



Nantes Université  
Faculté des Sciences et des Techniques (FST)  
Département des Mathématiques



# Mémoire de Master

## Mathématiques et Applications

*Spécialité : Modélisation Analyse numérique et Calcul Scientifique*

## Thème

---

Modélisation numérique de l'érosion des berges due au trafic  
fluvial

---

### Encadrés par

- Mr Hasan SMAOUI : Directeur de recherche du Ministère de la Transition Écologique (MTE)
- Mme Delphine BRANCHERIE : Professeur des Universités à l'UTC de Compiègne

### Réalisé par

- Grace KIDZIMOU MIDZONSO

2022/2023

# Table des matières

<b>Dédicaces</b>	<b>3</b>
<b>Remerciements</b>	<b>4</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>5</b>
1.1 Érosion des berges . . . . .	6
1.1.1 Les causes d'érosion des berges . . . . .	6
1.1.2 Les types d'érosion des berges . . . . .	7
1.1.3 Propositions de solutions . . . . .	7
1.2 Généralités sur les milieux poreux . . . . .	8
1.2.1 Définition et caractéristiques d'un milieu poreux . . . . .	8
1.3 Équation de conservation de masse . . . . .	11
1.4 Loi de Darcy . . . . .	12
1.5 Approche éléments finis 1D . . . . .	13
1.5.1 Principe des éléments finis . . . . .	14
1.5.2 Méthode de Galerkin . . . . .	14
<b>2 Modélisation du problème couplé fluide-solide</b>	<b>16</b>
2.1 Description du fluide (Équation de Richards cas 1D) . . . . .	16
2.1.1 Caractéristiques des sols . . . . .	19
2.2 Description du solide cas 1D . . . . .	20
2.3 Description du couplage (fluide-solide cas 1D) . . . . .	21
<b>3 Résolution numérique</b>	<b>23</b>
3.1 Résolution numérique : Richards 1D-EF . . . . .	23
3.1.1 Formulation en $h$ . . . . .	23
3.1.2 formulation mixte ( $\theta - h$ ) . . . . .	29
3.2 Résolution numérique : Solide 1D-EF . . . . .	32
3.2.1 Résolution numérique : Fluide-solide 1D-EF . . . . .	37
3.3 Erreur relative . . . . .	40
<b>4 Résultats</b>	<b>41</b>
4.1 Résultats numériques de Richards et solide 1D . . . . .	41
4.1.1 Résultats numériques de Richards 1D . . . . .	41
4.1.2 Validation du modèle Richards 1D (formulation en $h$ ) . . . . .	47
4.1.3 Validation Richards 1D en formulation mixte . . . . .	49
4.1.4 Résultats numériques du solide 1D . . . . .	51
4.1.5 Validation du modèle 1D solide . . . . .	53
4.2 Résultats numériques du couplage 1D . . . . .	54
4.2.1 Comparaison des résultats de calculs . . . . .	57

4.3	Sensibilité de la solution au maillage . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>
5.1	Conclusion . . . . .	63
<b>Annexe</b>		<b>67</b>
5.2	Organisation de la programmation . . . . .	67
5.2.1	Description des programmes . . . . .	67
5.2.2	Organigramme . . . . .	68
5.2.3	Calcul des modules de compressibilité ( $K_{solide}$ ) de quelques matériaux . .	69

# Dédicaces

Je dédie ce travail à mon père Antoine KIDZIMOU et à toute la famille KIDZIMOU.

# Remerciements

Je remercie particulièrement mes encadrants Madame Delphine BRANCHERIE et Monsieur Hassan SMAOUI, pour avoir accepté d'encadrer ce mémoire. Leur expérience et leurs connaissances dans leurs domaines respectifs ont été un atout de taille, leurs conseils, un avantage considérable. Je les remercie également pour leur disponibilité exceptionnelle, pour leur soutien et pour leur patience à répondre à toutes les difficultés auxquelles j'ai été confronté.

Je remercie tous les membres du jury pour leur présence et tous les enseignants du département des Mathématiques, notamment ceux du parcours Modélisation Analyse numérique et Calcul Scientifique (MACS).

Je garde une profonde pensée à :

- Tous mes collègues de promotion : Antonin COUVEZ, Alice RAMBAUD, Bastien GROSSE, Ghislain BOGNON, Gwendal LEGER, Kyliane LEBEAU, Lucie CHAILLOU, Valentin JOUBERT, Yohann JEZEQUEL ;
- Christ KOUASSI N'DA ancien étudiant de MACS ;
- Tous mes amis particulièrement mon ami Éloge Grekou YAO ;
- Madame Sylvie GLOVERT et Madame Rania ALLAL mes collègues de bureau pour leur accueil chaleureux.

Merci à ma copine Marie Scheslie pour son soutien de tous les jours.

Enfin, j'aimerais remercier ma famille pour leur patience et qui n'ont cessé de m'encourager.

# 1

## Introduction

Le Centre d'Etudes et d'Expertise sur les Risques, l'Environnement, la Mobilité et l'Aménagement (CEREMA) est un établissement public à caractère administratif placé sous la tutelle conjointe du ministre de la Transition écologique et solidaire, et du ministre de la Cohésion des territoires. Le CEREMA développe des relations étroites avec les collectivités territoriales qui sont présentes dans ses instances de gouvernance. Il a été créé le 1<sup>er</sup> janvier 2014. Son siège est situé à Bron, sur le site de l'ancien CETE de Lyon. Il compte 11 directions à travers le territoire national parmi lesquelles on cite :

CEREMA risque eaux et mer est la direction technique du CEREMA s'intéressant aux aménagements maritimes et fluviaux. Elle développe des actions techniques et scientifiques dans le domaine notamment des risques naturels (inondations, submersions, érosion), des transports fluviaux, maritimes et des énergies marines. Basé à Margny-lès-Compiègne (département de l'Oise) en région Hauts-de-France, la recherche est menée par des chercheurs du laboratoire commun d'hydraulique numérique, équipe commune CEREMA-UTC-CNRS du Laboratoire de Mécanique Roberval de l'Université de Technologie de Compiègne (UTC).

En France, le transport fluvial est en plein renouveau (nouveau projet transeuropéen de voies à grands gabarits Seine-Nord-Europe) puisqu'il répond pleinement aux objectifs de développement durable. Toutefois, le développement de ce mode de transport passe par l'étude de l'impact économique et écologique du passage des bateaux sur les cours d'eau et l'entretien du réseau des voies navigables. Cet entretien consiste à des opérations de dragage pour maintenir les profondeurs des chenaux de navigation et assurer des conditions d'écoulement en période de crue ou à des opérations de restaurations des berges. Ces opérations sont généralement coûteuses car les volumes de matière à extraire sont importants.

Par ailleurs, on peut retenir que l'écoulement fluvial joue un rôle important dans les processus de retrait de berges. Comme cet écoulement est influencé à son tour par la navigation, il est légitime alors de se poser la question du rôle et de l'impact du passage des bateaux sur le retrait de berges accentué par l'intensification du trafic fluvial sur certaines voies d'eau (et notamment l'Oise qui alimentera le Canal Seine Nord-Europe). Se pose alors la question de la prédiction de la tenue à long terme des berges. À notre connaissance, peu d'investigations portent sur l'étude de l'érosion des berges induite par le trafic fluvial. À l'heure actuelle, sont privilégiées des approches "pragmatiques" qui s'appuient sur des formulations analytiques simplifiées qui ne permettent pas de rendre compte de façon satisfaisante de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu. L'érosion des berges est en effet la conjugaison de plusieurs processus multi-physiques mettant en jeu l'écoulement fluide et son évolution sous l'effet du passage d'un bateau mais également son interaction avec le milieu poreux que constitue la berge et dont le niveau de saturation dépend de l'écoulement hydrodynamique.

Dans ce contexte, nous nous proposons de mettre en place une stratégie de modélisation numérique de la tenue des berges sous écoulement hydrodynamique. La berge peut être vue comme un milieu poreux soumis à un chargement variable correspondant à l'écoulement hydrodynamique induit par le passage des bateaux. Sous l'effet de ce passage, le niveau de chargement et le niveau de saturation dans la berge évoluent induisant éventuellement des surcharges locales du squelette solide de la berge conduisant à la

dégradation progressive de la berge.

L'objectif de ce travail est de développer un outil numérique couplant les équations régissant les écoulements dans le sol avec la déformation du squelette solide. Ce manuscrit se compose de 4 parties comme suit :

- La première partie présente le contenu et de quelques rappels sur les milieux poreux, on donnera des éléments utiles pour la suite de notre travail ;
- La deuxième partie présente le couplage fluide-solide. L'écoulement fluide est gouverné par l'équation de Richards décrivant les écoulements non-permanents dans les sols non saturés et le solide est régi par l'équation d'équilibre mécanique (quasi-statique) ;
- La troisième partie est consacrée à la résolution numérique. Ces équations ont été résolues dans un cas uni-dimensionnel. Un modèle est développé pour chacune des équations permettant de les résoudre par la méthode des éléments finis et en appliquant l'algorithme de linéarisation de THOMAS et la méthode itérative de Picard pour la formulation mixte ( $\theta - h$ ) de l'équation de Richards ;
- Enfin dans la dernière partie, nous présentons des résultats numériques obtenus pour différents cas-tests pour différents types de sols (sable et argile).

## 1.1 Érosion des berges

Phénomène naturel, généralement provoqué par le courant, participant au transport de la charge solide et à la recharge sédimentaire du cours d'eau. Les érosions de berges sont à l'origine des migrations de méandres, et garantissent le fonctionnement dynamique du cours d'eau.

### 1.1.1 Les causes d'érosion des berges

Il existe plusieurs causes d'érosion de berge, parmi lesquelles on peut citer :

- **Variation des températures** : C'est-à-dire, les changements de température est aussi responsable de l'érosion. Les roches et les minéraux tels que la terre, le sable, l'argile, ... qui forment les berges réagissent aux changements de température en gagnant et en perdant du volume ;
- **Les phénomènes relatifs à l'exploitation de la voie fluviale** : C'est-à-dire chocs de bateaux, surcharges d'engins en crête lors des travaux, opération de dragage (risque de déstabilisation du pied de berge) ;
- **Les vagues produites par le vent**, peuvent également nuire à la stabilité des berges. Leurs impacts sur la berge est très proche de celui des vagues générées par le passage des bateaux mais beaucoup moins dégradant ;
- **Le batillage** : Ce battement de l'eau sur les berges peut être produit par le déplacement des bateaux ou par le vent. En effet, lorsqu'un bateau se déplace dans l'eau, la surface de l'eau monte et descend produisant des ondes. En s'infiltrant dans le sol de la berge, cette montée de la surface de l'eau entraîne le remplissage des pores vides, sature le milieu et augmente le poids du sol.

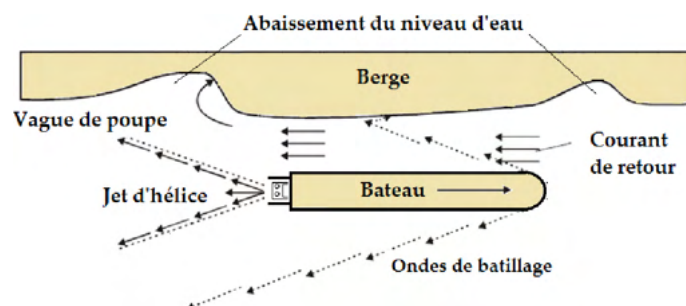


FIGURE 1.1 – Ondes de batillage générées par le passage des bateaux et des processus associée de transport de sédiments (Shengcheng Ji, mars 2013)

### 1.1.2 Les types d'érosion des berges

Par l'action d'agression extérieure provoquée par l'homme ou par la nature, les fleuves et les rivières ont la capacité de couper leurs propres berges aussi bien à la verticale que latéralement (méandres). Ces deux types d'érosion des berges peuvent s'expliquer par la navigation.

- **Érosion latérale** : Comme le terme l'indique, l'érosion latérale est l'érosion qui se produit sur les côtés, elle consiste à l'élargissement de la vallée par le recul des berges et conduit à la formation d'une plaine alluviale.
- **Érosion verticale** : Elle consiste en l'approfondissement des lits des fleuves. En s'enfonçant par érosion, les cours d'eau creusent des vallées qui possèdent un profil caractéristique en V. Ce type d'érosion peut se faire par plusieurs mécanismes parmi lesquels on peut citer :
  - a) Le glissement : Ce mécanisme survient plutôt dans des sols cohésifs qui sont capables de retenir de grandes quantités d'eau, ce qui ajoute du poids à la berge et réduit les forces de cohésion entre les particules (phénomène de lubrification). Par conséquent, le talus devient encore plus sensible au décrochement. Lorsqu'on augmente la pente ou la hauteur d'un talus, le poids du sol excède éventuellement les forces de cohésion qui le retiennent, le sommet de la berge se fissure et le sol glisse en plaques (voir 1.2).

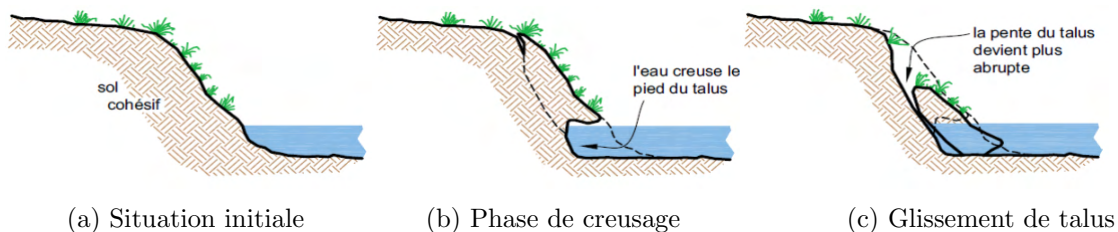


FIGURE 1.2 – Mécanisme de rupture verticale par glissement (Université Mila)

- b) La boulangue : C'est une sorte de glissement qui s'observe fréquemment lorsqu'il y a résurgence de la nappe phréatique dans le talus. Les sols stratifiés où un horizon de sol pulvérulent se trouve sur un horizon de sol cohésif sont les plus sensibles à ce type d'érosion. Le phénomène résulte de la pression de la nappe phréatique sur la berge lorsque le niveau de celle-ci est supérieur au niveau de l'eau dans le cours d'eau.

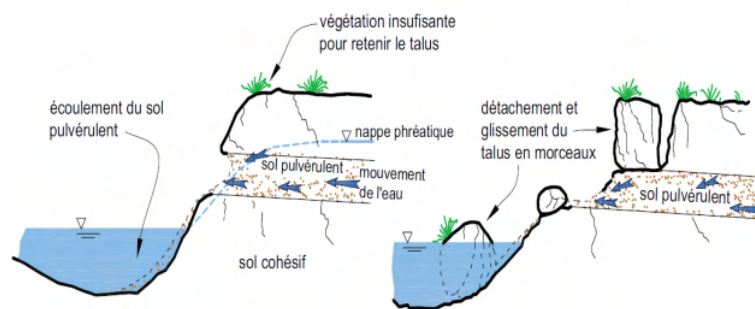


FIGURE 1.3 – Mécanisme de rupture verticale par boulangue (Université Mila)

### 1.1.3 Propositions de solutions

Ces dernières années, de nombreux projets scientifiques ont été publiés concernant l'érosion des berges due au trafic fluvial. Plusieurs techniques de protection de berge ont été proposées :

- **Les techniques en génie végétal** : Le génie végétal utilise les aptitudes des plantes, pour apporter des solutions techniques à des problèmes de protection des sols et plus particulièrement de lutte contre l'érosion. Les techniques de génie végétal s'inspirent des formations végétales



naturelles (herbacées et/ou ligneuses), présentes sur les berges naturelles et capables de résister à des contraintes fortes.

- **Les techniques de génie civil** : L'enrochement, la technique la plus fréquemment utilisée, consiste à mettre en place des blocs sur la portion de berge à protéger ;
- **Les techniques mixtes** : Elles empruntent des savoir-faire aux deux domaines que sont le génie civil et le génie végétal. Elles associent souvent des enrochements en pied de berge et des techniques végétales en haut de berge.

**Remarque 1.1.1** Dans le cadre de ce projet, nous allons nous intéresser à l'érosion du type vertical. Le problème d'érosion de berge verticale fait appel à la résolution d'un problème couplant l'infiltration/l'écoulement du fluide dans un sol de la berge et la déformation du squelette solide.

## 1.2 Généralités sur les milieux poreux

Dans cette section nous présenterons les outils concernant le milieu poreux qui seront nécessaires à la compréhension de la suite de notre projet.

### 1.2.1 Définition et caractéristiques d'un milieu poreux

Un milieu poreux est caractérisé par la présence d'une matrice solide constituée de grains dont la distribution permet la présence de pores. Ces pores sont des vides pouvant être remplis par un mélange d'eau et d'air.

On distingue deux types de milieu poreux : **saturé** et **non saturé**. Le milieu est dit saturé en eau si les pores sont complètement remplis d'eau. Si une phase gazeuse y est présente, dans ce cas le milieu est dit non saturé en eau.

Dans le cadre de ce projet, le milieu poreux considéré est le sol.  
Soit  $V$ , un volume quelconque de sol. Ce volume est occupé par  $V_a$ , le volume occupé par l'air,  $V_l$  le volume d'eau et  $V_s$  le volume des particules solides. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$V_t = V_v + V_s = V_a + V_l + V_s \quad (1.1)$$

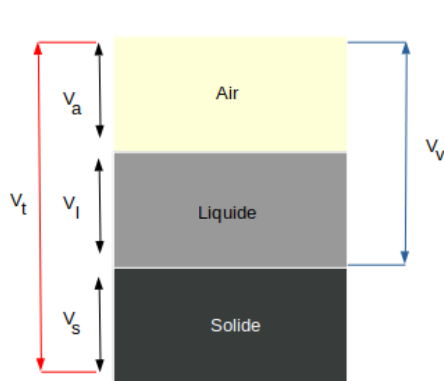


FIGURE 1.4 – Diagramme schématisé du sol

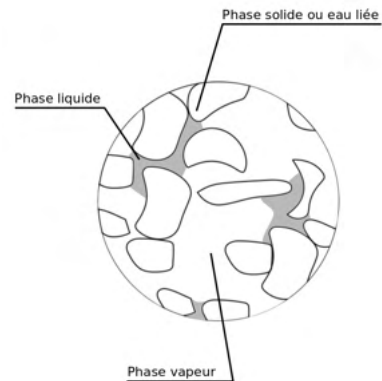


FIGURE 1.5 – Représentation d'un milieu poreux

où :

- $V_a$ , volume de la phase gazeuse (air) ;
- $V_l$ , volume de la phase liquide ;
- $V_s$ , volume des particules solides ;
- $V_v$ , volume des vides ;
- $V_t$ , volume total de l'élément considéré.

Nous pouvons établir un certain nombre de relations visant à décrire ce volume. L'ensemble de ces quantités sont exprimées à l'échelle dite de Darcy, c'est-à-dire là où la loi de Darcy s'applique aisément. C'est-à-dire une échelle macroscopique où le détail de la " microstructure " du sol n'est pas connu. A l'échelle de Darcy, un même point peut être occupé par les 3 phases. Par conséquent ce point est défini par des concepts de fractions de volumiques ou encore de saturation.

- **La porosité** : est définie comme le rapport entre le volume des vides et le volume total du sol.

$$\phi = \frac{V_v}{V_t} \quad (1.2)$$

Le tableau (1.1) illustre quelques valeurs de porosité de certains matériaux.

Matériaux	Porosité (%)
Craie sénonienne	31
Limon compacte	34
Sable grossier	39
Argile à silex	40
Sol a pâturé	47
Tourbe	80

TABLE 1.1 – Pourcentage des pores selon le type du sol (OLLIER et POIREE, 1981)

- **La teneur en eau volumique** : elle est définie comme le rapport du volume d'eau et le volume total du milieu considéré.

$$\theta = \frac{V_l}{V_t} \quad (1.3)$$

**Remarque 1.2.1** Certaines valeurs de  $\theta$  peuvent être considérées comme caractéristiques. Notons  $\theta_{sat}$  la teneur en eau saturée (représentant la teneur en eau volumique maximale) et  $\theta_{res}$  la teneur en eau résiduelle (représentant la teneur en eau volumique minimale dans le sol).

En fonction du type de sol,  $\theta_{sat}$  sera compris entre 20 et 50% alors que  $\theta_{res}$  sera compris entre 0.1 et 10%.

- **Le taux de saturation** : est défini comme le rapport entre le volume d'eau et le volume des vides, ou encore comme le rapport entre la teneur en eau volumique et la porosité :

$$S = \frac{V_l}{V_v} = \frac{\theta}{\phi} \quad (1.4)$$

Il est généralement exprimé en pourcentage et varie de 0% dans un sol sec à 100% dans un sol complètement saturé.

- **la perméabilité  $k$**  : est la capacité d'un milieu poreux à se laisser traverser par un fluide sous l'effet d'un gradient de pression. Cette constante caractérise le milieu poreux étudié et elle est liée à la forme des grains et à la porosité cinématique. L'ordre de grandeur se situe entre  $10^{-7}[m/s]$  pour des graves et  $10^{20}[m/s]$  pour de l'argile.

- **La conductivité hydraulique** : exprime également la capacité d'un milieu poreux à laisser passer un fluide sous l'effet d'un gradient de pression. Cette grandeur dépend à la fois des propriétés du milieu mais également de celles du fluide.

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \quad (1.5)$$

où,  $\rho$  la masse volumique du fluide (l'eau dans notre cas),  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide,  $k$  la perméabilité intrinsèque et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

**Remarque 1.2.2** La conductivité hydraulique  $K$  et la perméabilité  $k$  sont des scalaires dans le cas où le milieu poreux est isotrope ou bien dans le cas de l'écoulement unidirectionnel. Mais dans le cas d'un milieu poreux en dimension 2 et anisotrope, la conductivité hydraulique est définie par un tenseur symétrique de la forme :

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{xy} & K_{yy} \end{pmatrix}$$

avec,

$$K_{ij} = \frac{k_{ij}\rho g}{\mu} \quad (1.6)$$

**Remarque 1.2.3** La conductivité hydraulique et la perméabilité sont des fonctions strictement croissantes avec le degré de saturation du milieu poreux. Lorsque le milieu est saturé, la conductivité hydraulique est maximale et nous parlons alors de conductivité hydraulique à saturation  $K_s$ .

k(m/s)	Matériaux	Niveau de perméabilité
$1 > k > 10^{-2}$	Graviers sans éléments fins	Très perméable
$10^{-2} > k > 10^{-4}$	Sables grossiers, graviers sableux sans éléments fins	Perméable
$10^{-4} > k > 10^{-6}$	Sables moyens à fins, limon peu argileux	Peu perméable
$10^{-6} > k > 10^{-8}$	Sables argileux	Très peu perméable
$k < 10^{-8}$	Argileux homogène	Quasi imperméable

TABLE 1.2 – Exemple de vue générale sur différents types de sols et d'ordre de grandeur de la perméabilité  $k$ .

• **Pression capillaire :** La pression capillaire  $p_c$  exprimant l'effet des phénomènes capillaires aux interfaces eau-air et des forces de liaison entre l'eau et le milieu est définie comme la différence entre la pression de l'eau du sol et la pression atmosphérique.

$$p_c = p_a - p_w \quad (1.7)$$

où,  $p_a$  est la pression de l'air et  $p_w$  est la pression de l'eau.

Dans la plupart des cas, on considère la pression atmosphérique constante de l'ordre de ... et elle est donc souvent négligée ( $p_a = 0$ ).

$$p_c = -p_w \quad (1.8)$$

• **La charge hydraulique :** La charge hydraulique constitue le moteur de l'écoulement. C'est une grandeur qui représente l'énergie mécanique de l'eau. Elle s'exprime en mètres et est la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et du travail réalisé par les forces de pression. L'expression de la charge découle de l'équation de Bernoulli qui exprime que la charge totale est constante le long d'une ligne de courant et sous les hypothèses suivantes :

- Fluide incompressible : masse volumique constante ;
- Mouvement irrotationnel : écoulement non-tourbillonnaire ;
- Fluide parfait : effets visqueux négligeables, pas de pertes de charge par frottement.

La charge hydraulique totale s'exprime alors comme :

$$H = \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p_w}{\rho_w g} \quad (1.9)$$

Où  $v$  est la vitesse du fluide et  $z$  est la profondeur dirigée verticalement vers le bas.

Le premier terme de cette expression représente donc l'énergie cinétique, le second l'énergie potentielle

de pesanteur et le dernier le travail des forces de pressions.

Dans un sol, nous pouvons considérer que la vitesse de l'eau est négligeable pour calculer la charge. Par conséquent, la charge hydraulique peut simplement s'écrire de la façon suivante :

$$H = h + z \quad (1.10)$$

où  $h = \frac{p_w}{\rho_w g}$  est le potentiel de pression capillaire (expression de la pression d'eau, exprimée en terme d'une hauteur d'eau).

• **Notion de Contrainte effective :** Pour les contraintes effectives, on a également recours à une approche phénoménologique.

En effet, en mécanique des sols il est habituel de formuler le comportement du squelette solide en contrainte effective, autrement dit de faire l'hypothèse que la déformation (élastique) du squelette est reliée au tenseur des contraintes effectives  $\sigma'$ .

Le tenseur des contraintes effectives a été conceptuellement introduit par les travaux de Terzaghi (1925, 1943) reposant uniquement sur des observations expérimentales.

Pour interpréter cette définition, il convient alors de voir le milieu poreux considéré comme la superposition d'un milieu continu solide et d'un milieu continu fluide, où la pression du fluide interstitiel, dit aussi pression de pore, est définie en tout point du milieu continu associé.

Concrètement, il est important de retenir que ce tenseur de contrainte est donné par une fonction de la seule déformation du squelette  $\varepsilon$ , et non par une fonction de  $\varepsilon$  et de la pression de pore  $p$ .

En utilisant la conversation de la mécanique des milieux continus solides pour laquelle la compression est négative, l'expression de la contrainte effective est :

$$\sigma = \sigma' + pI \quad (1.11)$$

où :

- $\sigma$ , le tenseur de contrainte totale ;
- $\sigma'$ , le tenseur de contrainte effective ;
- $I$ , le tenseur identité ;
- $p$ , la pression de pore.

Biot (1956) a constaté lors de ses travaux sur la propagation des ondes dans les milieux poreux que l'influence de la pression sur le comportement macroscopique est régie par une variable supplémentaire  $B$  écrite sous forme tensorielle, appelée tenseur de Biot. Cette variable de couplage hydromécanique modifie alors l'équation (3.61) de la manière suivante :

$$\sigma = \sigma' + Bp \quad (1.12)$$

où  $B$  est le tenseur de Biot, avec  $B = I$  si le solide est incompressible.

On retrouve alors le tenseur des contraintes effectives initialement introduit par Terzaghi.

**Remarque 1.2.4** Pour des sols secs  $p = 0$  et  $\sigma = \sigma'$

### 1.3 Équation de conservation de masse

On s'intéresse ici à l'écriture des équations de conservation de la masse de chacune des phases constituant le milieu poreux .

La fraction volumique des particules d'une phase  $\alpha$  notée  $\phi_\alpha$  s'exprime en fonction de la porosité  $\phi$  et du taux de saturation  $S$ . Elle est définie telle que :

- Pour l'eau :  $\phi_w = \phi S$
- Pour l'air :  $\phi_a = \phi(1 - S)$
- Pour le solide :  $\phi_s = 1 - \phi$

Le principe de conservation de la masse exprime le fait que, la masse d'eau  $M$  contenue dans un domaine  $D$  donné reste constante dans le temps. C'est-à-dire :

La masse des particules dans la phase  $\alpha$  contenue dans le domaine  $D$  s'écrit :

$$M_\alpha = \int_D \rho_\alpha \phi_\alpha dV \quad (1.13)$$

où,

- $\phi_\alpha$ , la porosité d'une phase  $\alpha$
- $\rho_\alpha$ , la masse volumique d'une phase  $\alpha$

Cette masse doit rester constante au cours du temps, c'est-à-dire :

$$\frac{dM_\alpha}{dt} = 0, \quad \forall D \quad (1.14)$$

L'équation (1.13) se réécrit :

$$\int_D \frac{d}{dt} (\rho_\alpha \phi_\alpha) dD = 0, \quad \forall D \quad (1.15)$$

En utilisant la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, on obtient ainsi l'équation (1.16) qui est l'équation de continuité de la phase  $\alpha$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \phi_\alpha) + \text{div}(\rho_\alpha \phi_\alpha \vec{V}_\alpha) = 0 \quad (1.16)$$

où  $\vec{V}_\alpha$  désigne la vitesse associée à un point de la phase  $\alpha$ .

Ainsi l'équation (1.16) sur chaque phase s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1 - \phi)) + \text{div}(\rho_s (1 - \phi) \vec{V}_s) = 0 \quad (\text{solide}) \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w (\phi S)) + \text{div}(\rho_w (\phi S) \vec{V}_w) = 0 \quad (\text{liquide}) \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_a (\phi (1 - S))) + \text{div}(\rho_a (\phi (1 - S)) \vec{V}_a) = 0 \quad (\text{air}) \quad (1.19)$$

## 1.4 Loi de Darcy

L'eau s'écoulant dans un sol suit une trajectoire tortueuse guidée par le réseau de pores qui constituent le sol. L'aptitude qu'a un sol à se laisser traverser par un sol dépend des différents paramètres que nous avons décrits précédemment. Darcy a décrit, dans son célèbre article de 1856 (Darcy, 1856), une loi expérimentale liant la vitesse d'écoulement de l'eau dans un sol saturé à la conductivité hydraulique et au gradient de charge hydraulique.

Dans le cas d'un sol isotrope, la loi de Darcy généralisée s'écrit :

$$\vec{q} = -\frac{k}{\mu} \left[ \nabla(p_w + \rho_w g z) \right] \quad (1.20)$$

où,

- $\rho_w$ , la masse volumique de l'eau ;
- $p_w$ , la pression de l'eau ;
- $g$ , l'accélération de la pesanteur ;
- $\vec{q}$ , le vecteur vitesse de Darcy (débit) ;
- $\mu$ , la viscosité dynamique du fluide ;
- $k$ , la perméabilité intrinsèque ;
- $\nabla$ , opérateur gradient.

Cette équation reste valable si les hypothèses suivantes sont respectées :

- Le milieu est complètement saturé.
- Le sol est relativement homogène.
- L'écoulement est laminaire.
- Les grains doivent être assez fins. Lorsque ceux-ci sont trop grossiers, la vitesse de l'eau peut être élevée, rendant le flux turbulent.

On définit la vitesse de pore ou vitesse interstitielle  $\vec{V}$  [m/s] par :

$$\vec{V} = \frac{\vec{q}}{\theta} \quad (1.21)$$

Cette vitesse est celle à laquelle les particules fluides se déplacent réellement dans le sol.

**Remarque 1.4.1** : La loi de Darcy permet de décrire les écoulements dans un milieu poreux saturé. Elle exprime la proportionnalité entre le flux d'eau, ou vecteur vitesse de filtration  $\vec{q}$  traversant une colonne et l'opposé du gradient de charge hydraulique.

Bien qu'elle fut conçue à l'origine pour les écoulements en milieux saturés, elle fut étendue par **Richards** en 1930 à l'écoulement en zone non saturée en stipulant que la constante de proportionnalité  $K$  appelée **conductivité hydraulique** est fonction de la teneur en eau du sol.

## 1.5 Approche éléments finis 1D

Le problème que nous résolvons étant unidimensionnel, nous présentons ici l'approche éléments finis dans le cas 1D.

La méthode des éléments finis en une dimension (1D) est une technique numérique utilisée pour résoudre des équations différentielles, en particulier des équations aux dérivées partielles (EDP), dans des systèmes unidimensionnels.

Cette méthode est largement utilisée dans de nombreux domaines de l'ingénierie et des sciences pour résoudre une variété de problèmes, tels que l'équation de la chaleur, de diffusion, les équations de la mécanique des structures, des problèmes d'écoulement des fluides, et bien d'autres. Elle permet d'obtenir des solutions numériques approchées (précises) pour des systèmes complexes en décomposant le domaine en éléments plus simples et en utilisant des fonctions de forme pour approcher la solution.

Soit  $\Omega$  le domaine ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (où  $n = 1, 2$  ou  $3$ ), de frontière  $\partial\Omega$  et sur lequel on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles, munie de conditions aux limites.

On va définir les espaces :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et telle que } \int_{\Omega} |u|^p < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et telle que } \int_{\Omega} |u|^2 < \infty \right\}, \text{ espace des fonctions réelles à carré intégrable.}$$

Pour tout entier  $m \geq 1$ ,

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), / \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m \right\}$$

$H^m(\Omega)$  est appelé espace de Sobolev d'ordre  $m$ .

Par extension, on voit aussi que  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

Dans le cas 1D, on écrit plus simplement pour  $I$  ouvert de  $\mathbb{R}$  :

$$H^m(I) = \left\{ u \in L^2(I) / u', \dots, u^{(m)} \in L^2(I) \right\}$$

Cas 1D : On considère in intervalle ouvert  $I = ]a, b[$  borné. Alors :

$$H_0^1(]a, b[) = \left\{ u \in H^1(]a, b[), u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

L'espace  $L^2(\Omega)$  est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de sa norme associée définie par :

$$u \in L^2(\Omega), v \in L^2(\Omega) \quad \langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv \, d\Omega$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle u, u \rangle$$

### 1.5.1 Principe des éléments finis

Nous rappelons rapidement la démarche de la méthode des éléments finis permettant de construire le problème discrétisé associé à la formulation variationnelle.

Le principe est ici présenté dans le cas 1D.

- 1 **Principe de base** : La méthode des éléments finis consiste à diviser un domaine unidimensionnel en éléments finis, généralement des segments, afin de discrétiser le problème continu en un ensemble de petites régions ou éléments.
- 2 **Approximation de la solution** : À l'intérieur de chaque élément fini, la solution est approchée par une fonction polynomiale (généralement de degré 1 ou 2) définie sur cet élément. Ces fonctions polynomiales sont appelées fonctions de forme ou fonctions d'interpolation ( $N_i(x_j) = \delta_{ij}$ ).
- 3 **Assemblage des éléments** : Ensuite, les contributions des différents éléments sont assemblées pour former le système complet, correspondant à la formulation variationnelle discrétisée. L'opération d'assemblage permet d'obtenir le problème à résoudre.
- 4 **Établissement des équations** : Les équations différentielles du problème sont discrétisées en équations algébriques en utilisant les approximations polynomiales à l'intérieur de chaque élément. Le système d'équations résultant est peut être linéaire ou non linéaire selon la nature du problème étudié.
- 5 **Conditions aux limites** : Les conditions aux limites, qu'elles soient de Dirichlet (fixant des valeurs à certaines positions) ou de Neumann (fixant des valeurs de dérivées), sont appliquées aux nœuds appropriés du maillage.
- 6 **Résolution numérique** : Le système d'équations résultant est résolu numériquement à l'aide de méthodes telles que la méthode de Gauss ou des méthodes de résolution itératives pour des systèmes non linéaires.
- 7 **Calcul de la solution** : Une fois le système résolu, on obtient une approximation numérique de la solution sur tout le domaine 1D. Cette solution peut être utilisée pour analyser le comportement du système, en post-traitant la solution obtenue.

### 1.5.2 Méthode de Galerkin

Généralisé la méthode des éléments finis (MEF) et aussi certaines méthodes spectrales. Écrire la solution sous la forme d'une somme des fonctions de base.

#### Idée de la méthode

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante. On a une EDP à résoudre sur un domaine  $\Omega$ . On écrit la formulation variationnelle de cette EDP, et on se ramène donc à un problème du type :

$$(PV) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V$$

où  $V$  est un espace de Hilbert et  $v$  est la fonction test.

On va chercher une approximation de  $u$  par approximation interne (méthode de Galerkin). Pour cela, on

définit un maillage du domaine  $\Omega$ , grâce auquel on va définir un espace d'approximation  $V_h$  sous espace vectoriel de  $V$  de dimension finie  $N_h$ . Le problème approché est alors :

$$(PV_h) \quad \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } \forall v_h \in V_h \ a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

Le problème approché  $(PV_h)$  peut se s'écrire sous la forme d'un système linéaire ou non linéaire selon la nature du problème étudié.

On espère alors que cette solution approchée  $u_h$  soit une bonne estimation de la solution exacte  $u$ , c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\| = 0$$



## 2

# Modélisation du problème couplé fluide-solide

Dans ce chapitre, on cherche à modéliser le problème couplé fluide-solide en unidimensionnel. Dans un premier temps, nous donnons les descriptions de fluide (équation de Richards), solide (équation du solide) et enfin fluide-solide (couplage). Cette modélisation sera faite en utilisant la méthode des éléments finis 1D et en appliquant de l'algorithme de THOMAS pour la résolution du système linéaire.

## 2.1 Description du fluide (Équation de Richards cas 1D)

L'équation de Richards est une équation aux dérivées partielles non-linéaire décrivant le transfert de l'eau dans les sols non saturés en conditions non permanentes. Cette équation fut obtenue par Richards en 1931 et repose sur la combinaison de l'équation de continuité et l'équation de Darcy. Cette équation, nous le verrons, décrit comment l'évolution des flux dans le sol modifie sa teneur en eau au cours du temps.

En prenant l'équation de la phase liquide (1.18) et en se servant des équations (1.4) et (1.21), ainsi nous trouvons l'équation (2.1).

$$\frac{\partial \rho_w \theta}{\partial t} + \text{div}(\rho_w \vec{q}) = 0 \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) peut être simplifiée si la masse volumique de fluide  $\rho_w$  est supposée constante dans le temps et dans l'espace :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\text{div}(\vec{q}) \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) signifie que la variation de teneur en eau  $\theta$  d'un élément de sol équivaut au taux de variation des flux entrants et sortants de cet élément.

L'équation de Richards est obtenue en injectant la loi Darcy (1.20) dans l'équation (2.2) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} \left[ \frac{k}{\mu} \left( \nabla(p_w + \rho_w g z) \right) \right] \quad (2.3)$$

où,

- $\theta$ , la teneur en eau volumique ;
- $k$ , la perméabilité intrinsèque ;
- $\mu$ , la viscosité du fluide ;

-  $t$  est le temps.

L'équation de Richards (2.3) peut s'exprimer sous différentes formes : en fonction de  $\theta$ , de  $h$  et de  $\theta - h$  (mixte).

- **Formulation mixte  $\theta - h$**

D'après ce qui précède, on a :  $h = \frac{p_w}{\rho_w g} \Rightarrow p_w = h\rho_w g$  et en considérant la loi de Darcy (1.20), on a :

$$\begin{aligned}\vec{q} &= -\frac{k}{\mu} \left[ \nabla(h\rho_w g + \rho_w g z) \right] \\ &= -\frac{k\rho_w g}{\mu} \left[ \nabla(h + z) \right]\end{aligned}$$

où  $z$  est la profondeur dirigée verticalement positive vers le bas.  
soit,

$$\vec{q} = -K(\nabla h + \vec{e}_z) \quad (2.4)$$

où,  $K$  correspond à la conductivité hydraulique décrite précédemment.

Dans le cas des écoulements en régime non saturé la conductivité hydraulique varie en fonction de la teneur en eau volumique  $\theta$  et de la hauteur d'eau  $h$ . L'équation de Darcy prend alors la forme généralisée (Darcy-Buckingham) pour les sols non saturés. Cette expression est très similaire à la loi de Darcy : elle exprime que le flux dans un sol non saturé est proportionnel au gradient de charge hydraulique mais aussi à la conductivité hydraulique pour les sols non saturés. À la différence de l'équation de Darcy, la conductivité hydraulique n'est pas constante mais est fonction de la hauteur d'eau  $h$  de l'eau.

$$\vec{q} = -K(h)(\nabla h + \vec{e}_z) \quad (2.5)$$

À présent, il suffit de remplacer l'équation (2.5) dans l'équation (2.2) pour obtenir l'équation de Richards (2.6) dite mixte car elle inclut explicitement  $\theta$  et  $h$  :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} \left( K(h)(\nabla h + \vec{e}_z) \right) \quad (2.6)$$

où,

- $t$ , est le temps ;
- $K(h)$ , est la fonction de conductivité hydraulique dépendante de la hauteur d'eau  $h$  ;
- $\nabla h$ , est le gradient de la hauteur d'eau.

- **Formulation en  $\theta$**

Dans cette formulation, Childs et Collis-Georges introduisent en 1950 le terme  $D(\theta)$  représentant le coefficient de diffusivité. Ce coefficient est défini comme le rapport entre la conductivité hydraulique et la capacité d'humidité en eau, c'est-à-dire :

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{C(\theta)} \quad (2.7)$$

avec  $C(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial h}$ , la capacité d'humidité en eau. On obtient l'équation de Richards sous la forme de  $\theta$  (où l'inconnue est  $\theta$ ).

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} (D(\theta) \nabla \theta + K(\theta)) \quad (2.8)$$

où  $K(\theta)$  est la fonction de conductivité hydraulique dépendante de la teneur volumique en eau.

• **Formulation en  $h$**

Dans un milieu non saturé, l'équation (2.6) est exprimée en fonction de la hauteur d'eau  $h$  en introduisant les effets de compressibilité des fluides comme suit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

On pose  $C(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}$  la capacité d'humidité.

On a alors,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.9)$$

On obtient donc la formulation en  $h$

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div} \left( K(h) (\nabla h + \vec{e}_z) \right) \quad (2.10)$$

En régime stationnaire  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ , ce qui donne :

$$\operatorname{div} \left( K(h) (\nabla h + \vec{e}_z) \right) = 0$$

Le mouvement de l'eau dans le sol est principalement conditionné par la conductivité hydraulique  $K$ , du matériau qui dépend elle-même du contenu en eau. En zone saturée, le flux d'eau se calcule facilement car  $K$  est une constante. En revanche, en milieu non saturé,  $K$  varie en fonction des apports d'eau et le flux adopte un comportement fortement transitoire.

En résumé, l'écoulement dans une zone non saturée est décrit par l'équation de Richards sous forme unidimensionnelle sous la forme :

$$\text{formulation en } h \quad C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(h)}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$\text{formulation en } \theta \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (2.12)$$

$$\text{formulation mixte } (\theta - h) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(h)}{\partial z} \quad (2.13)$$

où,  $z$ , est la profondeur dirigée verticalement vers le bas (positif vers le bas).

**Remarque 2.1.1** *Il est difficile d'obtenir des solutions valides de ces équations en raison de la forte non-linéarité entre  $K$ ,  $C$ ,  $D$  et  $h$  ou  $\theta$ .*

*Cependant, l'utilisation de différentes méthodes de discrétisation dans la résolution numérique de ces équations permet d'obtenir une précision différente.*

Dans un article datant de 2013 (Caviedes-Voullième et al.), les auteurs pointent les avantages et inconvénients de chacune des formulations :

- Formulation en  $\theta$  : cette formulation a l'avantage d'être exprimée uniquement en fonction de la variable conservée. Cependant, il est impossible de résoudre cette forme en régime saturé car la capacité hydraulique vaut 0 lorsque le sol est saturé, faisant tendre la diffusivité vers l'infini ;
- Formulation en  $h$  : elle fournit des solutions continues, même en saturation ;
- Formulation mixte  $\theta - h$  : cette formulation combine les avantages des 2 autres : elle est à la fois conservatrice et fournit des solutions continues en régime saturé et non saturé.

### 2.1.1 Caractéristiques des sols

Plusieurs modèles empiriques ont été développés pour décrire l'évolution de  $K$  en fonction de  $h$  (ou  $\theta$ ). Dans le cadre de ce projet, le modèle utilisé est le modèle de Van Genuchten (1980). Ici nous ferons une brève description de quelques modèles de la littérature.

- **Modèle de Brooks et Corey (1964)**

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_{res} + (\theta_{sat} - \theta_{res}) \left( \frac{h_e}{h} \right)^N & \text{si } h > h_e \\ \theta_{sat} & \text{si } h \leq h_e \end{cases} \quad (2.14)$$

$$K(h) = K_s (S_e(h))^{\frac{N}{M}} \quad (2.15)$$

Le calcul de la capacité d'humidité  $C(h)$  est définie par :  $C(h) = \frac{\partial \theta(h)}{\partial h}$  soit,

$$C(h) = -\frac{N(\theta_{sat} - \theta_{res})}{h^2} \left( \frac{h_e}{h} \right)^{N-1} \quad (2.16)$$

où,

- $\theta_{res}$ , teneur en eau résiduelle ;
- $\theta_{sat}$ , teneur en eau à saturation ;
- $h_e$ , pression d'entrée d'air ;
- $N$ , indice de distribution de taille de pore ;
- $M$ , constante définie par :  $M = 2 + 3N$  ;
- $S_e$ , taux de saturation effective définie par :  $S_e(h) = \frac{\theta(h) - \theta_{res}}{\theta_{sat} - \theta_{res}}$

**Remarque 2.1.2** *L'inconvénient de ce modèle est qu'il présente une rupture de pente au niveau de la pression d'entrée d'air  $h_e$ , ce qui peut nuire à la convergence des méthodes de résolution (Brooks et Corey, 1964).*

- **Modèle de Haverkamp et al. (1977)**

$$\theta(h) = \theta_{res} + \frac{\theta_{sat} - \theta_{res}}{1 + |\alpha h|^\beta} \quad (2.17)$$

$$K(h) = \frac{K_s}{1 + |Ah|^\gamma} \quad (2.18)$$

$$C(h) = \frac{-\alpha\beta(\theta_{sat} - \theta_{res})|\alpha h|^{\beta-1}}{(1 + |\alpha h|^\beta)^2} \quad (2.19)$$

Ce modèle a été présenté pour la première fois par Haverkamp et al., (1977). Il est beaucoup plus robuste que le modèle Brooks et Corey, 1964.

$\theta_{res}$  représente à nouveau la teneur en eau résiduelle,  $\theta_{sat}$  la teneur en eau à saturation, alors que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $A$  sont des paramètres empiriques constants et dépendant de la nature du sol.

- **Modèle de Van Genuchten (1980)**

La première relation mise en avant par le modèle de van Genuchten est celle décrivant le lien entre la pression d'eau  $h$  et la teneur en eau  $\theta$ .

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_{res} + \frac{\theta_{sat} - \theta_{res}}{(1 + |\alpha h|^n)^m} & \text{si } h \leq 0 \\ \theta_{sat} & \text{si } h > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$K(h) = \begin{cases} K_s S_e(h)^l \left[ 1 - (1 - S_e(h)^{1/m})^m \right]^2 & \text{si } h \leq 0 \\ K_s & \text{si } h > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

$$C(h) = \frac{-(\theta_{sat} - \theta_{res}) \left[ m(n\alpha |\alpha h|^{n-1})(1 + |\alpha h|^n)^{m-1} \right]}{(1 + |\alpha h|^n)^{2m}} \quad (2.22)$$

où,

- $\alpha$ , pression d'entrée d'air ;
- $n$ , coefficient lié à la distribution de tailles de pores avec  $n \geq 1$  ;
- $m$ , paramètre lié à la structure du sol défini par :  $m = 1 - \frac{1}{n}$  et on prend la constante  $l = \frac{1}{2}$ .

Ce modèle est souvent utilisé dans les modèles numériques et a subi beaucoup de modification au cours des dernières années. Parmi ces modèles dérivés on peut citer celui de Broadbridge and White, (1988) ou de Mualem, (1976).

Il faut noter cependant que la formulation de Brooks et Corey donne des résultats corrects pour les sols de texture grossière. Par contre, les résultats deviennent moins fiables quand la texture du sol étudié est assez fine (Van Genuchten et al., 1991). La formulation proposée par Van Genuchten (1980) permet de mieux décrire la courbe de rétention pour des valeurs de teneur en eau proche de la saturation.

- **Exemple de paramètres physiques pour différents types de sol**

Type de sols	Paramètres				
	$\theta_{sat}$	$\theta_{res}$	$\alpha(m^{-1})$	$n$	$K_s(m/s)$
Sable	0.43	0.045	14.5	2.68	$8.25 \times 10^{-5}$
Sable limoneux	0.41	0.057	12.4	2.28	$4.05 \times 10^{-5}$
Argile	0.38	0.068	0.8	1.09	$5.55 \times 10^{-7}$
Argile sableuse	0.38	0.100	2.7	1.23	$3.33 \times 10^{-7}$

TABLE 2.1 – Les valeurs des paramètres pour les fonctions  $\theta(h)$  et  $K(h)$  de Van Genuchten (1980) classées par texture de sol.

## 2.2 Description du solide cas 1D

Pour un domaine solide que l'on suppose ne se déformer que selon  $z$  et soumis à son propre poids, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho_s g = 0 \quad (2.23)$$

Si le solide est supposé élastique linéaire, on peut écrire la relation de comportement sous la forme  $\sigma = K_{solide}(z)\varepsilon(z)$  où  $\varepsilon(z)$  est la déformation du solide.

Dans le cas 1D, on a  $\varepsilon = \frac{du}{dz}$ .

La contrainte s'écrit alors vue par le solide considère

$$\sigma = K_{solide}(z) \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.24)$$

En injectant l'équation (2.24) dans l'équation (2.23), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K_{solide}(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho_s g = 0 \quad (2.25)$$

où

- $K_{solide}$ , le module de compressibilité du solide (qui dépend éventuellement de  $z$ ) ;
- $\rho_s$ , la masse volumique du solide ;
- $u$ , le déplacement du solide selon  $z$ .

L'équation (2.25) est un problème parabolique, l'inconnue est ici le déplacement du solide  $u(z)$ . On peut faire du contact avec des éléments finis.

**Attention :** On peut avoir facilement une solution analytique si  $K_{solide}$  est égal à une constante !

Trois méthodes de résolution en solide : élément finis, méthodes sans maillage et méthodes d'éléments de frontière.

Pour ce stage nous avons utilisé la méthode des éléments finis afin de modéliser et simuler le déplacement du solide que nous allons considérer. Le solide est discrétisé en éléments finis à deux noeuds de numéro courant  $k, k+1$  de coordonnées  $z_k, z_{k+1}$  et de longueur  $l_k$ .

Types de sol	$K_{solide}$
Sable	$6.333 \times 10^8$ Pa
Argile	$4.166 \times 10^8$ Pa
Béton	$1.5 \times 10^{10}$ Pa

TABLE 2.2 – Modules de compressibilité ( $K_{solide}$ ) de quelques matériaux

## 2.3 Description du couplage (fluide-solide cas 1D)

Normalement nous disposons de deux systèmes d'équations aux dérivées partielles caractérisant le comportement du solide d'une part, du fluide d'autre part.

On reprend l'équation d'équilibre suivante écrite pour le milieu complet considéré.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho_s g = 0 \quad (2.26)$$

$\sigma$  est ici la contrainte totale. Pour un milieu poreux, comme présenté précédemment au paragraphe (1.2),

la contrainte effective  $\sigma'$  est usuellement introduite en complément de la contrainte totale  $\sigma$ .

Pour le cas 1D considéré ici, on peut écrire

$$\sigma' = \sigma + \alpha p_w \quad (2.27)$$

où  $\alpha$  désigne le coefficient de Biot et  $\alpha = 1$  dans le cas des hypothèses de Terzaghi (voir paragraphe 1.1).  $\sigma'$  peut être considéré comme la part des contraintes totales  $\sigma$  supportée par le squelette solide.

On a ainsi pour le squelette solide :

$$\sigma' = K_{solide} \varepsilon, \quad \text{avec } \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.28)$$

$$\sigma' = \sigma + \alpha p_w \quad (2.29)$$

et l'équation d'équilibre du milieu poreux donne :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho_s g = 0 \quad (2.30)$$

En combinant les équations (2.28), (2.29) et (2.33) on obtient l'équation

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p_w}{\partial z} + \rho_s g = 0 \quad (2.31)$$

or  $p_w = \rho_w g h_w$ , d'où l'équation

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial z} - \alpha \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial z} + \rho_s g = 0 \quad (2.32)$$

Finalement, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K_{solide} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \alpha \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial z} + \rho_s g = 0 \quad (2.33)$$

où,

- $h_w$ , la hauteur d'eau obtenue dans Richards ;
- $u$ , le déplacement du solide ;
- $\rho_w$ , la masse volumique du fluide ;
- $\rho_s$ , la masse volumique du solide ;
- $k_{solide}$ , le module de compressibilité.

l'équation (2.33) couple la déformation du solide à l'écoulement fluide via la hauteur d'eau  $h_w$ . Le prochain chapitre sera la résolution numérique par la méthode des éléments finis de ces équations.

# 3

## Résolution numérique

### 3.1 Résolution numérique : Richards 1D-EF

#### 3.1.1 Formulation en $h$

Dans cette sous-section, nous effectuons la résolution par éléments finis de l'équation de Richards sous sa forme  $h$  en une dimension.

Cette résolution sera effectuée dans un domaine unidimensionnel matérialisé par une colonne verticale de limite  $a$  et  $b$  ( $a$  est la surface et  $b$  le fond).

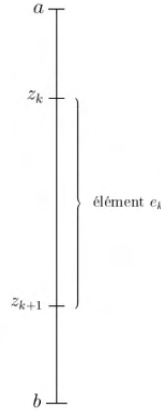


FIGURE 3.1 – Discrétisation du segment  $[a, b]$  en éléments finis P1

On considère le problème modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} C(h) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(h)}{\partial z} = \dot{\varepsilon} \quad \text{dans } ]a, b[ \times ]0, T[, \\ h(a) = h(b) = 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $\dot{\varepsilon}$  est la déformation du solide,  $T$  est le temps final de la simulation,  $a$  et  $b$  représentent les extrémités de la colonne (surface et fond).

#### i) Formulation faible

Soit  $V$  un espace des fonctions test (à déterminer) et s'autorise toutes les opérations. Pour obtenir la formulation faible de (3.1), on multiplie l'équation (3.1) par une fonction test  $\psi \in V$  puis on intègre sur le domaine  $[a, b]$ , puis, on a :



$$\int_a^b C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \psi dz - \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) \psi dz - \int_a^b \frac{\partial K(h)}{\partial z} \psi dz = \int_a^b \dot{\varepsilon} \psi dz \quad (3.2)$$

En effectuant une intégration par partie sur les termes de plus haut degré on obtient :

$$\underbrace{\int_a^b C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \psi dz}_{(1)} = \left[ K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \psi \right]_a^b - \underbrace{\int_a^b K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dz}_{(2)} + \left[ K(h) \psi \right]_a^b - \underbrace{\int_a^b K(h) \frac{\partial \psi}{\partial z} dz}_{(3)} + \underbrace{\int_a^b \dot{\varepsilon} \psi dz}_{(4)} \quad (3.3)$$

On fixe l'espace  $V$  pour que tous les termes aient un sens, on inclut également dans  $V$  les conditions aux limites du problème.

Pour que les intégrales (1), (2), (3) et (4) aient un sens il faut :  $\psi \in L^2(]a, b[)$ ,  $\frac{\partial h}{\partial z} \in L^2(]a, b[)$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial z} \in L^2(]a, b[)$ .

Un bon choix est de prendre  $\psi \in H^1(]a, b[)$  et  $h \in H^1(]a, b[)$ , donc choisir  $\psi \in H_0^1(]a, b[)$  garantit que les termes  $\left[ K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \psi \right]_a^b$  et  $\left[ K(h) \psi \right]_a^b$  s'annulent car  $\psi = 0$  sur le bord de  $[a, b]$ . Donc  $V = H_0^1(]a, b[)$ .

La formulation faible de (3.1) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } h \in V \text{ tel que} \\ q(\dot{h}, \psi) + a(h, \psi) = l(\psi), \quad \forall \psi \in V \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $V = \left\{ \psi \in H^1(]a, b[), \psi = 0 \text{ sur le bord de } [a, b] \right\}$ . On pose :

$$\begin{aligned} q(\dot{h}, \psi) &= \int_a^b C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \psi dz ; \\ a(h, \psi) &= \int_a^b K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dz ; \\ l(\psi) &= \int_a^b \dot{\varepsilon} \psi dz - \int_a^b K(h) \frac{\partial \psi}{\partial z} dz . \end{aligned}$$

Pour résoudre le problème (3.4) (dont il n'existe en général pas de solution analytique), on recherche une solution numérique approchée  $h_h$ . En élément finis, cette solution approchée est construite à partir de deux données :

1. Un maillage  $M_h$  du domaine de calcul  $\Omega$  ;
2. Un choix d'interpolation  $p_k$  sur ce maillage.

Pour notre domaine de calcul unidimensionnel  $\Omega = [a, b]$ , le maillage correspond à découper  $\Omega$  en segments (Voir figure (3.1)).

$$\text{Soit } \Omega = \bigcup_{k=1}^{n_e} e_k \text{ où } e_k = [z_k, z_{k+1}] .$$

## ii) Formulation discrète

On veut chercher une approximation par éléments finis de la solution du problème (3.4). Pour cela, on définit un maillage du domaine  $\Omega = [a, b]$  grâce auquel on va définir un espace d'approximation  $V_h$  (sous espace vectoriel de  $V$  et de dimension finie  $N_p$ ).

On peut alors définir l'espace  $V_h$ , sous-espace vectoriel de  $H_0^1(a, b)$  tel que :

$$V_h = \{ \psi_h \in C^0(a, b) \text{ telle que } \psi_h \text{ est affine sur chaque segment } [z_j, z_{j+1}] \text{ et } \psi_h(a) = \psi_h(b) = 0 \}$$

où  $C^0(a, b)$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n_e} e_k$

Le problème approché sur  $V_h$  est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } h_h \in V_h \text{ tel que} \\ q(h_h, \psi_h) + a(h_h, \psi_h) = l(\psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h \end{cases} \quad (3.5)$$

En remarquant qu'une fonction de  $V_h$  est entièrement déterminée par ses valeurs en  $z_1, \dots, z_{N_p}$ , on établit que la dimension de  $V_h$  est  $N_p$ , et qu'une base de  $V_h$  :  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_p})$ , où  $\varphi_i$  est définie par :

$$\varphi_i(z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

$\forall i = 1, \dots, N_p, \quad \forall j = 1, \dots, N_p.$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.  $\varphi_i$  est appelé la fonction de base représentée sur la figure (3.2).

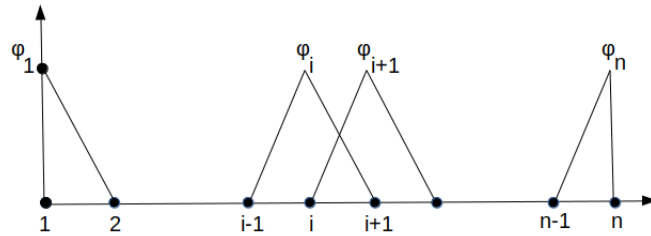


FIGURE 3.2 – Fonction de base  $\varphi_i$

soit,

$$\begin{cases} \varphi_i(z) = \frac{z_{i+1} - z}{long} \\ \varphi_{i+1}(z) = \frac{z - z_i}{long} \end{cases} \quad (3.7)$$

avec  $long = z_{i+1} - z_i$

En tenant compte de toutes ces notations, l'équation (3.5) s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} C(h) \frac{\partial h_h}{\partial t} \psi_h dz + \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} K(h) \frac{\partial h_h}{\partial z} \frac{\partial \psi_h}{\partial z} dz = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \dot{\epsilon} \psi_h dz - \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} K(h) \frac{\partial \psi_h}{\partial z} dz. \quad (3.8)$$

On voit bien dans cette équation la partition du domaine à permis d'écrire l'équation variationnelle sur chaque élément.

**Remarque 3.1.1** Il est noté que la somme  $\sum_{k=1}^{n_e}$  ne désigne pas l'opération d'addition mais plutôt correspond à l'opérateur assemblage des matrices élémentaires.

Sur  $e_k$ , on peut donc décomposer la solution approchée  $h_h$  en une combinaison linéaire des fonctions de base locale.

$$h_h(z) = \sum_{j=1}^2 h_j(t) \varphi_j \quad (3.9)$$

où

-  $\varphi_j(z)$ , est la fonction de forme associées au noeud  $j$  ;

- $h_j$ , est la valeur nodale de  $h(z)$  au noeud  $j$ .

La détermination des fonctions tests se fait en utilisant la méthode de Galerkin qui consiste à prendre ces fonctions identiques aux fonctions de la base ( $\psi_h = \varphi_i$ ). Ainsi on injecte l'équation (3.9) dans l'équation (3.8). Il vient :

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial h_j(t)}{\partial t} \int_{e_k} C(h) \varphi_i \varphi_j dz + \sum_{j=1}^2 h_j(t) \int_{e_k} K(h) \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} dz = \int_{e_k} \dot{\varepsilon} \varphi_i dz - \int_{e_k} K(h) \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (3.10)$$

L'équation (3.10) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\mathbf{M}^{e_k} \dot{\mathbf{H}}^{e_k} + \mathbf{K}^{e_k} \mathbf{H}^{e_k} = \mathbf{B}^{e_k} \quad (3.11)$$

Le système élémentaire (3.11) est non linéaire.

où,

- $\mathbf{M}^{e_k}$ , est la matrice de masse élémentaire ;
- $\mathbf{K}^{e_k}$ , est la matrice de rigidité élémentaire ;
- $\mathbf{B}^{e_k}$ , est le vecteur second membre élémentaire englobant toutes les contributions (terme source, conditions aux limites ...)
- $\mathbf{H}^{e_k}$ , est le vecteur élémentaire des composantes inconnues  $h_1(t), h_2(t)$ .

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij}^{e_k} &= \int_{e_k} \overline{C(h)} \varphi_j \varphi_i dz, & \text{pour tout } i, j = 1, 2 \\ \mathbf{K}_{ij}^{e_k} &= \int_{e_k} \overline{K(h)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz, & \text{pour tout } i, j = 1, 2 \\ \mathbf{B}_i^{e_k} &= \int_{e_k} \dot{\varepsilon} \varphi_i dz - \int_{e_k} \overline{K(h)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz, & \text{pour tout } i = 1, 2 \end{aligned}$$

L'opération de l'assemblage des matrices et des vecteurs élémentaires nous donne un système non linéaire de taille  $N_p \times N_p$  suivant :

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{K} \mathbf{H} = \mathbf{B} \quad (3.12)$$

où,

- $\mathbf{M}$ , la matrice de masse globale ;
- $\mathbf{K}$ , la matrice de rigidité globale ;
- $\mathbf{B}$ , le vecteur globale second membre ;
- $\mathbf{H}$ , le vecteur globale des composantes inconnues  $h_1(t), h_2(t)$ .

Comme l'intervalle  $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n_e} e_k$  ;  $e_k = [z_k, z_{k+1}]$ , ainsi on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \overline{C(h)} \varphi_j \varphi_i dz & \text{pour tout } i, j = 1, 2 \\ \mathbf{K}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \overline{K(h)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz & \text{pour tout } i, j = 1, 2 \\ \mathbf{B}_i &= \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \dot{\varepsilon} \varphi_i dz - \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \overline{K(h)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz, & \text{pour tout } i = 1, 2 \end{aligned}$$

Pour la discrétisation temporelle de  $\dot{\mathbf{H}}$  et  $\mathbf{H}$ , nous utilisons le schéma d'Euler implicite d'ordre 1 c'est-à-dire :

$$\dot{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \dot{h}_1(t_{n+1}) \\ \dot{h}_2(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_1^{n+1} - h_1^n}{\Delta t} \\ \frac{h_2^{n+1} - h_2^n}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

et

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1(t_{n+1}) \\ h_2(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{n+1} \\ h_2^{n+1} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Le calcul des fonctions  $\overline{K(h)}$  et  $\overline{C(h)}$  est une moyenne entre deux cellules définies par :

$$\overline{K(h)} = \frac{K(h_1) + K(h_2)}{2}, \quad \overline{C(h)} = \frac{C(h_1) + C(h_2)}{2} \quad (3.15)$$

où  $K(h_1)$ ,  $K(h_2)$ ,  $C(h_1)$  et  $C(h_2)$  sont les fonctions caractéristiques hydrodynamiques du sol.

- **Calcul des coefficients de la matrice de masse élémentaire**

On calcule les coefficients  $\mathbf{M}_{ij}^{e_k}$  en par la contributions de chaque noeud de l'élément  $e_k$  :

$$\mathbf{M}_{ij}^{e_k} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \overline{C(h)} \varphi_j \varphi_i dz$$

Considérons par exemple l'élément  $e_i = [z_i, z_{i+1}]$ . Sur cet élément, il n'y a que deux fonctions de base non nulles :  $\varphi_i$  et  $\varphi_{i+1}$ .

L'élément  $e_i$  produira donc effectivement une contribution :  $M_{1,1}$ ,  $M_{1,2}$ ,  $M_{2,1}$  et  $M_{2,2}$ . Calculons les contributions élémentaires de  $e_i$  et disposons les sous la forme d'une matrice élémentaire  $2 \times 2$

$$\mathbf{M}^{e_k} = \overline{C(h)} \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} \overline{C(h)} \varphi_i^2 dz = \frac{1}{3} \overline{C(h)} \text{long} \\ M_{1,2} &= M_{2,1} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \overline{C(h)} \varphi_i \varphi_{i+1} dz = \frac{1}{6} \overline{C(h)} \text{long} \\ M_{2,2} &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} \overline{C(h)} \varphi_{i+1}^2 dz = \frac{1}{3} \overline{C(h)} \text{long} \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbf{M}^{e_k} = \frac{1}{3} \overline{C(h)} \text{long} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

- **Calcul des coefficients de la matrice de rigidité élémentaire**

On calcule les coefficients  $\mathbf{K}_{ij}^{e_k}$  en sommant les contributions des différents éléments selon :

$$\mathbf{K}^{e_k} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \overline{K(h)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz$$

Avec le même raisonnement, on obtient la matrice de rigidité élémentaire suivante :

$$\mathbf{K}^{e_k} = \frac{\overline{C(h)}}{long} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

- **Calcul des composantes du second membre élémentaire**

Chaque composante  $\mathbf{B}_i^{e_k}$  du vecteur second-membre élémentaire est calculée par :

$$\mathbf{B}_i^{e_k} = \Delta t \int_{z_i}^{z_{i+1}} \dot{\varepsilon} \varphi_i dz - \Delta t \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial K(h)}{\partial z} \varphi_i dz$$

avec

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{new} - \varepsilon_{old}}{\Delta t}$$

Donc,

$$\mathbf{B}_i^{e_k} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} (\varepsilon_{new} - \varepsilon_{old}) \varphi_i dz - \Delta t \overline{K(h)} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz \quad (3.18)$$

or  $\varepsilon_{new} = \frac{\partial u_{new}}{\partial z}$  et  $\varepsilon_{old} = \frac{\partial u_{old}}{\partial z}$ . Ici le calcul local se fait sur 2 éléments, c'est-à-dire :



donc,

$$\varepsilon_{new} = u_1^{new} \frac{\partial \varphi_i(z)}{\partial z} + u_2^{new} \frac{\partial \varphi_{i+1}(z)}{\partial z} \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_{old} = u_1^{old} \frac{\partial \varphi_i(z)}{\partial z} + u_2^{old} \frac{\partial \varphi_{i+1}(z)}{\partial z} \quad (3.20)$$

En injectant les équations (3.19) et (3.20) dans l'équation (3.18) et effectuant plusieurs calculs d'intégrations, on obtient donc le second membre élémentaire (pour deux éléments) qui s'écrit :

$$\mathbf{B}^{e_k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (u_1^{old} - u_1^{new}) + \frac{1}{2} (u_2^{new} - u_2^{old}) \\ \frac{1}{2} (u_1^{old} - u_1^{new}) + \frac{1}{2} (u_2^{new} - u_2^{old}) \end{pmatrix} - \Delta t \overline{K(h)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.1.2 formulation mixte ( $\theta - h$ )

Naturellement, il est tout a fait possible d'utiliser la méthode des éléments finis pour des problèmes non-linéaires comme dans notre cas de l'équation de Richards en forme mixte, la résolution de ce dernier passera systématiquement par un processus de linéarisation et se fera de façon itérative en utilisant la méthode de Picard.

On considère la formulation mixte avec l'ajout de la porosité, de la capacité de stockage spécifique et du terme source  $f$  :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\theta}{\phi} S_s \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(h)}{\partial z} = f \quad (3.22)$$

où

- $f$ , le terme source ;
- $S_s$ , la capacité de stockage spécifique ;
- $K(h)$ , la fonction de conductivité hydraulique dépendante de la hauteur d'eau.

### Discretisation spatiale

Pour résoudre de l'équation (3.22), nous utilisons la méthode des éléments finis de type Galerkin. Le domaine initial est tout d'abord discrétisé sur un maillage  $\Omega$  contenant un nombre de point  $N_p$  de points. La technique de Galerkin permet d'obtenir une formulation faible de l'équation de Richards en suivant :

#### • Formulation faible

En multipliant l'équation (3.22) par  $\psi$  et en intégrant sur  $[a, b]$ , on obtient la formulation faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } h \in V \text{ tel que} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \theta(h) \psi dz + \int_a^b \frac{\theta}{\phi} S_s \frac{\partial h}{\partial t} \psi dz + \int_a^b K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = - \int_a^b K(h) \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \int_a^b f \psi dz, \\ \forall \psi \in V \end{array} \right. \quad (3.23)$$

#### • Formulation discrète

Après avoir fait l'approximation de l'équation (3.23) par méthode de Galerkin, on pose :

$$h_h(z) = \sum_{j=1}^{n_p} \varphi_j(z) h_j(t) \quad \text{et} \quad \theta_h(z) = \sum_{j=1}^{n_p} \varphi_j(z) \theta_j(t) \quad (3.24)$$

Nous obtenons la formulation discrète (3.25)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \theta_j(t)}{\partial t} \int_a^b \varphi_j \varphi_i dz + \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial h_j(t)}{\partial t} \int_a^b \left( \frac{\theta}{\phi} S_s \right) \varphi_j \varphi_i dz + \sum_{j=1}^{n_p} h_j(t) \int_a^b K(h) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz \\ = - \int_a^b K(h) \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz + \int_a^b f \varphi_i dz, \quad \forall i = 1, \dots, n_p, \quad \forall \varphi_i \in V \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'écriture matricielle de l'équation (3.25) est :

$$\mathbf{M} \frac{d\theta(h)}{dt} + \mathbf{N} \frac{dH}{dt} + \mathbf{K}(h)H = \mathbf{B}(h) \quad (3.26)$$

où,

- $\mathbf{M}$ , la matrice globale de masse ;

- $\mathbf{N}$ , la matrice globale de masse relative à  $h$  ;
- $\mathbf{K}$ , la matrice globale de rigidité ;
- $\mathbf{B}$ , le vecteur global second membre ;
- $\mathbf{H}$ , le vecteur des composantes inconnues  $h_1(t), \dots, h_{n_p}(t)$ .

L'équation (3.26) est un système d'équation non linéaire de taille  $n_p \times n_p$ .  
Comme l'intervalle  $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n_e} e_k$  ;  $e_k = [z_k, z_{k+1}]$ , ainsi on a les formes génériques :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \varphi_j \varphi_i dz \\ \mathbf{N}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \left( \frac{\theta}{\phi} S_s \right) \varphi_j \varphi_i dz \\ \mathbf{K}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} K(h) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz\end{aligned}$$

Des essais numériques ont montré que les expressions ci-dessus de  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  ne nous permettent pas de conserver la masse. Pour remédier à cette inconvénient nous avons adopté la technique de condensation. En effet, cette technique permet de transformer les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  en matrices diagonales. Numériquement, cette technique rend la matrice globale du système à diagonale permet assurer la convergence des méthodes itératives adoptées pour inverser le système linéaire issu de la linéarisation (méthode de Picard ou méthode de Newton). La condensation de ces deux matrices est obtenue par :

$$\mathbf{M} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{M}_{ij} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{N}_{ij} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3.27)$$

### La discrétisation temporelle

L'équation de Richards étant non linéaire, sa résolution est généralement basé sur un schéma itératif. L'opération consiste à itérer successivement sur les valeurs de la teneur en eau et de la conductivité hydraulique jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit satisfait. A chaque pas de temps, le schéma itératif est initié en estimant la teneur en eau et la conductivité hydraulique à partir de la pression du pas de temps précédent. Le potentiel de pression capillaire est alors recalculée, la teneur en eau et la conductivité hydraulique sont réévaluées puis l'équation de nouveau résolue. Le schéma itératif s'arrête quand la différence de potentiel de pression capillaire entre les deux itérations satisfait un critère de convergence.

Il faut noter, il existe plusieurs schémas numériques permettant de discrétiser les termes temporels de l'équation de Richards (Huyakorn et Pinder 1983), mais le schéma de Picard semble le plus répandu de par sa facilité de programmation et sa robustesse. Celia et al. ont proposé une version modifiée du schéma de Picard qui a l'avantage d'être conservatif.

Nous avons choisit un schéma  $\theta$ -schéma pour la discrétisation en temps. Ce schéma englobe une variété des schémas numériques d'ordre 1, 2, explicite, implicite, mixte, ... (selon la valeur du paramètre  $\theta$ ).

**Remarque 3.1.2** Pour ne pas confondre le paramètre  $\theta$  présent dans l'équation de Richards et celui du  $\theta$ -schéma, dorénavant nous remplaçons le schéma  $\theta$ -schéma par  $\lambda$ -schéma.

A présent, la discrétisation temporelle par le schéma  $\lambda$ -schéma de l'équation (3.26) nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{M} \cdot \left( \frac{\theta(h^{n+1}) - \theta(h^n)}{\lambda \Delta t} - \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \bar{\theta}^n(h) \right) + \mathbf{N} \cdot \left( \frac{H^{n+1} - H^n}{\lambda \Delta t} - \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \bar{H}^n \right) + \\ \mathbf{K}(h^{n+1}) \cdot H^{n+1} = \mathbf{B}(h^{n+1})\end{aligned} \quad (3.28)$$

où

$$\bar{\theta}^n = \frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \bar{H}^n = \frac{H^n - H^{n+1}}{\Delta t} \quad (\text{Schéma de Backward Euler d'ordre 1.})$$

Dans notre cas, on prend  $\lambda = 1$  on retrouve le schéma d'Euler implicite d'ordre 1. L'équation (3.28) s'écrit :

$$\mathbf{M} \cdot \left( \frac{\theta(h^{n+1}) - \theta(h^n)}{\Delta t} \right) + \mathbf{N} \cdot \left( \frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} \right) + \mathbf{K}(h^{n+1}) \cdot H^{n+1} = \mathbf{B}(h^{n+1}) \quad (3.29)$$

### Linéarisation

Nous remarquons que le système (3.29) est non-linéaire à cause des non-linéarité entre  $h$ ,  $\theta$  et  $K$ . Pour linéariser ce système, nous utilisons la méthode itérative de linéarisation de Picard comme décrite dans *List and Radu, 2016*. Cette méthode est beaucoup utilisée pour la résolution numérique des équations non-linéaires comme dans notre cas l'équation de Richards mixte.

Nous l'utilisons dans ce projet, le fait qu'elle est d'une part très facile à mettre en oeuvre et d'autre part elle à l'avantage de prévenir la symétrie du système discret résultant de l'équation de Richards.

Ainsi, la linéarisation par la méthode de Picard consiste à trouver  $(h^{n+1,m+1})_{m \geq 0}$  vérifiant :

$$\mathbf{M} \cdot \left( \frac{\theta(h^{n+1,m+1}) - \theta(h^n)}{\Delta t} \right) + \mathbf{N} \cdot \left( \frac{H^{n+1,m+1} - H^n}{\Delta t} \right) + \mathbf{K}(h^{n+1}) \cdot H^{n+1,m+1} = \mathbf{B}(h^{n+1,m}), \quad m = 0, 1 \dots \quad (3.30)$$

En divisant l'équation (3.30) par  $\Delta t$ , nous obtenons l'équation (3.31).

$$\mathbf{M} \cdot \left( \theta(h^{n+1,m+1}) - \theta(h^n) \right) + \mathbf{N} \cdot \left( H^{n+1,m+1} - H^n \right) + \Delta t \mathbf{K}(h^{n+1}) \cdot H^{n+1,m+1} = \Delta t \mathbf{B}(h^{n+1,m}) \quad (3.31)$$

Comme nous avons adopté un schéma numérique temporel totalement implicite, nous remarquons dans l'équation (3.31), nous nous confrontons à la difficulté de résoudre une équation à deux inconnues ( $\theta^{n+1}$  et  $h^{n+1}$ ).

Pour éviter cette difficulté, nous utilisons le développement de Chord proposé par *Célia et al, 1990* (Taylor d'ordre 1) qui transforme durant les itérations l'inconnue  $\theta(h^{n+1,m+1})$  en  $h^{n+1,m+1}$  et d'autres paramètres connus à l'itération  $m$ . donc,

$$\theta(h^{n+1,m+1}) = \theta(h^{n+1,m}) + \left( \frac{\partial \theta}{\partial h} \right)^{n+1,m} (h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}) \quad (3.32)$$

où  $\frac{\partial \theta}{\partial h} = C(h^{n+1,m})$ . Ce terme correspond à la capacité d'humidité que nous avons défini précédemment.

En remplaçant l'équation (3.32) dans le développement de Chord (3.31) et en regroupant les termes en fonction de leur indice, nous obtenons le système de résolution final (3.33) qui est une méthode d'itération de type Picard conservatrice de masse pour la formulation mixte de l'équation de Richards.

$$\left[ C(h^{n+1,m}) \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N} + \Delta t \mathbf{K}(h^{n+1,m}) \right] h^{n+1,m+1} = -\Delta t \mathbf{B}(h^{n+1,m}) - \mathbf{M} \cdot \theta(h^{n+1,m}) + \mathbf{M} \cdot C(h^{n+1,m}) \cdot h^{n+1,m} + \mathbf{M} \cdot \theta(h^n) + \mathbf{N} h^n \quad (3.33)$$

On considère un système linéaire de  $n_p$  équations à  $n_p$  inconnues que l'on écrit sous une forme matricielle :

$$\mathbf{A} \mathbf{h} = \mathbf{b} \quad (3.34)$$

où



- $\mathbf{A} = C(h^{n+1,m}) \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N} + \Delta t \mathbf{K}(h^{n+1,m})$ , la matrice tridiagonale ;
- $\mathbf{h}$ , le vecteur solution des composantes  $h_i^{n+1,m+1}$  à l'instant  $t_{n+1}$  et à l'itération de linéarisation  $m + 1$  ;
- $\mathbf{b} = -\Delta t \mathbf{B}(h^{n+1,m}) - \mathbf{M} \cdot \theta(h^{n+1,m}) + \mathbf{M} \cdot C(h^{n+1,m}) \cdot h^{n+1,m} + \mathbf{M} \cdot \theta(h^n) + \mathbf{N} h^n$ , le vecteur second membre (de composantes  $b_i$ ).

L'interprétation du système (3.34) signifie que pour chaque pas de temps  $\Delta t$ , on effectue des itérations  $m$  jusqu'à la convergence.

Au passage de l'itération  $m$  à  $m + 1$ , on va résoudre un système linéaire tridiagonal dont la matrice et le second membre dépendent des valeurs de l'itération  $m$ .

## 3.2 Résolution numérique : Solide 1D-EF

L'équation du solide 1D s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{solide} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho_s g &= 0 \\ &CL \end{cases} \quad (3.35)$$

La démarche de résolution par éléments finis de l'équation (3.35) est la même que celle nous avons effectué dans le cas de Richards 1D.

En multipliant l'équation (3.35) par  $\phi(z)$  et on intègre sur  $[a, b]$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{solide} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho_s g \right] \phi(z) dz &= 0 \\ \underbrace{\int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{solide} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \phi(z) dz}_I + \int_a^b \rho_s g \phi(z) dz &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

On applique une intégration par partie à  $I$ , on a :

$$I = \left[ K_{solide} \frac{\partial u(z)}{\partial z} \phi(z) \right]_a^b - \int_a^b K_{solide} \frac{\partial u(z)}{\partial z} \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} dz \quad (3.37)$$

En injectant (3.37) dans (3.36), nous obtenons la formulation faible suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(z) \in V \text{ tel que} \\ - \int_a^b K_{solide} \frac{\partial u(z)}{\partial z} \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} dz + \int_a^b \rho_s g \phi(z) dz + K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \phi(b) - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \phi(a) = 0, \\ \forall \phi \in V \end{cases} \quad (3.38)$$

Pour la formulation discrète, on cherche une approximation par éléments finis de la solution du problème (3.38). On définit un maillage du domaine  $\Omega = [a, b]$  grâce auquel on va définir un espace d'approximation  $V_h$ .

Le problème est donc :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h(z) \in V_h \text{ tel que} \\ - \int_a^b K_{solide} \frac{\partial u_h(z)}{\partial z} \frac{\partial \phi_h(z)}{\partial z} dz + \int_a^b \rho_s g \phi_h(z) dz + K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \phi(b) - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \phi(a) = 0, \\ \forall \phi \in V_h \end{cases} \quad (3.39)$$

On définit alors une base de  $V_h : (\varphi_1, \dots, \varphi_{n_p})$ . On pose :

$$u_h(z) = \sum_{i=1}^{n_p} \varphi_i(z) u_i \quad \text{et} \quad \phi_h(z) = \sum_{j=1}^{n_p} \varphi_j(z) \phi_j \quad (3.40)$$

où

- $\varphi_i(z)$  et  $\varphi_j(z)$ , sont les fonctions de forme associées aux noeuds  $i$  et  $j$  ;
- $u_i$ , est la valeur nodale de  $u(z)$  au noeud  $i$  ;
- $\phi_j$ , est la valeur nodale de  $\phi(z)$  au noeud  $j$ .

Trouver  $u_h$  solution du problème (3.39) revient à trouver  $u = (u_1, \dots, u_{n_p})^T$  tel que :

$$\begin{aligned} & \overbrace{- \int_a^b K_{solide} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \varphi_i(z)}{\partial z} u_i}_{A_1} \right) \left( \underbrace{\sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial z} \phi_j}_{A_2} \right) dz + \int_a^b \rho_s g \left( \underbrace{\sum_{j=1}^{n_p} \varphi_j(z) \phi_j}_{B} \right) dz}_{A} \\ & + \underbrace{K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \phi(b) - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \phi(a)}_C = 0, \quad \forall \phi(z), \forall \{\phi_1, \dots, \phi_{n_p}\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sous la forme matricielle, on a :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[ \frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2(z)}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \varphi_{n_p}(z)}{\partial z} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_p} \end{Bmatrix} \\ A_2 &= \left[ \frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2(z)}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \varphi_{n_p}(z)}{\partial z} \right] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{n_p} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A &:= \langle \phi_1, \dots, \phi_{n_p} \rangle \underbrace{\int_a^b K_{solide} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial z} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n_p}(z)}{\partial z} \end{bmatrix} \left[ \frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \varphi_{n_p}(z)}{\partial z} \right] dz}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_p} \end{Bmatrix} \\ B &:= \langle \phi_1, \dots, \phi_{n_p} \rangle \int_a^b \rho_s g \begin{Bmatrix} \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \varphi_{n_p}(z) \end{Bmatrix} dz \\ C &:= K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \phi(b) - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \phi(a) \end{aligned}$$

où

- $\varphi(a)$  correspond à  $\phi_1$  ;
- $\varphi(b)$  correspond à  $\phi_{n_p}$ .

donc,

$$C := \langle \phi_1, \dots, \phi_{n_p} \rangle \begin{bmatrix} -K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Donc, en combinant  $A$ ,  $B$  et  $C$ , l'équation (3.41) devient :

$$\langle \phi_1, \dots, \phi_{n_p} \rangle \left( -\mathbf{K} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_p} \end{Bmatrix} + \int_a^b \rho_s g \begin{Bmatrix} \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \varphi_{n_p}(z) \end{Bmatrix} dz + \begin{bmatrix} -K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.42)$$

Donc,  $\forall \langle \phi_1, \dots, \phi_{n_p} \rangle$ , on a :

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_p} \end{Bmatrix} = \int_a^b \rho_s g \begin{Bmatrix} \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \varphi_{n_p}(z) \end{Bmatrix} dz + \begin{bmatrix} -K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

On obtient un système d'équations suivant :

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{B}$$

où,

- $\mathbf{K}$ , la matrice globale rigide ;
- $\mathbf{B}$ , le vecteur globale second membre ;
- $\mathbf{u}$ , le vecteur globale déplacement inconnu.

Comme l'intervalle  $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n_e} e_k$  ;  $e_k = [z_k, z_{k+1}]$ , ainsi on a la forme générique :

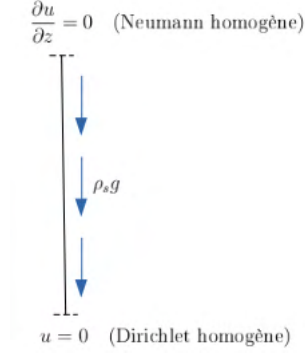
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} K_{solide} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) dz, & \text{pour tout } i, j = 1, 2 \\ \mathbf{B}_i &= \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \rho_s g \varphi_i dz + K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z}, & \text{pour tout } i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

où  $\sum_{k=1}^{n_e}$  représente l'opération assemblage.

Maintenant nous allons effectué quelques cas pour la détermination de la matrice de rigidité et du vecteur second membre élémentaire pour différentes conditions aux limites.

• **Premier test :**

Pour ce test, on va considérer une condition de Neumann homogène à la surface (effort libre) et au fond une condition de Dirichlet homogène (déplacement libre).



Pour ce cas test, on obtient la forme générique suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij}^{e_k} &= \int_{e_k} K_{solide} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) dz & i, j = 1, 2 \\ \mathbf{B}_i^{e_k} &= \int_{e_k} \rho_s g \varphi_i dz, & i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Pour l'assemblage, grâce aux fonctions de forme  $\varphi_i(z)$  et  $\varphi_{i+1}$  définies dans le cas de Richards 1D, on arrive à calculer la matrice rigide élémentaire et le vecteur second membre élément, il faut noter ici, on travaille toujours sur deux éléments. Nous obtenons :

$$\mathbf{K}^{e_k} = \frac{K_{solide}}{long} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

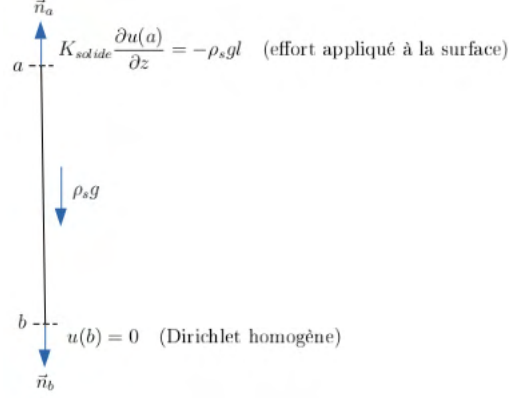
et

$$\mathbf{B}^{e_k} = \frac{\rho_s g}{2} long \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

• **Deuxième test :**

Pour ce test, on impose un effort à la surface (Neumann non homogène) et au fond pas de déplacement (Dirichlet homogène). C'est-à-dire :

$$\begin{cases} K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \vec{z} \cdot \vec{n}_a = \rho_s g l & \text{(effort imposé en } z = a) \\ u(b) = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$



où  $\vec{n}_a$  est la normale unitaire en  $a$ ,  $\vec{n}_b$  est la normale unitaire en  $b$  et  $l$  est longueur entre  $a$  et  $b$ .  
Pour ce cas tes, on voit bien le terme au bord apparaît au second membre, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij}^{e_k} &= \int_{e_k} K_{solide} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) dz, & i, j = 1, 2 \\ \mathbf{B}_i^{e_k} &= \int_{e_k} \rho_s g \varphi_i dz + \rho_s g l, & i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

On remarque le calcul de la matrice rigide élémentaire ne change pas comme dans le cas précédent, seul le second membre qui change à cause de la condition de Neumann.

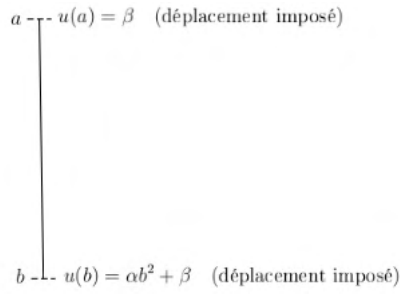
Donc le second membre s'écrit :

$$\mathbf{B}^{e_k} = \frac{\rho_s g}{2} \text{long} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho_s g l \quad (3.50)$$

• **Troisième test :**

Pour ce test, on impose le déplacement à la surface et au fond (Dirichlet non homogène), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u(a) &= \beta \\ u(b) &= \alpha l^2 + \beta \end{cases} \quad (3.51)$$



où les paramètres  $\alpha = 0.001$  et  $\beta = 0.01$ .

Ici la matrice rigide et le second membre restent les mêmes que dans le cas du premier test.

### 3.2.1 Résolution numérique : Fluide-solide 1D-EF

L'équation du couplage 1D s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{solide} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial z} + \rho_s g = 0 \\ CL \end{cases} \quad (3.52)$$

La démarche de résolution par éléments finis de l'équation (3.52) est la même que celle nous avons effectué dans les autres cas.

En multipliant l'équation (3.52) par  $\psi$  et en intégrant sur  $[a, b]$ , on obtient la formulation faible suivante :

$$(PV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_a^b K_{solide} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \left[ K_{solide} \frac{\partial u}{\partial z} \psi \right]_a^b + \int_a^b \rho_s g \psi dz - \int_a^b \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial z} \psi dz \quad \forall \psi \in V \end{cases} \quad (3.53)$$

En utilisant la méthode de Galerkin, le problème approché de (3.53) est donné par :

$$(PV_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \int_a^b K_{solide} \frac{\partial u_h}{\partial z} \frac{\partial \psi_h}{\partial z} dz = \left[ K_{solide} \frac{\partial u_h}{\partial z} \psi_h \right]_a^b + \int_a^b \rho_s g \psi_h dz - \int_a^b \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial z} \psi_h dz \quad \forall \psi_h \in V_h \end{cases} \quad (3.54)$$

Le problème variationnelle approché  $(PV_h)$  se réécrit sous la forme d'un système non linéaire. effet, notons  $u_h \in \mathbb{R}$ ,  $j, \dots, n_p$  les coordonnées de  $u_h$  dans la base des  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n_p}$ .

Sur chaque  $e_k$ , en décomposant la solution approchée  $u_h$  sur cette base sous la forme, on a :

$$u_h(z) = \sum_{j=1}^2 \varphi_j(z) u_j \quad (3.55)$$

Après avoir appliqué la méthode de Galerkin (c'est-à-dire  $\psi_h = \varphi_i$ ), on se permet d'écrire la formulation discrète du problème (3.54) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 u_j \int_{e_k} K_{solide} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) dz &= K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \varphi(b) - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \varphi(a) + \int_{e_k} \rho_s g \varphi_i dz \\ &\quad - \int_{e_k} \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial z} \varphi_i dz, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.56)$$

On obtient la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{K}^{e_k} \mathbf{u}^{e_k} = \mathbf{B}^{e_k} \quad (3.57)$$

où,

- $\mathbf{K}^{e_k}$ , est la matrice de rigidité élémentaire ;
- $\mathbf{B}^{e_k}$ , est le vecteur second membre élémentaire englobant toutes les contributions (terme source, conditions aux limites ...)
- $\mathbf{u}^{e_k}$ , est le vecteur élémentaire des composantes inconnues  $u_1(z), u_2(z)$ .

avec,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{ij}^{e_k} &= \int_{e_k} \overline{K(h)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz, \quad \text{pour tout } i, j = 1, 2 \\ \mathbf{B}_i^{e_k} &= \int_{e_k} \rho_s g \varphi_i dz - \int_{e_k} \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial z} \varphi_i dz + K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \varphi_i(b) - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \varphi_i(a), \quad \text{pour tout } i = 1, 2\end{aligned}\tag{3.58}$$

Comme dans les paragraphes précédents, après l'opération des matrices élémentaires et des vecteur élémentaires, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} K_{solide} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) u_j dz = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \left( \rho_s g \varphi_i dz - \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial z} \varphi_i \right) dz + K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \varphi_i(b) - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \varphi_i(a)\tag{3.59}$$

pour tout  $i, j = 1, 2$

Sous la forme matricielle on a :

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{B}\tag{3.60}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n_e} \int_{e_k} \overline{K(h)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz, \quad \text{pour tout } i, j = 1, 2 \\ \mathbf{B}_i &= \sum_{k=1}^{n_e} \left( \int_{e_k} \rho_s g \varphi_i dz - \int_{e_k} \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial z} \varphi_i dz \right) + K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \varphi_i(b) - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \varphi_i(a)\end{aligned}$$

pour tout  $i = 1, 2$

La matrice globale de rigidité  $\mathbf{K}$  est la même que celle déterminé dans la section (3.1.2), donc il nous reste à déterminer le vecteur second membre élémentaire  $\mathbf{B}^{e_k}$ .

D'après la relation (3.58), le calcul de  $\mathbf{B}_i^{e_k}$  fait intervenir deux types d'intégrales. On décompose alors  $\mathbf{b}$  en deux vecteurs :

$$\mathbf{B}_i^{e_k} = \mathbf{p}_i^{e_k} - \mathbf{q}_i^{e_k} + \text{terme aux bords}\tag{3.61}$$

avec

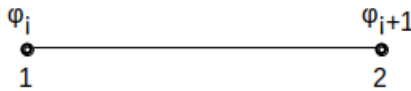
$$\mathbf{p}_i^{e_k} = \int_{e_k} \rho_s g \varphi_i dz \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_i^{e_k} = \int_{e_k} \rho_f g \frac{\partial h_w}{\partial z} \varphi_i dz \quad \text{pour tout } i = 1, 2$$

Pour calculer ces intégrales on décompose l'intégrale sur le domaine  $[a, b]$  en somme d'intégrales élémentaires sur chaque élément  $[z_i, z_{i+1}]$ .

$$\mathbf{p}_i^{e_k} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho_s g \varphi_i dz, \quad \mathbf{q}_i^{e_k} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho_f g \frac{\partial h_w}{\partial z} \varphi_i dz, \quad i = 1, 2\tag{3.62}$$

- **Calcul des vecteurs  $\mathbf{p}_i^{e_k}$  et  $\mathbf{q}_i^{e_k}$**

Il faut noter, on travaille localement sur deux éléments c'est-à-dire :



donc,

$$h_w = \sum_{i=1}^2 h_i^w \varphi_i = h_1^w \varphi_i + h_2^w \varphi_{i+1}$$

on a,

$$\frac{\partial h_w}{\partial z} = h_1^w \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} + h_2^w \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial z} \quad (3.63)$$

En remplaçant l'équation (3.63) dans  $\mathbf{q}_i$  de l'équation (3.62), et pour chaque élément le vecteur  $\mathbf{q}$  s'écrit :

$$\mathbf{q}^{e_k} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \rho_f g \left[ \int_{z_i}^{z_{i+1}} h_1^w \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \varphi_i dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} h_2^w \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial z} \varphi_i dz \right] \quad (\text{obtenu à partir de l'élément 1}) \\ \mathbf{q}_2 &= \rho_f g \left[ \int_{z_i}^{z_{i+1}} h_1^w \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \varphi_{i+1} dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} h_2^w \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial z} \varphi_{i+1} dz \right] \quad (\text{obtenu à partir de l'élément 2}) \end{aligned}$$

Après avoir effectuer quelques calculs sur les intégrales, finalement on obtient :

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \frac{g \rho_f}{2} (h_2^w - h_1^w) \quad (3.65)$$

De même pour le vecteur  $\mathbf{p}$ , on a :

$$\mathbf{p}^{e_k} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \rho_s g \int_{z_i}^{z_{i+1}} \varphi_i dz, \quad (\text{obtenu à partir de l'élément 1}) \\ \mathbf{p}_2 &= \rho_s g \int_{z_i}^{z_{i+1}} \varphi_{i+1} dz, \quad (\text{obtenu à partir de l'élément 2}) \end{aligned}$$

Une fois effectué des calculs sur les intégrales, on obtient :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \frac{g \rho_s}{2} long \quad (3.67)$$

avec  $long = z_{i+1} - z_i$

En combinant les équations (3.65) et (3.67), la relation (3.61) devient :

$$\mathbf{B}^{e_k} = \frac{g \rho_s}{2} long \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{g \rho_f}{2} \begin{pmatrix} h_2^w - h_1^w \\ h_2^w - h_1^w \end{pmatrix} + K_{solide} \frac{\partial u(b)}{\partial z} \varphi_i(b) - K_{solide} \frac{\partial u(a)}{\partial z} \varphi_i(a) \quad (3.68)$$

L'équation (3.68) représente le vecteur élémentaire (pour deux éléments) second membre du couplage fluide-solide. On remarque bien dans cette équation on a la présence de  $h_1^w$  et  $h_2^w$  qui représentent les vecteurs solutions de Richards.



### 3.3 Erreur relative

L'erreur relative est un concept mathématique important utilisé pour évaluer la précision d'une mesure, d'une approximation ou d'un calcul par rapport à une valeur de référence ou à une grandeur attendue. Elle permet de quantifier la différence entre une valeur obtenue et la valeur réelle, et elle est souvent exprimée en pourcentage.

Comme nous savons toute méthode itérative nécessite un test d'arrêt afin de limiter l'écart entre deux itérations successives par une tolérance que nous notons  $tol$ .

$$\frac{\|h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}\|}{\|h^{n+1,m+1}\|} \leq tol \quad (3.69)$$

Ce critère de convergence est bien adapté au schéma de Picard d'une part car la pression capillaire constitue la base de Picard et d'autre part car il permet d'éviter des itérations inutiles et ainsi de diminuer les temps de calcul quand une partie du domaine d'étude est fortement désaturée. En générale la méthode de linéarisation de Picard converge en un nombre d'itération inférieur à 10.

Pour cette résolution, nous avons choisi l'algorithme de THOMAS qui est une méthode directe considérée comme une variante de la méthode d'élimination de Gauss représenté par :

---

**Algorithm 1** Algorithmes de résolution

---

```

10       $t = (n + 1)\Delta t$ 
         $m = 0$       initialisation
         $h^{n+1,0} = h^n$ 
         $\theta^{n+1,0} = \theta(h^{n+1,0})$ 
         $K^{n+1,0} = K(h^{n+1,0})$ 
         $C^{n+1,0} = C(h^{n+1,0})$ 
        Calcul des termes du système  $C_{ij}$ ,  $\mathbf{M}_{ij}$ ,  $\mathbf{N}_{ij}$ ,  $\mathbf{K}_{ij}$  et  $\mathbf{b}_i$ 
30      Résolution du système (3.34) :  $\mathbf{A}\mathbf{h}^{n+1,m+1} = \mathbf{b}$ 
        si  $\|\mathbf{h}^{n+1,m+1} - \mathbf{h}^{n+1,m}\| < tol$       aller à 20
        sinon faire :
             $m \leftarrow m + 1$ 
             $h^{n+1,m} \leftarrow h^{n+1,m+1}$ 
             $\theta^{n+1,m} \leftarrow \theta(h^{n+1,m+1})$ 
             $K^{n+1,m} \leftarrow K(h^{n+1,m+1})$ 
             $C^{n+1,m} \leftarrow C(h^{n+1,m+1})$ 
            aller 30
20       $h^{n+1} = h^{n+1,m+1}$ 
         $\theta^{m+1} = \theta(h^{n+1,m+1})$ 
         $K^{n+1} = K(h^{n+1,m+1})$ 
         $C^{n+1,m} = C(h^{n+1,m+1})$ 
         $h^n = h^{n+1}$ 
         $n \leftarrow n + 1$       et aller à 10

```

---

Nous apportons une précision supplémentaire à cet algorithme pour le terme  $tol$  qui doit être pris de façon à converger relativement rapidement, mais également à ne pas perdre en précision. Dans le cadre de ce projet, nous prenons  $tol = 10^{-8}$ .

# 4

## Résultats

Dans ce chapitre, des résultats numériques en une dimensions sont présentés notamment les résultats de Richards en formulation  $h$  et mixte, du solide et du problème couplé (fluide-solide). La méthode de linéarisation considérée est la méthode de Picard. Nous nous concentrons sur la convergence et le temps de calcul.

Grâce à ces programmes, nous avons pu obtenir des simulations numériques que nous allons représenté en différents cas tests pour valider nos codes.

### 4.1 Résultats numériques de Richards et solide 1D

#### 4.1.1 Résultats numériques de Richards 1D

##### Test 1 : Formulation en $h$

Dans ce cas-test, on s'intéresse de l'équation de Richards exprimée dans formulation en fonction de la hauteur d'eau  $h$ . La capacité d'humidité  $C$  et la conductivité hydraulique  $K$  sont définis selon le modèle de Van Genuchten introduit dans le deuxième chapitre.

On travaille sur un domaine de 100 points et pour une profondeur de 0.6  $m$ . La condition initiale est  $h(z, 0) = h_{init} = -10$   $m$  et les conditions limites de type Dirichlet sont  $h(0, t) = h_{top} = -0.75$   $m$  et  $h(0.6, t) = h_{bot} = -10$   $m$ . On considère que l'infiltration se produit sur une période de 3600, 10800 et 18000 secondes avec un pas de temps  $\Delta t = 10s$ . Nous avons utilisé la méthode des EF et l'algorithme de THOMAS à été adopter pour résoudre le système tri-diagonal issu de la linéarisation.

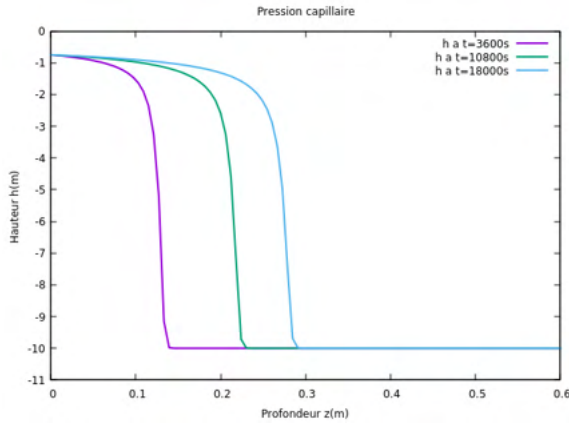
Les différents paramètres physiques considérés pour deux types de sols choisis sont donnés dans le tableau (4.1) :

Sols	Paramètres
Argile	$K_s = 1.51E - 06$ $m/s$ , $\theta_{sat} = 0.4686$ , $\theta_{res} = 0.106$ , $\alpha = 3.104m^{-1}$ , $n = 2$
Sable	$K_s = 9.22E - 05$ $m/s$ , $\theta_{sat} = 0.368$ , $\theta_{res} = 0.102$ , $\alpha = 3.35$ $m^{-1}$ , $n = 2$

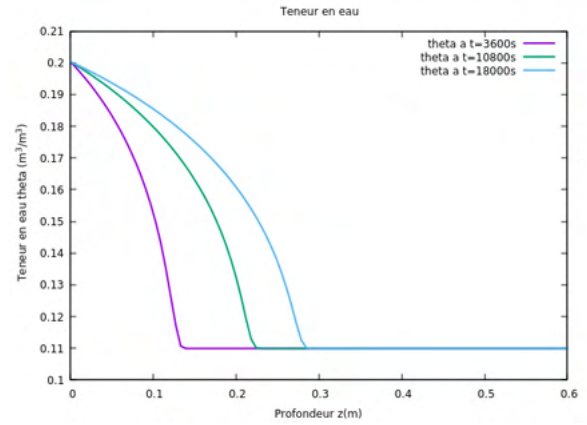
TABLE 4.1 – Quelques matériaux et leurs paramètres.

Les résultats que nous présentons sont tirés de l'article (*Shoshtari and Arash Adib*, 2011) pour  $t = 3600$  s,  $t = 10800$  s et  $t = 18000$  s, sauf l'article traite que le cas d'un sol de type sable, nous ajoutons un autre type de sol qui n'est que l'argile. Les paramètres physiques du sol sont celui de Van Genuchten. Le but ici ce de ne pas de comparer nos résultats avec celui de l'article, mais c'est d'observer le comportement de la solution et pour voir l'évolution de l'infiltration selon le type de sol. Il faut noter que l'enchaînement des figures représentées ici correspond à l'écoulement du temps (en seconde).

- Sable

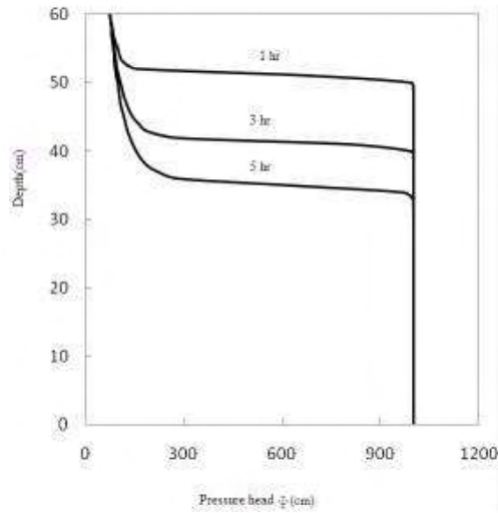


(a) Hauteur d'eau  $h$

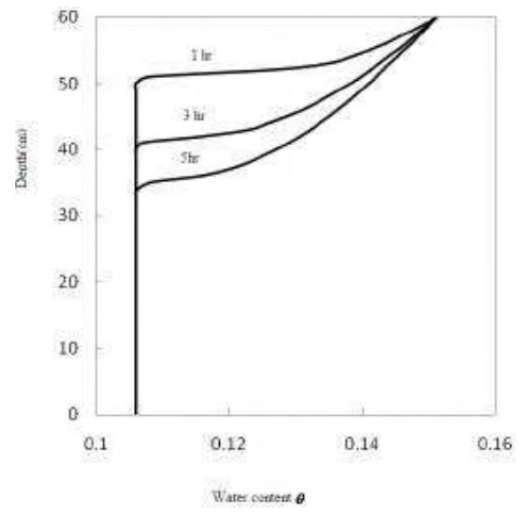


(b) Teneur en eau  $\theta(h)$

FIGURE 4.1 – Résultat obtenu par la méthode des éléments finis, avec  $K_s = 9.22E - 05 \text{ m/s}$ ,  $\theta_{sat} = 0.368$ ,  $\theta_{res} = 0.102$ ,  $\alpha = 3.35 \text{ m}^{-1}$ ,  $n = 2$  à l'instant  $t = 3600s$ ,  $t = 10800s$  et  $t = 18000s$  [1]



(a) Hauteur d'eau  $h$



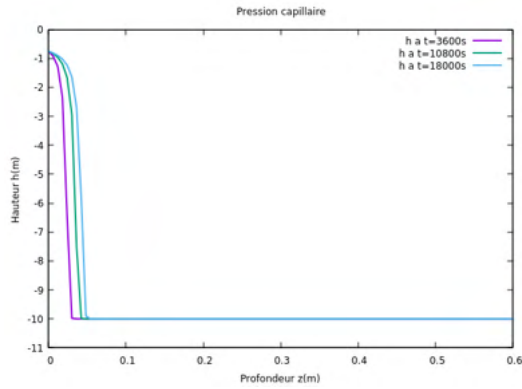
(b) Teneur en eau  $\theta$

FIGURE 4.2 – Présentation des résultats des simulation à l'instant  $t = 1h$ ,  $3h$  et  $5h$  obtenu par Mohammad Mahmoodian Shoshtari and Arash Adib, 2011, en utilisant la méthode des volumes finis.

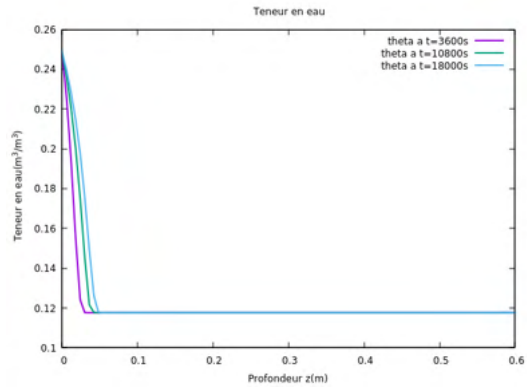
Pour la modélisation numérique, le domaine d'écoulement est  $0.6m$ . Le potentiel de pression  $h$  et la teneur en eau  $\theta$  pour un sol sableux est utilisé. Finalement, les résultats obtenus dans l'article et ceux obtenus à l'aide de la simulation numérique par la méthode des éléments finis sont présentés par les figures (4.1) et (4.2).

Nous avons observé qu'elle confirme bien la variation linéaire du potentiel de pression avec des valeurs négatives en zone non saturée laquelle correspond à la position du front de saturation (voir figure 4.1).

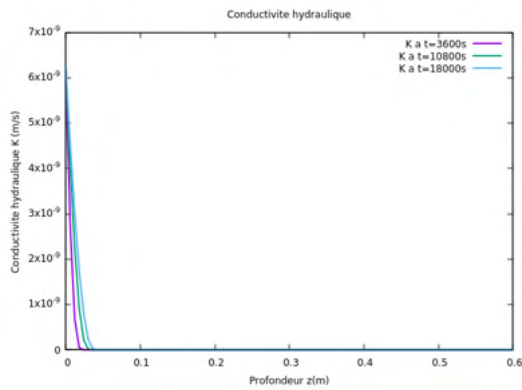
- Argile



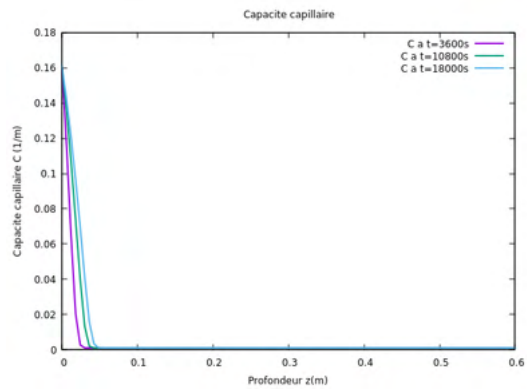
(a) Hauteur d'eau  $h$



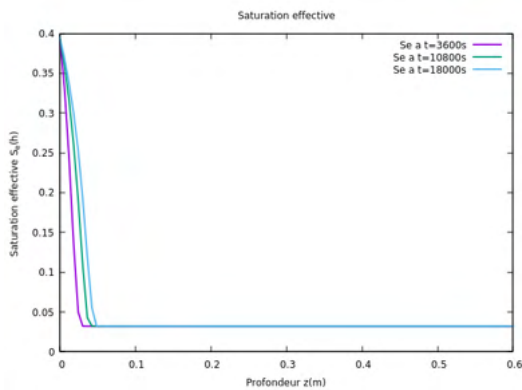
(b) Teneur en eau  $\theta(h)$



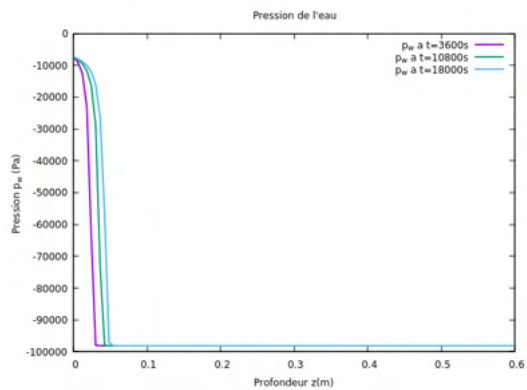
(c) Cond. hydraulique  $K(h)$



(d) Capacité capillaire  $C(h)$



(e) Saturation effective  $S_e(h)$



(f) Pression d'eau  $p_w$

FIGURE 4.3 – Évolution au cours de l'infiltration à 0.6 cm de profondeur

En observant les figures (4.1), (4.2) et (4.3), elles présentent les solutions obtenues par le modèle numérique 1D par la méthode des éléments finis au cours du temps. Nous remarquons que le modèle simule bien le mouvement d'infiltration du potentiel de pression capillaire (hauteur d'eau). Pour les figure (4.1) et (4.3), nous remarquons aussi que le modèle respecte les conditions aux limites imposées à la surface et au fond de la colonne durant toute la période de la simulation. Nous observons également sur les figures (4.1) et (4.3) que le profil du potentiel de pression capillaire n'est pas le même. Cette différence est due le fait que dans sur figure (4.1)) l'infiltration ce fait de façon plus rapide car le sable est plus léger que l'argile. C'est pour la simple raison en voit du coté de l'argile la propagation au cours du temps est très long.

## Test 2 : Formulation en $\theta - h$

Dans ce cas test, on s'intéresse à l'équation de Richards mixte. La teneur en eau et la conductivité hydraulique sont données par le modèle de Van Genuchten pour le sable et l'argile.

### • Cas-test 1

Nous représentons ici les résultats pour un maillage de 100 points, nous prenons les mêmes données du cas précédent (formulation en  $h$ ). Pour vérifier le calcul précédent, dans l'équation mixte (3.22) nous allons tout d'abord ne pas tenir compte de la capacité de stockage spécifique et du terme source (c'est-à-dire  $S_s = 0$  et  $f = 0$ ). Dans ce cas nous obtenons la même solution que celle de l'équation de Richards linéaire (formulation en  $h$ ).

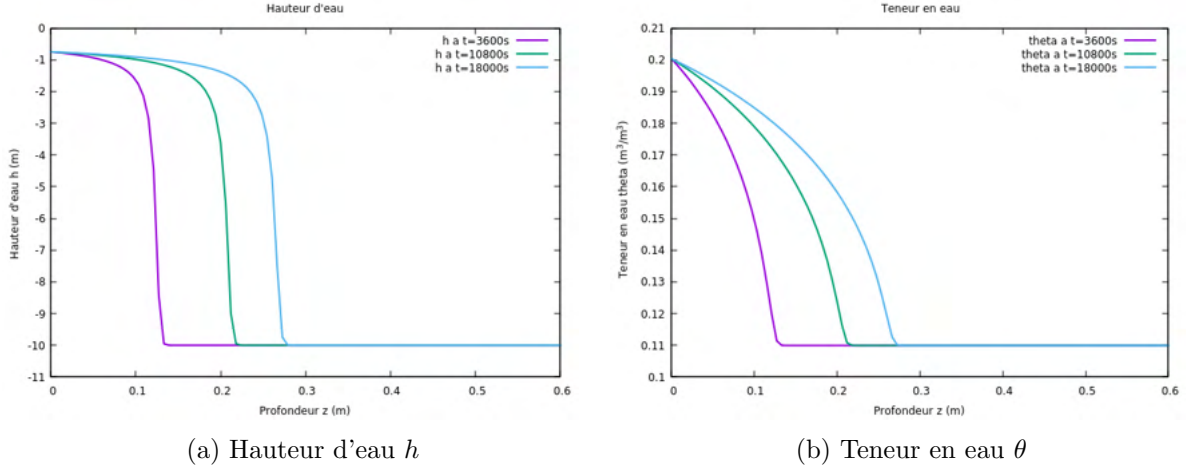


FIGURE 4.4 – Cas sable :  $K_s = 9.22E - 05$  m/s,  $\theta_{sat} = 0.368$ ,  $\theta_{res} = 0.102$ ,  $\alpha = 3.35$  m $^{-1}$ ,  $n = 2$  pour  $t=3600$  s,  $t=10800$  s et  $t=18000$  s avec  $\Delta t = 10s$

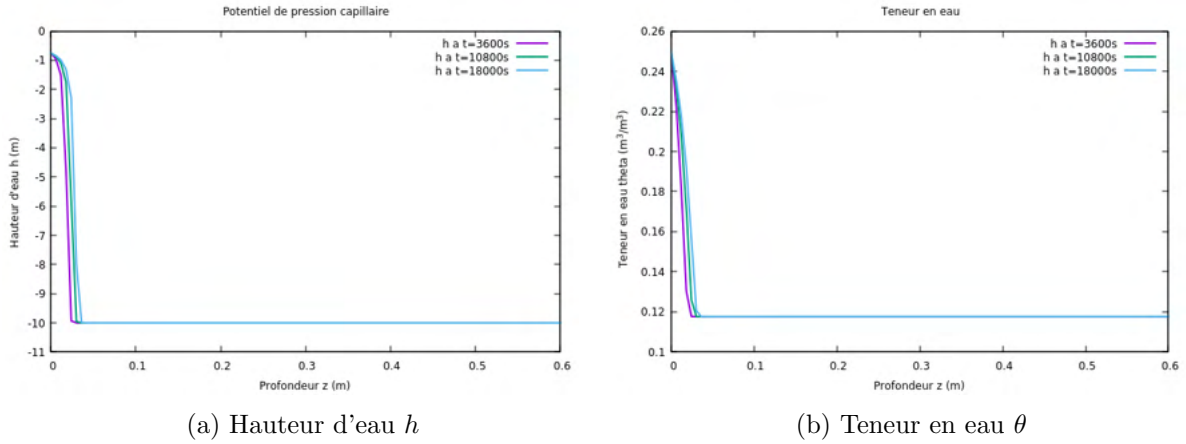


FIGURE 4.5 – Cas argile :  $K_s = 1.51E - 06$  m/s,  $\theta_{sat} = 0.4686$ ,  $\theta_{res} = 0.106$ ,  $\alpha = 3.104$  m $^{-1}$ ,  $n = 2$  pour  $t=3600$  s,  $t=10800$  s et  $t=18000$  s avec  $\Delta t = 10s$

- **Cas-test 2**

On présente ici les résultats pour  $f = 0$  et pour différentes valeurs de  $S_s$ . Il faut noter que ce test est réalisé dans le cas du sable.

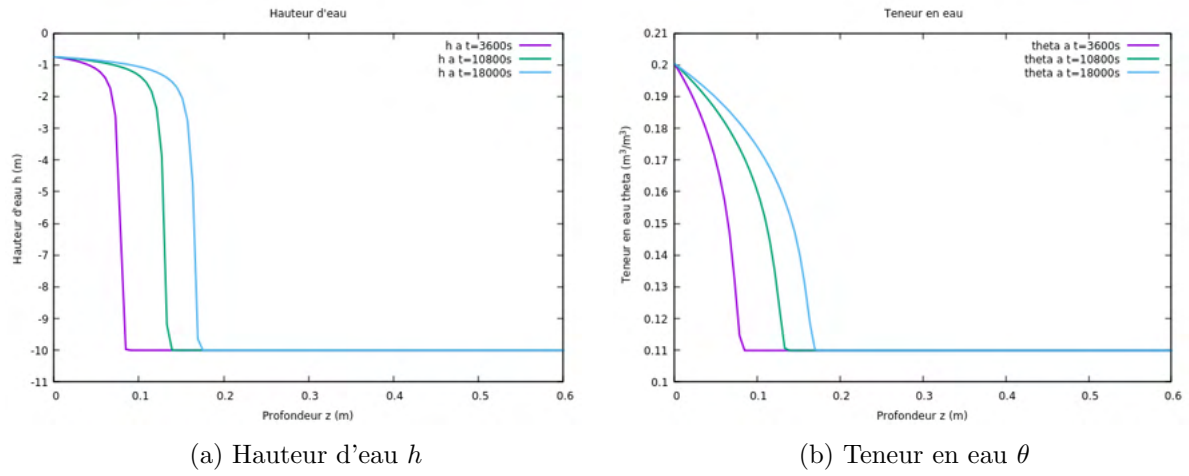


FIGURE 4.6 – Représentation de  $h$  et  $\theta$  pour  $\Delta t = 10s$  et  $S_s = 0.05 m^{-1}$

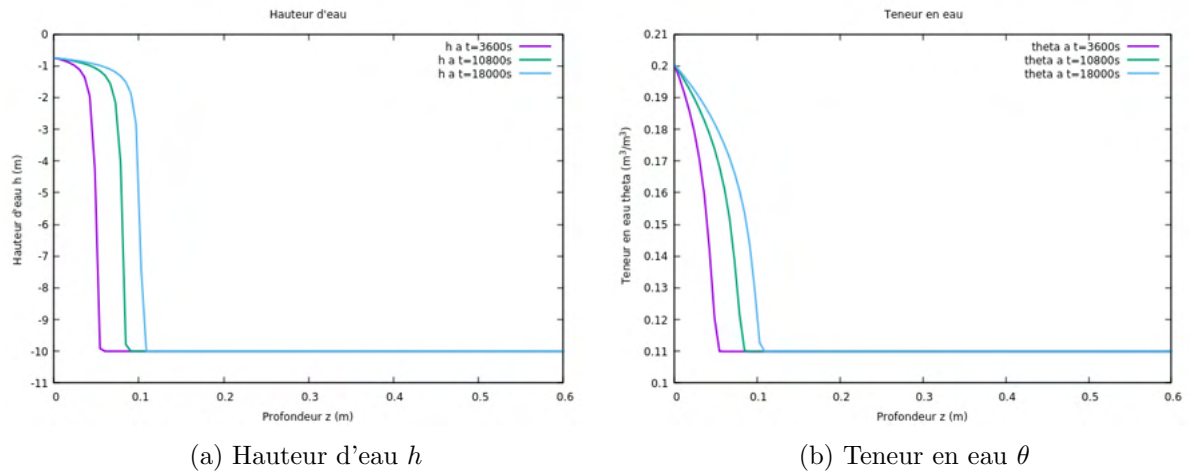
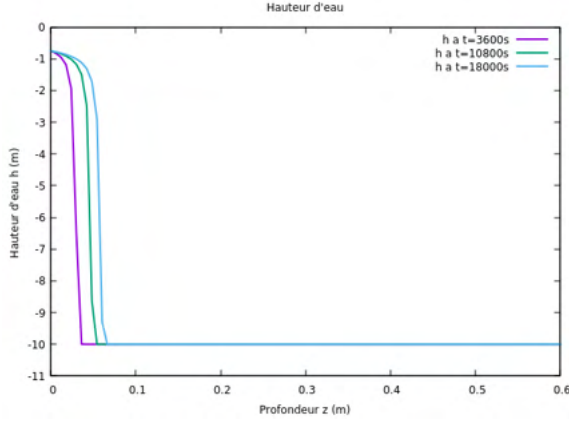
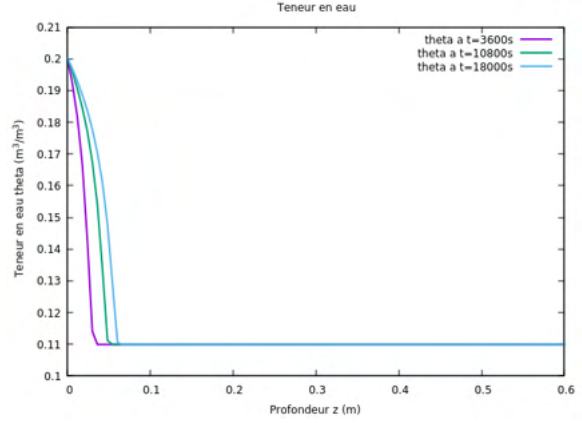


FIGURE 4.7 – Représentation de  $h$  et  $\theta$  pour  $\Delta t = 10s$  et  $S_s = 0.2 m^{-1}$

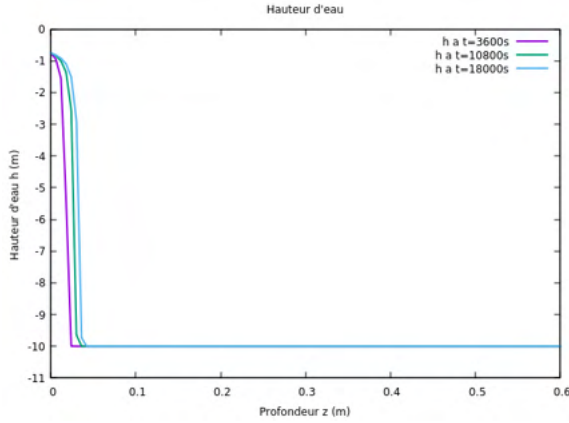


(a) Hauteur d'eau  $h$

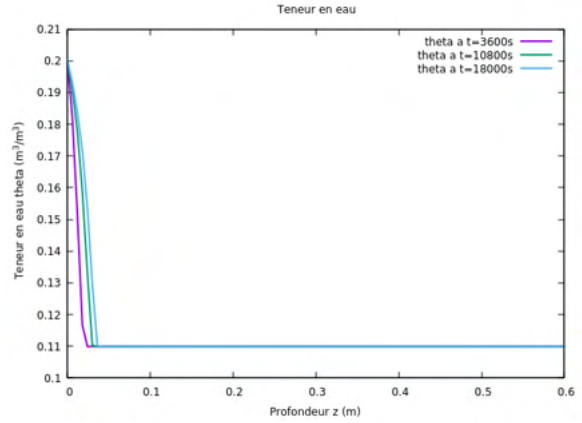


(b) Teneur en eau  $\theta$

FIGURE 4.8 – Représentation de  $h$  et  $\theta$  pour  $\Delta t = 10s$  et  $S_s = 0.8 m^{-1}$



(a) Hauteur d'eau  $h$



(b) Teneur en eau  $\theta$

FIGURE 4.9 – Représentation de  $h$  et  $\theta$  pour  $\Delta t = 10s$  et  $S_s = 3.2 m^{-1}$

Pour le terme source  $f$  et la capacité de stockage spécifique étant nul, on remarque sur la figure (4.5) que les courbes de potentiel de pression capillaire et de la teneur en eau gardent la même allure au cours du temps. Ce pendant on note que le taux d'infiltration n'est plus le même dans le cas ou la capacité de stockage spécifique est non nulle. Nous constatons l'effet du capacité de stockage spécifique qui agit sur le sol. Cette capacité de stockage spécifique joue un rôle capital dans l'infiltration de l'eau. On remarque pour  $S_s = 0.05 m^{-1}$  l'infiltration se fait plus rapide et on se trouve quasiment dans cas du test 1 lorsque  $S_s = 0$ , cependant lorsque la capacité de stockage spécifique prend des valeurs plus grandes nous constatons que le taux d'infiltration est très lent et n'est plus le même dans tout le domaine et diffère selon les différentes valeurs de  $S_s$ .

On observe aussi concernant les résultats de la teneur en eau (voir figures (4.5b) et (4.6b)) montrent que le sol se sature au cours du temps. On voit bien le comportement de la hauteur  $h$  d'eau qui suit l'évolution de la teneur en eau  $\theta$ , ce qui affirme la liaison entre les deux variables ( $\theta$  et  $h$ ).

### 4.1.2 Validation du modèle Richards 1D (formulation en $h$ )

Pour tester le code éléments finis 1D (1D-EF) développé dans le cadre de cette étude nous avons construit une solution analytique pour un sol donné :

$$h_{ex}(z, t) = \alpha t(z - a)(z - b), \quad (z, t) \in [0, 4] \times [0, T] \quad (4.1)$$

En effet, cette équation sera utilisée pour calculer le terme source adéquats pour l'équation de Richards. Enfin on impose à la fonction  $h_{ex}$  de vérifier l'équation de Richards pour aboutir alors à l'expression d'un terme source  $f$ . Si l'on considère la formulation  $h$  de l'équation de Richards alors la fonction  $h_{ex}$  est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C(h) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(h)}{\partial z} & = & f \quad \text{dans } \Omega = [a, b] \\ h(z, 0) & = & h_{init}(z) \\ h(0, t) & = & h_{top}(t) \\ h(z, t) & = & h_{bot}(t) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

En pratique, si on fournit au modèle la fonction  $f$ ,  $K(h)$ ,  $C(h)$  et  $h_{ex}$  sur le bord  $\partial\Omega$ , alors le modèle 1D-EF doit fournir la solution  $h = h_{ex}$ . Il convient de noter la validation du code en comparaison avec une solution analytique permet d'analyser le comportement du code de calcul développé. On cite par exemple l'analyse de l'erreur, de la convergence et notamment l'ordre de la précision qui est généralement différent de l'ordre théorique.

La condition initiale est choisie constante, et on impose une condition de Dirichlet à la surface et au fond de la colonne.

Pour ce problème, on se donne un sol de conductivité hydraulique et de capacité d'humidité :

$$K(h) = \beta \quad \text{et} \quad C(h) = \gamma \quad (4.3)$$

avec les paramètres s'expriment de la manière suivante :

$$\alpha = 10^{-5} m^{-1}, \quad \beta = 1.2 \times 10^{-5} \quad \text{et} \quad \gamma = 10^{-2}$$

On veut fabriquer le terme source à partir de ces données.

### Calcul du terme source $f$

En effectuant les calculs des dérivées on obtient :

$$\frac{\partial h_{ex}}{\partial t} = \alpha(z - a)(z - b) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 h_{ex}}{\partial z^2} = 2\alpha t \quad (4.5)$$

En injectant les équations (4.3), (4.4) et (4.6) dans l'équation de Richards (4.2), nous obtenons finalement le terme source  $f$  :

$$f(z, t) = \alpha\gamma(z - a)(z - b) - 2\alpha\beta t \quad (4.6)$$

Le test à réaliser consiste à vérifier si on fournit au modèle développé la fonction  $f$ ,  $K(h)$ ,  $C(h)$  et  $h_{ex}$  alors le modèle 1D-EF est-il capable de fournir numériquement la solution  $h = h_{ex}$  ?

### Conditions aux limites

Pour cela, on calcul  $h_{ex}(a, t) = h_{top}$  et  $h_{ex}(b, t) = h_{bot}$ , avec  $a = 0$  et  $b = 4$ . donc,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h_{ex}(a, t) & = & h_{top} = 0 \\ h_{ex}(b, t) & = & h_{bot} = 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$



Pour la validation, Le domaine étudié est  $\Omega = [0, 4]$ , il s'agit d'une colonne verticale de longueur 4  $m$  contenant un sol de caractéristiques prédéfinies. Les deux extrémités de la colonne sont reliées à l'air libre et le temps final de simulation est  $T = 14400$  secondes avec un pas de temps  $\Delta t = 10$   $s$ . La solution initiale est  $h_{init} = 0$  et les conditions aux limites de type Dirichlet sont données par l'équation (4.7).

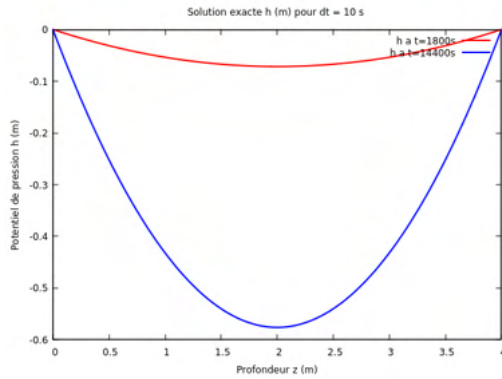


FIGURE 4.10 – La solution exacte de la hauteur d'eau  $h$  à l'instant  $t = 1800$   $s$  (en rouge) et  $t = 14400$   $s$  (en bleu)

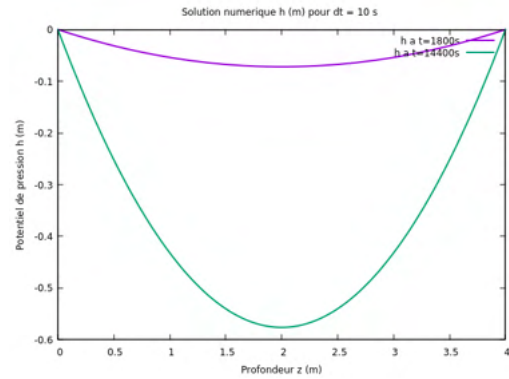


FIGURE 4.11 – La solution numérique de la hauteur d'eau  $h$  à l'instant  $t = 1800$   $s$  (en violet) et  $t = 14400$   $s$  (en vert)

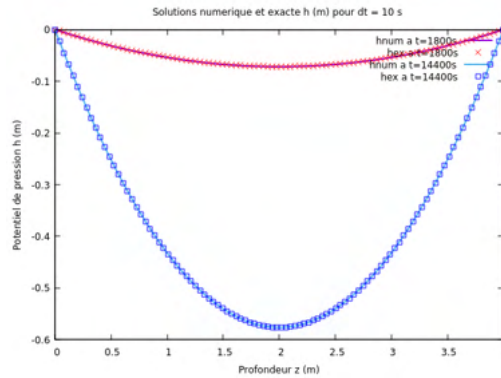


FIGURE 4.12 – La solution exacte (en rouge et bleu) et la solution numérique (en violet et vert) à l'instant  $t = 1800s$  et  $t = 14400s$  pour  $\Delta t = 10$   $s$

Nous observons sur le figure (4.12) qu'il y a une bonne convergence de la méthode, car la solution numérique calculée par le code 1D méthode des éléments finis est assez proche de la solution exacte. Nous remarquons aussi que le modèle respecte bien les conditions de Dirichlet qui ont été fixées à l'extrémité de la colonne du domaine.

### 4.1.3 Validation Richards 1D en formulation mixte

L'équation de Richards étant fortement non linéaire en milieu non saturé, il existe peu de solution analytique permettant de tester la validité du schéma itératif. Cependant dans cette section nous prenons une solution analytique comme nous l'avions dans les autres cas. Cette solution analytique permet de vérifier la mise en oeuvre des algorithmes de base avant de tester la modèle sur des cas plus réalistes. On rappelle l'équation de Richards non linéaire suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\theta}{\phi} S_s \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(h)}{\partial z} = f \quad (4.8)$$

$$\text{où } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \text{ avec } C(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}$$

l'équation(3.69) devient :

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\theta}{\phi} S_s \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(h)}{\partial z} = f \quad (4.9)$$

On cherche à déterminer le terme source  $f$ . Pour cela, nous allons gardé les mêmes conditions aux limites, ainsi que la solution analytique que celui dans le cas de la validation de Richards 1D linéaire.

Pour valider notre code dans ce cas, on se donne les caractéristiques du sol suivante :

- la teneur en eau :  $\theta(h) = h^2$  ;
- la conductivité hydraulique :  $K(h) = \sqrt{h^2 + 1}$  ;
- la capacité capillaire (d'humidité) :  $C(h) = 2h$

Maintenant, il reste à déterminer le terme source  $f$ . Nous calculons les termes de l'équation (4.9) et les remplacés par la suite afin d'obtenir  $f$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \alpha(z-a)(z-b) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} (K(h)) \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + K(h) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \\ \text{avec } \frac{\partial}{\partial z} (K(h)) &= \frac{\partial K}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 2\alpha t \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{2\alpha t h}{\sqrt{h^2 + 1}} + 2\alpha t \sqrt{h^2 + 1}$$

et

$$\frac{\partial K(h)}{\partial z} = \frac{\partial K(h)}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\alpha t h (2z - a - b)}{\sqrt{h^2 + 1}}$$

En remplaçant tous les termes dans l'équation (4.9), finalement nous obtenons le terme source  $f$  suivant :

$$f(z, t) = 2\alpha h(z-a)(z-b) + \frac{\alpha h^2 S_s}{\phi} (z-a)(z-b) - \left( \frac{2\alpha t h}{\sqrt{h^2 + 1}} + 2\alpha t \sqrt{h^2 + 1} \right) - \frac{\alpha t h (2z - a - b)}{\sqrt{h^2 + 1}} \quad (4.10)$$

pour le terme de capacité de stockage  $S_s = 0$ . on a :

$$f(z, t) = 2\alpha h(z - a)(z - b) - \left( \frac{2\alpha h}{\sqrt{h^2 + 1}} + 2\alpha t \sqrt{h^2 + 1} \right) - \frac{\alpha h(2z - a - b)}{\sqrt{h^2 + 1}} \quad (4.11)$$

Dans la pratique ce terme source sera dans le second membre et le  $h$  ici représente la fonction analytique donnée.

A présent, nous représentons le résultat obtenu lors du test de validation de notre code.

Paramètres	Type de sol
Caractéristique du sol	quelconque
$\theta(h)$	$h^2$
$\alpha[m^{-1}]$	$10^{-5}$
$C(h)$	$2h$
$K(h)$	$\sqrt{h^2 + 1}$
$S_s[m^{-1}]$	0

TABLE 4.2 – Paramètres utilisés pour valider le modèle dans le cas analytique pour  $n = 100$ .

Paramètres	Valeurs
Longueur de la colonne	$4m$ (en position verticale)
Condition initiale	$h_{init} = 0$
Condition à la limite supérieure	$h_{top} = 0$
Condition à la limite inférieur	$h_{bot} = 0$
Durée de simulation	$14400s$
Pas de temps	$\Delta t = 10s$

TABLE 4.3 – Conditions utilisées pour valider le modèle.

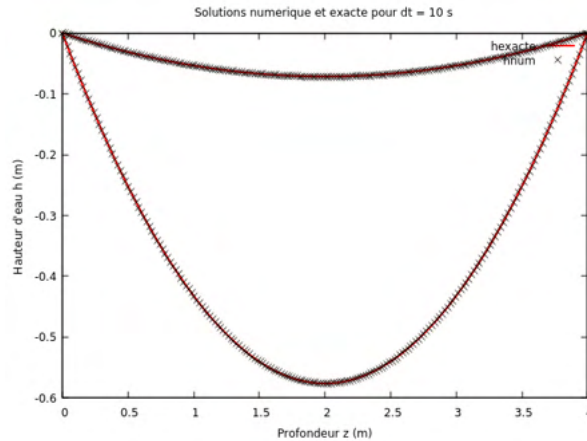


FIGURE 4.13 – Représentation de la solution exacte (en rouge) et la solution numérique (en noir) à l'instant  $t = 1800s$  et  $14400s$ .

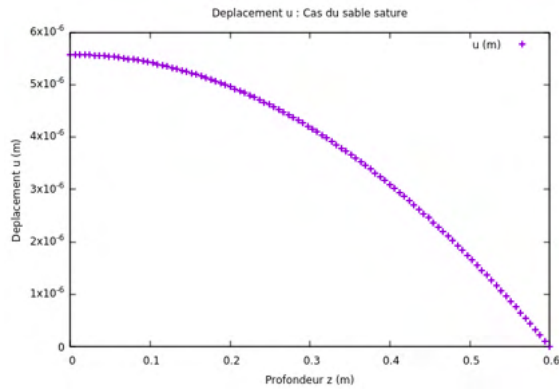
#### 4.1.4 Résultats numériques du solide 1D

Dans cette section, on s'intéresse de l'équation (3.35) et aux calculs effectués dans la sous-section (3.2.2). On considère une profondeur de  $0.6\text{ m}$ , d'axe  $z$  positive vers le bas. On veut simuler le déplacement du solide selon deux types de sols (sable et argile). Pour ce faire on se donne les conditions aux limites suivantes :

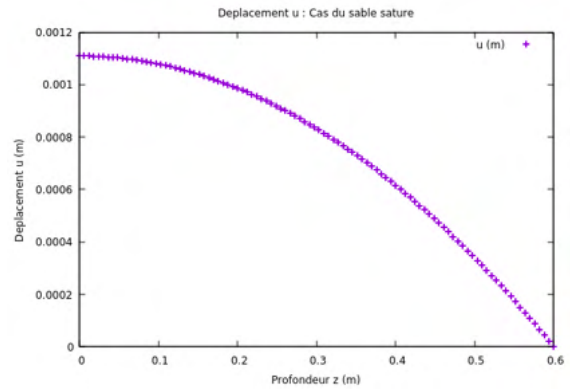
1. Les deux extrémités sont considérées libres (pas déplacement, ni effort imposé) ;
2. Effort imposé à la surface et libre au fond ;
3. Déplacements sont imposés sur les deux extrémités.

Nous obtenons les résultats suivants :

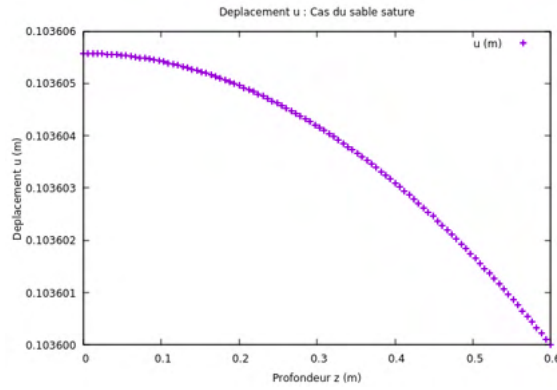
- **Test 1 : Sable**



(a) Effort libre à la surface et sans déplacement au fond



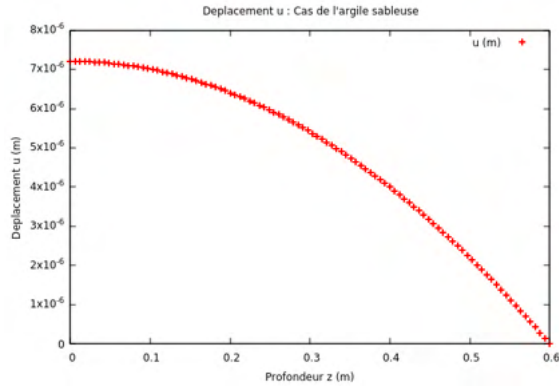
(b) Effort appliqué à la surface et sans déplacement au fond



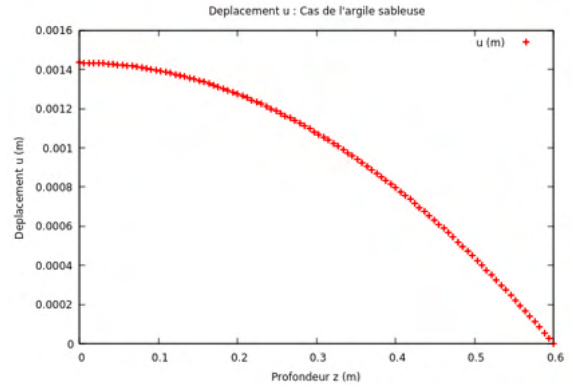
(c) Déplacement appliqué à la surface et au fond

FIGURE 4.14 – Représentation du déplacement de solide  $u$  dans le cas d'un sable saturé avec  $K_{solide} = 6.333 \times 10^8 \text{ Pa}$  et  $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$ .

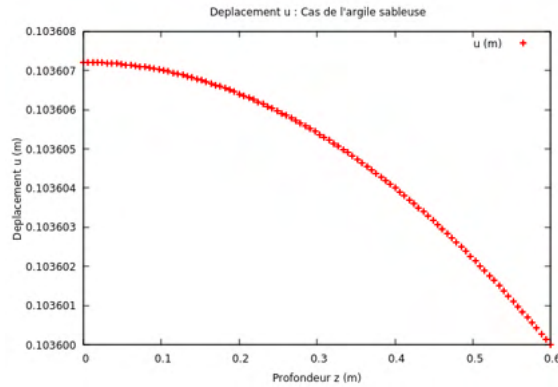
- Test 2 : Argile



(a) Effort libre à la surface et sans déplacement au fond



(b) Effort appliqué à la surface et sans déplacement au fond



(c) Déplacement appliqué à la surface et au fond

FIGURE 4.15 – Représentation du déplacement de solide  $u$  dans le cas de l'argile sableuse avec  $K_{solide} = 4.166 \times 10^8 Pa$  et  $\rho_s = 1700 kg/m^3$ .

Nous présentons ici les résultats numériques obtenus pour un maillage de  $100 \times 100$  en utilisant la méthode des éléments finis. Ces résultats représentent le déplacement du matériau (sable et argile) exprimés en mètre de densités  $\rho_s = 1700 kg/m^3$  et  $\rho_s = 2000 kg/m^3$ . On observe sur les figures (4.14) et (4.15) que le solide ne se déplace pas de la même distance, cela peut être expliqué par la perméabilité et la porosité du matériau. Par exemple dans le cas du sable (saturé) représenté par la figure (4.14) le sol est plus perméable et son déplacement se fait assez rapidement contrairement dans le cas de l'argile qui se fait moins vite pour des raisons dues à la propriété physique du sol considéré.

#### 4.1.5 Validation du modèle 1D solide

Pour tester le code éléments finis 1D solide (1D-EF), on s'intéresse de l'équation d'équilibre (2.25) avec terme source  $f$  (à déterminer), on considère une profondeur de longueur  $l = 4m$ . Il faut noter ici le  $K_{solide}$  n'est plus constant, il est remplacé par  $K(z)$  qui est une fonction de conductivité hydraulique du sol. On considère les conditions aux limites à la surface une condition naturelle  $\frac{\partial u_{top}}{\partial z} = 0$  (sans effort appliqué), au fond une condition de Dirichlet  $u_{bot}(b) = u_{ex}(b)$  (déplacement imposé) et une condition initiale  $u_{init} = 0$ .

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho_s g = f \quad (4.12)$$

Pour la validation, la méthode des éléments finis sera appliquer aussi pour ce problème (4.12). En effet, on se donne une solution exacte suivante :

$$u_{ex}(z) = \alpha z^2 + \beta \quad (4.13)$$

Pour ce problème, nous considérons un sol de conductivité hydraulique :

$$K(z) = \lambda z \quad (4.14)$$

- **Calcul du terme source  $f$**

En effectuant le calcul de la dérivée partielle de  $u_{ex}$  on obtient :

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} = 2\alpha z \quad (4.15)$$

En injectant les équations (4.14) et (4.15) dans l'équation (4.12), on a :

$$\frac{\partial}{\partial z} (2\alpha \lambda z^2) + \rho_s g = f$$

Finalement, on obtient le terme source  $f$  donné par :

$$f(z) = 4\alpha \lambda z + \rho_s g \quad (4.16)$$

avec les paramètres sont exprimés de la manière suivante :  $\alpha = 10^{-3}$  et  $\lambda = \beta = 10^{-2}$ , avec la solution initiale et les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases} u_{init} &= 0 \\ \frac{\partial u_{top}}{\partial z} &= 0 \\ u_{bot} &= 4\alpha b + \beta \end{cases} \quad (4.17)$$

avec  $b = 4m$ .

Le test à réaliser consiste à vérifier si on fournit au modèle développé la fonction  $f$ ,  $K(z)$  et  $u_{ex}$  sur le bord  $\partial\Omega$ , alors le modèle 1D-EF est-il capable de fournir numériquement la solution  $u = u_{ex}$  ?

Comme on peut observer sur la figure (4.16) la solution calculée est confondu avec la solution exacte. Pour voir la différence entre ces deux solutions, nous allons adopté une technique que l'on appelle la sensibilité de la solution au maillage qui permet de calculer les erreurs entre la solution exacte et la solution calculée pour différents maillages. Il s'agit de l'erreur relative afin de donner le maillage optimal.

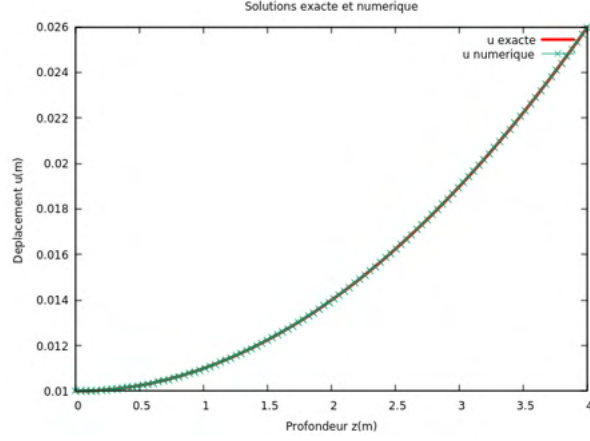


FIGURE 4.16 – Représentation de la solution exacte (en rouge) et la solution numérique (en vert)

## 4.2 Résultats numériques du couplage 1D

Pour ce test, il s'agit d'une profondeur de  $0.6\text{ m}$  de longueur contenant le sable où l'argile comme types de sols. Pour le fluide, on considère les conditions aux limites de type Dirichlet ( $h_{bot} = -0.75\text{m}$ ,  $h_{top} = -10\text{m}$ ) et la condition initiale est fixé à  $h_{init} = -10\text{m}$ . On ce qui concerne le solide nous allons considérer les mêmes conditions aux limites que celles décrites dans la section (3.2.2). Le temps maximal de simulation est de  $18000\text{ s}$  avec un pas de temps  $\Delta t = 10\text{s}$ .

On veut tester notre modèle de couplage entre l'équation de Richards et l'équation du solide 1D pour deux types de sols (sable et argile). Nous représentons les résultats pour des différents cas tests comme l'avons fait précédemment.

### • Test 1 : Sable

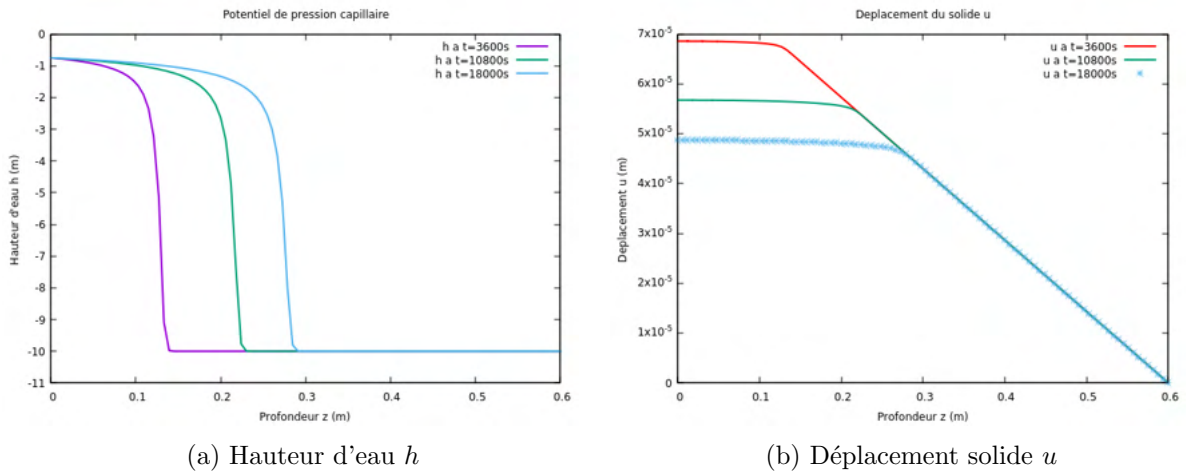
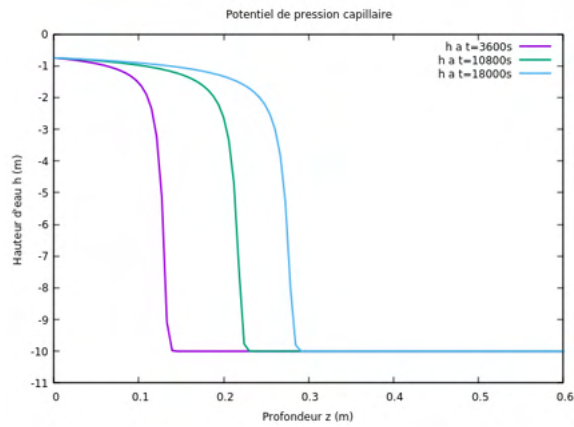
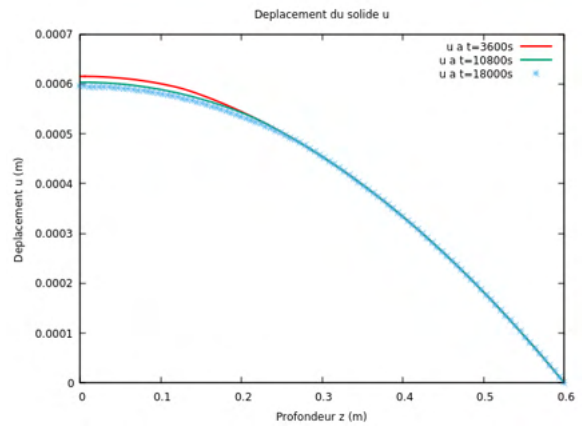


FIGURE 4.17 – Représentation de la hauteur d'eau  $h$  et du déplacement solide  $u$  : Effort libre à la surface et sans déplacement au fond.

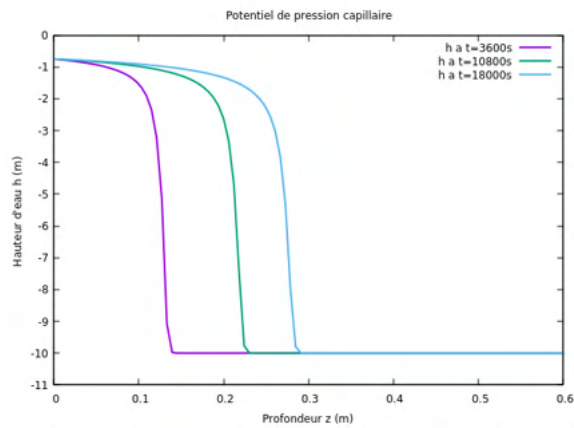


(a) Hauteur d'eau  $h$

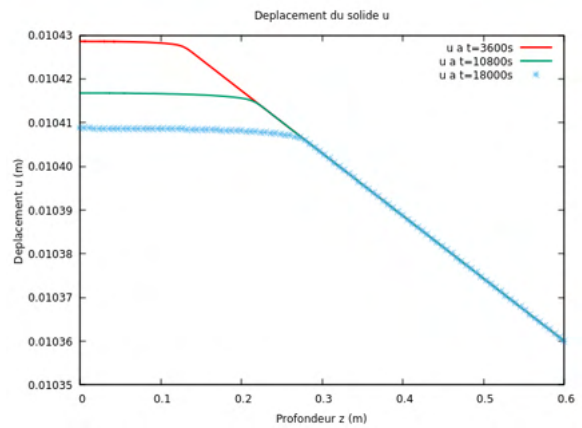


(b) Déplacement solide  $u$

FIGURE 4.18 – Représentation de la hauteur d'eau  $h$  et du déplacement solide  $u$  : Effort appliqué à la surface et sans déplacement au fond.



(a) Hauteur d'eau  $h$

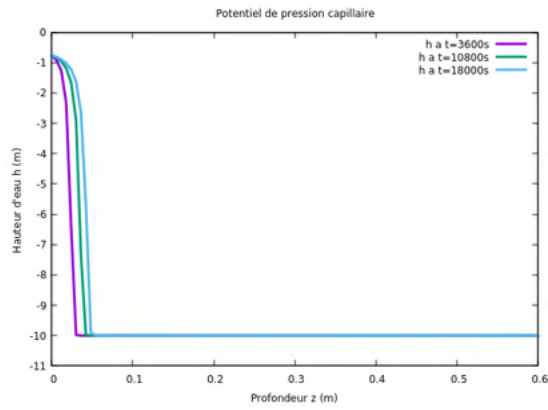


(b) Déplacement solide  $u$

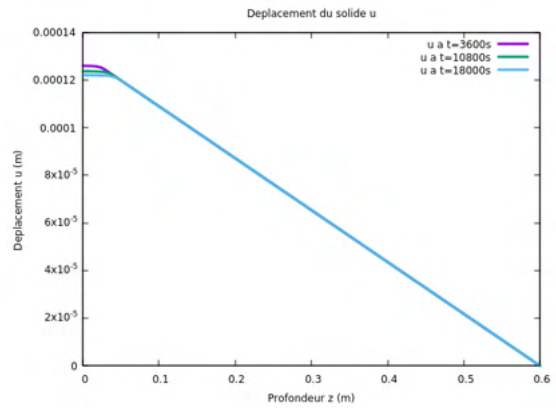
FIGURE 4.19 – Représentation de la hauteur d'eau  $h$  et du déplacement solide  $u$  : Déplacement appliqué à la surface et au fond.

- **Test 2 : Argile**



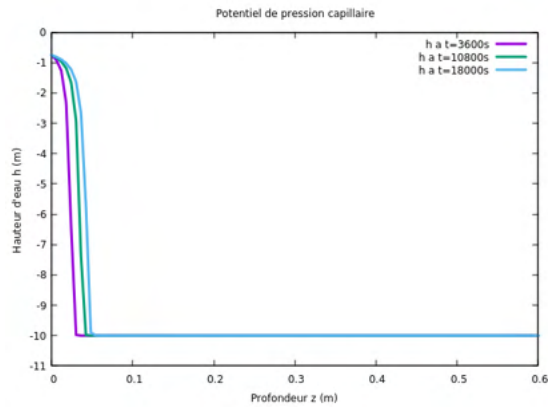


(a) Hauteur d'eau  $h$

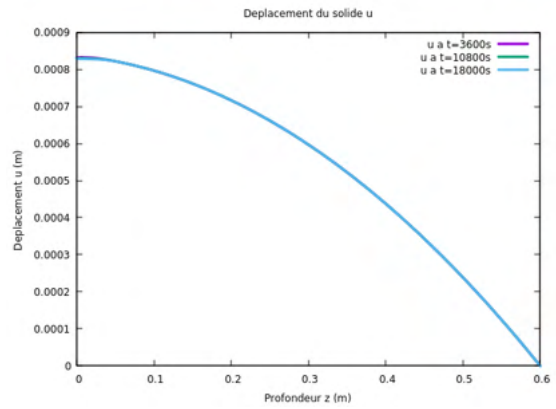


(b) Déplacement solide  $u$

FIGURE 4.20 – Représentation de la hauteur d'eau  $h$  et du déplacement solide  $u$  : Effort libre à la surface et sans déplacement au fond

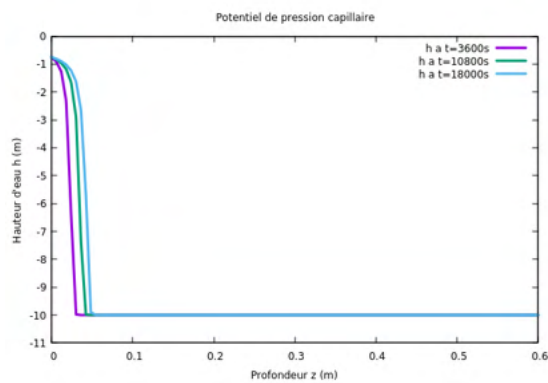


(a) Hauteur d'eau  $h$

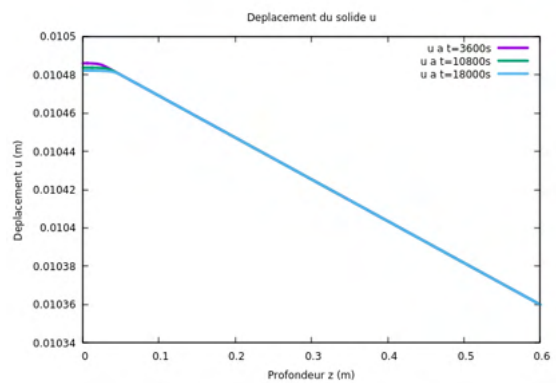


(b) Déplacement solide  $u$

FIGURE 4.21 – Représentation de la hauteur d'eau  $h$  et du déplacement solide  $u$  : Effort appliqué à la surface et sans déplacement au fond



(a) Hauteur d'eau  $h$



(b) Déplacement solide  $u$

FIGURE 4.22 – Représentation de la hauteur d'eau  $h$  et du déplacement solide  $u$  : Déplacement appliqué à la surface et au fond

Pour un maillage de 100 points, on observe sur figures nous obtenons, l'évolution du front de la hauteur d'eau et le déplacement du solide pour différent instant sont presque les mêmes obtenu aux résultats des cas-tests précédents. Il faut noter que ici le déplacement  $u$  dépend du temps qui vient de l'équation de Richards. Ce qui valide le couplage fait entre les deux équations.

#### 4.2.1 Comparaison des résultats de calculs

- Richards en formulation en  $h$  et en  $\theta - h$

Forme de Richards	$\Delta t$ (en s)	Temps CPU (en s)	Nombre d'itérations
Formulation en $h$ (cas linéaire)	10	13.637	—
	120	1.147	—
	320	0.444	—
Formulation en $\theta - h$ (cas non linéaire)	10	86.073	3
	120	14.466	6
	320	6.839	8

TABLE 4.4 – Résultats numériques obtenus par MEF pour  $n = 200$  et  $t = 43200s$ .

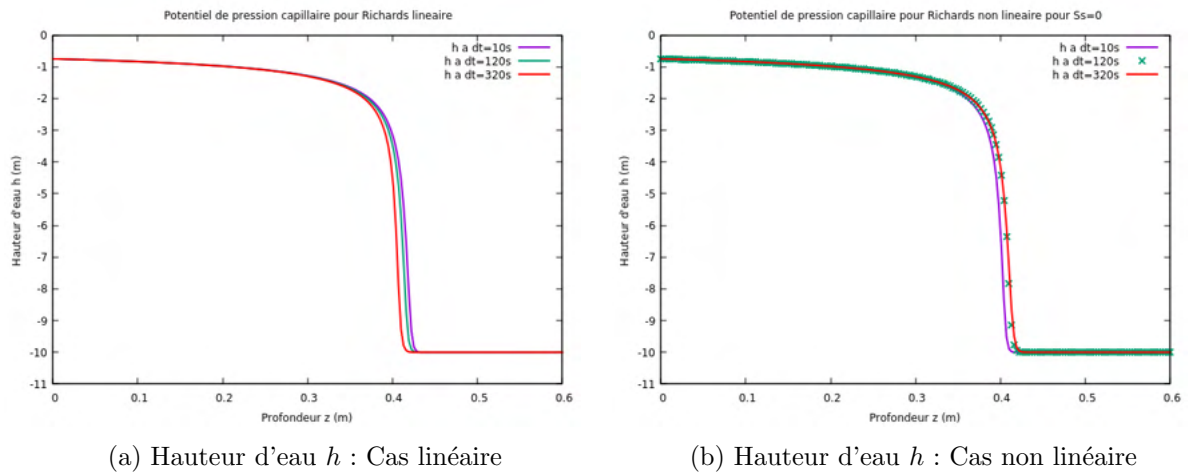
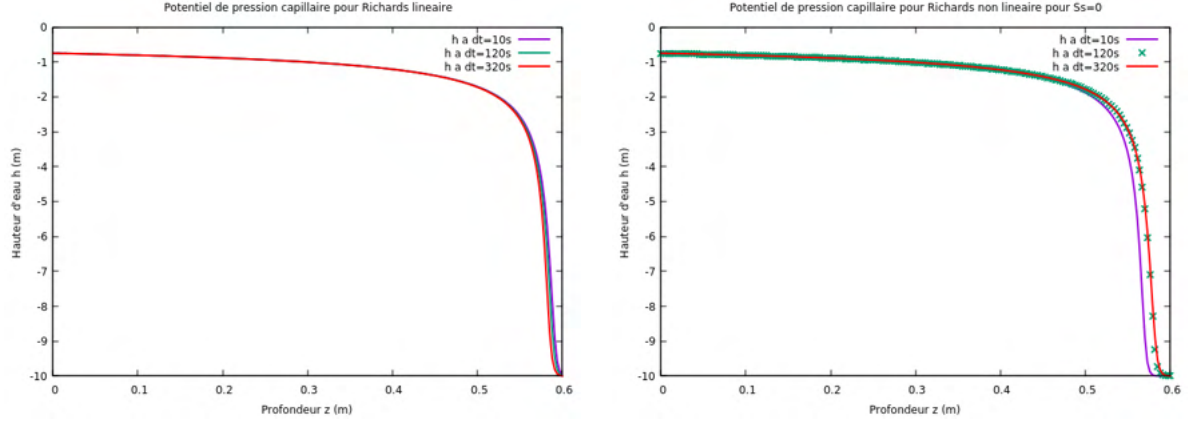


FIGURE 4.23 – Les figures (4.24a) et (4.24b) présentent l'évolution de la hauteur d'eau au cours de l'infiltration à  $0.6m$  de profondeur et sont obtenus à partir du tableau (4.4).

Forme de Richards	$\Delta t$ (en s)	Temps CPU (en s)	Nombre d'itérations
Formulation en $h$ (cas linéaire)	10	27.458	—
	120	2.307	—
	320	0.862	—
Formulation en $\theta - h$ (cas non linéaire)	10	158.387	3
	120	26.140	6
	320	12.144	8

TABLE 4.5 – Résultats numériques obtenus par MEF pour  $n = 200$  et  $t = 86400s$ .



(a) Hauteur d'eau  $h$  : Cas linéaire

(b) Hauteur d'eau  $h$  : Cas non linéaire

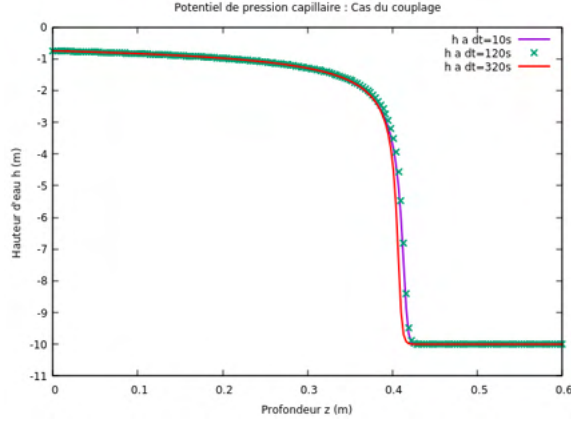
FIGURE 4.24 – Les figures (4.24a) et (4.24b) présentent l'évolution de la hauteur d'eau au cours de l'infiltration à  $0.6m$  de profondeur et sont obtenus à partir du tableau (4.5).

Pour les figures (4.23) et (4.24) montrent la variation du potentiel de pression  $h$  sur un domaine d'écoulement de  $0.6m$  pour les temps  $t = 43200s$  et  $t = 86400s$  et pour les pas de temps  $\Delta t = 10, 120$  et  $320$  secondes, pour un maillage de  $200 \times 200$  on observe que au bout de  $43200s$  que l'infiltration se fait pas assez rapide, mais après  $86400s$  l'eau continue de s'infiltrer en gardant la même forme de la hauteur d'eau que à  $43200s$ . Nous pouvons aussi observé que au bout de  $86400s$  le sol se sature presque complètement (figure 4.24) surtout dans le cas de Richards linéaire. Pour ce type de maillage, nous disons que le temps de calcul est assez raisonnable. De plus, on voit que la méthode est conservatrice car le taux d'infiltration reste le même dans tout le domaine.

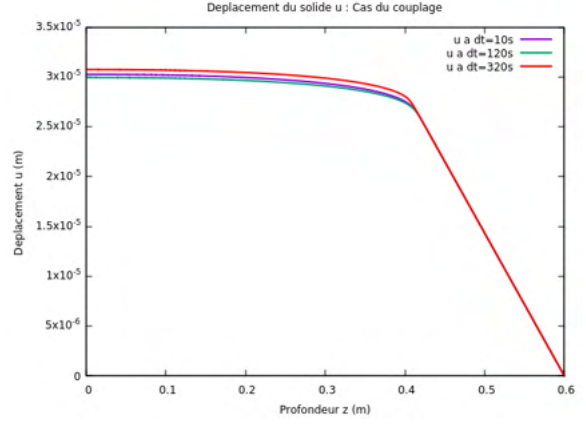
- **Couplage fluide-solide**

Couplage	$\Delta t$ (en s)	Temps CPU (en s)	Nombre d'itérations
Test 1	10	33.075	2
	120	2.769	2
	320	1.043	2
Test 2	10	33.324	2
	120	2.783	2
	320	1.049	2
Test 3	10	33.215	2
	120	2.795	2
	320	1.046	2

TABLE 4.6 – Résultats numériques obtenus par MEF pour  $n = 200$  et  $t = 43200s$ .

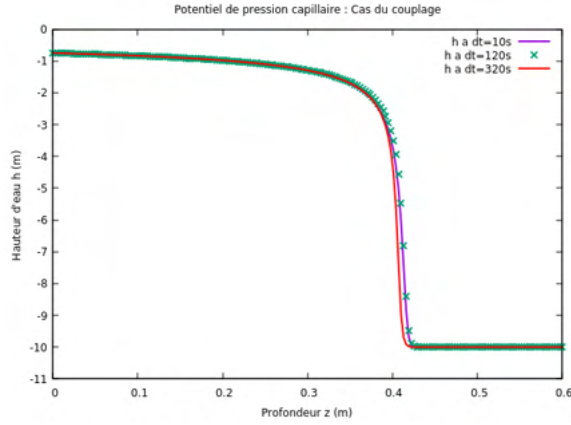


(a) Hauteur d'eau  $h$  : Cas du couplage

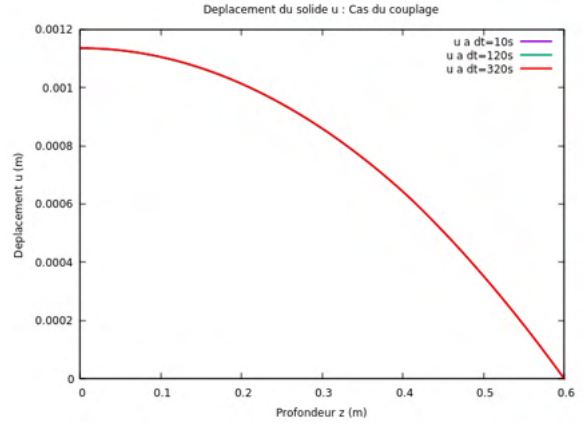


(b) Déplacement  $u$  : Cas du couplage

FIGURE 4.25 – Les figures (4.25a) et (4.25b) sont obtenus à partir du tableau (4.6) du test 1 en considérant les conditions suivantes : pas d'effort et pas de déplacement aux deux extrémités de la colonne.

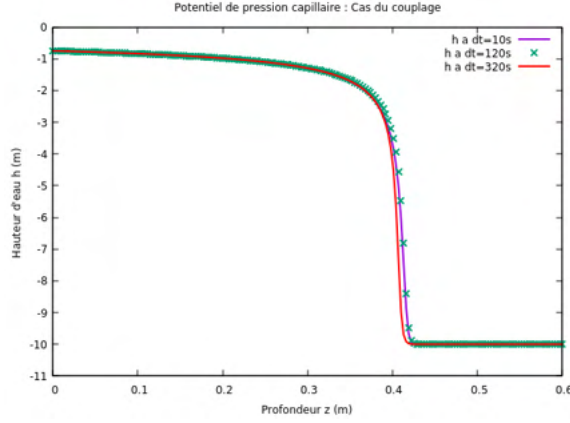


(a) Hauteur d'eau  $h$  : Cas du couplage

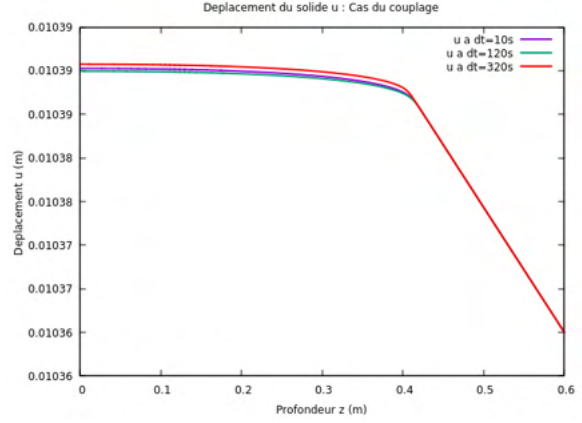


(b) Déplacement  $u$  : Cas du couplage

FIGURE 4.26 – Les figures (4.26a) et (4.26b) sont obtenus à partir du tableau (4.6) du test 2 en considérant les conditions suivantes : effort imposé à la surface et pas de déplacement au fond de la colonne.



(a) Hauteur d'eau  $h$  : Cas du couplage



(b) Déplacement  $u$  : Cas du couplage

FIGURE 4.27 – Les figures (4.27a) et (4.27b) sont obtenus à partir du tableau (4.6) du test 3 en considérant les conditions suivantes : déplacement imposé aux deux extrémités de la colonne.

Les figures (4.25), (4.26) et (4.27) montrent la variation du potentiel de pression  $h$  et du déplacement du solide  $u$  sur un domaine d'écoulement correspondant à  $z = 0.6m$  pour un temps  $t = 43200s$  et pour les pas de temps  $\Delta t = 10, 120$  et  $320$  secondes.

### 4.3 Sensibilité de la solution au maillage

Un maillage de qualité est primordial pour obtenir une bonne convergence du calcul numérique et de bons résultats lors de la simulation. Diverses configurations de maillage composée de cellules quadrilatères ont été testées dans l'optique de déterminer le meilleur compromis entre la précision des résultats et la durée nécessaire pour que le calcul converge. Après avoir choisi une densité de maillage, trois tests de sensibilité par rapport aux modèles 1D-EF régissant les écoulements dans le sol (test pour Richards linéaire et non linéaire) et au déplacement du squelette solide a été effectué.

Nous étudions cette sensibilité dans le cas des validations des modèles (Richards linéaire, non linéaire et solide 1D). Pour mener cette étude de test de sensibilité, nous avons mis à disposition de 07 maillages nommés  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  et  $M_6$  (voir tableaux (4.7), (4.8) et (4.9)). La sensibilité de la solution au maillage consiste à rechercher :

1. **Dépendance de la précision** : La résolution numérique d'un problème physique est généralement plus précise avec un maillage fin et dense. Cela signifie qu'un maillage qui divise le domaine en petites éléments permettra d'obtenir une solution plus précise ;
2. **Effet sur la stabilité** : Un maillage grossier peut conduire à des instabilités numériques ou à des oscillations dans la solution, en particulier pour les problèmes comportant des gradient rapides. Un maillage fin peut améliorer la stabilité numérique ;
3. **Coût de calcul** : Un maillage plus fin implique généralement un coût de calcul plus élevé, car davantage d'éléments doivent être résolus. Il est important de trouver un compromis entre la précision souhaitée et la capacité de calcul disponible ;
4. **Validation et vérification** : La sensibilité au maillage nécessite souvent une validation soignée en utilisant des solutions analytiques ou des résultats expérimentaux lorsque cela est possible. Cela permet de s'assurer que la solution numérique converge vers la vraie solution lorsque le maillage se raffine ;
5. **Erreur de discrétisation** : L'erreur de discrétisation, qui est l'erreur introduite par la discrétisation numérique du problème continu, dépend fortement de la qualité du maillage. En général, un maillage plus fin réduit l'erreur de discrétisation.

– Cas de Richards linéaire

Maillages	$\Delta t$ (en s)	Temps CPU (en s)	Erreurs relatives
$M_1 = 100$	10	0.231	$3.29498 \times 10^{-5}$
	120	$2.157 \times 10^{-2}$	$3.29494 \times 10^{-5}$
	320	$8.895 \times 10^{-3}$	$3.29483 \times 10^{-5}$
$M_2 = 200$	10	1.528	$1.15618 \times 10^{-5}$
	120	0.134	$1.15616 \times 10^{-5}$
	320	$5.206 \times 10^{-2}$	$1.15613 \times 10^{-5}$
$M_3 = 400$	10	10.270	$4.07236 \times 10^{-6}$
	120	0.847	$4.07233 \times 10^{-6}$
	320	0.325	$4.07220 \times 10^{-6}$
$M_4 = 800$	10	41.372	$1.43710 \times 10^{-6}$
	120	3.654	$1.43713 \times 10^{-6}$
	320	1.325	$1.43716 \times 10^{-6}$
$M_5 = 1600$	10	161.047	$5.07124 \times 10^{-7}$
	120	13.560	$5.06985 \times 10^{-7}$
	320	5.070	$5.07367 \times 10^{-7}$
$M_6 = 3200$	10	1061.772	$1.84997 \times 10^{-7}$
	120	94.411	$1.77230 \times 10^{-7}$
	320	34.872	$1.83248 \times 10^{-7}$
$M_7 = 6400$	10	10014.475	$4.2431 \times 10^{-8}$
	120	803.030	$5.47587 \times 10^{-8}$
	320	323.813	$7.50287 \times 10^{-8}$

TABLE 4.7 – Détermination de l’erreur relative pour différents maillages dans cas de Richards linéaire (L’ordre de précision du modèle 1D-EF).

– Cas du solide

Maillages ( $n_p$ )	Temps CPU (en s)	Erreurs relatives
$M_1 = 100$	$1.340 \times 10^{-3}$	$1.209 \times 10^{-5}$
$M_2 = 200$	$2.700 \times 10^{-3}$	$4.158 \times 10^{-6}$
$M_3 = 400$	$7.620 \times 10^{-3}$	$1.442 \times 10^{-6}$
$M_4 = 800$	$2.413 \times 10^{-2}$	$5.004 \times 10^{-7}$
$M_5 = 1600$	$9.996 \times 10^{-2}$	$1.692 \times 10^{-7}$
$M_6 = 3200$	0.366	$5.066 \times 10^{-8}$
$M_6 = 6400$	2.110	$1.146 \times 10^{-8}$

TABLE 4.8 – Détermination de l’erreur relative pour différents maillages dans le cas du solide (L’ordre de précision du modèle 1D-EF).

– Cas de Richards non linéaire

Maillages	$\Delta t$ (en s)	Temps CPU (en s)	Itérations	Erreurs relatives
$M_1 = 100$	10	3.571	10	$2.834 \times 10^{-4}$
	120	0.364	11	$2.844 \times 10^{-4}$
	320	0.160	12	$2.861 \times 10^{-4}$
$M_2 = 200$	10	19.426	10	$2.382 \times 10^{-4}$
	120	1.896	11	$2.397 \times 10^{-4}$
	320	0.769	12	$2.423 \times 10^{-4}$
$M_3 = 400$	10	122.134	10	$2.862 \times 10^{-4}$
	120	11.503	11	$2.883 \times 10^{-4}$
	320	4.634	12	$2.920 \times 10^{-4}$
$M_4 = 800$	10	476.722	10	$3.882 \times 10^{-4}$
	120	51.881	11	$3.911 \times 10^{-4}$
	320	18.146	12	$3.964 \times 10^{-4}$
$M_5 = 1600$	10	1702.482	10	$5.433 \times 10^{-4}$
	120	169.690	11	$5.474 \times 10^{-4}$
	320	64.964	12	$5.549 \times 10^{-4}$
$M_6 = 3200$	10	20173.840	10	$7.664 \times 10^{-4}$
	120	1985.916	11	$7.723 \times 10^{-4}$
	320	844.643	12	$7.829 \times 10^{-4}$
$M_7 = 6400$	10	89455.804	10	$1.083 \times 10^{-3}$
	120	11939.068	11	$1.091 \times 10^{-3}$
	320	5315.927	12	$1.106 \times 10^{-3}$

TABLE 4.9 – Détermination de l’erreur relative pour différents maillages dans cas de Richards non linéaire (L’ordre de précision du modèle 1D-EF).

**Remarque 4.3.1** *Il est à noter toutefois les pas de discrétisation adoptés peuvent influencer les résultats obtenus de façon plus ou moins remarquable, il convient donc pour chaque simulation d’étudier la sensibilité des résultats afin de déduire des valeurs optimales qui permettent de concilier la précision et le coût de calcul.*

# Conclusion

## 5.1 Conclusion

Le transport fluvial comporte de nombreux atouts : il est fiable, rapide, ponctuel, écologique et économique. Depuis quelques années, l'on assiste à un regain d'intérêt pour le transport fluvial dont le potentiel de développement est considérable. La route étant saturée et le rail ayant de grandes difficultés à accroître sa capacité de transport de fret, la voie d'eau apparaît de plus en plus comme la solution d'avenir. Effet, lors du passage d'un bateau se produit sur la surface de l'eau un phénomène qu'on appelle batillage. Ce phénomène génère des ondes de vagues permettant un mouvement de monté-descendé du niveau d'eau s'infiltrant dans la berge et entraîne le remplissage des pores vides en provoquant la saturation du milieu et une augmentation du poids du sol. Il fait parti des causes d'érosion les plus néfastes.

La modélisation numérique de l'érosion des berges due au trafic fluvial est une discipline en constante évolution qui joue un rôle central dans la protection de nos ressources hydriques et de nos infrastructures riveraines. Elle permet de mieux comprendre, de prédire et de gérer ce phénomène complexe, favorisant ainsi un développement durable et une utilisation responsable de nos voies navigables.

Pour conclure, nous avons proposé trois parties :

1. La première partie concerne quelques rappels de généralités sur le milieu poreux pour la compréhension de la suite du projet parmi on cite : l'équation de conservation de masse et la loi de Darcy qui interviennent dans l'équation de Richards.
2. La deuxième partie concerne la modélisation de l'écoulement dans le sol qui gouverne les équations de Richards (en  $h$ ,  $\theta$  et  $\theta - h$ ), ensuite nous avons donné un modèle du solide régit par l'équation d'équilibre du solide dont l'inconnue est le déplacement est  $u$  et le modèle couplé (fluide-solide) qui vient de la contrainte effective.
3. La troisième partie : Elle est basée sur la résolution et résultats numériques. Pendant ce stage pour la résolution numérique des modèles évoqués, concernant Richards nous sommes intéressés de la formulation en  $h$  et  $\theta - h$ , un code a été développé en une dimension basé sur les méthodes des éléments finis, une méthode itérative de linéarisation de Picard a été utilisé pour le cas de Richards non linéaire ( $\theta - h$ ) et pour la résolution du système linéaire nous avons utilisé l'algorithme de TDMA (Tridiagonal matrix algorithm) ou THOMAS. L'algorithme développé est codé en Fortran 90. Nous avons effectué quelques cas tests pour deux types de sols (sable et argile) en tenant compte des caractéristiques du sol de l'article Mohammad Mahmoodian Shoshtari and Arash Adib, 2011 et de la thèse de Ayoub Charhabil qui sont donné par le modèle Van Genuchten. Ensuite un cas de validation a été effectué dans le cas du solide et de Richards (en  $h$ ), pour cette validation nous avons fabriqué un type de sol en donnant la conductivité hydraulique  $K(h)$ , la teneur en eau  $\theta(h)$ , la capacité capillaire  $C(h)$  et une solution analytique.

D'un point de vu numérique, nous avons trois codes qui fonctionnent pour le solide, de Richards (cas linéaire et non linéaire) et du couplage (fluide-solide). Il faut noter que ces modèles servent pour des prédictions physiques.



Du point de la physique, nous constatons que pour des propriétés qui correspondent à de l'argile et le sable, il n'a pas de différence de résultats donnés par l'algorithme de linéaire et celui donné par l'algorithme non linéaire. Cependant, il est intéressant à l'aide des deux outils que nous avons développés c'est de voir si pour d'autres propriétés de sols ça l'intérêt de faire du non linéaire. Pour l'analyse des résultats numériques obtenus, nous pouvons dire que le modèle numérique 1D élément fini développé simule correctement l'écoulement dans le sol et le déplacement du squelette solide. Les résultats sont satisfaisants et qui peuvent être améliorés.

# Liste des symboles

Symboles		Dimensions
$\Delta t$	pas de discrétisation du temps	s
$\Delta z$	pas de discrétisation de la profondeur	m
$\mu$	viscosité du fluide	—
$\nabla$	gradient en coordonnées cartésiennes	—
$\nu$	coefficient de Poisson	Pa
$\phi$	porosité	—
$\rho_s$	masse volumique du solide	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_w$	masse volumique du fluide	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma'$	contrainte effective	Pa
$\sigma$	contrainte totale	Pa
$\theta$	Teneur en eau volumique	—
$\theta_{res}$	teneur en eau volumique résiduelle	—
$\theta_{sat}$	teneur en eau volumique saturée	—
$\varepsilon$	déformation du squelette solide	—
$\vec{q}$	vecteur vitesse de Darcy	m/s
$C(h)$	capacité capillaire	m <sup>-1</sup>
$D(\theta)$	diffusivité sol-eau	m <sup>2</sup> /s
$E$	module de Young	Pa
$g$	accélération de la pesanteur	m/s <sup>2</sup>
$H$	Charge hydraulique	m
$h$	potentiel de pression capillaire (hauteur d'eau)	m
$h_e$	pression d'entrée d'air	m
$K$	conductivité hydraulique	m/s
$k$	perméabilité intrinsèque	m <sup>2</sup> /s
$K_s$	conductivité hydraulique saturée	m/s
$K_{solide}$	module de compressibilité du solide	Pa
$n, m$	paramètre lié au sol	—
$p_a$	pression de l'air	Pa
$p_w$	pression de l'eau	Pa

$S$	taux de saturation	%
$S_e$	taux de saturation effective	—
$S_s$	capacité de stockage spécifique	1/m
$t$	temps	s
$u$	déplacement du solide	m
$z$	profondeur sous la surface du sol	m

# Annexe

## 5.2 Organisation de la programmation

Il existe une diversité de méthode numériques, depuis ces dernières décennies, les sciences des matériaux ont connu une renaissance grâce aux développements des outils de simulation. La résolution du problème fluide, solide et d'un système couplé fluide-solide, est ramené à résoudre un système d'équations différentielles qui nécessite l'utilisation de ces méthodes numériques d'où la nécessité d'élaborer un programme de calcul EF-1D.

Dans le cadre de ce projet, on souhaite mettre en place un algorithme capable de résoudre numériquement le système d'équation discrétisées en chaque point de l'espace. Cet algorithme de programmation sera écrit en langage FORTRAN 90 et nous avons utilisé :

- GCC version 9.4.10 (Ubuntu 9.4.10-1ubuntu~ 20.04.2) ;
- Outil de pré traitement : mise en données (fichier.dat) ;
- Outil de post-traitement : Gnuplot (pour la visualisation des résultats) ;
- Type de programme : programmation en séquentielle.

### 5.2.1 Description des programmes

L'algorithme développé est organisé en sous programme suivant :

#### • Fluide et solide :

- **richards.f90**, **solide.f90** : Programme principal qui fait appel à un ensemble de sous programme (subroutines) ;
- **input.dat** : Dans lequel l'ensemble des données physiques et algorithmes du problème sont définis ;
- **maillage.f90** : Permet de créer le maillage qui va servir de base dans la discrétisation ;
- **caract\_sol.f90** : Contient les fonctions caractéristiques du sol étudié ( $\theta(h)$ ,  $K(h)$ ,  $C(h)$ ) ;
- **mat\_vect\_elem.f90** : Calcul de matrice de rigidité élémentaire  $\mathbf{K}_i^{ek}$ , de matrice de masse élémentaire  $\mathbf{M}_i^{ek}$  et du vecteur second membre élémentaire  $\mathbf{B}_i^{ek}$  ;
- **assembl.f90** : Calcul le vecteur d'assemblage  $\mathbf{B}$ , de matrice d'assemblage rigide  $\mathbf{K}$  et de matrice d'assemblage de la masse  $\mathbf{M}$  ;
- **solver.f90** : Permet la résolution des systèmes  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{K}\mathbf{H} = \mathbf{B}$  (fluide) et  $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{B}$  (solide) par la méthode numérique TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm).

#### • Couplage :

- **couplage.f90** : Programme principal qui fait appel à un ensemble de sous programme (subroutines) ;
- **input.dat** : Dans lequel l'ensemble des données physiques et algorithmes du problème sont définis ;
- **maillage.f90** : Permet de créer le maillage qui va servir de base dans la discrétisation ;

- **caract\_sol.f90** : Contient les fonctions caractéristiques du sol étudié ( $\theta(h)$ ,  $K(h)$ ,  $C(h)$ ) ;
- **mat\_vect\_elem\_fluid.f90** : Calcul de matrice de rigidité élémentaire  $\mathbf{K}_i^{e_k}$ , de matrice de masse élémentaire  $\mathbf{M}_i^{e_k}$  et du vecteur second membre élémentaire  $\mathbf{B}_i^{e_k}$  ;
- **mat\_vect\_elem\_solid.f90** : Calcul de matrice de rigidité élémentaire  $\mathbf{K}_i^{e_k}$  et du vecteur second membre élémentaire  $\mathbf{B}_i^{e_k}$  ;
- **assembl\_fluid.f90** : Calcul le vecteur d'assemblage  $\mathbf{B}$ , de matrice d'assemblage rigide  $\mathbf{K}$  et de matrice d'assemblage de la masse  $\mathbf{M}$  ;
- **assembl\_solid.f90** : Calcul le vecteur d'assemblage  $\mathbf{B}$  et de matrice d'assemblage rigide  $\mathbf{K}$  ;
- **solver.f90** : Permet la résolution du système fluide-solide par la méthode numérique TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm).

### 5.2.2 Organigramme

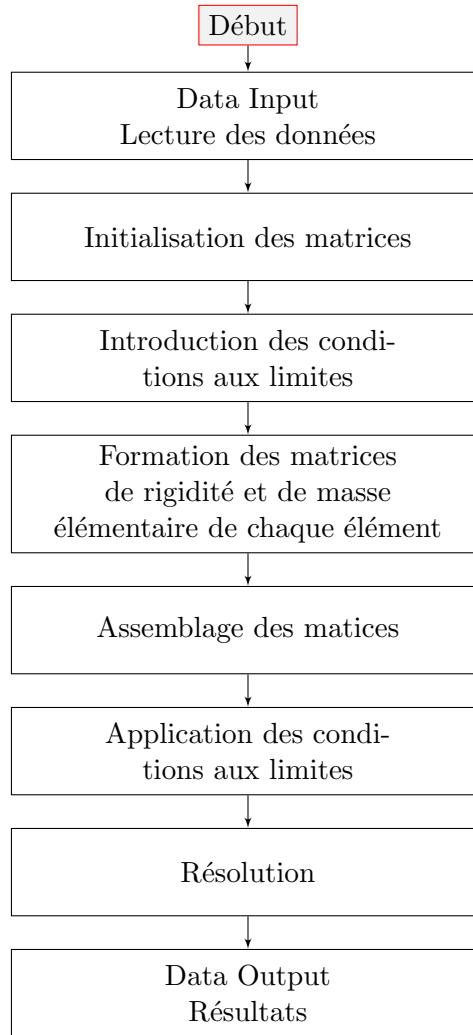


FIGURE 5.1 – Organigramme

### 5.2.3 Calcul des modules de compressibilité ( $K_{solide}$ ) de quelques matériaux

Le module de compressibilité ( $K_{solide}$ ) est lié au module de Young  $E$  par le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) :

$$K_{solide} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (5.1)$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

- Pour le sable léger :  $E = 1.45 \times 10^8$  Pa,  $\nu = 0.20$ , soit  $K_{solide} = 0.805 \times 10^8$  Pa
- Pour le sable saturé :  $E = 1.9 \times 10^8$  Pa,  $\nu = 0.45$ , soit  $K_{solide} = 6.333 \times 10^8$  Pa
- Pour l'argile sableuse :  $E = 2.5 \times 10^8$  Pa,  $\nu = 0.4$ , soit  $K_{solide} = 4.166 \times 10^8$  Pa
- Pour le béton :  $E = 3.6 \times 10^{10}$  Pa,  $\nu = 0.20$ , soit  $K_{solide} = 1.5 \times 10^{10}$  Pa

# Bibliographie

- [1] Ayoub Charhabil : *Étude de modèle d'écoulements souterrains et surfaciques couplés avec un transport de soluté*, ch. "Schéma numérique de l'équation de Richards", thèse, Université Sorbonne Nord, pages 41-62, 2020.
- [2] J. Nikzad, SS Eslamian, M. Soleymannejad, A. Karimpour : *Numerical solution for one-dimensional Richards' equation using differential quadrature method* *Current Science*, 2016.
- [3] Assane DIONE : Modélisation numérique de l'érosion des berges due au trafic fluviale. *Partie I : Calcul de l'écoulement en milieu variablement saturé : résolution numérique de l'équation de Richards*, stage Master II Physique et Modélisation, Université de Cergy-Pontoise, 2018.
- [4] M Boujoudar, A Beljadid and A Taik : *Modelling of unsaturated flow through porous media using meshless methods*, Canadian Society of Civil Engineering Annual Conference, 2021.
- [5] Tables des masses volumiques de diverses substances.  
<https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Masse-volumique-page-2.html>
- [6] GEO5 Logiciel : Aide Contextuelle,  
<https://www.finesoftware.fr/aide-contextuelle/geo5/fr/module-secant-du-sol-es-01/>
- [7] Wikipedia :
  - [https://fr.wikipedia.org/wiki/Coefficient\\_de\\_Poisson](https://fr.wikipedia.org/wiki/Coefficient_de_Poisson)
  - [https://fr.wikipedia.org/wiki/Module\\_de\\_Young](https://fr.wikipedia.org/wiki/Module_de_Young)
- [8] M. TH. Van Genuchten : *A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. Soil Sci. Soc. Am. J.* Vol. 44(5) pages. 892-898, 1980.
- [9] T. Bunsri1, M. Sivakumar and D. Hagare : *Applications of Hydraulic Properties Models on Microscopic Flow in Unsaturated Porous Media*, Journal of Applied Fluid Mechanics, Vol. 2, No. 2, pages 1-11, 2009
- [10] K. Nasrifar and D. Mowla : *Modelling Transient Unsaturated Flow Problems Using Control Volume Numerical Methods*, Scientia Iranica, Vol.9, No. 1. pages 59-65.
- [11] Caviedes-Voullième et al. : *Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation*, Journal of Hydrology, Volume 480, Pages 69-84, February 2013.
- [12] Florian List and Florin A. Radu : *A study on iterative methods for solving Richards' equation*, pages 342-346, 2016
- [13] Mehdi BADSI : Note de cours Méthode des éléments finis 1D, master 1 MACS, 2021
- [14] Nathan DELPIERRE *Modélisation numérique de l'écoulement à travers et sur une digue*, rapport de stage master, École polytechnique de Louvain, pages 21-58, 2021
- [15] Note de cours de Monsieur Hassan SMAOUI, Université Technologique de Compiègne.

- [16] G. Gottardi and M. Venutelli : *Richards : Computer program for the numerical simulation of one-dimensional infiltration into unsaturated*, pages 1239-1266, 1993
- [17] Mohamad Azizi Pour, Mohammad Mahmoodian Shoshtari and Arash Adib : *Numerical Solution of Richards Equation by Using of Finite Volume Method*, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran, 2011
- [18] Florian List· Florin A. Radu : *A study on iterative methods for solving Richards' equation*, pages 343-347, 2016
- [19] Rathfelder and Linda M. Abriola : *Mass conservative numerical solutions of the head-based Richards equation Klaus*, pages 2579-2586, september 1994
- [20] Benjamin Belfort : *Modélisation des écoulements en milieux poreux non saturés par la méthode des éléments finis mixtes hybrides*, Université de Strasbourg, CNRS, 2006
- [21] Salima BOUCHEMELLA, Ibrahim ALIMI-ICHOLA : *DETERMINATION DES PARAMETRES DES MODELES EMPIRIQUES DES PROPRIETES HYDRAULIQUES DES SOLS NON SATURES*, 2016
- [22] Marcel G. Schaap and Martinus Th Van Genuchten : *A Modified Mualem–van Genuchten Formulation for Improved Description of the Hydraulic Conductivity Near Saturation*, 2005
- [23] Delphine BRANCHERIE : *Note de cours Mécanique des solides*