)$$

On aimerait maintenant expliciter $\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$.

En reprenant la définition (3.5) de \mathcal{L}_σ et en utilisant ce dernier résultat (3.8), on obtient, pour tout $(f, g) \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \times \mathbf{H}^1([0; 1])$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{Q}_\sigma(f, g) - \langle \mathcal{L}_\sigma f, g \rangle_{\mathbf{L}^2([0; 1])} \\ &= \int_0^1 (f'\bar{g}' + f''\bar{g}) \, dx + \sigma (f(1)\bar{g}(1) + f(0)\bar{g}(0)) \\ &= [f'\bar{g}]_0^1 + \sigma (f(1)\bar{g}(1) + f(0)\bar{g}(0)) \\ 0 &= (f'(1) + \sigma f(1))g(1) + (-f'(0) + \sigma f(0))g(0) \quad . \end{aligned}$$

En particulier, en prenant $g : x \mapsto x$ puis $g : x \mapsto 1 - x$, on obtient

$$\forall f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \quad f'(1) + \sigma f(1) = 0 \quad \text{et} \quad -f'(0) + \sigma f(0) = 0 . \quad (3.9)$$

Réciproquement, on observe que pour tout $f \in \mathbf{H}^2([0; 1])$ vérifiant ces deux dernières égalités, on obtient $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$.

En utilisant les résultats obtenus (3.8) et (3.9), on obtient l'expression du Laplacien de Robin souhaitée. \square

L'opérateur étant maintenant bien défini, on s'intéresse à son spectre.

3.2 Propriétés spectrales

Commençons par un résultat nous permettant de décrire la forme du spectre :

Proposition 3.2. *On a l'inégalité suivante :*

$$\forall f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \quad \|f\|_{\mathbf{H}^2([0;1])} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma} .$$

Ce qui équivaut à dire que l'injection $(\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_\sigma}) \hookrightarrow (\mathbf{H}^2([0; 1]), \|\cdot\|_{\mathbf{H}^2([0;1])})$ est continue.

De plus, la résolvante de \mathcal{L}_σ est compacte, son spectre est discret et peut s'écrire comme une suite croissante de valeurs propres $(k_n(\sigma)^2)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ avec $k_n(\sigma) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on notera $k_n := k_n(0)$).

On construit cette suite de sorte à ce que le nombre d'occurrences d'une valeur propre soit égal à sa multiplicité (sinon on aurait directement la croissance stricte de la suite).

Démonstration. Pour tout $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$, on a

$$\begin{aligned} \|f'\|_{\mathbf{L}^2([0;1])}^2 &= \int_0^1 f' \bar{f}' \, dx \\ &= f'(1)\bar{f}(1) - f'(0)\bar{f}(0) - \int_0^1 f'' \bar{f} \, dx \\ &= -\sigma \left(|f(1)|^2 + |f(0)|^2 \right) - \int_0^1 f'' \bar{f} \, dx . \end{aligned}$$

Il en suit que, pour tout $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$

$$\begin{aligned} \|f'\|_{\mathbf{L}^2([0;1])}^2 &\leq \|f'\|_{\mathbf{L}^2([0;1])}^2 + \sigma \left(|f(1)|^2 + |f(0)|^2 \right) \\ &\leq \int_0^1 |f'' f| \, dx \\ &\leq \|f''\|_{\mathbf{L}^2([0;1])} \|f\|_{\mathbf{L}^2([0;1])} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma}^2 . \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\forall f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \quad \|f\|_{\mathbf{H}^2([0;1])} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma} + \|f'\|_{\mathbf{L}^2([0;1])} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma} .$$

Nous venons ainsi de montrer la continuité de l'injection $(\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_\sigma}) \hookrightarrow (\mathbf{H}^2([0; 1]), \|\cdot\|_{\mathbf{H}^2([0;1])})$.

D'après le théorème de Rellich, l'injection $(\mathbf{H}^2([0; 1]), \|\cdot\|_{\mathbf{H}^2([0;1])}) \hookrightarrow (\mathbf{L}^2([0; 1]), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2([0;1])})$ est compacte, il en suit que l'injection $(\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_\sigma}) \hookrightarrow (\mathbf{L}^2([0; 1]), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2([0;1])})$ est compacte.

Cela implique (cf. [3, Proposition 4.24]) que la résolvante de \mathcal{L}_σ est compacte.

De plus, \mathcal{L}_σ est auto-adjoint, cela implique (cf. [3, Proposition 6.3]) que son spectre est réel, discret, et peut s'écrire comme une suite tendant vers $+\infty$ en valeur absolue.

On souhaite préciser un peu cette suite, on a

$$\forall f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \setminus \{0\}, \quad \langle \mathcal{L}_\sigma f, f \rangle_{\mathbf{L}^2([0;1])} = \|f'\|_{\mathbf{L}^2([0;1])}^2 + \sigma \left(|f(1)|^2 + |f(0)|^2 \right) \geq 0 .$$

Il en suit que le spectre de \mathcal{L}_σ est inclus dans \mathbb{R}_+ , ce qui nous permet de l'écrire comme énoncé dans la proposition. \square

Remarque 3.3. L'inclusion $\mathbf{H}^2([0; 1]) \subset \mathbf{C}^1([0; 1])$ implique que les fonctions propres sont dans $\mathbf{C}^\infty([0; 1])$.

On s'intéresse maintenant à la forme des fonctions propres de \mathcal{L}_σ . Commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme 3.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $k_n(\sigma) \neq 0$, et $k_0(\sigma) = 0$ si et seulement si $\sigma = 0$, avec

$$\ker \mathcal{L}_N = \text{Vect}(1) ,$$

l'ensemble des fonctions constantes de $\mathbf{L}^2([0; 1])$.

Démonstration. Soit $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$ (éventuellement nulle) telle que $f'' = 0$, i.e. $f \in \ker \mathcal{L}_\sigma$.

La fonction f' est constante égale à sa norme $\|f'\|_{\mathbf{L}^2([0;1])}$.

En appliquant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \|f'\|_{\mathbf{L}^2([0;1])}^2 &= \int_0^1 f' \bar{f}' \, dx \\ &= [f' \bar{f}]_0^1 - \int_0^1 f'' \bar{f} \, dx \\ &= f'(1) \bar{f}(1) - f'(0) \bar{f}(0) \\ &= -\sigma \left(|f(1)|^2 + |f(0)|^2 \right) \leq 0 . \end{aligned}$$

Il en suit que

$$\|f'\|_{\mathbf{L}^2([0;1])}^2 = -\sigma \left(|f(1)|^2 + |f(0)|^2 \right) = 0 ,$$

ce qui implique que f est constante.

De plus, f peut être non nulle, et donc $\ker \mathcal{L}_\sigma$ non réduit à 0, si et seulement si $\sigma = 0$.

Il en suit que :

- * Si $\sigma > 0$, alors $\ker \mathcal{L}_\sigma = \{0\}$, et donc $k_n(\sigma) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- * $\ker \mathcal{L}_N$ (cf. (3.6)) est constitué des fonctions constantes de $\mathbf{L}^2([0; 1])$, la multiplicité de 0 par rapport à \mathcal{L}_N est donc de 1, ce qui implique que $k_n > 0$ (cf. proposition 3.2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

\square

Passons maintenant à un résultat plus général sur les espaces propres de \mathcal{L}_σ .

Proposition 3.5. Soit $n \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N}^* si $\sigma = 0$), on dispose de l'expression de l'espace propre de \mathcal{L}_σ associé à $k_n(\sigma)^2$ suivante :

$$\ker \left(\mathcal{L}_\sigma - k_n(\sigma)^2 \right) = \text{Vect} \left(\cos(k_n(\sigma) \cdot) + \frac{\sigma}{k_n(\sigma)} \sin(k_n(\sigma) \cdot) \right) .$$

Ainsi, les valeurs propres de \mathcal{L}_σ sont toutes de multiplicité 1.

Démonstration. D'après le lemme 3.4, on a $k_n(\sigma) > 0$.
On considère une fonction propre $u_{n,\sigma}$ de \mathcal{L}_σ associée à $k_n(\sigma)^2$.

D'après la proposition 3.1, on a

$$u_{n,\sigma}'' = -\mathcal{L}_\sigma u_{n,\sigma} = -k_n(\sigma)^2 u_{n,\sigma} .$$

De plus, d'après la remarque 3.3, on a $u_{n,\sigma} \in \mathbf{C}^\infty([0; 1])$, d'où

$$u_{n,\sigma} \in \text{Vect}(\cos(k_n(\sigma) \cdot), \sin(k_n(\sigma) \cdot)) .$$

Il existe donc un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall x \in [0; 1], \begin{cases} u_{n,\sigma} &= \alpha \cos(k_n(\sigma)x) + \beta \sin(k_n(\sigma)x) \\ u_{n,\sigma}' &= k_n(\sigma)\beta \cos(k_n(\sigma)x) - k_n(\sigma)\alpha \sin(k_n(\sigma)x) \end{cases} .$$

En utilisant les conditions au bord (cf. proposition 3.1), on obtient

$$\begin{aligned} u_{n,\sigma} &= u_{n,\sigma}(0) \cos(k_n(\sigma) \cdot) + \frac{u_{n,\sigma}'(0)}{k_n(\sigma)} \sin(k_n(\sigma) \cdot) \\ &= u_{n,\sigma}(0) \cos(k_n(\sigma) \cdot) + \frac{\sigma u_{n,\sigma}(0)}{k_n(\sigma)} \sin(k_n(\sigma) \cdot) \\ &= u_{n,\sigma}(0) \left(\cos(k_n(\sigma) \cdot) + \frac{\sigma}{k_n(\sigma)} \sin(k_n(\sigma) \cdot) \right) . \end{aligned}$$

On peut choisir $u_{n,\sigma}(0)$ arbitrairement dans \mathbb{C} en faisant varier $u_{n,\sigma}$ dans l'espace propre de \mathcal{L}_σ associé à $k_n(\sigma)^2$, on en déduit l'expression de $\ker(\mathcal{L}_\sigma - k_n(\sigma)^2)$ souhaitée. \square

Les fonctions propres étant maintenant explicitées en fonction des valeurs propres, travaillons sur ces dernières. Nous n'aurons une expression explicites des valeurs propres que pour le Laplacien de Neumann \mathcal{L}_N (cf. (3.6)).

3.3 Description du spectre

Commençons par expliciter le cas $\sigma = 0$, on considère ainsi le Laplacien de Neumann \mathcal{L}_N .

D'après le lemme 3.4, on a $k_0 = 0$ et $k_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la proposition 3.5, la fonction $u_n := \cos(k_n \cdot)$ engendre l'espace propre $\ker(\mathcal{L}_N - k_n^2)$.

En utilisant les conditions au bord (cf. proposition 3.1) sur u_n , on obtient

$$\sin(k_n) = -\frac{1}{k_n} u_n'(1) = 0 .$$

On obtient ainsi que le spectre de \mathcal{L}_N coïncide avec $\sin^{-1}(0) \cap \mathbb{R}_+ = \pi\mathbb{N}$, i.e.

$$(k_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n\pi)_{n \in \mathbb{N}} . \tag{3.10}$$

Ce cas particulier est le seul pour lequel les valeurs propres sont explicites, pour le cas général, elles seront laissées sous forme de solutions d'une équation.

Passons maintenant au cas $\sigma > 0$.

En accord avec le lemme 3.4, on a $k_n(\sigma) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, d'après la proposition 3.5, la suite $(k_n(\sigma))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_{n,\sigma} := k_n(\sigma) \cos(k_n(\sigma) \cdot) + \sigma \sin(k_n(\sigma) \cdot)$ engendre l'espace propre $\ker(\mathcal{L}_\sigma - k_n(\sigma)^2)$.

En utilisant les conditions au bord (cf. proposition 3.1) sur u_n , on obtient

$$0 = u'_{n,\sigma}(1) + \sigma u_{n,\sigma}(1) = 2k_n(\sigma)\sigma \cos(k_n(\sigma)) - (k_n(\sigma)^2 - \sigma^2) \sin(k_n(\sigma)) .$$

Cette dernière égalité nous amène à étudier les solutions $y \in \mathbb{R}_+^*$ de l'équation

$$(y^2 - \sigma^2) \sin y = 2y\sigma \cos y .$$

On cherche les solutions dans \mathbb{R}_+^* car les fonctions de part et d'autre de l'égalité sont impaires en y et 0 n'appartient pas au spectre du Laplacien de Robin.

On a $y \in \cos^{-1}(0) \cap \mathbb{R}_+^* = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N}$ si et seulement si $y = \sigma$. Ainsi $\sigma \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N}$ implique que σ^2 est une valeur propre de \mathcal{L}_σ , sinon, $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N}$ ne contient aucune solution de notre équation.

En considérant $y \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N}\}$, on peut réécrire notre équation

$$\tan y = \frac{2y\sigma}{y^2 - \sigma^2} . \quad (3.11)$$

Pour illustrer un peu les solutions, voici deux graphiques :

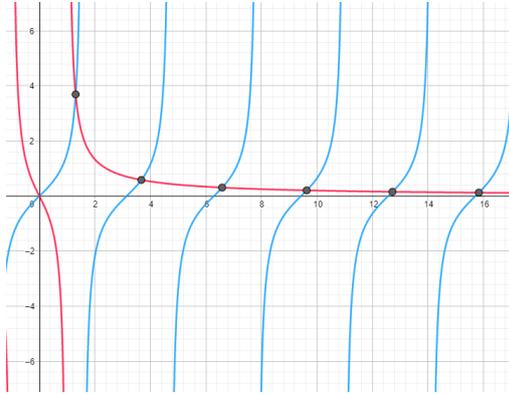


FIGURE 1 – le cas $\sigma = 1$.

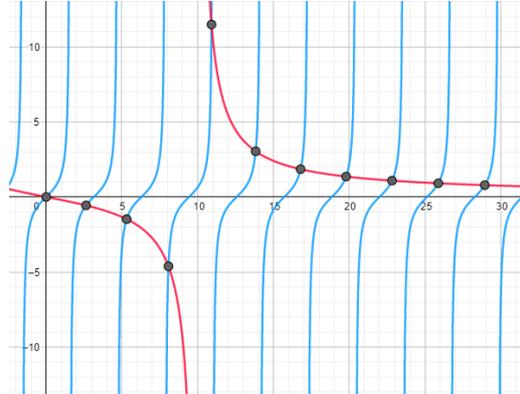


FIGURE 2 – le cas $\sigma = 10$.

L'application $y \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\sigma\} \mapsto \frac{2y\sigma}{y^2 - \sigma^2}$ est strictement décroissante, envoie $]0; \sigma[$ sur \mathbb{R}_+^* et $] \sigma; +\infty[$ sur \mathbb{R}_+^* .

On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}$:

- * $] (n + \frac{1}{2})\pi; (n + 1)\pi[$ contient une unique solution si et seulement si $(n + \frac{1}{2})\pi < \sigma$,
- * $] n\pi; (n + \frac{1}{2})\pi[$ contient une unique solution si et seulement si $\sigma < (n + \frac{1}{2})\pi$.

Les solutions cherchées forment la suite $(k_n(\sigma))_{n \in \mathbb{N}}$ (strictement croissante) vérifiant :

- * $k_n(\sigma) \in] (n + \frac{1}{2})\pi; (n + 1)\pi[$ tant que $(n + \frac{1}{2})\pi < \sigma$ (cela n'arrive pas si $\sigma \in]0; \frac{\pi}{2}[$),
- * $k_n(\sigma) = \sigma$ si $\sigma = (n + \frac{1}{2})\pi$ (cela n'arrive pas si $\sigma \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$),
- * $k_n(\sigma) \in] n\pi; (n + \frac{1}{2})\pi[$ dès que $\sigma < (n + \frac{1}{2})\pi$.

Plus généralement, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad k_n(\sigma) \in]n\pi; (n+1)\pi[\quad . \quad (3.12)$$

On introduit l'écart de Robin-Neumann :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n(\sigma) := k_n(\sigma)^2 - k_n^2 = k_n(\sigma)^2 - n^2\pi^2 \quad . \quad (3.13)$$

On a le résultat suivant sur l'écart de Robin-Neumann :

Proposition 3.6. *La suite $(d_n(\sigma))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente avec*

$$d_n(\sigma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4\sigma = \frac{2 \# \Gamma}{\text{Vol}(\Omega)} \cdot \sigma \quad .$$

En rappelant que $\Omega =]0; 1[$ et $\Gamma = \{0; 1\}$.

Démonstration. En reprenant (3.12) et (3.13), on obtient

$$\forall n > \frac{\sigma}{\pi} - \frac{1}{2}, \quad \frac{d_n(\sigma)}{k_n(\sigma) + n\pi} = k_n(\sigma) - n\pi \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad .$$

De plus, en utilisant l'équation (3.11), on obtient

$$\tan\left(\frac{d_n(\sigma)}{k_n(\sigma) + n\pi}\right) = \tan k_n(\sigma) = \frac{2\sigma k_n(\sigma)}{k_n(\sigma)^2 - \sigma^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad ,$$

On en déduit que

$$\frac{d_n(\sigma)}{k_n(\sigma) + n\pi} = k_n(\sigma) - n\pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad .$$

En utilisant $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et l'équation (3.11), on obtient

$$\frac{d_n(\sigma)}{k_n(\sigma) + n\pi} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\sigma k_n(\sigma)}{k_n(\sigma)^2 - \sigma^2} \quad ,$$

Or, d'après (3.12), on a $k_n(\sigma) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n\pi$, on obtient ainsi

$$d_n(\sigma) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sigma \frac{k_n(\sigma)(k_n(\sigma) + n\pi)}{k_n(\sigma)^2 - \sigma^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 4\sigma \quad .$$

□

Dans la dernière section, nous allons énoncer un résultat (théorème 6.3) qui généralise cette convergence, à ceci près que la suite concerné ne sera pas celle des écarts de Robin-Neumann $(d_n(\sigma))_{n \in \mathbb{N}}$ mais celle de leurs moyennes $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N d_n(\sigma)\right)_{N \in \mathbb{N}}$.

4 Laplacien de Robin

Dans cette section, nous allons reprendre le problème de Robin (1.1). Nous commencerons par construire le laplacien de Robin :

$$(\mathcal{L}_\sigma, \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma) = \left(-\Delta, \left\{f \in \mathbf{H}^2(\Omega) \mid \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \sigma f = 0\right\}\right) \quad , \quad (4.1)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine bornée du plan avec un bord lisse $\Gamma = \partial\Omega$.

Dans cette section, nous allons commencer par énoncer quelques résultats d'analyse fonctionnelle qui nous seront utiles pour, dans un second temps, montrer la régularité elliptique et expliciter le domaine du Laplacien de Robin.

Nous concluons cette section sur les premières propriétés du spectre, la régularité des valeurs propres et l'étude des écarts de Robin-Neumann seront faites dans les prochaines sections.

4.1 Quelques résultats fonctionnels

La régularité du bord Γ (compact) est suffisante pour que la mesure surfacique dS et la normale extérieure $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ associées soient bien définies (excepté en un nombre fini de points), le théorème de trace est donc vérifié :

Théorème 4.1 (Trace). *L'opérateur donné par*

$$\begin{array}{ccc} tr : \left(\mathbf{C}^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \right) & \rightarrow & \left(\mathbf{L}^2(\Gamma), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right) \\ f & \mapsto & f|_{\Gamma} \end{array}$$

est continu et s'étend ainsi par densité en un opérateur continu sur $\mathbf{H}^1(\Omega)$ (toujours noté $tr(f) = f|_{\Gamma}$), i.e.

$$\exists C_{tr} > 0 : \forall f \in \mathbf{H}^1(\Omega), \|f|_{\Gamma}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \leq C_{tr} \|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} .$$

On notera abusivement $f|_{\Gamma} = f$.

Corollaire 4.2. *Pour $j \in \{1; 2\}$, l'opérateur $\mathbf{H}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)$ est continu avec*

$$\begin{array}{ccc} f & \mapsto & \partial_j f \end{array}$$

$$\forall f \in \mathbf{H}^2(\Omega), \|\partial_j f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \leq C_{tr} \|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} .$$

Il en suit que l'opérateur $\mathbf{H}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)$ est continu avec

$$\begin{array}{ccc} f & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \end{array}$$

$$\forall f \in \mathbf{H}^2(\Omega), \left\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \leq \sqrt{2} C_{tr} \|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} .$$

Démonstration. Soit $f \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ et $j \in \{1; 2\}$, on a

$$\|\partial_j f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \leq C_{tr} \|\partial_j f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C_{tr} \|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} .$$

En notant $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$, on a $|\mathbf{n}|^2 = n_1^2 + n_2^2 = 1$, il en suit que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} &\leq \sqrt{2} \sqrt{\|\partial_1 f \cdot n_1\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + \|\partial_2 f \cdot n_2\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\|\partial_1 f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + \|\partial_2 f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2} \\ &\leq 2C_{tr} \|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

□

La mesure surfacique dS étant bien définie, nous disposons également des formules de Green :

Théorème 4.3 (Formules de green). *Pour tous $f, g \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ et $j \in \{1; 2\}$, on a*

$$- \int_{\Omega} f \cdot \partial_j g \, dx = \int_{\Omega} \partial_j f \cdot g \, dx - \int_{\Gamma} f g \cdot n_j \, dS .$$

Il en suit que, pour tous $f \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ et $g \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$, on a

$$- \int_{\Omega} f \cdot \Delta g \, dx = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx - \int_{\Gamma} f \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, dS ,$$

et, pour tous $f, g \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$,

$$- \int_{\Omega} f \cdot \Delta g \, dx = - \int_{\Omega} \Delta f \cdot g \, dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS .$$

De plus, on sait que $\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et $\mathbf{H}^2(\Omega)$ pour les normes respectives, on obtient alors par prolongement continu le corollaire suivant :

Corollaire 4.4. *Pour tous $f, g \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et $j \in \{1; 2\}$, on a*

$$- \int_{\Omega} f \cdot \partial_j g \, dx = \int_{\Omega} \partial_j f \cdot g \, dx - \int_{\Gamma} f g \cdot n_j \, dS .$$

Il en suit que, pour tous $f \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et $g \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, on a

$$- \int_{\Omega} f \cdot \Delta g \, dx = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx - \int_{\Gamma} f \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, dS ,$$

et, pour tous $f, g \in \mathbf{H}^2(\Omega)$,

$$- \int_{\Omega} f \cdot \Delta g \, dx = - \int_{\Omega} \Delta f \cdot g \, dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS .$$

Démonstration. Soient $f, g \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, par densité, il existe deux suites $(f_n)_n, (g_n)_n \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}$ telles que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{H}^1(\Omega)} f$ et $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{H}^1(\Omega)} g$.

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f \cdot \partial_j g \, dx - \int_{\Omega} f_n \cdot \partial_j g_n \, dx \right| &\leq \left\{ \begin{aligned} &\|f - f_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\partial_j g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+ \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|g - g_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 . \end{aligned}$$

On peut faire la même chose en inversant f et g , on obtient alors

$$\int_{\Omega} f_n \cdot \partial_j g_n \, dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega} f \cdot \partial_j g \, dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \partial_j f_n \cdot g_n \, dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega} \partial_j f \cdot g \, dx .$$

En utilisant le théorème 4.1 et le fait que $|n_j| \leq |\mathbf{n}| = 1$, on obtient

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f g \cdot n_j \, dS - \int_{\Gamma} f_n g_n \cdot n_j \, dS \right| &\leq \left\{ \begin{aligned} &C_{tr} \|f - f_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|g\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\ &+ C_{tr} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \|g - g_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 , \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{\Gamma} f_n g_n \cdot n_j \, dS \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f g \cdot n_j \, dS .$$

Or, d'après le théorème 4.3, on a

$$- \int_{\Omega} f_n \cdot \partial_j g_n \, dx = \int_{\Omega} \partial_j f_n \cdot g_n \, dx - \int_{\Gamma} f_n g_n \cdot n_j \, dS .$$

On obtient l'égalité souhaitée en passant à la limite. \square

On rappelle également le théorème de caractérisation de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ par les quotients :

Théorème 4.5 (Caractérisation de \mathbf{H}^1 par les quotients). *Soient $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $j \in \{1; 2\}$, on a*

$$\partial_j f \in \mathbf{L}^2(\Omega) \Leftrightarrow \exists C > 0 : \forall U \subset\subset \Omega \text{ (ouvert)}, \forall h \in]-d_U; d_U[\setminus \{0\}, \left\| D_h^j f \right\|_{\mathbf{L}^2(U)} \leq C$$

où $d_U \in]0; \text{dist}(U, \Gamma)[$, $D_h^j f := \frac{f(\cdot + h e_j) - f}{h}$ et (e_1, e_2) désigne la base canonique de \mathbb{R}^2 .
De plus, $\left\| D_h^j f - \partial_j f \right\|_{\mathbf{L}^2(U)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ (pour tout (U, h) comme ci-dessus), et on a les majorations suivantes

$$\begin{aligned} \partial_j f \in \mathbf{L}^2(\Omega) &\Rightarrow \left\| D_h^j f \right\|_{\mathbf{L}^2(U)} \leq \|\partial_j f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ f \in \mathbf{H}^1(\Omega) &\Rightarrow \left\| D_h^j f \right\|_{\mathbf{L}^2(U)} \leq \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{aligned}$$

où l'on écrit abusivement $\|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sqrt{\|\partial_1 f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\partial_2 f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2}$.

Remarque 4.6. Les 5 résultats que nous venons d'énoncer sont encore valables si le bord Γ de Ω est seulement lisse par morceaux, avec cependant une normale extérieure définie uniquement aux points réguliers de Γ .

Donnons un second théorème de caractérisation par les quotients dans la direction parallèle au bord pour un bord plat (cf. [4, Théorème III-4]), il nous sera utile pour montrer la régularité elliptique.

Théorème 4.7. *Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^2 contenant 0 et symétrique par rapport à $\mathbb{R}e_1$.*

On introduit les ensembles $U^+ := U \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^)$, $U_\delta := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \delta\}$ (non vide pour δ assez petit, que l'on fixe) et $U_\delta^+ := U_\delta \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$.*

Soit $f \in \mathbf{L}^2(U^+)$ telle que $f \equiv 0$ sur $U^+ \setminus U_\delta^+$, on a

$$\partial_1 f \in \mathbf{L}^2(U^+) \Leftrightarrow \exists C > 0 : \forall h \in]-\delta; \delta[\setminus \{0\}, \left\| D_h^1 f \right\|_{\mathbf{L}^2(U^+)} \leq C$$

Auquel cas, on a $\left\| D_h^1 f \right\|_{\mathbf{L}^2(U^+)} \leq \|\partial_1 f\|_{\mathbf{L}^2(U^+)}$ et $\left\| D_h^1 f - \partial_1 f \right\|_{\mathbf{L}^2(U^+)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, où l'on a écrit abusivement $D_h^1 f = D_h^1 f \cdot \mathbf{1}_{U_\delta^+ \cup (U_\delta^+ - h e_1)} \in \mathbf{L}^2(U^+)$ (cf. théorème 4.5).

Ces quelques résultats étant maintenant énoncés, nous pouvons passer à la construction du Laplacien de Robin.

4.2 Construction du Laplacien

Soit $\sigma \geq 0$, on introduit la forme hermitienne suivante sur $\mathbf{H}^1(\Omega)$

$$\mathcal{Q}_\sigma(f, g) = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla \bar{g} \, dx + \sigma \int_{\Gamma} f \bar{g} \, dS . \quad (4.2)$$

Pour tous $f, g \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_\sigma(f, g)| &\leq \sum_{j=1}^2 \|\partial_j f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\partial_j g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sigma \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \|g\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\ &\leq (2 + \sigma C_{tr}^2) \|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|g\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} , \end{aligned}$$

ainsi la forme hermitienne \mathcal{Q}_σ est continue. De plus, on a

$$\mathcal{Q}_\sigma(f, f) + \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \sigma \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \geq \|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ,$$

i.e. la forme hermitienne $\mathcal{Q}_\sigma + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ est coercive, on peut ainsi appliquer le théorème de Lax-Milgram à \mathcal{Q}_σ : pour

$$\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma := \left\{ f \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathcal{Q}_\sigma(f, \cdot) \text{ est continu pour } \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right\} , \quad (4.3)$$

l'opérateur non borné $(\mathcal{L}_\sigma, \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma)$ sur $\mathbf{L}^2(\Omega)$ défini par

$$\forall (f, g) \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \times \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \mathcal{Q}_\sigma(f, g) = \langle \mathcal{L}_\sigma f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad (4.4)$$

est fermé, à domaine dense (dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{H}^1(\Omega)$ pour les normes respectives) et auto-adjoint.

L'opérateur ainsi défini est le **Laplacien de Robin**.

Soit $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$, on appliquant le corollaire 4.4, on obtient

$$\forall g \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \mathcal{Q}_\sigma(f, g) = \langle f, -\Delta \bar{g} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)} = \langle -\Delta f, \bar{g} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)} .$$

L'opérateur $g \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle -\Delta f, \bar{g} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)}$ est continu pour $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, donc s'étend par densité en un opérateur continu (pour $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$) sur $\mathbf{H}^1(\Omega)$ (en l'occurrence $\mathcal{Q}_\sigma(f, \cdot)$) puis sur $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

En appliquant le théorème de représentation de Riesz à ce dernier opérateur puis en prenant sa restriction à $\mathbf{H}^1(\Omega)$, on obtient $\Delta f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ puis $\mathcal{L}_\sigma f = -\Delta f$, i.e.

$$(\mathcal{L}_\sigma, \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma) \subset (-\Delta, \{f \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \Delta f \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}) .$$

On aimerait maintenant expliciter $\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$. Pour cela, nous allons montrer un résultat de régularité elliptique basé sur les quotients différentiels scindé en deux parties, un contrôle sur les ouverts $U \subset\subset \Omega$ et un autre au niveau du bord Γ .

On désigne par $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\sigma}$ la norme du graphe du Laplacien de Robin, i.e.

$$\forall f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \quad \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma} := \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\mathcal{L}_\sigma f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} . \quad (4.5)$$

Nous allons montrer des contrôles à l'aide de cette norme afin de montrer que la résolvante de \mathcal{L}_σ est compacte, ce qui nous sera utile pour travailler le spectre.

Théorème 4.8. On a $\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \subset \mathbf{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$, avec

$$\forall U \subset\subset \Omega, \exists C > 0 : \forall f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \|f\|_{\mathbf{H}^2(U)} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma} .$$

Démonstration. Cette démonstration est basée sur celle du théorème [5, Section 6.3.1 Théorème 1].

Soient $U \subset\subset \Omega$ ouvert et $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$.

Nous allons utiliser une fonction de troncature pour esquiver le problème au bord, puis travailler avec les quotients différentiels en utilisant le théorème 4.5 de caractérisation de $\mathbf{H}^1(U)$ par ces derniers.

1. Quotients différentiels

On sait que $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{g \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid g|_\Gamma = 0\} = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, il en suit, d'après la définition 4.4, que

$$\forall g \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla f \bullet \nabla \bar{g} \, dx = \int_\Omega -\Delta f \cdot \bar{g} \, dx . \quad (4.6)$$

On fixe $U \subset\subset \Omega$ puis on considère un ouvert V vérifiant $U \subset\subset V \subset\subset \Omega$.

Considérons une fonction $\zeta \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant
$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{sur } U \\ \zeta \equiv 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus V \\ 0 \leq \zeta \leq 1 \end{cases} .$$

Soient $k \in \{1; 2\}$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \text{dist}(V, \Gamma)$.

On considère la fonction $g_1 := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h f)|_{V \cup (V + he_k)} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ (cf. théorème 4.5), donnée par :

(i) Pour tout $x \in V \cup (V + he_k)$,

$$\begin{aligned} g_1(x) &:= -\frac{1}{h} D_k^{-h}(\zeta(x)^2 (f(x + he_k) - f(x))) \\ &= \frac{1}{h^2} (\zeta(x - he_k)^2 (f(x) - f(x - he_k)) - \zeta(x)^2 (f(x + he_k) - f(x))) , \end{aligned}$$

(ii) et $g_1 \equiv 0$ sur $\Omega \setminus (V \cup (V + he_k))$.

On écrira abusivement $g_1 = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h f)$.

Comme $V \cup (V + he_k) \subset\subset \Omega$, on en déduit que $g_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

En procédant à un changement de variable $x \mapsto x - he_k$, on obtient, pour tout $F, G \in \mathbf{L}^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{V \cup (V + he_k)} F D_k^{-h} G \, dx &= -\frac{1}{h} \int_{V + he_k} F(x) G(x - he_k) \, dx + \frac{1}{h} \int_V F G \, dx \\ &= -\int_V D_k^h F G \, dx . \end{aligned}$$

Ce résultat nous sera très utile dans les calculs.

On pose

$$A := \int_\Omega \nabla f \bullet \nabla \bar{g}_1 \, dx \quad \text{et} \quad B := \int_\Omega -\Delta f \cdot \bar{g}_1 \, dx .$$

D'après l'égalité (4.6), on a

$$A = B . \quad (4.7)$$

Nous allons minorer A et majorer B afin d'aboutir à une nouvelle inégalité qui traduira un contrôle des quotient de ∇f , cela nous permettra de montrer la première partie du théorème.

Commençons par minorer A , on a

$$\begin{aligned} A &= -\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \partial_j f \partial_j \left(D_k^{-h} (\zeta^2 D_k^h \bar{f}) \right) dx \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} D_k^h (\partial_j f) \partial_j (\zeta^2 D_k^h \bar{f}) dx \\ &= \|\zeta D_k^h (\nabla f)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + 2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \zeta \partial_j \zeta D_k^h (\partial_j f) D_k^h \bar{f} dx \end{aligned}$$

On pose $C_1 := 2 \max_{j \in \{1;2\}} \|\partial_j \zeta\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$.

En utilisant la dernière inégalité du théorème 4.5, on obtient

$$\begin{aligned} \left| A - \|\zeta D_k^h (\nabla f)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right| &\leq C_1 \int_{\Omega} \zeta |D_k^h (\nabla f)| \cdot |D_k^h f| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|\zeta D_k^h (\nabla f)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1^2}{2} \int_V |D_k^h f|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|\zeta D_k^h (\nabla f)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1^2}{2} \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\zeta D_k^h (\nabla f)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1^2}{2} \left(\|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) . \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité suivante

$$A \geq \frac{1}{2} \|\zeta D_k^h (\nabla f)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 - \frac{C_1^2}{2} \left(\|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) . \quad (4.8)$$

Passons maintenant à la majoration de B .

On pose $C_2 := \max \left\{ 1; \|\nabla (\zeta^2)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}^2 \right\}$, en utilisant la dernière inégalité du théorème 4.5, on obtient

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} |\nabla (\zeta^2 D_k^h f)|^2 dx \\ &\leq C_2 \int_V |D_k^h f|^2 + \zeta^2 |D_k^h (\nabla f)|^2 dx \\ &\leq C_2 \int_{\Omega} |\nabla f|^2 + \zeta^2 |D_k^h (\nabla f)|^2 dx . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |B| &\leq \int_{\Omega} |\sqrt{2C_2} \Delta f| \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{2C_2}} g_1 \right| dx \\ &\leq \frac{1}{4C_2} \|g_1\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C_2 \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla f|^2 + \zeta^2 |D_k^h (\nabla f)|^2 dx + C_2 \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 . \end{aligned}$$

Finalement, comme $C_2 \geq 1 \geq \frac{1}{4}$, on obtient

$$|B| \leq \frac{1}{4} \|\zeta D_k^h (\nabla f)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C_2 \left(\|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) . \quad (4.9)$$

En utilisant l'égalité (4.7) ainsi que les inégalités (4.8) et (4.9), on obtient, pour $j \in \{1;2\}$,

$$\begin{aligned} \|D_k^h (\partial_j f)\|_{\mathbf{L}^2(U)}^2 &\leq \|D_k^h (\nabla f)\|_{\mathbf{L}^2(U)}^2 \\ &\leq \|\zeta D_k^h (\nabla f)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 4 \left(\frac{C_1^2}{2} + C_2 \right) \left(\|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) . \end{aligned}$$

Cette dernière majoration est indépendante de $h \in]-\text{dist}(V, \Gamma); \text{dist}(V, \Gamma)[\setminus \{0\}$ et vérifiée si l'on remplace U par un ouvert $\omega \subset\subset U$ quelconque.

On peut appliquer le théorème 4.5 (pour tout $k \in \{1; 2\}$) qui nous assure que $\partial_j f \in \mathbf{H}^1(U)$ (pour tout $j \in \{1; 2\}$).

Ceci étant vrai quelque soit $U \subset\subset \Omega$, on obtient que $f \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$.

La première partie du théorème est démontrée, travaillons maintenant sur l'estimation de $\|f\|_{\mathbf{H}^2(U)}$.

2. Estimation de la norme $\mathbf{H}^2(U)$

Le théorème 4.5 que nous venons d'appliquer nous assure également la convergence presque partout des quotients $D_k^h(\partial_j f)$ vers $\partial_k \partial_j f$ lorsque h tend vers 0.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée à notre dernière inégalité, on fait tendre h vers 0, on obtient alors

$$\begin{aligned} \|\partial_k \partial_j f\|_{\mathbf{L}^2(U)} &\leq 2\sqrt{\frac{C_1^2}{2} + C_2} \sqrt{\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{C_1^2}{2} + C_2} \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) . \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'inégalité suivante

$$\|f\|_{\mathbf{H}^2(U)} \leq \|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \sum_{1 \leq k \leq j \leq 2} \|\partial_k \partial_j f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C_3 \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) , \quad (4.10)$$

où $C_3 := 1 + 6\sqrt{\frac{C_1^2}{2} + C_2}$ (dépend uniquement de U et Ω).

Cette dernière inégalité est un premier pas, cependant, on aimerait une inégalité de la même forme mais avec $\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ à la place de $\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$.

Comme $U \subset\subset V \subset\subset \Omega$ (V dépend uniquement de U et Ω), on obtient, de la même façon que l'on a obtenu l'inégalité (4.10), l'inégalité suivante

$$\exists C_4 > 0 : \|f\|_{\mathbf{H}^2(U)} \leq C_4 \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(V)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(V)} \right) , \quad (4.11)$$

où C_4 dépend uniquement de U et V , donc uniquement de U et Ω .

On considère une fonction de troncature $\xi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\begin{cases} \xi \equiv 1 & \text{sur } V \\ \text{supp } \xi \subset \Omega & \\ 0 \leq \xi \leq 1 & \end{cases}$.

Cette fonction de troncature va nous permettre, en reprenant l'égalité (4.6) provenant de la définition (4.4) ainsi que la formule de Green (cf. corollaire 4.4), de contrôler la norme ∇f sur V par les normes de f et Δf sur Ω .

On pose $g_2 := \xi^2 f \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, en utilisant l'égalité (4.6), on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \xi^2 \Delta f \cdot \bar{f} \, dx &= - \int_{\Omega} \Delta f \cdot \bar{g}_2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla \bar{g}_2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla f|^2 \, dx + 2 \int_{\Omega} \xi \bar{f} (\nabla f \cdot \nabla \xi) \, dx . \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\int_{\Omega} \xi^2 \Delta f \cdot \bar{f} \, dx + 2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \partial_j f \bar{f} \partial_j \xi \, dx = - \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla f|^2 \, dx \in \mathbb{R}_+ .$$

La partie gauche de l'égalité est donc réelle.

De plus, on a $|f|^2 = f\bar{f} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et $\partial_j \xi \xi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Ainsi, en appliquant la formule de Green (cf. corollaire 4.4) et l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla f|^2 \, dx &= \int_{\Omega} \xi^2 \Re(\Delta f \cdot \bar{f}) \, dx - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} 2\Re(\partial_j f \bar{f}) \partial_j \xi \xi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \xi^2 \Re(\Delta f \cdot \bar{f}) \, dx - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \partial_j (f \bar{f}) \partial_j \xi \xi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \xi^2 \Re(\Delta f \cdot \bar{f}) \, dx + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} |f|^2 \partial_j (\partial_j \xi \xi) \, dx . \end{aligned}$$

On pose $C_5 := 2 \max_{j \in \{1;2\}} \|\partial_j (\partial_j \xi \xi)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$ (dépend uniquement de U et Ω).

En partant de l'égalité que nous venons de calculer (et en reprenant la définition (4.5)), on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(V)}^2 &\leq \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla f|^2 \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \xi^2 |\Delta f \cdot f| \, dx + C_5 \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \int_{\Omega} |\Delta f \cdot f| \, dx + C_5 \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + C_5\right) \left(\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + C_5\right) \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma}^2 . \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à la dernière inégalité nous permettant d'obtenir l'inégalité finale souhaitée,

$$\|f\|_{\mathbf{H}^1(V)} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(V)} \leq C_6 \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma} , \quad (4.12)$$

où $C_6 := 1 + \sqrt{\frac{1}{2} + C_5}$ (dépend uniquement de U et Ω).

Nous pouvons maintenant montrer l'inégalité souhaitée, en utilisant les inégalités (4.11) et (4.12), on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{H}^2(U)} &\leq C_4 \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(V)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C_4 C_6 \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C_4 (1 + C_6) \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq C \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma} , \end{aligned}$$

où $C := C_4 (1 + C_6)$ (dépend uniquement de U et Ω).

□

Nous avons ainsi $\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \subset \mathbf{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$, cela nous assure déjà une certaine régularité pour le domaine de f .

On aimerait cependant renforcer ce résultat en montrant que $\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \subset \mathbf{H}^2(\Omega)$ et que l'on peut trouver une constante C indépendante du choix de $U \subset\subset \Omega$, dans le sens où l'inégalité est vérifiée lorsque l'on prend $U = \Omega$.

Ces résultats souhaités sont l'objet du théorème suivant :

Théorème 4.9 (Régularité elliptique du Laplacien de Robin).

On a $\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \subset \mathbf{H}^2(\Omega)$, il en suit que

$$\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma = \left\{ f \in \mathbf{H}^2(\Omega) \mid \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \sigma f = 0 \right\}$$

De plus, on a l'estimation suivante :

$$\exists C > 0 : \forall f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \quad \|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}_\sigma} \left(\leq 3C \|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \right) .$$

Cette estimation revient à dire que l'injection $(\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_\sigma}) \hookrightarrow (\mathbf{H}^2(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)})$ est continue.

Sur le plan \mathbb{R}^2 , il n'y a pas de problème de bord et la transformée de Fourier nous permet de montrer facilement que les normes $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^2)}$ et $\|\cdot\|_\Delta : f \mapsto \|f\|_{\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^2)}$ sont équivalentes en transformant les contrôles de normes en inégalités sur des polynômes.

Ce théorème nous montre que l'on peut obtenir le même genre d'estimations dans notre cas, mais nous ne disposons malheureusement pas du formidable outil qu'est la transformée de Fourier ici. Le problème de bord qui apparaît par rapport au cas de l'espace entier nous pousse à plus d'efforts et d'attention dans les calculs, ici, ce sont les quotients différentiels qui seront au cœur de la démonstration.

Avec la condition au bord, les formules de Green (cf. corollaire 4.4) et les quotients différentiels, nous allons réussir, nous sans peine, à montrer le contrôle des normes des $\partial_j f$ et des $\partial_j \partial_k f$ ($j, k \in \{1; 2\}$) par les normes de f et Δ , ce qui est un résultat intéressant et assez fort sur la régularité des éléments de $\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$.

De plus, au-delà d'avoir décrit le domaine de \mathcal{L}_σ , ce résultat va nous permettre de montrer que l'injection

$$(\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_\sigma}) \hookrightarrow (\mathbf{L}^2(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)})$$

est compacte.

La compacité de cette injection implique la compacité de la résolvante de \mathcal{L}_σ , ce qui va nous permettre de décrire le spectre de \mathcal{L}_σ comme une suite de valeurs propres $0 \leq \lambda_0^\sigma \leq \lambda_1^\sigma \leq \dots$ tendant vers $+\infty$.

Passons maintenant à la démonstration :

Démonstration. Cette démonstration est basée sur celle du théorème [4, Section 4.2 Théorème 4].

D'après le théorème 4.8, le problème de régularité est au bord, la démonstration sera donc concentrée sur ce qui se passe au voisinage de Γ .

Soit $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$, on considère $u := \mathcal{L}_\sigma f = -\Delta f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, en utilisant la définition (4.5), on obtient

$$\forall g \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla \bar{g} \, dx + \sigma \int_{\Gamma} f \bar{g} \, dS = \int_{\Omega} u \bar{g} \, dx . \quad (4.13)$$

1. Coordonnées locales au bord

Le bord Γ est compact et lisse, la normale extérieure $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ est donc bien définie.

Soit $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \Gamma$, on considère le repère cartésien $r := (x^0; (\mathbf{n}^\perp(x^0), -\mathbf{n}(x^0)))$ où $\mathbf{n}^\perp := \text{rot}_{\frac{\pi}{2}} \mathbf{n} = (-n_2, n_1)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on note $x = (x_1, x_2)_r$ l'expression de x dans ce repère, i.e. $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est l'unique couple vérifiant

$$x = x^0 + x_1 \mathbf{n}^\perp(x^0) - x_2 \mathbf{n}(x^0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= (x - x^0) \cdot \mathbf{n}^\perp \\ x_2 &= -(x - x^0) \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (4.14)$$

De par la régularité de Γ , on peut appliquer le théorème des fonctions implicites, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ et une fonction $\psi \in \mathbf{C}^\infty([-3\varepsilon; 3\varepsilon])$ (laissant stable l'intervalle $] -3\varepsilon; 3\varepsilon[$) tels que

$$\mathbf{B}_\infty(x^0, 3\varepsilon) \cap \Gamma = \{(x_1, \psi(x_1))_r \mid |x_1| < 3\varepsilon\}$$

et

$$\mathbf{B}_\infty(x^0, 3\varepsilon) \cap \Omega = \{(x_1, x_2)_r \mid |x_1| < 3\varepsilon \text{ et } \psi(x_1) < x_2 < 3\varepsilon\}$$

où $\mathbf{B}_\infty(x^0, 3\varepsilon) := \{(x_1, x_2)_r \mid x_1, x_2 \in]-3\varepsilon; 3\varepsilon[\}$.

On remarque que $\psi(0) = 0$ car $x^0 = (0, 0)_r \in \mathbf{B}_\infty(x^0, 3\varepsilon) \cap \Gamma$.

De plus, $(1, \psi'(0))_r$ appartient à la tangente à Γ en x^0 donnée par $\text{Vect}(\mathbf{n}^\perp(x^0))$, ce qui implique que

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0 . \quad (4.15)$$

Cette égalité nous assure que $\psi(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow 0}(x^2)$, ce qui est en fait l'argument nous permettant de choisir ε assez petit pour que les intervalles $] -h; h[$ soient laissés stables par ψ , où $h \in]0; 3\varepsilon[$.

Les intersections de Γ et Ω avec $\mathbf{B}_\infty(x^0, 2\varepsilon)$ et $\mathbf{B}_\infty(x^0, \varepsilon)$ peuvent s'écrire à l'aide de ψ de la même façon.

On pose $\Omega_1 := \mathbf{B}_\infty(x^0, 3\varepsilon) \cap \Omega$, $\Omega_2 := \mathbf{B}_\infty(x^0, \varepsilon) \cap \Omega$, $\Gamma_1 := \mathbf{B}_\infty(x^0, 3\varepsilon) \cap \Gamma \subset \partial\Omega$ et $\tilde{\Gamma}_1 := \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1$.

Les bords $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \tilde{\Gamma}_1$ et $\partial\Omega_2$ sont seulement lisses par morceaux, en accord avec la remarque 4.6, on pourra tout de même appliquer les premiers résultats énoncés dans la première sous-section 4.1.

On considère une fonction de troncature $\zeta \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant
$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{sur } \mathbf{B}_\infty(x^0, \varepsilon) \\ \zeta \equiv 0 & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{B}_\infty(x^0, 2\varepsilon) \\ 0 \leq \zeta \leq 1 \end{cases} .$$

Cette fonction de troncature va nous servir à déformer nos fonctions de sorte à pouvoir, après avoir aplati le bord Γ_1 , appliquer le théorème 4.7.

Soit $g_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega_1)$, on écrit abusivement $g := \zeta g_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ le prolongement par 0 sur Ω de $\zeta g_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega_1)$, et on pose $f_1 := \zeta f \in \mathbf{H}^1(\Omega)$.

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \nabla f_1 \cdot \nabla \bar{g}_1 \, dx &= \int_{\Omega_1} \zeta \nabla f \cdot \nabla \bar{g}_1 \, dx + \int_{\Omega_1} f \nabla \zeta \cdot \nabla \bar{g}_1 \, dx \\ &= \int_{\Omega_1} \nabla f \cdot \nabla \bar{g} \, dx - \int_{\Omega_1} g_1 \nabla \zeta \cdot \nabla f \, dx + \int_{\Omega_1} f \nabla \zeta \cdot \nabla \bar{g}_1 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla \bar{g} \, dx - \int_{\Omega_1} g_1 \nabla \zeta \cdot \nabla f \, dx + \int_{\Omega_1} f \nabla \zeta \cdot \nabla \bar{g}_1 \, dx . \end{aligned}$$

Or, d'après l'égalité (4.13), on a

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla \bar{g} \, dx = \int_{\Omega} u \bar{g} \, dx - \sigma \int_{\Gamma} f \bar{g} \, dS = \int_{\Omega_1} \zeta u \bar{g}_1 - \sigma \int_{\Gamma_1} f_1 \bar{g}_1 \, dS .$$

On obtient finalement

$$\int_{\Omega_1} \nabla f_1 \cdot \nabla \bar{g}_1 \, dx = \int_{\Omega_1} u_1 \bar{g}_1 \, dx + \int_{\Omega_1} f \nabla \zeta \cdot \nabla \bar{g}_1 \, dx - \sigma \int_{\Gamma_1} f_1 \bar{g}_1 \, dS , \quad (4.16)$$

où $u_1 := \zeta u - \nabla \zeta \cdot \nabla f \in \mathbf{L}^1(\Omega)$.

Maintenant que nous avons établi cette première formule, nous allons procéder à un changement de variable visant à aplatir le bord Γ_1 , avant de la reformuler sous ce changement de variable.

2. Changement de variable : bord plat

On introduit le \mathbf{C}^∞ -difféomorphisme suivant :

$$\begin{aligned}\varphi &: y = (y_1, y_2) \mapsto x^0 + y_1 \mathbf{n}^\perp(x^0) - (y_2 + \psi(y_1)) \mathbf{n} \\ \varphi^{-1} &: x \in \mathbf{B}_\infty(x^0, 3\varepsilon) \mapsto ((x - x^0) \cdot \mathbf{n}^\perp, -(x - x^0) \cdot \mathbf{n} - \psi((x - x^0) \cdot \mathbf{n}^\perp))\end{aligned}\quad (4.17)$$

On introduit :

$$\begin{aligned}\omega_1 &:= \{(y_1, y_2) \mid |y_1| < 3\varepsilon \text{ et } 0 < y_2 < 3\varepsilon - \psi(y_1)\} \\ \omega_2 &:= \{(y_1, y_2) \mid |y_1| < \varepsilon \text{ et } 0 < y_2 < \varepsilon - \psi(y_1)\} \\ \gamma_1 &:= \{(y_1, 0) \mid |y_1| \leq 3\varepsilon\} \\ \tilde{\gamma}_1 &:= \left\{ (y_1, y_2) \mid \begin{cases} |y_1| \leq 3\varepsilon \\ y_2 = 3\varepsilon - \psi(y_1) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} |y_1| = 3\varepsilon \\ 0 < y_2 < 3\varepsilon - \psi(y_1) \end{cases} \right\} .\end{aligned}$$

les images (simplement connexes) respectives de $\Omega_1, \Omega_2, \Gamma_1$ et $\tilde{\Gamma}_1$ par φ^{-1} .

$$\text{On a } \begin{cases} \partial_{y_1} \varphi(y) = \mathbf{n}^\perp(x^0) - \psi'(y_1) \mathbf{n}(x^0) \\ \partial_{y_2} \varphi(y) = -\mathbf{n}(x^0) \end{cases}, \text{ on pose alors}$$

$$\alpha(y) := n_2(x^0) + \psi'(y_1) n_2(x^0) \text{ et } \beta(y) := -n_1(x^0) + \psi'(y_1) n_1(x^0),$$

$$\text{de sorte à avoir } \partial_{y_1} \varphi(y) = - \begin{pmatrix} \alpha(y) \\ \beta(y) \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit la matrice Jacobienne de } \varphi : D_y \varphi = \begin{pmatrix} -\alpha(y) & -n_1(x^0) \\ -\beta(y) & -n_2(x^0) \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det D_y \varphi = \det [\mathbf{n}^\perp(x^0); -\mathbf{n}(x^0)] + \psi'(y_1) \det [\mathbf{n}(x^0); \mathbf{n}(x^0)] = 1.$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\forall F \in \mathbf{L}^2(\Omega_1), \int_{\Omega_1} F(x) dx &= \int_{\omega_1} F(\varphi(y)) |\det D_y \varphi| dy \\ &= \int_{\omega_1} F(\varphi(y)) dy\end{aligned}\quad (4.18)$$

De plus, par construction, $t \in]-3\varepsilon; 3\varepsilon[\mapsto \varphi(t, 0)$ est une paramétrisation de $\Gamma_1 = \varphi^{-1}(\gamma_1)$, on obtient

$$\begin{aligned}\forall F \in \mathbf{L}^2(\Gamma_1), \int_{\Gamma_1} F dS &= \int_{-3\varepsilon}^{3\varepsilon} F(\varphi(t, 0)) \sqrt{1 + |\psi'(t)|^2} dt \\ &= \int_{\gamma_1} F(\varphi(y)) d\gamma(y),\end{aligned}\quad (4.19)$$

où $d\gamma(y) := \sqrt{1 + |\psi'(y_1)|^2} dy = |\partial_{y_1} \varphi(y)| d\gamma_1(y)$, $d\gamma_1$ désignant la mesure surfacique du bord plat γ_1 .

Pour tout $F \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, on a $\begin{cases} \partial_{y_1} (F \circ \varphi)(y) = \nabla F(\varphi(y)) \cdot \partial_{y_1} \varphi(y) \\ \partial_{y_2} (F \circ \varphi)(y) = \nabla F(\varphi(y)) \cdot \partial_{y_2} \varphi(y) \end{cases}$, on en déduit

$$\forall F \in \mathbf{H}^1(\Omega_1), \begin{cases} \nabla_y (F \circ \varphi)(y) = {}^t D_y \varphi \cdot \nabla F(\varphi(y)) \\ \nabla F(\varphi(y)) = ({}^t D_y \varphi)^{-1} \cdot \nabla_y (F \circ \varphi)(y) \end{cases}, \quad (4.20)$$

avec

$${}^t D_y \varphi = \begin{pmatrix} -\alpha(y) & -\beta(y) \\ -n_1(x^0) & -n_2(x^0) \end{pmatrix}$$

et

$$({}^t D_y \varphi)^{-1} = {}^t D_y \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} -n_2(x^0) & \beta(y) \\ n_1(x^0) & -\alpha(y) \end{pmatrix} .$$

Dans le but d'alléger les notations, nous écrivons abusivement $F = F \circ \varphi$ pour tout $F \in \mathbf{L}^2(\Omega_1)$.

En utilisant cette notation et en reprenant (4.18), (4.19) et (4.20), nous pouvons réécrire (4.16) de la façon suivante :

$$\int_{\omega_1} {}^t \nabla_y f_1 \cdot B \cdot \nabla_y \bar{g}_1 \, dy = \int_{\omega_1} u_1 \bar{g}_1 \, dy + \int_{\Omega_1} f {}^t \nabla_y \zeta \cdot B \cdot \nabla_y \bar{g}_1 \, dy - \sigma \int_{\gamma_1} f_1 \bar{g}_1 \, d\gamma .$$

où

$$B(y) := D_y \varphi^{-1} \cdot {}^t D_y \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\psi'(y_1) \\ -\psi'(y_1) & 1 + |\psi'(y_1)|^2 \end{pmatrix} . \quad (4.21)$$

On pose

$$A(y) := I_2 - B(y) = \begin{pmatrix} 0 & \psi'(y_1) \\ \psi'(y_1) & -|\psi'(y_1)|^2 \end{pmatrix} , \quad (4.22)$$

On obtient alors la reformulation de (4.16) suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1} \nabla_y f_1 \cdot \nabla_y \bar{g}_1 \, dy &= \int_{\omega_1} u_1 \bar{g}_1 \, dy + \int_{\omega_1} {}^t \nabla_y f_1 \cdot A \cdot \nabla_y \bar{g}_1 \, dy \\ &\quad + \int_{\Omega_1} f {}^t \nabla_y \zeta \cdot B \cdot \nabla_y \bar{g}_1 \, dy - \sigma \int_{\gamma_1} f_1 \bar{g}_1 \, d\gamma . \end{aligned} \quad (4.23)$$

En accord avec notre notation, on remarque que $\zeta \equiv 1$ sur ω_2 , d'où $f = f_1$, $g_1 = g$ et $u = u_1$ sur ω_2 .

De plus, $\zeta \equiv 0$ sur

$$\varphi^{-1}(\Omega_1 \setminus (B_\infty(x^0, 2\varepsilon) \cap \Omega_1)) = \omega_1 \setminus \varphi^{-1}(B_\infty(x^0, 2\varepsilon) \cap \Omega_1) .$$

On pose

$$\begin{aligned} \delta &:= \text{dist}(\tilde{\gamma}_1, \varphi^{-1}(B_\infty(x^0, 2\varepsilon) \cap \Omega_1)) \\ &= \text{dist}(\tilde{\gamma}_1, \partial(\varphi^{-1}(B_\infty(x^0, 2\varepsilon) \cap \Omega_1)) \cap \omega_1) > 0 . \end{aligned}$$

Il en suit que

$$\varphi^{-1}(B_\infty(x^0, 2\varepsilon) \cap \Omega_1) \subset \omega_\delta := \{y \in \omega_1 \mid \text{dist}(y, \tilde{\gamma}_1) > \delta\} .$$

On en déduit que $\text{supp } \zeta \subset \omega_\delta$, d'où $f_1 = g = u_1 \equiv 0$ sur $\omega_1 \setminus \omega_\delta$.

Passons maintenant à l'étude des quotients différentiels dans la direction parallèle au bord.

3. Quotients différentiels dans la direction parallèle au bord

Soient $v \in \mathbf{H}^1(\omega_1)$ tel que $v \equiv 0$ sur $\omega_1 \setminus \omega_\delta$, et $h \in]-\delta; \delta[\setminus \{0\}$.

On pose $\omega_{\delta,1}^h := \omega_\delta \cup (\omega_\delta + h e_1)$, et on considère $g_1 = D_{-h}^1 v \in \mathbf{H}^1(\omega_1)$ (cf. théorème

4.5) donnée par $\frac{v(\cdot - he_1) - v}{-h}$ sur $\omega_{\delta,1}^h$ et 0 sur $\omega_1 \setminus \omega_{\delta,1}^h$.

On a, pour tout $F \in \mathbf{L}^2(\omega_1)$ telle que $F \equiv 0$ sur $\omega_1 \setminus \omega_\delta$,

$$\int_{\omega_1} F \bar{g}_1 \, dy = \int_{\omega_{\delta,1}^h} F D_{-h}^1 \bar{v} \, dy = - \int_{\omega_\delta} D_h^1 F \bar{v} \, dy = - \int_{\omega_1} D_h^1 F \bar{v} \, dy ,$$

et, de la même façon, pour tout $F \in \mathbf{L}^2(\omega_1, \mathbb{C}^2)$ telle que $F \equiv 0$ sur $\omega_1 \setminus \omega_\delta$,

$$\int_{\omega_1} F \bullet \nabla_y g_1 \, dy = - \int_{\omega_\delta} D_h^1 F \bullet \nabla \bar{v} \, dy = - \int_{\omega_1} D_h^1 F \bullet \nabla \bar{v} \, dy ,$$

où l'on a noté abusivement $D_h^1 F = D_h^1 F \cdot \mathbf{1}_{\omega_{\delta,1}^h}$.

Nous pouvons alors réécrire (4.23) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} - \int_{\omega_1} D_h^1 (\nabla_y f_1) \bullet \nabla_y \bar{v} \, dy &= \int_{\omega_1} u_1 D_{-h}^1 \bar{v} \, dy - \int_{\omega_1} D_h^1 ({}^t \nabla_y f_1 \cdot A) \cdot \nabla_y \bar{v} \, dy \\ &\quad - \int_{\Omega_1} D_h^1 (f \cdot {}^t \nabla_y \zeta \cdot B) \cdot \nabla_y \bar{v} \, dy - \sigma \int_{\gamma_1} f_1 D_{-h}^1 \bar{v} \, d\gamma . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dans un premier temps, le théorème 4.7 et l'inégalité de Hölder nous permettent d'obtenir la majoration suivante :

$$\left| \int_{\omega_1} u_1 D_{-h}^1 \bar{v} \, dy \right| \leq \|u_1\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \|\partial_{y_1} v\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \leq \|u_1\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \|\nabla_y v\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} . \quad (4.25)$$

On introduit la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{L}^\infty(\omega_1, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ ($\supset \mathbf{C}^\infty(\bar{\omega}_1, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$) donnée par :

$$\forall M = (M_{j,k})_{j,k} \in \mathbf{L}^\infty(\omega_1, \mathcal{M}_2(\mathbb{C})), \quad \|M\|_\infty := \max_{1 \leq j,k \leq 2} \|M_{j,k}\|_{\mathbf{L}^\infty(\omega_1)} .$$

En reprenant les expressions (4.22) et (4.21) de A et B , on obtient

$$\|A\|_\infty = \|\psi'\|_{\mathbf{L}^\infty([-3\varepsilon; 3\varepsilon])} \cdot \max \left\{ 1; \|\psi'\|_{\mathbf{L}^\infty([-3\varepsilon; 3\varepsilon])} \right\}$$

et

$$\|B\|_\infty = 1 + \|\psi'\|_{\mathbf{L}^\infty([-3\varepsilon; 3\varepsilon])}^2 .$$

Ensuite, on décompose :

$$D_h^1 ({}^t \nabla_y f_1 \cdot A) = D_h^1 ({}^t \nabla_y f_1) \cdot A_h^1 + {}^t \nabla_y f_1 \cdot D_h^1 A$$

où $A_h^1 := A(\cdot + he_1)$.

En appliquant le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\forall y \in \omega_1, \quad \begin{cases} |D_h^1 \psi'(y_1)| \leq \|\psi''\|_{\mathbf{L}^\infty([-3\varepsilon; 3\varepsilon])} \\ |D_h^1 |\psi'(y_1)|^2| \leq 2 \|\psi''\|_{\mathbf{L}^\infty([-3\varepsilon; 3\varepsilon])} \|\psi'\|_{\mathbf{L}^\infty([-3\varepsilon; 3\varepsilon])} \end{cases} .$$

En reprenant l'expression (4.22) de A , on déduit que

$$\|D_h^1 A\|_\infty \leq C_1 := \|\psi''\|_{\mathbf{L}^\infty([-3\varepsilon; 3\varepsilon])} \cdot \max \left\{ 1; 2 \|\psi'\|_{\mathbf{L}^\infty([-3\varepsilon; 3\varepsilon])} \right\} .$$

On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\|{}^t \nabla_y f_1 \cdot D_h^1 A\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 \leq 2C_1^2 \left(\|\partial_{y_1} f_1\| + \|\partial_{y_1} f_1\| \right)_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 \leq 4C_1^2 \|f_1\|_{\mathbf{H}^1(\omega_1)}^2 .$$

En reprenant l'expression (4.21) de B , en utilisant l'inégalité de Hölder et le théorème 4.7, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|D_h^1(f^t \nabla_y \zeta \cdot B)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 &\leq \|D_h^1(f_1(\partial_{y_1} \zeta - \psi'(y_1) \partial_{y_2} \zeta))\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 \\ &\quad + \left\| D_h^1 \left(f_1 \left(-\psi'(y_1) \partial_{y_1} \zeta + |\partial_{y_1} \varphi|^2 \partial_{y_2} \zeta \right) \right) \right\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 \\ &\leq \|\nabla_y(f_1(\partial_{y_1} \zeta - \psi'(y_1) \partial_{y_2} \zeta))\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 \\ &\quad + \left\| \nabla_y \left(f_1 \left(-\psi'(y_1) \partial_{y_1} \zeta + |\partial_{y_1} \varphi|^2 \partial_{y_2} \zeta \right) \right) \right\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 \\ &\leq C_2^2 \|f_1\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C_2^2 := & \|\partial_{y_1} \zeta - \psi'(y_1) \partial_{y_2} \zeta\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 + \|\nabla_y(\partial_{y_1} \zeta - \psi'(y_1) \partial_{y_2} \zeta)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 \\ & + \left\| -\psi'(y_1) \partial_{y_1} \zeta + |\partial_{y_1} \varphi|^2 \partial_{y_2} \zeta \right\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 + \left\| \nabla_y \left(-\psi'(y_1) \partial_{y_1} \zeta + |\partial_{y_1} \varphi|^2 \partial_{y_2} \zeta \right) \right\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)}^2 . \end{aligned}$$

En utilisant ces deux dernières inégalités et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\left| \int_{\omega_1} ({}^t \nabla_y f_1 \cdot D_h^1 A + D_h^1(f^t \nabla_y \zeta \cdot B)) \bullet \nabla_y \bar{v} \, dy \right| \leq C_3 \|f_1\|_{\mathbf{H}^1(\omega_1)} \|\nabla_y v\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \quad (4.26)$$

où $C_3 := 2C_1 + C_2$.

D'autre part, en utilisant l'expression (4.22) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_1} D_h^1({}^t \nabla_y f_1) \cdot A_h^1 \cdot \nabla_y \bar{v} \, dy \right| &\leq \|A\|_{\infty} \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq 2 \\ (j, k) \neq (1, 1)}} \int_{\omega_1} |D_h^1(\partial_{y_j} f_1) \partial_{y_k} \bar{v}| \, dy \\ &\leq 3 \|A\|_{\infty} \|D_h^1(\nabla_y f_1)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \|\nabla_y v\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} , \end{aligned}$$

et par construction (d'après (4.15)), quitte à prendre un ε plus petit, on peut supposer $3 \|A\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}$, donc

$$\left| \int_{\omega_1} D_h^1({}^t \nabla_y f_1) \cdot A_h^1 \cdot \nabla_y \bar{v} \, dy \right| \leq \frac{1}{2} \|D_h^1(\nabla_y f_1)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \|\nabla_y v\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} . \quad (4.27)$$

La normale extérieure à γ_1 est donnée par $\mathbf{n}_1 = (0, -1)$.

En appliquant la formule de green (cf. corollaire 4.4), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f_1 D_{-h}^1 \bar{v} \, d\gamma &= \int_{\gamma_1} |\partial_{y_1} \varphi| f_1 \cdot D_{-h}^1 \bar{v} \, d\gamma_1 \\ &= \int_{\omega_1} D_h^1(|\partial_{y_1} \varphi| f_1) \cdot \partial_{y_2} \bar{v} - \partial_{y_2}(|\partial_{y_1} \varphi| f_1) \cdot D_{-h}^1 \bar{v} \, dy \\ &= \int_{\omega_1} D_h^1(|\partial_{y_1} \varphi| f_1) \cdot \partial_{y_2} \bar{v} - |\partial_{y_1} \varphi| \partial_{y_2} f_1 \cdot D_{-h}^1 \bar{v} \, dy , \end{aligned}$$

car $\partial_{y_2}(|\partial_{y_1} \varphi(y)|) = \partial_{y_2} \left(\sqrt{1 + |\psi'(y_1)|^2} \right) = 0$.

On obtient ainsi, en utilisant le théorème 4.7 et l'inégalité de Hölder,

$$\left| \int_{\gamma_1} f_1 D_{-h}^1 \bar{v} \, d\gamma \right| \leq 2 \|\partial_{y_1} \varphi\|_{\mathbf{L}^{\infty}(\omega_1)} \|f_1\|_{\mathbf{H}^1(\omega_1)} \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\omega)} . \quad (4.28)$$

Finalement, en reprenant l'équation (4.24) et en regroupant les estimations (4.25), (4.26), (4.27) et (4.28), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_1} D_h^1(\nabla_y f_1) \bullet \nabla_y \bar{v} \, dy \right| &\leq \left(\|u_1\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} + C_4 \|f_1\|_{\mathbf{H}^1(\omega_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \|D_h^1(\nabla_y f_1)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \right) \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \end{aligned}$$

où $C_4 := C_3 + 2\sigma \|\partial_{y_1}\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty(\omega_1)}$.

En appliquant cette dernière estimation au cas $v = D_h^1 f_1$ (nulle sur $\omega_1 \setminus \omega_{\frac{\delta}{2}}$ pour $|h| < \frac{\delta}{2}$), on obtient

$$\|D_h^1(\nabla_y f_1)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \leq C_5 \left(\|f_1\|_{\mathbf{H}^1(\omega_1)} + \|u_1\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \right)$$

où $C_5 := 2 \max\{1; C_4\}$.

On a ainsi obtenu, en accord avec le théorème 4.7, que $\partial_{y_1}^2 f_1$ et $\partial_{y_1}\partial_{y_2} f_1$ sont dans $\mathbf{L}^2(\omega_1)$ avec

$$\|\partial_{y_1}^2 f_1\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \leq C_5 \left(\|f_1\|_{\mathbf{H}^1(\omega_1)} + \|u_1\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \right) ,$$

et

$$\|\partial_{y_1}\partial_{y_2} f_1\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \leq C_5 \left(\|f_1\|_{\mathbf{H}^1(\omega_1)} + \|u_1\|_{\mathbf{L}^2(\omega_1)} \right) .$$

De plus, en reprenant les propriétés de ζ et les expressions de f_1 et u_1 ainsi que l'égalité (4.18), on obtient l'existence d'une constante $C_6 \geq C_5$ telle que

$$\|\partial_{y_1}^2 f\|_{\mathbf{L}^2(\omega_2)} \leq C_6 \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) , \quad (4.29)$$

et

$$\|\partial_{y_1}\partial_{y_2} f\|_{\mathbf{L}^2(\omega_2)} \leq C_6 \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) . \quad (4.30)$$

Ces égalités sont la conclusion de l'utilisation des quotients différentiels et donc de cette partie. Il ne reste maintenant plus qu'à vérifier que $\partial_{y_2}^2 f \in \mathbf{L}^2(\omega_2)$ avec une estimation similaire à celles que nous venons d'obtenir sur les autres dérivées secondes.

4. Régularité de la dérivée seconde perpendiculaire au bord

En reprenant la définition (4.16) de φ , on a

$$\partial_1 \varphi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} -n_2(x^0) \\ \tilde{\beta}(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \partial_2 \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} n_1(x^0) \\ -\tilde{\alpha}(x) \end{pmatrix}$$

où $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi^{-1}$ et $\tilde{\beta} := \beta \circ \varphi^{-1}$.

Pour toute fonction $F \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ (cherchée dans $\mathbf{H}^2(\Omega_2)$), on a, pour $j, k \in \{1; 2\}$,

$$\partial_j F(x) = \nabla_y (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) \bullet \partial_j \varphi^{-1}(x) ,$$

et

$$\partial_j \partial_k F(x) = \partial_j (\nabla_y (F \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})(x) \bullet \partial_k \varphi^{-1}(x) + \nabla_y (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) \bullet \partial_j \partial_k \varphi^{-1}(x) .$$

On calcule la matrice Hessienne de F (cf. (4.14) et (4.17)) :

$$\begin{aligned} \text{Hess}_x F &= \left(\partial_{y_1}^2 (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) - \psi''((x - x^0) \bullet \mathbf{n}^\perp) \cdot \partial_{y_2} (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) \right) \cdot A_1(x) \\ &\quad + \partial_{y_2}^2 (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) \cdot A_2(x) + \partial_{y_1} \partial_{y_2} (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) \cdot A_3(x) , \end{aligned}$$

où

$$A_1(x) := \begin{pmatrix} n_2(x^0)^2 & -n_1(x^0)n_2(x^0) \\ -n_1(x^0)n_2(x^0) & n_1(x^0)^2 \end{pmatrix} , \quad A_2(x) := \begin{pmatrix} \tilde{\beta}(x)^2 & -\tilde{\alpha}(x)\tilde{\beta}(x) \\ -\tilde{\alpha}(x)\tilde{\beta}(x) & \tilde{\alpha}(x)^2 \end{pmatrix}$$

et

$$A_3(x) := \begin{pmatrix} -2n_2(x^0)\tilde{\beta}(x) & n_2(x^0)\tilde{\alpha}(x) + n_1(x^0)\tilde{\beta}(x) \\ n_2(x^0)\tilde{\alpha}(x) + n_1(x^0)\tilde{\beta}(x) & -2n_1(x^0)\tilde{\alpha}(x) \end{pmatrix} .$$

On en déduit alors l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= \partial_{y_1}^2 (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) - \psi'' ((x - x^0) \cdot \mathbf{n}^\perp) \partial_{y_2} (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) \\ &\quad + \left(1 + |\psi' ((x - x^0) \cdot \mathbf{n}^\perp)|^2 \right) \partial_{y_2}^2 (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) \\ &\quad - 2\partial_{y_1} \partial_{y_2} (F \circ \varphi) (\varphi^{-1}(x)) \left(n_1(x^0)\tilde{\alpha}(x) + n_2(x^0)\tilde{\beta}(x) \right) . \end{aligned}$$

Or, quitte à prendre un ε plus petit, on a $1 + |\psi' ((x - x^0) \cdot \mathbf{n}^\perp)|^2 > 0$.

On en déduit que $\partial_{y_2}^2 (F \circ \varphi)$ est une combinaison linéaire de $\partial_{y_1}^2 (F \circ \varphi)$, $\partial_{y_1} \partial_{y_2} (F \circ \varphi)$, $\partial_{y_2} (F \circ \varphi)$ et $\Delta F \circ \varphi$ dans le $\mathbf{C}^\infty(\bar{\omega}_2)$ -module $\mathcal{D}'(\omega_2)$.

En appliquant ce dernier résultat à f , on obtient que $\partial_{y_2}^2 f$ est combinaison linéaire de $\partial_{y_1}^2 f$, $\partial_{y_1} \partial_{y_2} f$, $\partial_{y_2} f$ et u dans le $\mathbf{C}^\infty(\bar{\omega}_2)$ -module $\mathbf{L}^2(\omega_2) (\cong \mathbf{L}^2(\Omega_2))$ d'après (4.18), d'où $f \in \mathbf{H}^2(\omega_2)$.

De plus, en reprenant les estimations (4.29) et (4.30), on obtient l'existence d'une constante $C_7 \geq C_6$ telle que :

$$\|f\|_{\mathbf{H}^2(\omega_2)} \leq C_7 \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) .$$

De part l'expression de la Hessienne et des matrices $A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\omega}_2, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$, on en déduit l'existence d'une constante $C_8 > 0$ telle que $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^2(\Omega_2)} \leq C_8 \|\cdot\|_{\mathbf{H}^2(\omega_2)}$, d'où

$$\|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega_2)} \leq C_9 \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) , \quad (4.31)$$

avec $C_9 := C_7 C_8$.

Nous avons ainsi montré que $f \in \mathbf{H}^2(\Omega_2)$ où $\Omega_2 = \mathbf{B}_\infty(x^0, \varepsilon) \cap \Omega$ avec ε ne dépendant que du choix de x^0 (et de Ω bien entendu).

5. Conclusion

En utilisant le résultat obtenu au point précédent et l'axiome du choix, on attribue à tout $x \in \Gamma$ un $\varepsilon_x > 0$ tel $f \in \mathbf{H}^2(U_x)$ avec $U_x := \mathbf{B}_\infty(x, \varepsilon_x) \cap \Omega$ (où $\mathbf{B}_\infty(x, \varepsilon_x)$ dépend de $\mathbf{n}(x)$).

Il est clair que les $\mathbf{B}_\infty(x, \varepsilon_x)$ recouvre le compact Γ , il existe donc un nombre fini $N \in \mathbb{N}^*$ de points x_j ($j \in \llbracket 1; N \rrbracket$) de Γ tels que les ensembles $\mathbf{B}_\infty(x_j, \varepsilon_{x_j})$ recouvrent Γ .

On considère ensuite un ouvert $U \subset\subset \Omega$ tel que $\Omega \subset U \cup \bigcup_{j=1}^N U_{x_j}$.

En accord avec le théorème 4.8, on a $f \in \mathbf{H}^2(U)$.

On déduit alors $f \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, nous avons ainsi montré la première partie du théorème, i.e.

$$\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \subset \mathbf{H}^2(\Omega) .$$

De plus, en utilisant la formule de Green (cf. corollaire 4.4) et l'égalité (4.13), on obtient

$$\forall g \in \mathbf{L}^2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \sigma f \right) \cdot \bar{g} \, dS = 0 ,$$

D'où $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \sigma f = 0$.

On en déduit le deuxième résultat du théorème :

$$\text{Dom } \mathcal{L}_{\sigma} = \left\{ f \in \mathbf{H}^2(\Omega) \mid \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \sigma f = 0 \right\} .$$

Revenons à nos estimations. D'après (4.31) et le théorème 4.8, il existe une constante $C_{10} > 0$ telle que, pour tout $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_{\sigma}$, on ait

$$\|f\|_{\mathbf{H}^2(U)} \leq C_{10} \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) ,$$

et

$$\forall j \in \llbracket 1; N \rrbracket, \quad \|f\|_{\mathbf{H}^2(U_{x_j})} \leq C_{10} \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) .$$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$\|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq C_{11} \left(\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) , \quad (4.32)$$

où $C_{11} := (N + 1)C_{10}$.

Nous aimerions maintenant raffiner cette estimation en remplaçant la norme de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ par celle de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à droite de l'inégalité, afin de récupérer la norme du graphe.

En appliquant la formule (4.13) avec $g = f$, on obtient

$$- \int_{\Omega} \Delta f \cdot \bar{f} \, dx = \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sigma \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \in \mathbb{R}_+^* ,$$

car $\sigma \geq 0$.

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq - \int_{\Omega} \Delta f \cdot \bar{f} \, dx \leq \|\Delta f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|f\|_{\mathcal{L}_{\sigma}}^2 .$$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$\|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \|f\|_{\mathcal{L}_{\sigma}} .$$

Finalement, en utilisant cette dernière inégalité dans (4.32), on obtient

$$\|f\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}_{\sigma}} ,$$

où $C := \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) C_{11}$.

Ce dernier résultat conclut la démonstration du théorème. □

L'opérateur étant maintenant bien défini, on s'intéresse à son spectre.

4.3 Propriétés spectrales

D'après le théorème de Rellich, l'injection

$$\left(\mathbf{H}^2(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \right) \hookrightarrow \left(\mathbf{L}^2(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right)$$

est compacte, il en suit que l'injection

$$\left(\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_\sigma} \right) \hookrightarrow \left(\mathbf{L}^2(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right)$$

est compacte.

Cela implique (cf. [3, Proposition 4.24]) que la résolvante de \mathcal{L}_σ est compacte.

De plus, \mathcal{L}_σ est auto-adjoint et, pour $\sigma > 0$, on a

$$\forall f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma \setminus \{0\}, \quad \langle \mathcal{L}_\sigma f, f \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sigma \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 > 0$$

car

$$\begin{aligned} f \in \mathbf{H}^1(\Omega) \setminus \{0\}, \quad \nabla f = 0 &\Rightarrow f \text{ est constante} \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \sigma f = \sigma f \neq 0 \\ &\Rightarrow f \notin \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma . \end{aligned}$$

Le spectre discret de \mathcal{L}_σ est donc inclus dans \mathbb{R}_+^* .

Il en suit (cf. [3, Proposition 6.3]) que le spectre de \mathcal{L}_σ est discret et peut s'écrire comme une suite croissante $(\lambda_n^\sigma)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$.

Remarque 4.10. L'opérateur \mathcal{L}_σ étant auto-adjoint, chacune de ses valeurs propres est de multiplicité finie (cf. [3, Remarque 6.18]).

Dans la construction de notre suite, nous allons donc considérer que le nombre d'occurrences d'une valeur propre est égal à sa multiplicité (de sorte à faciliter la notation d'une base de fonctions propres), d'où le caractère croissant et non strictement croissant de la suite $(\lambda_n^\sigma)_{n \in \mathbb{N}}$.

On considère la sous-suite $(\lambda_{n_k}^\sigma)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par $\begin{cases} n_0 := 0 \\ n_{k+1} := \min \{ n > n_k \mid \lambda_n^\sigma > \lambda_{n_k}^\sigma \} \end{cases}$.

Cette sous-suite est strictement croissante, contient toutes les valeurs propres de \mathcal{L}_σ , vérifie que $n \mapsto \lambda_n^\sigma$ (pour σ fixé) est constante sur chaque intervalle $\llbracket n_k; n_{k+1} - 1 \rrbracket$, et $n_{k+1} - n_k$ est égal à la multiplicité de $\lambda_{n_k}^\sigma$.

Cette sous-suite sera utile pour travailler avec les projecteurs spectraux et les espaces propres. Il faut cependant faire attention au fait qu'elle dépende de σ , ce que nous ne faisons pas apparaître dans son expression afin d'alléger les notations.

Ces résultats et notations étant introduits, nous allons pouvoir passer à la régularité des valeurs propres.

5 Régularité des valeurs propres

La famille d'opérateurs $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ est holomorphe (ou analytique) en un sens à préciser, on souhaite étudier la régularité que cela induit sur les fonctions $\sigma \mapsto \lambda_n^\sigma$ associées aux valeurs propres de ces opérateurs.

Pour cela, nous allons commencer par le cas des opérateurs en dimension finie en s'appuyant sur le livre de Baumgärtel [6, Chapitre 3] et [6, Annexe A].

Une fois les résultats sur la dimension finie étudiés, nous les étendrons à notre problème en passant par le fait que la résolvante du Laplacien de Robin est compacte.

5.1 Le cas de la dimension finie

Soit D un ouvert connexe de \mathbb{C} (ou de \mathbb{R} car on pourra toujours prolonger analytiquement), on note $\mathcal{H}(D)$ l'anneau (intègre) des fonctions holomorphes sur D et $\mathcal{M}(D)$ le corps des fonctions méromorphes sur D (corps des fractions de $\mathcal{H}(D)$).

Nous cherchons à résoudre l'équation suivante :

$$\chi_M(\lambda, z) := \det(M(z) - \lambda I_d) = 0 \quad (5.1)$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $I_d \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ la matrice identité et $M : z \in D \mapsto M(z) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ ($d \in \mathbb{N}^*$) analytique, ce qui revient à écrire $M = (m_{j,k})_{j,k \in \llbracket 1; d \rrbracket} \in \mathcal{M}_d(\mathcal{H}(D))$.

Dans la résolution de cette équation, on cherche à représenter les solutions par des fonctions. On se demande quelle régularité ces fonctions peuvent avoir.

Commençons par illustrer la réponse avec quelques exemples avant d'énoncer un résultat général.

Exemples 5.1. (i) Soit $f \in \mathcal{H}(D)$, si $M = \begin{pmatrix} 0 & f \\ f & 0 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\chi_M(\lambda, z) = \lambda^2 - f(z)^2 = (\lambda - f(z))(\lambda + f(z)) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm f(z) .$$

Les valeurs propres de M sont donc représentées par les fonctions holomorphes f et $-f$ (distinctes si $f \neq 0$).

Voici donc un exemple où tout se passe bien, il n'y a ici pas problèmes de régularité.

(ii) Si $M = (m_{j,k})_{j,k \in \llbracket 1; d \rrbracket}$ est triangulaire supérieure ou inférieure, on obtient

$$\chi_M(\lambda, z) = \prod_{j=1}^d (\lambda - m_{j,j}(z)) = 0 \Leftrightarrow \exists j \in \llbracket 1; d \rrbracket, \lambda = m_{j,j}(z)$$

les valeurs propres de M sont donc représentées par les fonctions holomorphes distinctes de la famille $\{m_{j,j} \mid j \in \llbracket 1; d \rrbracket\} \subset \mathcal{H}(D)$.

Cela nous donne un exemple où tout se passe bien encore une fois, mais cette fois en dimension (finie) quelconque.

De plus, nous pouvons en déduire qu'il n'y a pas de problèmes de régularité de valeurs propres en dimension 1.

(iii) Voyons maintenant un exemple admettant un problème de régularité.

Si $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\chi_M(\lambda, z) = \lambda^2 - z = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \sqrt{z} := \left\{ \pm \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg z}{2}} \right\}$$

les valeurs propres de M sont donc représentées par la fonction 2-valuée $\sqrt{\cdot}$, cette fonction possède un unique problème de régularité en 0 (cf. définition 5.8), nous la reverrons en deuxième exemple dans les exemples 5.5.

Avant d'en arriver au résultat général sur la régularité des solutions de l'équation (5.1), nous avons besoin d'introduire quelques notions et objets :

Définition 5.2. Un couple (a, f) constitué d'un point $a \in D$ et d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\exists r = r(a, f) > 0 : \begin{cases} D_{\mathbb{C}}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\} \subset D \\ f \in \mathcal{M}(D_{\mathbb{C}}(a, r)) \quad (\text{la restriction de } f) \end{cases}$$

est appelé **élément méromorphe en a sur D** .

Pour $b \in D_{\mathbb{C}}(a, r)$, l'élément méromorphe (b, f) est appelé **continuation directe de (a, f)** .

Soit $\mathcal{C} \subset D$ une courbe fermée lisse par morceaux, une fonction $P : z \in \mathcal{C} \mapsto (z, f_z)$ est appelée **chaîne le long de \mathcal{C}** si

$$\forall z \in \mathcal{C}, \exists \varepsilon > 0 : \forall h \in D_{\mathbb{C}}(z, \varepsilon), z + h \in \mathcal{C} \Rightarrow P(z+h) \text{ continuation directe de } P(z) .$$

Un élément méromorphe (b, g) est appelé **continuation de (a, f)** s'il existe une courbe \mathcal{C} (lisse par morceaux) joignant a et b ainsi qu'une chaîne P le long de \mathcal{C} vérifiant $P(a) = (a, f)$ et $P(b) = (b, g)$.

Ces premières définitions servent à généraliser la notion de prolongement analytique. En effet, la continuation directe reprend directement cette notion, on a alors l'unicité d'une continuation directe lorsqu'elle existe.

Il en suit que, pour un élément initial donné, une chaîne le long d'une courbe \mathcal{C} (fermée et lisse par morceaux) est unique si elle existe, il en est de même pour les continuations.

Cependant, les notions introduites apportent quelque chose de nouveau par rapport au prolongement analytique. Le fait de travailler le long de courbes va nous permettre de tourner plusieurs fois autour d'un point et ainsi définir de façon plus pratique (bien que moins aisée à appréhender) les racines n^e d'un nombre complexe ou encore le logarithme complexe sans se soucier de faire varier le domaine de définition.

Nous allons travailler avec des fonctions multi-valuées qui généralisent la notion de fonction méromorphe, ce qui est l'objet de la définition suivante :

Definition 5.3. Un ensemble \mathfrak{F} (non vide) d'éléments méromorphes sur D est appelé **fonction analytique sur D** si

- (i) $\forall (a, f), (b, g) \in \mathfrak{F}, (b, g)$ est une continuation de (a, f) ,
- (ii) $\left\{ \begin{array}{l} (a, f) \in \mathfrak{F} \\ (b, g) \text{ est une continuation de } (a, f) \end{array} \right\} \implies (b, g) \in \mathfrak{F}$.

Pour $a \in D$, on définit $\mathfrak{F}(a) := \{f(a) \mid (a, f) \in \mathfrak{F}\}$ l'ensemble des **valeurs de \mathfrak{F} en a** .

Remarque 5.4. Une fonction méromorphe f définie sur un ouvert $U \subset D$ induit une fonction analytique en considérant l'ensemble des continuations possibles de cette dernière dans D . C'est ce principe que nous utiliserons dans la pratique pour définir des fonctions analytiques.

Exemples 5.5. Donnons maintenant quelques exemples de ces fonctions analytiques afin de comprendre un peu mieux cette notion :

- (i) Soit $f \in \mathcal{M}(D)$, alors $\mathfrak{F}_f := \{(z, f) \mid z \in D\}$ définit une fonction analytique 1-valorée sur D .

- (ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ induit une fonction analytique $re^{i\theta} \mapsto \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$

$\mathfrak{F} := \{(z, f_k) \mid z \in \mathbb{C}, k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ n -valorée algébroïde sur \mathbb{C} avec $S(\mathfrak{F}) = \{0\}$ et $f_k : re^{i\theta} \mapsto \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, on note abusivement $\mathfrak{F}(z) = \sqrt[n]{z}$ (avec $\sqrt[n]{\cdot} = \cdot$ et $\sqrt[2]{\cdot} = \sqrt{\cdot}$).

(iii) Pour finir, voyons un exemple de fonction analytique de valuation infinie (dénombrable).

La fonction $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ induit une fonction analytique Ln sur \mathbb{C}^*
 $z \mapsto \ln |z| + i \arg z$
déterminée par $\text{Ln}(z) = \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ($= \{\ln(z)\}$ si $z \in \mathbb{R}_+^*$).

Dans la suite, pour une fonction analytique \mathfrak{P} donnée, nous supposons que, pour tout $z \in D$, il existe une fonction f telle que $(z, f) \in \mathfrak{P}$.

Definition 5.6. Pour $U \subset D$ ouvert connexe et $(a, f) \in \mathfrak{P}$ avec $a \in G$, l'unique fonction analytique \mathfrak{B} sur G engendrée par (a, f) est appelée une **branche de \mathfrak{P} sur G** .

Pour étudier et décomposer les fonctions analytiques, la notion de branche va être essentielle, elles permettent de travailler sur des représentations des fonctions analytiques.

Definition 5.7. Une fonction analytique \mathfrak{P} est dite **p -valuée** ($p \in \mathbb{N}^*$) si :

- (i) $\forall z \in D, \#\mathfrak{P}(z) \leq p$,
- (ii) $\exists z \in D : \#\mathfrak{P}(z) = p$.

Avec cette notion, nous écartons de notre étude des fonctions comme Ln (cf. exemples 5.5). Nous entamons ainsi une première restriction sur notre étude des fonctions analytiques, nous avons cependant besoin d'introduire d'autres notions qui nous serviront à la restreindre d'avantage :

Definition 5.8. Un point $a \in D$ est dit **régulier** s'il existe un voisinage ouvert $U \subset D$ de a sur lequel toute branche de \mathfrak{P} est 1-valuée, on note $R(\mathfrak{P})$ l'ensemble de ces points. On pose $S(\mathfrak{P}) := D \setminus R(\mathfrak{P})$, un point $a \in S(\mathfrak{P})$ est dit **singulier**.

Exemples 5.9. En reprenant les exemples 5.5, on observe qu'une fonction analytique \mathfrak{P}_f n'admet pas de points singuliers, et que les fonctions analytiques $\sqrt[n]{\cdot}$ et Ln n'admettent que 0 comme unique singularité.

Ces deux notions vont nous permettre de scinder en deux parties l'étude d'une fonction analytique. Cependant, nous allons travailler sur des fonctions analytiques dont les points singuliers ont des propriétés particulières, d'où la définition suivante :

Definition 5.10. Soient $a \in S(\mathfrak{P})$ isolé et $U \subset D$ un voisinage ouvert de a tel que $U \setminus \{a\} \subset R(\mathfrak{P})$.

Si \mathfrak{P} est p -valuée et qu'il existe une branche \mathfrak{B} q -valuée ($q \geq 2$) de \mathfrak{P} sur U , alors a est appelé **point de branchement d'ordre q relativement à \mathfrak{B}** .

Cette notion nous permet de ramener les problèmes de régularité (isolés) essentiellement à des racines n^e .

En effet, considérons une branche \mathfrak{B} n -valuée ($n \geq 2$), définie sur un voisinage $D_{\mathbb{C}}(a, r)$ ne contenant que des points réguliers en dehors de a (i.e. a est un point de branchement d'ordre n).

Les branches de \mathfrak{B} sur le disque coupé $D_{\mathbb{C}}(a, r) \setminus [a; a+r]$ sont représentées par n fonctions méromorphes f_1, \dots, f_n formant un cycle (on les construit par continuations successives

autours de a).

On introduit alors la fonction h définie sur $D_{\mathbb{C}}(0, \sqrt[n]{r}) \setminus \{0\}$ par :

$$h(\zeta) := \sum_{j=1}^n f_j(a + \zeta^n) \cdot \mathbb{1}_{S_j}(\zeta) , \quad (5.2)$$

où, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, S_j est donné par :

$$S_j := \left\{ z \in D_{\mathbb{C}}(0, \sqrt[n]{r}) \setminus \{0\} \mid (j-1)\frac{2\pi}{n} \leq \arg(z-a) < j\frac{2\pi}{n} \right\} .$$

La fonction h est bien définie et méromorphe sur $D_{\mathbb{C}}(0, \sqrt[n]{r}) \setminus \{0\}$ par construction.

Remarque 5.11. On a ici légèrement prolongé les fonctions f_j , cela étant tout à fait possible car ce sont les branches d'une fonction analytique.

Exemple 5.12. Pour $a = 0$ et $\mathfrak{B} = \sqrt[n]{\cdot}$ (avec $r = +\infty$), on obtient $h = \text{Id}_{\mathbb{C}}$.

Pour continuer dans la restriction des fonctions analytiques étudiées, on introduit la définition suivante :

Definition 5.13. Un point de branchement a isolé de \mathfrak{B} relativement à \mathfrak{B} est dit **algébroïde** si la fonction h définie ci-dessus (cf. (5.2)) est méromorphe sur le disque entier $D_{\mathbb{C}}(0, \sqrt[n]{r})$.

Pour clarifier cette notion et travailler avec plus aisément, on introduit la définition équivalente (ce qui sera l'objet d'une proposition) suivante :

Definition 5.14. Soit a un point de branchement isolé de \mathfrak{B} relativement à \mathfrak{B} sur un disque $D_{\mathbb{C}}(a, r)$.

Si, pour toutes suites $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a , tous les éléments de $\mathfrak{B}(z_k)$ convergent vers une même limite $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors, on appelle α la **limite de \mathfrak{B} en a** , et on note :

$$\lim_{z \rightarrow a} \mathfrak{B}(z) = \alpha \quad \text{ou} \quad \mathfrak{B}(z) \xrightarrow{z \rightarrow a} \alpha .$$

On enchaîne directement sur la proposition (admise) d'équivalence entre les deux dernières définitions :

Proposition 5.15. Soit a un point de branchement isolé de \mathfrak{B} relativement à \mathfrak{B} sur un disque $D_{\mathbb{C}}(a, r)$.

Le point a est algébroïde si et seulement si \mathfrak{B} admet une limite en a .

Ceci étant introduit, reprenons l'étude de notre fonction h (cf. 5.2) introduite plus tôt. On suppose que le point a associé est algébroïde, la fonction h peut alors se développer en série de Puiseux, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ et $r_1 \in]0; r]$ tels que :

$$\forall \zeta \in D_{\mathbb{C}}(0, \sqrt[n]{r_1}), \quad h(\zeta) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_n \zeta^k$$

avec $a_{-N} \neq 0$.

On obtient ainsi la représentation suivante des n fonctions (branches) de \mathfrak{B} :

$$\forall z \in D_{\mathbb{C}}(a, r_1), \quad \sum_{j=1}^n f_j(z) \cdot \mathbb{1}_{S_j}(\sqrt[n]{z-a}) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_n (\sqrt[n]{z-a})^k ,$$

où $\sqrt[n]{z-a}$ varie parmi les différentes racines n^e de $z-a$ (cf. exemples 5.5).
 Une telle série est appelée **série de Laurent-Puiseux**.

Ainsi, les problèmes de régularité en un point algébroïde se ramènent essentiellement à des racines n^e , d'où le fait d'appuyer l'exemple de la fonction analytique $\sqrt[n]{\cdot}$ (cf. exemples 5.5).

Notre étude des fonctions analytiques va se centrer sur des fonctions dont les problèmes de régularité s'avèrent être, au pire, de la forme étudiée avec la fonction h . Cela motive les définitions suivantes :

Definition 5.16. Un point $a \in S(\mathfrak{F})$ est dit **algébroïde** si pour toute branche \mathfrak{B} de \mathfrak{F} sur un voisinage de a , a est au plus un point de branchement algébroïde relativement à \mathfrak{B} .

Une fonction analytique \mathfrak{F} p -valuée sur D est dite (p -valuée) **algébroïde** si toutes ses singularités sont au plus algébroïdes.

Remarque 5.17. On remarque alors, d'après cette définition, que l'ensemble des points singuliers $S(\mathfrak{F})$ est fermé et isolé dans D .

Exemple 5.18. La fonction analytique $\sqrt[n]{\cdot}$ introduit dans les précédents exemples et sur laquelle nous avons déjà insisté, représente l'exemple le plus simple d'une fonction analytique algébroïde ayant un point singulier (donc autre qu'une fonction analytique de la forme \mathfrak{F}_f , cf. exemples 5.5).

Toutes ces définitions étant maintenant introduite, nous pouvons repasser à l'étude de notre équation (5.1).

On considère l'anneau (factoriel) $\mathcal{M}_D[\lambda] \cong \mathcal{M}(D)[X]$ défini par

$$\mathcal{M}_D[\lambda] := \left\{ p : (\lambda, z) \in \mathbb{C} \times D \mapsto \sum_{k=0}^n a_k(z) \lambda^k \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathcal{M}(D) \right\},$$

l'ensemble $\mathcal{H}_D[\lambda]$ (monoïde pour la multiplication) des polynômes entiers défini par

$$\mathcal{H}_D[\lambda] := \left\{ p : (\lambda, z) \in \mathbb{C} \times D \mapsto \sum_{k=0}^n a_k(z) \lambda^k \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathcal{H}(D) \text{ et } a_n \equiv 1 \right\} \subset \mathcal{M}_D[\lambda],$$

ainsi que l'ensemble $\mathcal{H}_D^{z_0}[\lambda]$ (pour $z_0 \in D$) défini par

$$\mathcal{H}_D^{z_0}[\lambda] := \{ p \in \mathcal{H}_D[\lambda] \mid \exists n \in \mathbb{N} : \forall \lambda \in \mathbb{C}, p(\lambda, z_0) = \lambda^n \}.$$

On a le résultat suivant sur ces ensembles :

Théorème 5.19. Soit $p \in \mathcal{H}_D[\lambda]$, $p = \prod_{j=1}^r p_j^{m_j}$ sa décomposition en polynômes irréductibles dans l'anneau factoriel $\mathcal{M}_D[\lambda]$ (avec les p_j normalisés et distincts). Alors, pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on a $p_j \in \mathcal{H}_D[\lambda]$. De plus, si $p \in \mathcal{H}_D^{z_0}[\lambda]$, alors pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on a $p_j \in \mathcal{H}_D^{z_0}[\lambda]$.

Ce résultat nous sera utile pour établir la régularité des solutions de notre équation (5.1), mais pour établir cette régularité, nous avons besoin de nous appuyer sur un résultat d'identification précédé d'un théorème de Weierstrass (qui sera utile dans l'étude de notre équation) :

Théorème 5.20 (Weierstrass). Soient $p \in \mathcal{M}_D[\lambda]$ et $z_0 \in D$ choisit de sorte à n'être le pôle d'aucun des coefficients de p .

Supposons que $p(\lambda, z_0) = \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j)^{\alpha_j}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors il existe un voisinage ouvert $U \subset D$ de z_0 et $q_1, \dots, q_r \in \mathcal{H}_U^{z_0}[\mu]$ avec $\deg q_j = \alpha_j$ tels que

$$\forall (\lambda, z) \in \mathbb{C} \times U, \quad p(\lambda, z) = \prod_{j=1}^r q_j(\lambda - \lambda_j, z) .$$

Théorème 5.21. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit \mathfrak{P} une fonction analytique n -valuée algébroïde sur D .

Alors il existe un unique polynôme $p \in \mathcal{M}_D[\lambda]$ de degré n et normalisé tel que \mathfrak{P} vérifie $p = 0$, i.e.

$$\forall (z_0, f) \in \mathfrak{P}, \forall z \in D_{\mathbb{C}}(z_0, r(z_0, f)), p(f(z), z) = 0 ,$$

ce polynôme est irréductible et les pôles et singularités de \mathfrak{P} sont au plus des pôles de ses coefficients.

Soit $p \in \mathcal{M}_D[\lambda]$ normalisé, irréductible et de degré n .

Alors il existe une unique fonction analytique \mathfrak{P} n -valuée algébroïde vérifiant $p = 0$, les pôles et singularités de \mathfrak{P} sont nécessairement des pôles des coefficients de p ou des points z_0 auxquels $p(\cdot, z_0)$ admet au moins une racine multiple.

Exemple 5.22. En reprenant le dernier exemple des exemples 5.1, on observe que l'élément de $p \in \mathcal{M}_D[\lambda]$ qui à $(\lambda, z) \in \mathbb{C}^2$ associe $\lambda^2 - z$ est normalisé et irréductible, et l'équation $p = 0$ est satisfaite par la fonction analytique 2-valuée algébroïde $\sqrt[2]{\cdot}$ (cf. exemples 5.5).

Revenons maintenant à l'étude de notre famille analytique $(M(z))_{z \in D}$ donnée par $M : z \in D \mapsto M(z) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on souhaite étudier ses valeurs propres, i.e. résoudre l'équation (5.1) qui se réécrit $\chi_M = 0$.

Il est clair que $\chi_M \in \mathcal{H}_D[\lambda]$.

On considère

$$\chi_M = \prod_{j=1}^r p_j^{m_j} ,$$

la décomposition de χ_M en polynômes irréductibles dans l'anneau factoriel $\mathcal{M}_D[\lambda]$ (avec les p_j distincts et dans $\mathcal{H}_D[\lambda]$ en accord avec le théorème 5.19).

On pose :

$$q := \prod_{j=1}^r p_j .$$

On introduit une dernière définition (pour le cas de la dimension finie) :

Definition 5.23. Un point $z_0 \in D$ est dit **simple** si toute les racines de $q(\cdot, z_0)$ sont simples, et **multiple** sinon.

Pour étudier le cas des points multiples, nous allons avoir d'un résultat supplémentaire, après l'avoir énoncé nous pourrons passer au résultat de régularité sur les valeurs propres de M .

Théorème 5.24. Soient $z_0 \in D$, $\varepsilon > 0$, $U := D_{\mathbb{C}}(z_0, \varepsilon)$ et $p \in \mathcal{H}_U^{z_0}[\mu]$ irréductible dans $\mathcal{H}_U^{z_0}[\mu]$ (et donc dans $\mathcal{H}_U[\mu]$).

Supposons ε suffisamment petit pour que, pour tout $z \in U \setminus \{z_0\}$, $p(\cdot, z)$ n'admet que des racines simples. Alors l'unique fonction analytique $\deg p$ -valuée algébroïde \mathfrak{P} sur U associée à p par le théorème 5.21 admet z_0 comme unique singularité, et est constitué de $\deg p$ fonctions holomorphes (et distinctes) sur $U \setminus \{z_0\}$ convergeant toutes vers 0 lorsque z tend vers z_0 .

Nous pouvons maintenant passer au résultat général sur la régularité des valeurs propres de $M \in \mathcal{M}_d(\mathcal{H}(D))$, la démonstration de ce résultat ne sera pas très détaillée, le but ici étant de comprendre les problèmes pouvant survenir (pourquoi les valeurs propres ne sont pas forcément analytiques alors que M l'est et quand est-ce que les problèmes de régularité peuvent apparaître) et non le détail de l'étude faite par Baumgärtel dans [6].

Théorème 5.25. Les valeurs propres de la famille analytique $(M(z))_{z \in D}$ sont représentées par exactement $\deg q = \sum_{j=1}^r \deg p_j$ fonctions $\lambda_{j,k} \in \mathbf{C}^0(D)$, i.e.

$$\forall (\lambda, z) \in \mathbb{C} \times D, \chi_M(\lambda, z) = \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{\deg p_j} (\lambda - \lambda_{j,k}(z))^{m_j} .$$

Ces fonctions sont analytiques et distinctes (par définition de q) sur D excepté sur un ensemble fermé et isolé dans lequel certaines de ces fonctions se rencontrent.

Démonstration. D'après le théorème d'identification 5.21, pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, il existe une unique fonction analytique $\deg p_j$ -valuée \mathfrak{P}_j sur D vérifiant $p_j = 0$.

Étant donné que $p_j \in \mathcal{H}_D[\lambda]$, les \mathfrak{P}_j n'admettent pas de pôles ou de pôles de branchement.

De plus, on a $\bigcup_{j=1}^r \mathfrak{P}_j(z) = \sigma(M(z))$ pour tout $z \in D$.

On fixe un point $z_0 \in D$.

Si z_0 est simple, alors il est régulier pour tout les \mathfrak{P}_j et il existe ε tel que $U := D_{\mathbb{C}}(z_0, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$ soit constitué uniquement de points réguliers pour tout les \mathfrak{P}_j .

Il en suit que, pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, la fonction analytique \mathfrak{P}_j est constitué de $\deg p_j$ fonctions distinctes $\lambda_{j,k} \in \mathcal{H}(U)$ sur U , i.e.

$$\forall (\lambda, z) \in \mathbb{C} \times U, p_j(\lambda, z) = \prod_{k=1}^{\deg p_j} (\lambda - \lambda_{j,k}(z)) .$$

On obtient finalement

$$\forall (\lambda, z) \in \mathbb{C} \times D, \chi_M(\lambda, z) = \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{\deg p_j} (\lambda - \lambda_{j,k}(z))^{m_j} .$$

avec $\lambda_{j,k} \in \mathcal{H}(U)$.

Si z_0 est multiple, alors il existe une racine $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ de $q(\cdot, z_0)$ de multiplicité $m > 1$, on note n_j la multiplicité de λ_0 en tant que racine de $p_j(\cdot, z_0)$.

En utilisant le fait que l'ensemble des points multiples est fermé et isolé dans D , ainsi que le théorème de Weierstrass 5.20, un obtient l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $U := D_{\mathbb{C}}(z_0, \varepsilon)$

ne contient que des points simples en dehors de z_0 , et que, pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tels que $n_j > 0$, il existe un polynôme $q_j \in \mathcal{H}_U^{z_0}[\mu]$ de degré n_j tel que $q_j(\lambda - \lambda_0, z)$ divise $p_j(\lambda, z)$ (pour tout $(\lambda, z) \in \mathbb{C} \times U$).

On considère $q_j = \prod_{k=1}^{\alpha_j} q_{j,k}(\lambda - \lambda_0, z)$ la décomposition en produits de facteurs irréductibles de q_j (pas de facteurs multiples car q_j divise p_j qui est irréductible) avec $q_{j,k} \in \mathcal{H}_U^{z_0}[\mu]$ en accord avec le théorème 5.19.

D'après le théorème 5.24, chaque polynôme $q_{j,k}$ représente une branche $\mathfrak{B}_{j,k}$ deg $q_{j,k}$ -valuée de \mathfrak{P}_j sur U avec z_0 comme unique singularité, et toutes les branches $\mathfrak{B}_{j,k}$ admettent pour limite $\lambda_{j,k}$ (la propriété de limite vient du caractère algébroïde des \mathfrak{P}_j).

On note $\lambda_{j,k,1}, \dots, \lambda_{j,k, \deg q_{j,k}}$ les fonctions qui constituent $\mathfrak{B}_{j,k}$, elles sont analytiques sur $U \setminus \{z_0\}$ et continues sur U avec $\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda_{j,k,l}(z) = \lambda_0$.

La famille $\{\lambda_{j,k,l} \mid j \in \llbracket 1; r \rrbracket, k \in \llbracket 1; \alpha_j \rrbracket \text{ et } l \in \llbracket 1; \deg q_{j,k} \rrbracket\}$ est appelée le (z_0, λ_0) -**groupe de valeurs propres perturbées**, elle représente exactement les valeurs propres de M perturbées et/ou séparées de λ_0 lorsque $z_0 \rightarrow z$.

Enfin, sur le voisinage U de z_0 , les fonctions constituants \mathfrak{P} soit sont holomorphes, soit appartiennent à un (λ_0, z_0) -groupe et donc sont analytiques sur $U \setminus \{z_0\}$ et continues en z_0 . \square

5.2 Extension à notre problème

On considère la résolvante de \mathcal{L}_σ en -1 :

$$R_\sigma := (\mathcal{L}_\sigma + 1)^{-1} . \quad (5.3)$$

Commençons de suite par énoncer une proposition sur les premières propriétés de cet opérateur.

Proposition 5.26. *L'opérateur R_σ est continu (avec $\|R_\sigma\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 1$), auto-adjoint et compact.*

De plus, 0 est inclus dans son spectre continu, et son spectre discret est décrit par la suite $\left(\frac{1}{\lambda_n^\sigma + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ (décroissante et convergeant vers 0) avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ker \left(R_\sigma - \frac{1}{\lambda_n^\sigma + 1} \right) = \ker (\mathcal{L}_\sigma - \lambda_n^\sigma) .$$

Démonstration. En reprenant les définitions (4.2) de \mathcal{Q}_σ et (4.4) de \mathcal{L}_σ , on a, pour tout $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$,

$$\langle (\mathcal{L}_\sigma + 1) f, f \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \sigma \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \geq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 .$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|(\mathcal{L}_\sigma + 1) f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} .$$

On en déduit alors que

$$\forall g \in \mathbf{L}^2(\Omega), \|R_\sigma g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|(\mathcal{L}_\sigma + 1) R_\sigma g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} .$$

On a ainsi $R_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\Omega))$ avec $\|R_\sigma\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 1$.

L'opérateur symétrique $\mathcal{L}_\sigma + 1 = R_\sigma^{-1}$ est une bijection entre $\text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$, comme $(\mathcal{L}_\sigma + 1) R_\sigma = \text{Id}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, on a

$$\begin{aligned} \forall f, g \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \langle R_\sigma f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \langle R_\sigma f, (\mathcal{L}_\sigma + 1) R_\sigma g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \langle (\mathcal{L}_\sigma + 1) R_\sigma f, R_\sigma g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \langle f, R_\sigma g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur R_σ est symétrique, donc auto-adjoint.

De plus, en accord avec la section 4, R_σ est compact.

La première partie de la proposition étant démontrée, on s'intéresse à la seconde partie sur le spectre.

L'image de cet opérateur est donnée par $R_\sigma(\mathbf{L}^2(\Omega)) = \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$, elle est dense mais strictement incluse dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, ainsi le spectre discret de R_σ contient 0.

On s'intéresse au spectre discret de R_σ (inclus dans $D_{\mathbb{C}}(0, 1) \setminus \{0\}$ car $\|R_\sigma\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 1$).

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la valeur propre λ_n^σ de \mathcal{L}_σ et une fonction propre associée $u_{n,\sigma} \in \ker(\mathcal{L}_\sigma - \lambda_n^\sigma)$, on a

$$(\mathcal{L}_\sigma + 1) u_{n,\sigma} = (\lambda_n^\sigma + 1) u_{n,\sigma} ,$$

d'où

$$R_\sigma u_{n,\sigma} = \frac{1}{\lambda_n^\sigma + 1} u_{n,\sigma} .$$

Ainsi, $\frac{1}{\lambda_n^\sigma + 1}$ est une valeur propre de R_σ , et $u_{n,\sigma}$ est une fonction propre associée, d'où

$$\ker(\mathcal{L}_\sigma - \lambda_n^\sigma) \subset \ker\left(R_\sigma - \frac{1}{\lambda_n^\sigma + 1}\right) ,$$

et la suite $\left(\frac{1}{\lambda_n^\sigma + 1}\right)_n \in]0; 1]^\mathbb{N}$, décroissante tendant vers 0, est incluse dans le spectre discret de R_σ .

Réciproquement, pour une valeur propre μ de R_σ et une fonction propre associée $u \in \ker(R_\sigma - \mu)$, on a

$$(\mathcal{L}_\sigma + 1) u = \frac{1}{\mu} u ,$$

d'où

$$\mathcal{L}_\sigma u = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) u .$$

Ainsi, $\frac{1}{\mu} - 1$ est une valeur propre de \mathcal{L}_σ , et u est une fonction propre associée.

Finalement, $\lambda_n^\sigma \mapsto \frac{1}{\lambda_n^\sigma + 1}$ est une bijection entre le spectre de \mathcal{L}_σ et le spectre discret de R_σ , et

$$\ker(\mathcal{L}_\sigma - \lambda_n^\sigma) = \ker\left(R_\sigma - \frac{1}{\lambda_n^\sigma + 1}\right) .$$

□

Nous venons de montrer que l'opérateur R_σ est continu, auto-adjoint et compact, cela nous permet, en accord avec le théorème [3, Théorème 6.2], d'énoncer directement le corollaire suivant :

Corollaire 5.27. *Le spectre continu de R_σ est réduit à 0, et (cf. remarque 4.10)*

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \ker \left(R_\sigma - \frac{1}{\lambda_{n_k}^\sigma + 1} \right) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \ker (\mathcal{L}_\sigma - \lambda_{n_k}^\sigma) .$$

Ainsi, on a une base hilbertienne $(u_{n,\sigma})_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n,\sigma}$ est une fonction propre normalisée de \mathcal{L}_σ associée à λ_n^σ .

On fixe une telle base hilbertienne.

Remarque 5.28. En accord avec la remarque 4.10, pour tout $n \in \llbracket n_k; n_{k+1} - 1 \rrbracket$, on a $\lambda_n^\sigma = \lambda_{n_k}^\sigma$. Dans le choix d'une base de fonctions propres $(u_{n,\sigma})_{n \in \mathbb{N}}$, nous ferons donc attention à former une base orthonormale $\{u_{n,\sigma} \mid n_k \leq n < n_{k+1}\}$ sur chaque espace propres $\ker (\mathcal{L}_\sigma - \lambda_{n_k}^\sigma)$, en rappelant au passage que ces derniers sont orthogonaux entre eux car \mathcal{L}_σ est auto-adjoint.

Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante :

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, u_{n,\sigma} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} u_{n,\sigma} , \quad (5.4)$$

justifiée par le fait que

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \sum_{n=0}^N \langle f, u_{n,\sigma} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} u_{n,\sigma} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbf{L}^2(\Omega)} f .$$

Nous disposons également de la formule de Parseval :

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, u_{n,\sigma} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|^2 . \quad (5.5)$$

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$R_{k,\sigma} := R_\sigma \sum_{j=0}^k P_j^\sigma = \sum_{j=0}^k \frac{1}{\lambda_{n_k}^\sigma + 1} P_j^\sigma \quad (5.6)$$

où les P_j^σ désignent les projecteurs spectraux, donnés par :

$$P_k^\sigma := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j^\sigma} (z - \mathcal{L}_\sigma)^{-1} dz = \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} \langle \cdot, u_{n,\sigma} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} u_{n,\sigma} , \quad (5.7)$$

où γ_j^σ est un cercle (orienté positivement) centré en $\lambda_{n_j}^\sigma$ et de rayon suffisamment petit pour qu'il ne contiennent pas d'autres valeurs propres de \mathcal{L}_σ .

De part la continuité de R_σ , on obtient que, pour tout $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$,

$$\|(R_\sigma - R_{k,\sigma})f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|R_\sigma\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left\| f - \sum_{j=0}^k P_j^\sigma f \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

d'où

$$R_\sigma f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, u_{n,\sigma} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} R_\sigma u_{n,\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^\sigma + 1} \langle f, u_{n,\sigma} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} u_{n,\sigma} .$$

De plus, on obtient

$$\|R_\sigma - R_{k,\sigma}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sup_{\substack{f \in \mathbf{L}^2(\Omega) \\ \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}=1}} \|(R_\sigma - R_{k,\sigma})f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 . \quad (5.8)$$

Ainsi, R_σ est la limite des $R_{k,\sigma}$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'opérateur $R_{k,\sigma}$ peut être vu comme opérateur sur l'espace euclidien $\bigoplus_{j=0}^k \ker(\mathcal{L}_\sigma - \lambda_{n_j}^\sigma)$ (de dimension n_{k+1}).

Definition 5.29. Soit D un domaine (réel ou complexe). Une famille $(T_x)_{x \in D}$ d'opérateurs non bornés de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est dite analytique en $x_0 \in D$ si il existe un espace de Banach B et deux familles $(U_x)_{x \in D}, (V_x)_{x \in D} \subset \mathcal{L}(B, \mathbf{L}^2(\Omega))$ analytiques (bornées) en x_0 , tels que :

$$\forall x \in D, \begin{cases} U_x : B \rightarrow \text{Dom } T_x & \text{est un bijection} \\ T_x U_x = V_x \end{cases} .$$

La famille $(T_x)_{x \in D}$ est dite analytique si elle est analytique en tout $x \in D$.

Proposition 5.30. Soit D un domaine (réel ou complexe) et $(T_x)_{x \in D}$ une famille d'opérateurs fermés de $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Soient $x_0 \in D$ et ζ dans l'ensemble résolvant de T_{x_0} .

Alors la famille est analytique en $x_0 \in D$ si et seulement si, au voisinage de x_0 , ζ est dans l'ensemble résolvant de T_x et la résolvante $R(\zeta, x) := (T_x - \zeta)^{-1}$ est analytique bornée.

Démonstration. Commençons par montrer l'implication.

On suppose que $T : x \mapsto T_x$ est analytique en x_0 , en considère un espace de Banach B et deux familles $(U_x)_{x \in D}, (V_x)_{x \in D} \subset \mathcal{L}(B, \mathbf{L}^2(\Omega))$ comme dans la définition 5.29.

Soit $x \in D$, l'opérateur $T_x - \zeta$ est bijectif car ζ est dans l'ensemble résolvant de T_x , et U_x est une bijection entre B et $\text{Dom } T_x$.

L'opérateur $V_x - \zeta U_x = (T_x - \zeta) U_x$ est une bijection en B et $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et est analytique en x_0 , il en suit que l'opérateur inverse est analytique borné au voisinage de x_0 .

Finalement, $R(\zeta, x) = U_x (V_x - \zeta U_x)^{-1}$ est analytique au voisinage de x_0 .

Montrons maintenant la réciproque.

On suppose que $R(\zeta, x)$ est analytique bornée au voisinage de x_0 .

On prend $U_x = R(\zeta, x)$ et $V_x = 1 + \zeta U_x$, les deux familles engendrées $(U_x)_{x \in D}, (V_x)_{x \in D} \subset$

$\mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\Omega))$ sont analytiques bornées en x_0 .
 U_x est bien une bijection entre $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\text{Dom } T_x$ et

$$T_x U_x = (T_x - \zeta) U_x + \zeta U_x = V_x .$$

Ainsi, d'après la définition 5.29, T est holomorphe en x_0 . □

Ainsi, la famille $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ est analytique si et seulement si la famille $(R_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ l'est, et l'analyticité de \mathcal{L}_σ se traduit au travers de l'égalité :

$$\mathcal{L}_\sigma R_\sigma = \text{Id}_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - R_\sigma .$$

Théorème 5.31. *Les familles d'opérateurs $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$, $((\mathcal{L}_\sigma - \zeta)^{-1})_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ ($\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$) et $(P_j^\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ ($j \in \mathbb{N}$) sont continues sur \mathbb{R}_+ et analytiques sur \mathbb{R}_+^* .*

Il en suit que les valeurs propres associées $\sigma \mapsto \lambda_n^\sigma$ sont continues et analytiques presque partout, l'ensemble de leurs points non réguliers étant fermé et isolé dans \mathbb{R}_+ .

Démonstration. On considère la forme hermitienne continue sur $\mathbf{H}^1(\Omega)$ suivante

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_\sigma := \mathcal{Q}_\sigma + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \sigma \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} .$$

Il existe (cf. [7, Théorème V-3.35]) un unique opérateur $R_\sigma^{-\frac{1}{2}}$ positif et auto-adjoint, défini sur $\mathbf{H}^1(\Omega)$, tel que $(R_\sigma^{-\frac{1}{2}})^2 = R_\sigma^{-1}$ et

$$\forall f, g \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \widetilde{\mathcal{Q}}_\sigma(f, g) = \langle R_\sigma^{-\frac{1}{2}} f, R_\sigma^{-\frac{1}{2}} g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} .$$

De plus, l'opérateur $R_\sigma^{-\frac{1}{2}}$ est coercif avec

$$\forall f \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \|f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \left\| R_\sigma^{-\frac{1}{2}} f \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} ,$$

il est donc inversible avec $\left\| R_\sigma^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 1$.

Soit σ_0 , on pose $G := R_{\sigma_0}^{-\frac{1}{2}}$ et on introduit la famille de formes hermitiennes $(\mathcal{Q}_\sigma^0)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ continues sur $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (cf. [7, Théorème VI-1.20]), définie par

$$\forall f, g \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \mathcal{Q}_\sigma^0(f, g) := \widetilde{\mathcal{Q}}_\sigma(G^{-1}f, G^{-1}g) .$$

Pour tous $f, g \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, l'application $\sigma \mapsto \mathcal{Q}_\sigma^0(f, g)$ est continue sur \mathbb{R}_+ et analytique sur \mathbb{R}_+^* .

Le théorème de représentation de Riesz nous assure l'existence d'une famille d'opérateurs $(\mathcal{L}_\sigma^0)_{\sigma \in \mathbb{R}_+} \subset \mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\Omega))$ auto-adjoints et positifs, telle que

$$\forall f, g \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \mathcal{Q}_\sigma^0(f, g) = \langle \mathcal{L}_\sigma^0 f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} .$$

Cette famille est analytique sur \mathbb{R}_+^* (et continue sur \mathbb{R}_+) car, pour tous $f, g \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, l'application $\sigma \mapsto \langle \mathcal{L}_\sigma^0 f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ l'est (cf. [7, Section VII-1]).

On a, pour tous $f \in \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma$ et $g \in \mathbf{H}^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{L}_\sigma + 1) f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \widetilde{\mathcal{Q}}_\sigma(f, g) \\ &= \widetilde{\mathcal{Q}}_\sigma(G^{-1}Gf, G^{-1}Gg) \\ &= \mathcal{Q}_\sigma^0(Gf, Gg) \\ &= \langle \mathcal{L}_\sigma^0 Gf, Gg \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \langle G \mathcal{L}_\sigma^0 Gf, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad , \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}_\sigma + 1 = G \mathcal{L}_\sigma^0 G \quad (\text{sur } \text{Dom } \mathcal{L}_\sigma).$$

Il en suit que

$$R_\sigma = G^{-1} (\mathcal{L}_\sigma^0)^{-1} G^{-1} \quad .$$

Finalement, l'analyticité de \mathcal{L}_σ^0 en σ_0 est équivalente à celle de $(\mathcal{L}_\sigma^0)^{-1}$, donc à celle de R_σ , et finalement à celle de \mathcal{L}_σ d'après la proposition 5.30.

Nous venons ainsi de montrer que la famille $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ est analytique sur \mathbb{R}_+^* et continue sur \mathbb{R}_+ , il en est donc de même pour les familles associées de résolvantes $\left((\mathcal{L}_\sigma - \zeta)^{-1} \right)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ ($\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$) et de projecteurs spectraux $(P_k^\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ ($k \in \mathbb{N}$, cf. (5.7)).

Les projecteurs spectraux sont continus (les valeurs propres $\sigma \mapsto \lambda_n^\sigma$ sont donc continues), l'ensemble des points auxquels la dimension des espaces propres varie est donc fermé et isolé, i.e. les fonctions $\sigma \mapsto n_k$ ($k \in \mathbb{N}$, cf. remarque 4.10) est continue par morceaux.

On considère un point auquel les fonctions $\sigma \mapsto n_k$ ($k \in \mathbb{N}$) sont continues (donc constantes). Au voisinage de ce point, R_σ est la limite des opérateurs $R_{k,\sigma}$ (cf. (5.6) et (5.8)).

Ces opérateurs forment une famille analytique dont les valeurs propres sont décrits par l'ensemble $\{\lambda_n^\sigma \mid n \in \llbracket 0; n_k \rrbracket\}$.

En appliquant le théorème 5.25, on obtient que les fonctions $\sigma \mapsto \lambda_n^\sigma$ ($n \in \mathbb{N}$) sont continues sur \mathbb{R}_+ , analytiques presque partout, et l'ensemble des points non réguliers est fermé et isolé dans \mathbb{R}_+ . \square

6 Quelques résultats sur le spectre de Robin

Théorème 6.1. *Pour tout $(n, \sigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$, on a*

$$d_n(\sigma) = \lambda_n^\sigma - \lambda_n^0 = \int_0^\sigma \int_\Gamma |u_{n,\tau}|^2 \, dS \, d\tau \quad ,$$

où $u_{n,\tau}$ est choisi arbitrairement parmi les fonctions propres $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -normalisées de \mathcal{L}_τ associées à λ_n^τ .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

En accord avec le théorème 5.31, l'application $\lambda_n : \sigma \in \mathbb{R}_+ \mapsto \lambda_n^\sigma$ est continue et analytique excepté sur un ensemble fermé et isolé de points (donc un ensemble localement fini et au plus dénombrable).

Soient σ un point régulier de λ_n (i.e. un point auquel λ_n est analytique), $(\sigma_k)_k \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers σ et $u_{n,\sigma}$ une fonction propre $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -normalisée de \mathcal{L}_σ associée

à λ_n^σ .

Le théorème 5.31 nous assure également que les projecteurs spectraux associés à \mathcal{L}_σ sont continus, on peut donc trouver une suite $(u_{n,\sigma_k}^k)_k \in \mathbf{H}^1(\Omega)^\mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_{n,σ_k}^k est une fonction propre $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -normalisée de \mathcal{L}_{σ_k} associée à $\lambda_n^{\sigma_k}$, et $u_{n,\sigma_k}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbf{L}^2(\Omega)} u_{n,\sigma}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\sigma(u_{n,\sigma} - u_{n,\sigma_k}^k) &= \int_\Omega |\nabla u_{n,\sigma}|^2 + |\nabla u_{n,\sigma_k}^k|^2 - 2\Re \left(\nabla u_{n,\sigma} \cdot \nabla \overline{u_{n,\sigma_k}^k} \right) dx \\ &\quad + \sigma \int_\Gamma |u_{n,\sigma}|^2 + |u_{n,\sigma_k}^k|^2 - 2\Re \left(u_{n,\sigma} \overline{u_{n,\sigma_k}^k} \right) dS \\ &= \mathcal{Q}_\sigma(u_{n,\sigma}) + \mathcal{Q}_{\sigma_k}(u_{n,\sigma_k}^k) - 2\Re \mathcal{Q}_\sigma(u_{n,\sigma}, u_{n,\sigma_k}^k) \\ &\quad + (\sigma - \sigma_k) \int_\Gamma |u_{n,\sigma_k}^k|^2 dS \\ &= \lambda_n^\sigma + \lambda_n^{\sigma_k} - 2\lambda_n^\sigma \Re \langle u_{n,\sigma}, u_{n,\sigma_k}^k \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma - \sigma_k) \int_\Gamma |u_{n,\sigma_k}^k|^2 dS . \end{aligned}$$

On a $\lambda_n^{\sigma_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_n^\sigma$ par continuité de λ_n , $\langle u_{n,\sigma}, u_{n,\sigma_k}^k \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \|u_{n,\sigma}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $u_{n,\sigma_k}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbf{L}^2(\Omega)} u_{n,\sigma}$.

De plus, comme $\sigma_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sigma > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel les σ_k sont non nuls, il en suit que

$$\forall k \geq N, \quad \int_\Gamma |u_{n,\sigma_k}^k|^2 dS \leq \frac{1}{\sigma_k} \mathcal{Q}_{\sigma_k}(u_{n,\sigma_k}^k) = \frac{\lambda_n^{\sigma_k}}{\sigma_k} .$$

La suite $\left(\frac{\lambda_n^{\sigma_k}}{\sigma_k}\right)_{k \geq N}$ est convergente (vers $\frac{\lambda_n^\sigma}{\sigma}$) donc bornée, on obtient

$$\forall k \geq N, \quad \left| (\sigma - \sigma_k) \int_\Gamma |u_{n,\sigma_k}^k|^2 dS \right| \leq \sup_{j \geq N} \frac{\lambda_n^{\sigma_j}}{\sigma_j} \cdot |\sigma - \sigma_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 .$$

Finalement, on obtient $\mathcal{Q}_\sigma(u_{n,\sigma} - u_{n,\sigma_k}^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_n^\sigma + \lambda_n^\sigma - 2\lambda_n^\sigma = 0$.

On introduit la norme $\|\cdot\|_* = \sqrt{\mathcal{Q}_\sigma + \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2} = \sqrt{\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \sigma \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2}$ sur $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

On sait que $u_{n,\sigma_k}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbf{L}^2(\Omega)} u_{n,\sigma}$ et nous venons de montrer que $\mathcal{Q}_\sigma(u_{n,\sigma} - u_{n,\sigma_k}^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, on obtient ainsi $u_{n,\sigma_k}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_*} u_{n,\sigma}$, puis $u_{n,\sigma_k}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbf{H}^1(\Omega)} u_{n,\sigma}$ car $\|\cdot\|_*$ est équivalente à $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, en effet, en utilisant le théorème 4.1, on obtient

$$\forall u \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|u\|_* = \sqrt{\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \sigma \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2} \leq \sqrt{1 + \sigma C_{tr}^2} \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} .$$

Le théorème 4.1 implique également $u_{n,\sigma_k}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbf{L}^2(\Gamma)} u_{n,\sigma}$, il en suit, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $\langle u_{n,\sigma}, u_{n,\sigma_k}^k \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \|u_{n,\sigma}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2$.

On a

$$(\lambda_n^{\sigma_k} - \lambda_n^\sigma) \int_\Omega u_{n,\sigma} \overline{u_{n,\sigma_k}^k} dx = \overline{\mathcal{Q}_{\sigma_k}(u_{n,\sigma_k}^k, u_{n,\sigma})} - \mathcal{Q}_\sigma(u_{n,\sigma}, u_{n,\sigma_k}^k) = (\sigma_k - \sigma) \int_\Gamma u_{n,\sigma} \overline{u_{n,\sigma_k}^k} dS .$$

Comme $u_{n,\sigma_k}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbf{L}^2(\Omega)} u_{n,\sigma}$, il existe un rang $M \in \mathbb{N}$ à partir duquel les u_{n,σ_k}^k ne sont pas orthogonales à $u_{n,\sigma}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Supposons que, pour tout $k \geq M$, on ait $\sigma_k \neq \sigma$, on

obtient

$$\forall k \geq M, \quad \frac{\lambda_n^{\sigma_k} - \lambda_n^\sigma}{\sigma_k - \sigma} = \frac{\int_\Gamma u_{n,\sigma} \overline{u_{n,\sigma}^k} dS}{\int_\Omega u_{n,\sigma} \overline{u_{n,\sigma_k}^k} dx},$$

puis, par unicité de la limite,

$$\partial_\sigma \lambda_n^\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{\sigma_k} - \lambda_n^\sigma}{\sigma_k - \sigma} = \int_\Gamma |u_{n,\sigma}|^2 dS \geq 0.$$

La fonction λ_n est donc croissante et absolument continue (au sens de Rudin, cf. [8, Théorème 7.18]), i.e. $\partial_\sigma \lambda_n \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ et

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda_n^\beta - \lambda_n^\alpha = \int_\alpha^\beta \partial_\sigma \lambda_n^\sigma d\sigma; .$$

En effet, λ_n étant analytique sur \mathbb{R}_+ excepté en certains points localement finis, les problèmes d'intégration de $\partial_\sigma \lambda_n$ peuvent survenir uniquement autours de ces points.

Soient $\alpha < \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que tout point de $] \alpha; \beta [$ est régulier pour λ_n , on a alors

$$\forall \varepsilon \in]0; \frac{\beta - \alpha}{2}[, \quad \int_\alpha^\beta \partial_\sigma \lambda_n^\sigma \cdot \mathbf{1}_{[\alpha + \varepsilon; \beta - \varepsilon]}(\sigma) d\sigma = \int_{\alpha + \varepsilon}^{\beta - \varepsilon} \partial_\sigma \lambda_n^\sigma d\sigma = \lambda_n^{\beta - \varepsilon} - \lambda_n^{\alpha + \varepsilon} .$$

En utilisant $\partial_\sigma \lambda_n \geq 0$ et la continuité de λ_n , on obtient que $\lambda_n^{\beta - \varepsilon} - \lambda_n^{\alpha + \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0_+} \lambda_n^\beta - \lambda_n^\alpha$ en croissant, la famille $(\partial_\sigma \lambda_n \cdot \mathbf{1}_{[\alpha + \varepsilon; \beta - \varepsilon]})_\varepsilon \subset \mathbf{L}^1([\alpha; \beta], \mathbb{R}_+)$ est donc majorée et croissante lorsque $\varepsilon \rightarrow 0_+$, avec $\partial_\sigma \lambda_n^\sigma \cdot \mathbf{1}_{[\alpha + \varepsilon; \beta - \varepsilon]}(\sigma) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0_+} \partial_\sigma \lambda_n^\sigma$ pour tout $\sigma \in] \alpha; \beta [$.

En appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient $\partial_\sigma \lambda_n \in \mathbf{L}^1([\alpha; \beta])$ avec $\int_\alpha^\beta \partial_\sigma \lambda_n^\sigma d\sigma = \lambda_n^\beta - \lambda_n^\alpha$, les points α et β n'étant pas supposés réguliers pour λ_n , on en conclut que $\partial_\sigma \lambda_n$ est intégrable aux voisinages (compacts) des points non réguliers de λ_n , ce qui nous assure l'absolue continuité de λ_n vue ci-dessus.

Finalement, on obtient

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda_n^\sigma - \lambda_n^0 = \int_0^\sigma \partial_\tau \lambda_n^\tau d\tau = \int_0^\sigma \int_\Gamma |u_{n,\tau}|^2 dS d\tau; .$$

où $u_{n,\tau}$ est une fonction propre $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -normalisée de \mathcal{L}_τ associées à λ_n^τ , on peut ignorer les points non réguliers de λ_n dans $[0; \sigma]$. \square

Maintenant que nous disposons de cette formule pour l'écart de Robin-Neumann, nous allons montrer un résultat géométrique sur la moyenne de ces écarts, pour cela, nous allons admettre la loi de Weyl locale (cf. [9]) qui est au cœur du résultat souhaité.

Théorème 6.2 (Loi de Weyl locale). *Soit $\sigma \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit (arbitrairement) une fonction propre $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -normalisée $u_{n,\sigma}$ de \mathcal{L}_σ associée à λ_n^σ . Nous avons le résultat géométrique suivant*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_\Gamma |u_{n,\sigma}|^2 dS = \frac{2 \text{Vol}(\Gamma)}{\text{Vol}(\Omega)}$$

où $\text{Vol}(\Gamma) = \int_\Gamma 1 dS$ est la longueur de Γ et $\text{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1 dx$ est la surface de Ω .

La loi de Weyl locale étant introduite, nous pouvons passer au résultat sur la moyenne des écarts de Robin-Neumann :

Théorème 6.3. *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+$, la moyenne des écarts de Robin-Neumann existe, avec*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n(\sigma) = \frac{2 \operatorname{Vol}(\Gamma)}{\operatorname{Vol}(\Omega)} \cdot \sigma .$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\forall (N, \tau) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, \quad W_N(\tau) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} |u_{n,\tau}|^2 \, dS \geq 0$$

où, pour tout $(n, \tau) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, $u_{n,\tau}$ est choisi (arbitrairement) parmi les fonctions propres $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -normalisées de \mathcal{L}_τ associées à λ_n^τ .

En appliquant le théorème 6.1 démontré précédemment, on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n(\sigma) = \int_0^\sigma \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} |u_{n,\tau}|^2 \, dS \right) d\tau ,$$

de plus, la loi de Weyl locale 6.2 nous assure que

$$\forall \tau \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} W_N(\tau) := \frac{2 \operatorname{Vol}(\Gamma)}{\operatorname{Vol}(\Omega)} .$$

Remarquons que la limite de $(W_N(\tau))_N$ est indépendante de τ .

On souhaite maintenant appliquer le théorème de convergence dominée à $(W_N)_N \in \mathbf{L}^1([0; \sigma])^{\mathbb{N}^*}$, nous intégrons sur un compact, donc borner uniformément les W_N suffira à appliquer le théorème.

Pour cela, utilisons le lemme ci-dessous (cf. [1, Lemme 4.1]) :

Lemme 6.4. *En s'appuyant sur les objets introduits précédemment, on dispose du résultat de borne uniforme suivant*

$$\exists C > 0 : \forall (N, \tau) \in \mathbb{N}^* \times [0; \sigma], \quad W_N(\tau) \leq C .$$

En utilisant ce lemme, nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée, on obtient alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n(\sigma) = \int_0^\sigma \lim_{N \rightarrow \infty} W_N(\tau) = \frac{2 \operatorname{Vol}(\Gamma)}{\operatorname{Vol}(\Omega)} \cdot \sigma .$$

□

Corollaire 6.5. *Soit $\sigma > 0$ fixé. On considère une fonction $\phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ croissante telle que $\phi(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ (arbitrairement lentement).*

Alors, on a $d_n(\sigma) \leq \phi(n)$ pour presque tout n , dans le sens où

$$\frac{1}{N} \# \{n \in \mathbb{N}_N \mid d_n(\sigma) > \phi(n)\} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$$

où $\mathbb{N}_N := [1; N]$.

Démonstration. On introduit la fonction $X_\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

$$n \mapsto \frac{d_n(\sigma)}{\phi(n)}$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, sa restriction à \mathbb{N}_N (notée $X_{N,\sigma}$) définit une variable aléatoire de $(\mathbb{N}_N, \mathcal{P}(\mathbb{N}_N))$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$.

De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $X_{N,\sigma} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{N}_N, \mathcal{P}(\mathbb{N}_N), \mu_N)$ où $\mu_N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_n$ est la probabilité uniforme sur \mathbb{N}_N .

On peut appliquer l'inégalité de Markov à tout les $X_{N,\sigma}$, on obtient

$$\forall (N, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \mu_N(X_{N,\sigma} \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X_{N,\sigma})}{\alpha}.$$

En particulier, pour $\alpha = 1$ et $N \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\mu_N(X_{N,\sigma} \geq 1) = \frac{1}{N} \# \{n \in \mathbb{N}_N \mid d_n(\sigma) \geq \phi(n)\}$$

et

$$\mathbb{E}(X_{N,\sigma}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{d_n(\sigma)}{\phi(n)}.$$

On considère la partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$, on a $\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1 \leq N$ dès que $N \geq 2$ dans \mathbb{N} . En effet, on a $\lfloor \sqrt{2} \rfloor + 1 = 1 \leq 2$ et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1 \leq \sqrt{x} + 1 \leq x$ pour tout $x \geq \varphi^2 \simeq 2,618$, où $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$ désigne le nombre d'or.

Il en suit que, pour tout $N \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \# \{n \in \mathbb{N}_N \mid d_n(\sigma) > \phi(n)\} &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{d_n(\sigma)}{\phi(n)} \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{d_n(\sigma)}{\phi(n)} + \frac{1}{N} \sum_{n=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N \frac{d_n(\sigma)}{\phi(n)} \\ &\leq \frac{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}{N \phi(1)} \frac{1}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} d_n(\sigma) + \frac{1}{\phi(\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1)} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n(\sigma) \\ &\leq \frac{C_\sigma}{\phi(1)} \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{C_\sigma}{\phi(\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

où $C_\sigma := \sup_{M \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M d_n(\sigma)$ est une constante dans \mathbb{R}_+^* bien définie d'après le théorème 6.3. □

7 Conclusion

Nous voilà déjà à la conclusion de ce mémoire, pour celle-ci, je me permet de repasser à la première personne.

Au travers de ce mémoire, j'ai pu développer mes connaissances et appréhender quelques enjeux autour de l'analyse fonctionnelle et des opérateurs non bornés, en particulier sur une famille précise d'opérateurs.

Ce travail m'a aussi permis de découvrir des problématiques liées aux conditions au bord,

en particulier dans le résultat de régularité elliptique (théorème 4.9) servant à expliciter le domaine ainsi qu'à travailler sur le spectre du Laplacien de Robin \mathcal{L}_σ .

Les questions de la régularité induite sur les valeurs propres par la régularité de la famille d'opérateurs $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}_+}$ m'étaient également étrangères avant cette étude, et ce fût un plaisir de découvrir de nouveaux outils prolongeant l'analyse complexe que j'avais étudiée jusqu'ici.

Mes connaissances de Licence et de Master m'ont été utiles pour travailler sur le cas de la dimension 1, la suite, plus complexe, a surtout fait appel à mes connaissances de Master sur les opérateurs.

Ainsi, une bonne partie de la théorie qui m'avait été enseignée jusque là s'est révélée utile : un travail sur la résolvante, les projecteurs spectraux, les valeurs propres et la décomposition de l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$ en sous-espaces propres de \mathcal{L}_σ par exemple, mais encore bien d'autres outils d'intégration, d'analyse fonctionnelle, d'analyse complexe ou même d'algèbre.

Durant ces trois mois de stage de recherche en Mathématiques, je n'ai malheureusement pas pu tout démontrer et détailler, j'espère cependant que le travail effectué a été suffisamment commenté et approfondi pour que l'étude puisse être suivie efficacement et les problématiques appréhendées aisément par le lecteur.

Je vous remercie d'avoir pris le temps de lire ce mémoire, en espérant que cela ait été intéressant.

Références

- [1] Zeév Rudnick, Igor Wigman, and Nadav Yesha. Differences between robin and neumann eigenvalues. March 2021.
- [2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. 1999.
- [3] Christophe Cheverry and Nicolas Raymond. *A guide to spectral theory*. 2020.
- [4] Valentin Petrovich Mikhailov. *Partial differential equations*. Mir publishers, 1978.
- [5] Lawrence Craig Evans. *Partial differential equations*. 2010.
- [6] Hellmut Baumgärtel. *Analytic perturbation theory for matrices and operators*. 1985.
- [7] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. 1995.
- [8] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. 1998.
- [9] Andrew Hassell and Steve Zelditch. Quantum ergodicity of boundary values of eigenfunctions. 2004.