

NANTES UNIVERSITÉ

RAPPORT DE STAGE - M2 MACS

---

# MODÉLISATION DE PROCÉDÉS DE MISE EN FORME DE COMPOSITES PAR DES APPROCHES À FRONTIÈRES IMPLICITES

---

Alice RAMBAUD  
M2 MACS

ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

2022 - 2023

---

## Table des matières

I	CONTEXTE ET UTILITÉ	4
II	NOTATIONS ET PLAN	6
III	NOTION DE MÉTRIQUE	7
IV	GÉNÉRATION ET ADAPTATION DE MAILLAGE	10
1	OBJECTIF	10
2	GÉNÉRATION DE MAILLAGE	11
3	MÉTHODES D'ADAPTATION DE MAILLAGES	11
4	ÉVALUATION DE LA QUALITÉ D'UN MAILLAGE	11
5	LES ÉTAPES ALGORITHMIQUES D'ADAPTATION DE MAILLAGE	12
V	TÉTRAÈDRES DE TYPE 2 DANS $\mathbb{R}^3$	13
VI	ESTIMATEUR D'ERREUR P2	17
6	NOTION D'ERREUR D'INTERPOLATION	17
7	LIEN ENTRE L'ERREUR ET L'ERREUR D'INTERPOLATION	20
8	CONSTRUCTION D'UN PREMIER ESTIMATEUR D'ERREUR À PARTIR DE LA HESSIENNE	21
9	UTILISATION DU GRADIENT POUR LA CONSTRUCTION DE L'ESTIMATEUR D'ERREUR	23
VII	TESTS SUIVANT LES DIFFÉRENTES MÉTHODES	25
10	PREMIER TEST AVEC LA MÉTHODE DU GRADIENT P1 EN 2D POUR LA VALIDATION DE LA STRUCTURE DU CODE	25
11	RÉSULTATS AVEC LA MÉTHODE DE LA HESSIENNE SUR UN CHAMP P2 EN 2D	28
12	AMÉLIORATION DE LA MÉTHODE DE LA HESSIENNE SUR UN CHAMP P2 EN 2D	33
13	ADAPTATION DE LA MÉTHODE DE LA HESSIENNE SUR UN CHAMP P2 EN 3D	37
14	ÉLABORATION D'UN NOUVEAU CAS TEST 3D POUR LA MÉTHODE DE LA HESSIENNE AVEC UNE FONCTION À TROIS VARIABLES	40
15	RÉSULTATS AVEC LA MÉTHODE 2 DU GRADIENT SUR UN CHAMP P2 EN 2D	42
15.1	TESTS AVEC UNE FONCTION DÉPENDANT D'UNE SEULE VARIABLE . . . . .	42
15.2	GÉNÉRALISATION À UNE FONCTION DÉPENDANT DE DEUX VARIABLES . . . . .	44

---

VIII	CONCLUSION	45
IX	ANNEXES	46
16	FONCTIONS DE FORME POUR LE TÉTRAÈDRE DE RÉFÉRENCE	46
17	DÉTAIL DU CALCUL DE $F_K^{-1}$	47
18	Calcul de la matrice $\text{Jac}F_K^{-1}$	49
19	Calcul des dérivées secondes des $\hat{\Phi}_k$	53
X	BIBLIOGRAPHIE	54

---

## REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à remercier mon université, Nantes Université, pour la formation et les cours qu'elle a su me proposer. Je tiens également à remercier mon équipe pédagogique pour sa présence et sa disponibilité lorsque j'en ai eu besoin lors de mon parcours, en particulier Mme Crestetto et Monsieur Berthon. Je souhaite également remercier Mme Bessemoulin, pour m'avoir donné l'envie de faire des mathématiques appliquées, et plus particulièrement du calcul scientifique et de l'analyse numérique.

Je tiens également à remercier mon équipe pédagogique de l'Université de La Rochelle, et en particulier Rafik Imekraz, sans qui je ne serai pas là où je suis aujourd'hui. Je suis vraiment reconnaissante envers tout ce qu'il a pu faire pour moi.

Je souhaite également remercier ma famille, mon père, et mon compagnon, pour avoir été là lorsque j'en ai eu besoin et m'avoir aidée dans les moments de doutes.

Je souhaite particulièrement remercier Nour Hachem, qui m'a accompagnée tout au long de ce stage et de ma découverte de l'école Centrale de Nantes, Gianni Barakat, pour son aide et ses réponses à mes questions sur IciTech, et Valentin Joubert, pour son soutien.

Enfin, je remercie Luisa Silva.

## Première partie

# CONTEXTE ET UTILITÉ

L'adaptation de maillage anisotrope (dont la taille des mailles est non uniforme en espace et en direction) est un procédé clé dans la modélisation des processus de mise en forme de composites par des approches à frontières implicites. En effet, ce procédé a pour but d'optimiser le maillage numérique qui est alors utilisé lors de simulations, afin de mieux représenter la géométrie et les caractéristiques du matériau utilisé. Par exemple, cette méthode est d'autant plus pratique lorsque les composants étudiés ont des formes étirées, ou avec des zones possédant beaucoup de complexités. Nous pouvons notamment observer l'utilité d'avoir un maillage adapté et anisotrope sur l'image de Pascal Frey ci dessous.

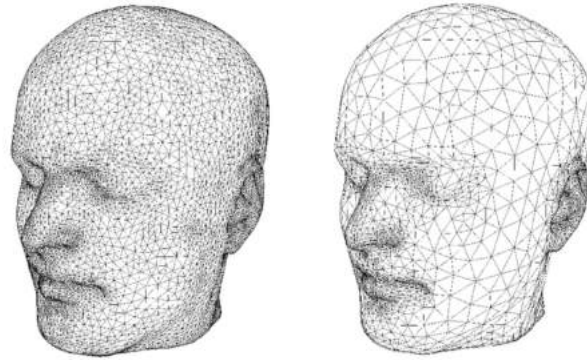


FIGURE 1 – À gauche, maillage isotrope, à droite, maillage anisotrope de la surface crânienne

Dans le contexte de modélisation des processus de mise en forme de composites par des approches à frontières implicites, les méthodes d'adaptation de maillage anisotrope peuvent s'avérer utiles sur de nombreux aspects.

Le premier aspect non négligeable dans lequel est utile ce procédé est la réduction du coût de calcul. Les simulations de mise en forme de composites par des approches à frontières implicites peuvent être très coûteuses en termes de ressources informatiques. L'adaptation de maillage anisotrope permet de concentrer davantage de mailles là où c'est nécessaire, ce qui réduit le nombre d'éléments inutiles. Cela réduit ainsi le temps de calcul nécessaire pour effectuer les simulations.

Ensuite, on note également une plus grande précision lorsqu'on possède un maillage anisotrope. Les matériaux composites ont souvent une structure complexe, avec des variations importantes dans les propriétés mécaniques. L'adaptation de maillage anisotrope permet de concentrer davantage de mailles dans les zones nécessaires, et d'en mettre moins dans les zones où il y a peu de variations. Cela permet une meilleure résolution et donc une meilleure précision.

En outre, l'adaptation de maillage anisotrope permet une meilleure gestion des interfaces. Les processus de mise en forme de composites impliquent souvent des interfaces entre différents matériaux. L'adaptation de maillage anisotrope permet de mieux capturer ces interfaces en concentrant le maillage autour d'elles. On a donc une meilleure modélisation des interactions réalisées à travers ces interfaces.

De surcroît, l'adaptation de maillage anisotrope permet de mieux suivre les déformations du matériau au cours du temps, en modifiant à chaque itération la concentration de mailles dans les différents endroits du maillage.

Enfin, avec un maillage adapté correctement, on a à fortiori une erreur diminuée considérablement. Les résultats des simulations sont donc plus fiables.

Les techniques d'adaptation de maillages anisotropes élaborées au sein du GEM sont des méthodes d'adaptation P1. Les éléments finis P2 permettent de représenter les variations des champs physiques de manière plus précise que les éléments finis P1. En utilisant des fonctions d'interpolation de degré plus élevé, les éléments finis P2 sont capables de fournir une meilleure approximation des solutions. Cela permet également d'obtenir des résultats numériques plus précis et une meilleure convergence vers la solution exacte.

L'objectif du stage fut donc d'apporter une contribution sur l'élaboration d'une méthode d'adaptation de maillages anisotropes P2, en particulier en construisant un estimateur d'erreur P2, permettant de remailler à partir d'un champ solution P2. L'objectif est également de parvenir à faire cela en 3 dimensions.

## Deuxième partie

# NOTATIONS ET PLAN

Nous nous placerons dans notre étude, sauf mention du contraire, dans le cadre de la 3 dimensions. Ainsi, par défaut, l'espace dans lequel nous travaillerons sera  $\mathbb{R}^3$ .

Nous utiliserons dans tout le document les notations répertoriées dans le tableau suivant. Nous laisserons au lecteur la possibilité de s'y référer au besoin, mais ne rappellerons pas la signification de ces notations par la suite.

Notations	Définitions
$\mathcal{K}$	Ensemble des éléments du maillage
$\mathcal{N}$	Ensemble des noeuds du maillage
$N$	Nombre de noeuds dans le maillage
$K_i$	L'élément numéro $i$ du maillage
$S^i$	Vecteur des coordonnées du noeud numéro $i$
$S^{ij}$	Vecteur correspondant à l'arête reliant les noeuds $i$ et $j$
$h_{ij}$	Longueur de l'arête $S^{ij}$
$\Gamma(i) = \{j \in [1, N] \mid \exists K \in \mathcal{K}, S^{ij} \in K\}$	Ensemble des numéros des noeuds connectés au noeud numéro $i$
$E_K$	Ensemble des arêtes de l'élément $K$

FIGURE 2 – Tableau des notations utilisées

Dans un premier temps, nous effectuerons quelques rappels afin d'avoir en tête ce qu'est la notion de métrique.

Ensuite, nous rappellerons également comment sont générés et adaptés les maillages habituellement, et quelles sont les différentes méthodes d'adaptation de maillages utilisées.

Par la suite, nous nous intéresserons aux tétraèdres de type 2 dans  $\mathbb{R}^3$  : nous déterminerons les fonctions de forme associées en détaillant les calculs en annexes, et nous donnerons l'application permettant de passer d'un tétraèdre quelconque du maillage au tétraèdre de référence. Nous exhiberons également dans cette partie l'expression du gradient et de la Hessienne de la solution selon son écriture avec les fonctions de forme.

Ensuite, nous évoquerons dans une autre partie la construction d'un estimateur d'erreur P2. Nous nous pencherons en réalité trois méthodes. La première sera basée sur la Hessienne de la solution ; la seconde sera quant à elle plutôt construite à partir du gradient de la solution calculée. Afin d'élargir le champ des possibles, nous aborderons également une troisième méthode, quant à elle toujours élaborée à partir du gradient de la solution calculée.

Enfin, nous exhiberons les résultats numériques que nous avons pu obtenir via les différentes méthodes mises au point. Nous constaterons ainsi si les méthodes évoquées fonctionnent ou non, et nous essayerons de donner des résultats quantitatifs également.

## Troisième partie

## NOTION DE MÉTRIQUE

Au sein de toute notre étude, la notion de **métrie** jouera un rôle essentiel. Il est donc important de redéfinir proprement ce qu'est une métrique, et de donner quelques définitions utiles pour la suite. Nous commencerons par donner une définition de ce qu'est une métrique en tant qu'objet, afin de comprendre à quoi cela sert d'introduire une telle notion. Puis, nous poserons les opérations classiques possibles pour de tels outils. Afin d'écrire cette partie, nous nous sommes appuyés principalement sur deux documents : la thèse de Jiaxin Zhao, intitulée *Direct multiphase mesh generation from 3D images using anisotropic mesh adaptation and a redistancing equation*, et la thèse de Cécile Dobrzynsky, intitulée *Adaptation de maillage anisotrope 3D et application à l'aéro-thermique des bâtiments*.

**DÉFINITION 1. MÉTRIQUE**

Un tenseur de métrique donné à un point  $P \in \mathbb{R}^3$  est une matrice carrée symétrique définie positive  $M(P)$  de taille 3 telle que l'on puisse l'écrire sous la forme suivante, avec  $a > 0, d > 0, f > 0$  et  $\det(M(P)) > 0$  :

$$M(P) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Si le champ de tenseurs métriques est continu, il induit une structure dite Riemannienne sur  $\mathbb{R}^3$ .

**REMARQUE 2.** Il est important de pouvoir entrevoir l'utilité de l'introduction d'un tel outil. En effet, une métrique permet de passer d'une figure dans l'espace Euclidien à la figure unité associée dans l'espace métrique Riemannien. Nous pouvons le constater par exemple sur les deux figures ci-dessous, respectivement en 2D et en 3D. Les  $h_i$  désignent les tailles locales dans chaque direction du tenseur métrique  $\mathcal{M}$ , et les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{M}$ .

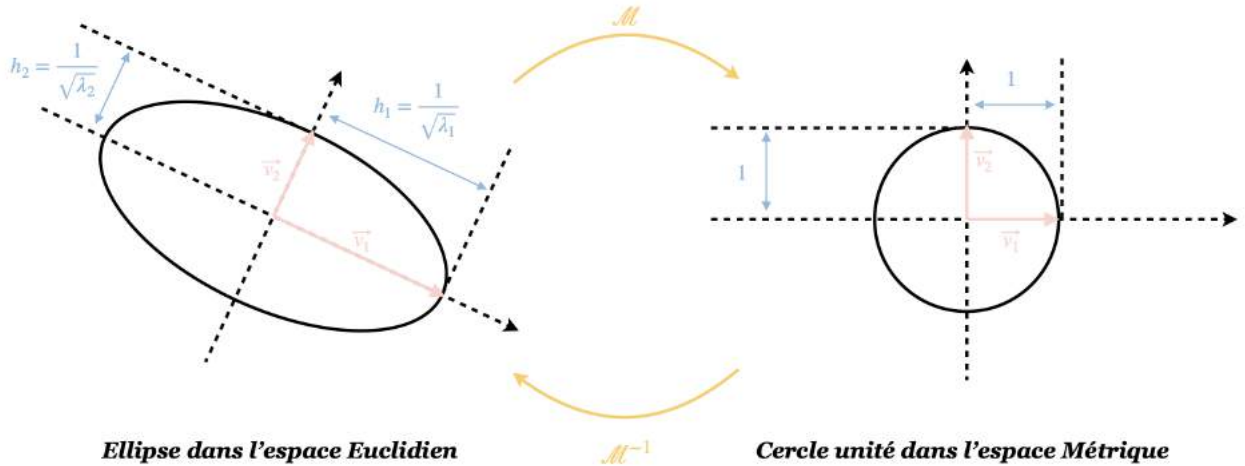


FIGURE 3 – Représentation de la transformation d'une ellipse (2D) dans l'espace Euclidien en le cercle unité dans l'espace métrique



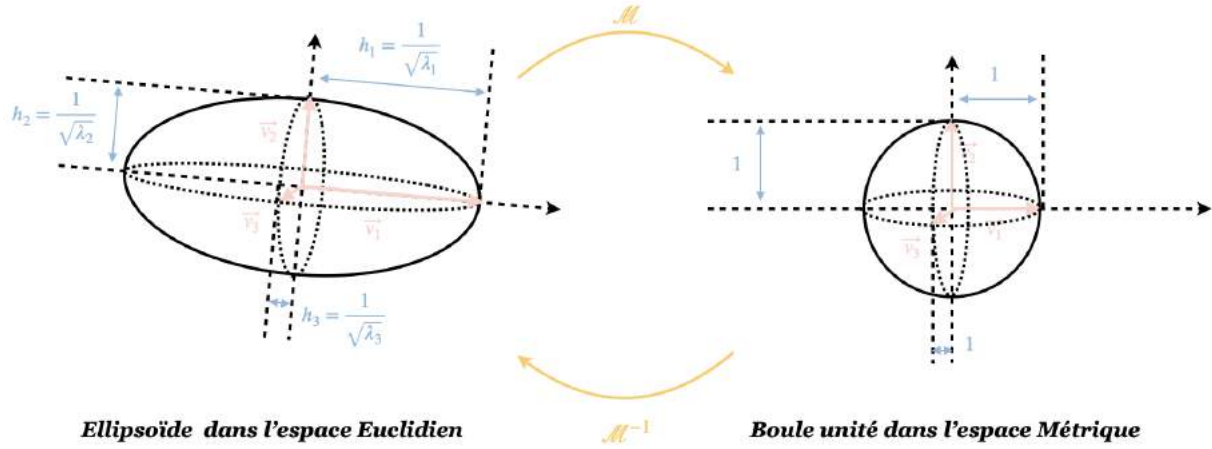


FIGURE 4 – Représentation de la transformation d'une ellipsoïde (3D) dans l'espace Euclidien en la boule unité dans l'espace métrique

**EXEMPLE 3.** Sur un triangle de base  $h_x$  et de hauteur  $h_y$ , rectangle en  $P$ , nous pouvons déterminer la métrique suivante au point  $P$  :

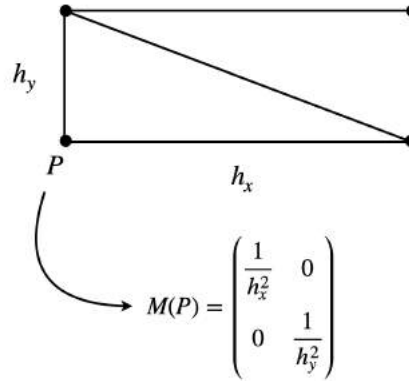


FIGURE 5 – Exemple de métrique sur une figure simple

**REMARQUE 4.** Dans le cas où la métrique est indépendante du point  $P$ , on se retrouve dans le cadre euclidien classique.

**DÉFINITION 5. PRODUIT SCALAIRE**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , le produit scalaire dans l'espace euclidien classique pour une métrique  $M$  est défini ainsi :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_M = \vec{u}^T M \vec{v} = \langle \vec{u}, M \vec{v} \rangle$$

**DÉFINITION 6. NORME**

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ , on définit la norme euclidienne de  $\vec{u}$  pour une métrique  $M$  de la manière suivante :

$$\|\vec{u}\|_M = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_M} = \sqrt{\vec{u}^T M \vec{u}}$$

**DÉFINITION 7. DISTANCE**

Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathbb{R}^3$ , on définit la distance entre le point  $A$  et le point  $B$  dans l'espace euclidien classique pour la métrique  $M$  par la relation :

$$d_M(A, B) = \|\vec{AB}\|_M = \sqrt{\vec{AB}^T M \vec{AB}}$$

Nous disposons donc des notions importantes et qui seront utilisées à propos des métriques par la suite. Ces notions vont nous permettre de définir plus précisément via des formules les outils dont nous avons besoin.

## Quatrième partie

# GÉNÉRATION ET ADAPTATION DE MAILLAGE

Cette partie est réalisée grâce à plusieurs écrits. Le premier qui a été utile à la compréhension de la notion de génération et d'adaptation de maillage est sans aucun doute la thèse de Cécile Dobrzynsky, intitulée *Adaptation de maillage anisotrope 3D et application à l'aéro-thermique*. Le second document qui m'a été utile est le document d'Adrien Loseille, *Mesh Generation and Adaptation for scientific computing*, bien qu'un peu moins abordable de prime abord.

## 1 OBJECTIF

Il est nécessaire dans un premier temps de poser quelques définitions.

### DÉFINITION 8. MAILLAGE ANISOTROPE

Un maillage anisotrope est un maillage dont la taille des mailles est non uniforme en espace et en direction. La taille des mailles peut alors être étirée dans des directions précises.

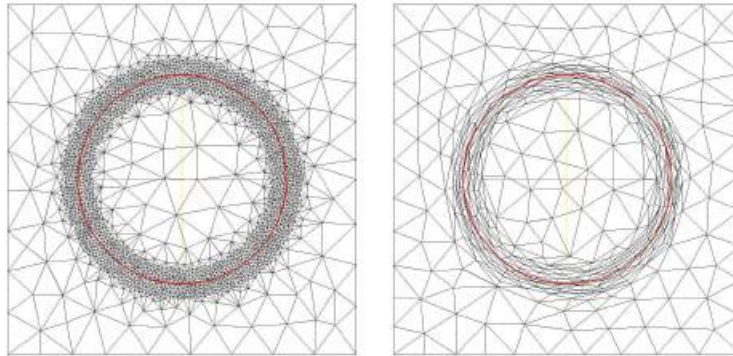


FIGURE 6 – Maillage isotrope à gauche et anisotrope à droite

### DÉFINITION 9. MAILLAGE UNITÉ

Un maillage unité est un maillage dont toutes les arêtes dans la métrique choisie sont de mesure 1 dans la métrique considérée. En pratique, on considère qu'un maillage est dit maillage unité si ses arêtes ont une mesure comprise entre  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\sqrt{2}$ .

L'objectif de la génération et de l'adaptation de maillage est de se rapprocher au plus possible du maillage unité.

## 2 GÉNÉRATION DE MAILLAGE

Il nous faut dans un premier temps donner la structure générale des méthodes d'adaptation de maillage. En effet, on trouve deux étapes principales. La première est l'étape de **génération du maillage de surface**. La seconde est la **génération du maillage volumique**. Souvent, dans la littérature, ces deux étapes sont effectuées en même temps.

On retrouve dans cette seconde étape deux grandes techniques : **la méthode frontale** et **la méthode de Delaunay**. En ce qui concerne la méthode frontale, on part donc du maillage de surface qui définit alors un ensemble de faces et on crée alors un ensemble de points optimaux à ajouter dans le maillage, filtrés au préalable, qui permettent dès lors de définir des tétraèdres. Dans la méthode de Delaunay, on part au contraire d'un maillage d'une boîte englobant le maillage de surface, composé de six tétraèdres initiaux, et on complète alors ce maillage pour le rendre plus fin.

## 3 MÉTHODES D'ADAPTATION DE MAILLAGES

On distingue trois grands types de méthodes d'adaptation de maillages :

- Les **R-méthodes**
- Les **P-méthodes**
- Les **H-méthodes**

Les **R-méthodes** sont des méthodes qui consistent à déplacer des sommets du maillage existant pour modifier la densité de sommets à certains endroits du maillage.

En ce qui concerne les **P-méthodes**, le "p" fait référence à l'ordre du maillage, c'est-à-dire au degré des polynômes utilisés pour représenter les solutions numériques sur le maillage. Les p-méthodes permettent de faire varier localement l'ordre du maillage en fonction des besoins. Plus concrètement, cela signifie que dans les zones où une résolution fine est nécessaire, un degré de maillage élevé est utilisé pour une meilleure précision, tandis que dans les zones où une résolution moins fine est suffisante, un degré de maillage plus faible.

Les **H-méthodes** se divisent en deux grands groupes de méthodes. Tout d'abord, on trouve les méthodes par **raffinement**. Ces méthodes consistent à subdiviser ou fusionner des éléments déjà existant pour en former de nouveaux. Le second type de méthodes est l'ensemble des méthodes par **remaillage**. Elles consistent à modifier le maillage afin de s'adapter à des tailles et des directions prescrites. Parmi ces méthodes par remaillage, on trouve de nouveau deux sous catégories : les méthodes par **remaillage global** et les méthodes par **remaillage local**. En ce qui concerne les méthodes par remaillage global, on reconstruit un nouveau maillage complètement. Pour le remaillage local, on applique une procédure itérative, ce qui garantit donc la certitude de toujours obtenir un maillage valide, et on utilise dès lors différents opérateurs afin d'ajuster les tailles d'arêtes. En effet, les arêtes trop longues sont subdivisées en plusieurs arêtes de longueur unité, et les arêtes trop courtes seront détruites. Parmi les méthodes par remaillage local, on distingue deux types de modifications possibles : les modifications **topologiques** comme les insertions, suppressions ou bougés de points, et les modifications **géométriques** telles que des bascules de faces ou d'arêtes.

## 4 ÉVALUATION DE LA QUALITÉ D'UN MAILLAGE

On peut, dès lors que l'on obtient un maillage, évaluer sa qualité. Pour cela, on dispose de deux dispositifs. Le premier critère évaluant la qualité d'un maillage qui est mis à notre disposition est le critère de **volume**. Il assure la conformité du maillage, et permet d'avoir des éléments d'un volume unité. Le second critère est un critère de **qualité géométrique**.

## 5 LES ÉTAPES ALGORITHMIQUES D'ADAPTATION DE MAILLAGE

Pour adapter un maillage, on suit différentes étapes :

- Tout d'abord on considère un premier maillage grossier du domaine, donné
- Ensuite, on détermine la **métrique** associée à un tel maillage
- On calcule l'erreur grâce à un **estimateur d'erreur** commise sur le maillage donné en comparaison avec un maillage unité
- On ajuste alors le maillage via les méthodes décrites précédemment
- On détermine la métrique associée au nouveau maillage
- On recommence jusqu'à obtenir un maillage unité

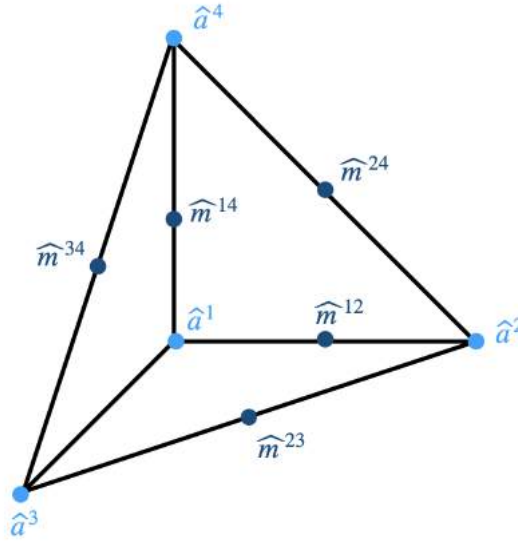
L'étape cruciale qui va nous intéresser lors de ce travail est l'étape portant sur l'estimateur d'erreur. En effet, nous désirons mettre en oeuvre un estimateur d'erreur P2.

## Cinquième partie

TÉTRAÈDRES DE TYPE 2 DANS  $\mathbb{R}^3$ 

Dans cette partie, nous nous intéressons aux transformations permettant de passer d'un tétraèdre quelconque du maillage au tétraèdre de référence. Toute la réflexion mise en place a pour origine le cours d'Anaïs Crestetto sur les éléments finis, qui était fait en 2D, et qui a donc été ici adapté en 3D. L'objectif de cette partie est de rappeler l'expression des fonctions de forme, également appelées fonctions de base, de déterminer l'application permettant de passer d'un tétraèdre quelconque du maillage au tétraèdre de référence et inversement. Ensuite, pour un besoin ultérieur, nous exprimerons le gradient des fonctions de forme ainsi que la matrice Hessienne.

On considère le tétraèdre de référence dans  $\mathbb{R}^3$ , noté  $\hat{K}$ , de sommets  $\hat{a}^1 = (0; 0; 0)$ ,  $\hat{a}^2 = (1; 0; 0)$ ,  $\hat{a}^3 = (0; 1; 0)$  et  $\hat{a}^4 = (0; 0; 1)$ . On place également les points milieux des arêtes d'extrémités  $\hat{a}^i$  et  $\hat{a}^j$ , notés  $\hat{m}^{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ .

FIGURE 7 – Tétraèdre de référence dans  $\mathbb{R}^3$ 

Soit

$$\mathbb{P}_{\hat{K}} = \left\{ \begin{array}{l} p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow a + bx + cy + dz + exy + fxz + gyz + hx^2 + iy^2 + jz^2 \end{array} \right\}$$

Soit

$$\Sigma_{\hat{K}} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i, 1 \leq i \leq 10, \sigma_i : \mathbb{P}_{\hat{K}} \rightarrow \mathbb{R} \\ p \rightarrow p(\hat{a}^i) \text{ si } 1 \leq i \leq 4 \\ p \rightarrow p(\hat{m}^{kj}) \text{ si } i = 10 - (k + j) \text{ et } 1 \leq k < j \leq 4 \end{array} \right\}$$

On souhaite désormais exhiber une base canonique de  $(\hat{K}, \mathbb{P}_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ . Au passage, en trouvant une telle base canonique, cela démontrera que  $(\hat{K}, \mathbb{P}_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$  est bien un élément fini (puisque  $\dim \mathbb{P}_{\hat{K}} = 10 = \text{card } \Sigma_{\hat{K}}$ ).

**PROPOSITION 10. FONCTIONS DE BASE**

Les expressions détaillées des fonctions de base de manière développée sont les suivantes :

$$\hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \lambda_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})(2\lambda_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) - 1) = (1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y} - 2\hat{z})$$

$$\hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \lambda_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})(2\lambda_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) - 1) = \hat{x}(2\hat{x} - 1)$$

$$\hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \lambda_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})(2\lambda_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) - 1) = \hat{y}(2\hat{y} - 1)$$

$$\hat{\Phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \lambda_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})(2\lambda_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) - 1) = \hat{z}(2\hat{z} - 1)$$

$$\hat{\Phi}_5(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\lambda_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\lambda_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})$$

$$\hat{\Phi}_6(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\lambda_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\lambda_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})$$

$$\hat{\Phi}_7(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\lambda_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\lambda_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})$$

$$\hat{\Phi}_8(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\lambda_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\lambda_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\hat{x}\hat{y}$$

$$\hat{\Phi}_9(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\lambda_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\lambda_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\hat{x}\hat{z}$$

$$\hat{\Phi}_{10}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\lambda_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\lambda_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 4\hat{y}\hat{z}$$

**DÉMONSTRATION**

La preuve est réalisée en annexe car très calculatoire.

□

Désormais on considère un tétraèdre quelconque du domaine, on le note  $K$ . On désire trouver une application  $F_K$  qui envoie  $\hat{K}$  sur  $K$ .

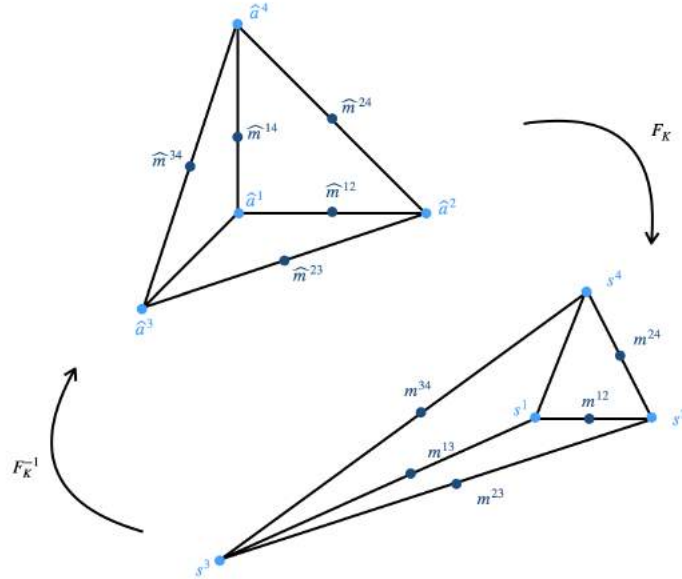


FIGURE 8 – Passage d'un tétraèdre quelconque au tétraèdre de référence

On a de plus  $F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \sum_{i=1}^4 \hat{\Phi}_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) S^i$ , où les  $S^i$  sont les sommets de  $K$ . Si on note  $S^i = (x_i, y_i, z_i)$ , alors on obtient :

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \hat{x} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \hat{y} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} + \hat{z} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

Nous avons également besoin de déterminer  $F_K^{-1}$ . Ce travail est un peu plus fastidieux, et nécessite davantage de calculs. En effet, si on pose  $F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z)$ , il nous faut déterminer  $\hat{x}, \hat{y}$  et  $\hat{z}$  en fonction de  $x, y$  et  $z$ . Résolvons donc le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + \hat{x}(x_2 - x_1) + \hat{y}(x_3 - x_1) + \hat{z}(x_4 - x_1) = x \\ y_1 + \hat{x}(y_2 - y_1) + \hat{y}(y_3 - y_1) + \hat{z}(y_4 - y_1) = y \\ z_1 + \hat{x}(z_2 - z_1) + \hat{y}(z_3 - z_1) + \hat{z}(z_4 - z_1) = z \end{cases}$$

### PROPOSITION 11. SOLUTION DU SYSTÈME

La solution du système précédent est :

$$\hat{z} = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y - y_1)(z_2 - z_1) - (z - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ - \frac{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}$$

$$\hat{y} = \frac{(y - y_1)(z_2 - z_1) - (z - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ - \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y - y_1)(z_2 - z_1) - (z - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ - \frac{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ \times \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}$$

$$\hat{x} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \left( \frac{(y - y_1)(z_2 - z_1) - (z - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \right. \\ - \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y - y_1)(z_2 - z_1) - (z - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ - \frac{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ \left. \times \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \right) \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \\ - \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y - y_1)(z_2 - z_1) - (z - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} \\ - \frac{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}$$

### DÉMONSTRATION

La preuve est réalisée en annexe car très calculatoire.

□



On a donc pleinement déterminé  $F_K^{-1}$ . On notera, par souci de simplicité d'écriture,  $F_K^{-1(i)}$  la  $i$ -ème composante de la fonction. Ainsi :

$$F_K^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_K^{-1(1)}(x, y, z) \\ F_K^{-1(2)}(x, y, z) \\ F_K^{-1(3)}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Désignons par  $u$  la solution au problème étudié sur notre maillage. Sur le tétraèdre  $K$ , on a donc  $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{10} \Phi_i(x, y, z)u_i$ , où  $\Phi_i(x, y, z) = \hat{\Phi}_i \circ F_K^{-1}(x, y, z)$ . On peut de même déterminer le gradient de  $u$  de sorte que :

$$\begin{aligned} \nabla u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{10} \nabla \Phi_i(x, y, z)u_i \\ \iff \nabla u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{10} \nabla (\hat{\Phi}_i \circ F_K^{-1})(x, y, z)u_i \\ \iff \nabla u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{10} \text{Jac } F_K^{-1}(x, y, z) \times \nabla \hat{\Phi}_i \circ F_K^{-1}(x, y, z)u_i \end{aligned}$$

où  $\text{Jac } F_K^{-1}$  désigne la matrice Jacobienne de l'application  $F_K^{-1}$ . Il nous faut donc déterminer  $\nabla \hat{\Phi}_i$  pour tout  $1 \leq i \leq 10$ , ainsi que la matrice  $\text{Jac } F_K^{-1}$ .

Les calculs des expressions mises en jeu sont réalisés en annexe car ils sont assez longs. On suppose donc ces expressions connues pour la suite.

De plus, nous aurons également besoin par la suite de calculer la matrice Hessienne de  $u$ . Puisque cette dernière fait apparaître des dérivées d'ordre 2, et qu'on applique une méthode des éléments finis P2, la matrice Hessienne sera donc a priori composée uniquement de constantes, qu'il nous reste à déterminer.

Soient  $x_i, x_j$  deux variables parmi  $x, y$  et  $z$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_j}(x, y, z)u_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \hat{\Phi}_k \circ F_K^{-1} \right)(x, y, z)u_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F_K^{-1}}{\partial x_j}(x, y, z) \times \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial x_j} \circ F_K^{-1}(x, y, z) \right)u_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left( \frac{\partial^2 F_K^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(x, y, z) \times \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial x_j} \circ F_K^{-1}(x, y, z) + \frac{\partial F_K^{-1}}{\partial x_j}(x, y, z) \times \frac{\partial F_K^{-1}}{\partial x_i}(x, y, z) \times \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_k}{\partial x_i \partial x_j} \circ F_K^{-1}(x, y, z) \right)u_k \end{aligned}$$

Cependant, on sait que  $F_K$ , tout comme  $F_K^{-1}$  sont des transformation affines donc d'ordre 1. Par conséquent, les dérivées secondes de celles-ci seront obligatoirement nulles. On a donc la simplification suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, y, z) = \sum_{k=1}^{10} \left( \frac{\partial F_K^{-1}}{\partial x_j}(x, y, z) \times \frac{\partial F_K^{-1}}{\partial x_i}(x, y, z) \times \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_k}{\partial x_i \partial x_j} \circ F_K^{-1}(x, y, z) \right)u_k$$

Il nous faut donc expliciter les dérivées secondes des  $\hat{\Phi}_k$ . Les constantes obtenues sont explicitées en annexe. Nous avons donc pleinement déterminé la matrice Hessienne  $H_u$ .

## Sixième partie

## ESTIMATEUR D'ERREUR P2

Dans cette partie, nous abordons la notion d'estimateur d'erreur. Pour démarrer notre réflexion, nous nous sommes appuyés principalement sur trois ouvrages. Le premier est le document co-écrit par Pascal Frey et Frédéric Alauzet, *Anisotropic mesh adaptation for CFD computation*. Le second reste la thèse de Cécile Dobrzynsky, *Adaptation de maillage anisotrope 3D et application à l'aéro-thermique des bâtiments*. Le dernier document qui a permis de mieux apprivoiser la notion d'estimateur d'erreur est le document de Pascal Frey, intitulé *Estimateurs d'erreur géométriques et adaptation de maillages*.

## 6 NOTION D'ERREUR D'INTERPOLATION

La notion d'**erreur d'interpolation** est une notion clé pour la suite du travail. En effet, comme nous le détaillerons un peu plus tard, nous construirons notre estimateur d'erreur à partir de l'erreur d'interpolation.

**DÉFINITION 12. ERREUR D'INTERPOLATION SUR UN TÉTRAÈDRE  $K$** 

Soit  $K = [a, b, c, d]$  un tétraèdre quelconque. Soit  $u$  la solution au problème considéré. On note  $\pi_h u$  l'**interpolée** de  $u$  sur  $K$  et on définit  $\pi_h u$  comme étant un polynôme tel que  $u(a) = \pi_h u(a), u(b) = \pi_h u(b), u(c) = \pi_h u(c)$  et  $u(d) = \pi_h u(d)$ . On définit l'**erreur d'interpolation**  $e$  par :

$$e_{\text{interpol}} = \|u - \pi_h u\|_{L^\infty(K)}$$

**THÉORÈME 13.** Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des tétraèdres du maillage sur le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , et soit  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière. Soit  $K \in \mathcal{K}$  un élément du maillage quelconque. On note  $\pi_h u$  l'interpolée de  $u$  sur  $K$ . Alors, en notant  $H_u$  la matrice Hessienne de  $u$ , on a la majoration suivante :

$$e_{\text{interpol}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^2 \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} | \langle H_u(x)e, e \rangle |$$

**DÉMONSTRATION**

Soit  $K$  un simplexe de dimension 3, ie un tétraèdre de notre maillage. Soit  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière, la solution du problème étudiée. Soit  $\pi_h u$  l'interpolée de cette solution.

Alors on a  $u(a) = \pi_h u(a), u(b) = \pi_h u(b), u(c) = \pi_h u(c)$  et  $u(d) = \pi_h u(d)$ . De plus, on peut écrire également les lignes suivantes :

$$\begin{aligned} (u - \pi_h u)(a) &= (u - \pi_h u)(x) + \langle \vec{x}\vec{a}, \nabla_u(u - \pi_h u)(x) \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{a}\vec{a}, H_u(x + t_1 \vec{x}\vec{a}) \vec{a}\vec{a} \rangle, \quad t_1 \in [0, 1] \\ (u - \pi_h u)(b) &= (u - \pi_h u)(x) + \langle \vec{x}\vec{b}, \nabla_u(u - \pi_h u)(x) \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{b}\vec{b}, H_u(x + t_2 \vec{x}\vec{b}) \vec{b}\vec{b} \rangle, \quad t_2 \in [0, 1] \\ (u - \pi_h u)(c) &= (u - \pi_h u)(x) + \langle \vec{x}\vec{c}, \nabla_u(u - \pi_h u)(x) \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{c}\vec{c}, H_u(x + t_3 \vec{x}\vec{c}) \vec{c}\vec{c} \rangle, \quad t_3 \in [0, 1] \\ (u - \pi_h u)(d) &= (u - \pi_h u)(x) + \langle \vec{x}\vec{d}, \nabla_u(u - \pi_h u)(x) \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{d}\vec{d}, H_u(x + t_4 \vec{x}\vec{d}) \vec{d}\vec{d} \rangle, \quad t_4 \in [0, 1] \end{aligned}$$

On cherche à majorer  $e_{\text{interpol}}$  donc on cherche un extremum ou encore un  $x \in K$  en lequel cet extremum est atteint. Deux cas sont alors possibles :

- Soit  $x$  est dans l'intérieur de  $K$ , ie  $\overset{\circ}{K}$ . Alors  $\nabla_u(u - \pi_h u)(x) = 0$ , ou encore  $\langle \vec{v}, \nabla_u(u - \pi_h u)(x) \rangle = 0 \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . Ainsi, on a en particulier :

$$0 = (u - \pi_h u)(x) + \frac{1}{2} \langle \vec{a}x, H_u(x + t_1 \vec{a}) \vec{a}x \rangle$$

$$0 = (u - \pi_h u)(x) + \frac{1}{2} \langle \vec{b}x, H_u(x + t_2 \vec{b}) \vec{b}x \rangle$$

$$0 = (u - \pi_h u)(x) + \frac{1}{2} \langle \vec{c}x, H_u(x + t_3 \vec{c}) \vec{c}x \rangle$$

$$0 = (u - \pi_h u)(x) + \frac{1}{2} \langle \vec{d}x, H_u(x + t_4 \vec{d}) \vec{d}x \rangle$$

En sommant les quatre égalités, on trouve alors :

$$0 = 4(u - \pi_h u)(x) + \frac{1}{2} \left( \langle \vec{a}x, H_u(x + t_1 \vec{a}) \vec{a}x \rangle + \langle \vec{b}x, H_u(x + t_2 \vec{b}) \vec{b}x \rangle + \langle \vec{c}x, H_u(x + t_3 \vec{c}) \vec{c}x \rangle + \langle \vec{d}x, H_u(x + t_4 \vec{d}) \vec{d}x \rangle \right)$$

Posons  $M$  tel que :

$$M = \max_{x \in K} \max_{\|\vec{v}\|=1} |\langle \vec{v}, H_u(x) \vec{v} \rangle|$$

Alors on a la majoration suivante :

$$|(u - \pi_h u)(x)| \leq \frac{1}{8} \left( \|\vec{a}x\|^2 + \|\vec{b}x\|^2 + \|\vec{c}x\|^2 + \|\vec{d}x\|^2 \right) M$$

Par définition,  $x$  s'écrit sous la forme :  $x = \lambda_a a + \lambda_b b + \lambda_c c + \lambda_d d$  avec  $\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \lambda_d = 1$ . Alors on peut écrire les différents vecteurs sous la forme décomposée suivante :

$$\vec{a}x = \lambda_b \vec{a}b + \lambda_c \vec{a}c + \lambda_d \vec{a}d$$

$$\vec{b}x = \lambda_a \vec{b}a + \lambda_c \vec{b}c + \lambda_d \vec{b}d$$

$$\vec{c}x = \lambda_a \vec{c}a + \lambda_b \vec{c}b + \lambda_d \vec{c}d$$

$$\vec{d}x = \lambda_a \vec{d}a + \lambda_b \vec{d}b + \lambda_c \vec{d}c$$

On en déduit alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|\vec{a}x\|^2 + \|\vec{b}x\|^2 + \|\vec{c}x\|^2 + \|\vec{d}x\|^2 &\leq (\lambda_b^2 + \lambda_a^2) \|\vec{a}b\|^2 + (\lambda_c^2 + \lambda_a^2) \|\vec{a}c\|^2 + (\lambda_d^2 + \lambda_a^2) \|\vec{a}d\|^2 \\ &\quad + (\lambda_c^2 + \lambda_b^2) \|\vec{b}c\|^2 + (\lambda_d^2 + \lambda_b^2) \|\vec{b}d\|^2 + (\lambda_d^2 + \lambda_c^2) \|\vec{c}d\|^2 + \\ &\quad 2 \left( \lambda_b \lambda_c \langle \vec{a}b, \vec{a}c \rangle + \lambda_b \lambda_d \langle \vec{a}b, \vec{a}d \rangle + \lambda_c \lambda_d \langle \vec{a}c, \vec{a}d \rangle \right. \\ &\quad + \lambda_a \lambda_c \langle \vec{b}a, \vec{b}c \rangle + \lambda_a \lambda_d \langle \vec{b}a, \vec{b}d \rangle + \lambda_c \lambda_d \langle \vec{b}c, \vec{b}d \rangle \\ &\quad + \lambda_a \lambda_b \langle \vec{c}a, \vec{c}b \rangle + \lambda_a \lambda_d \langle \vec{c}a, \vec{c}d \rangle + \lambda_b \lambda_d \langle \vec{c}b, \vec{c}d \rangle \\ &\quad \left. + \lambda_a \lambda_b \langle \vec{d}a, \vec{d}b \rangle + \lambda_a \lambda_c \langle \vec{d}a, \vec{d}c \rangle + \lambda_b \lambda_c \langle \vec{d}b, \vec{d}c \rangle \right) \end{aligned}$$

Soit  $L$  la longueur de la plus grande arête de  $K$ . Alors, on peut majorer davantage l'inégalité précédente pour obtenir finalement :

$$\| \vec{ax} \|^2 + \| \vec{bx} \|^2 + \| \vec{cx} \|^2 + \| \vec{dx} \|^2 \leq \left( 3[\lambda_b^2 + \lambda_a^2 + \lambda_c^2 + \lambda_d^2] + 4[\lambda_b\lambda_c + \lambda_b\lambda_d + \lambda_c\lambda_d + \lambda_a\lambda_c + \lambda_a\lambda_d + \lambda_b\lambda_b] \right) L^2$$

On identifie facilement que l'extremum est atteint au barycentre de  $K$ , ie lorsque  $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = \lambda_d = \frac{1}{4}$ . Par conséquent, on obtient :

$$| (u - \pi_h u)(x) | \leq \frac{9}{32} L^2 M$$

- Si l'extremum est atteint sur une face de  $K$ , arêtes non comprises, alors on peut raisonner de manière similaire à ce qui a été fait précédemment mais dans un triangle, puisque les faces du tétraèdre sont par définition triangulaires. Supposons par simplicité d'écriture que  $x$  soit sur la face composée des points  $a, b$  et  $c$ . Alors on peut reprendre la même preuve que dans le point précédent en considérant  $\lambda_d = 0$ . On obtient dès lors le même résultat.
- Si l'extremum n'est pas atteint dans l'intérieur de  $K$ , alors il correspond à une arête de  $K$ . Supposons que ce soit l'arête  $[ab]$  par simplicité d'écriture, mais pour les autres arêtes le procédé serait le même. Le gradient s'annule donc selon  $\vec{ab}$  :

$$0 = 2(u - \pi_h u)(x) + \frac{1}{2} \langle \vec{ax}, H_u(x + t_1 x \vec{a}) \vec{ax} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{bx}, H_u(x + t_2 x \vec{b}) \vec{bx} \rangle$$

On définit alors  $M$  tel que :

$$M = \max_{x \in [ab]} \max_{\|v\|=1} | \langle \vec{v}, H_u(x) \vec{v} \rangle |$$

Alors on aboutit à la majoration suivante, en posant la même définition de  $L$  que dans le point précédent :

$$\begin{aligned} | (u - \pi_h u)(x) | &\leq \frac{1}{8} \| \vec{ab} \|^2 M \\ &\leq \frac{1}{8} L^2 M \\ &\leq \frac{9}{32} L^2 M \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, on obtient la majoration suivante :  $| (u - \pi_h u)(x) | \leq \frac{9}{32} L^2 M$ . De plus, puisque chaque vecteur  $\vec{v}$  de  $K$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des arêtes de  $K$ , il vient :

$$\| \vec{v} \|_{|H_u|} \leq \max_{e \in E_K} \| e \|_{|H_u|}$$

Cela nous conduit donc au résultat désiré, c'est à dire :

$$e_{\text{interpol}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^2 \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} | \langle H_u(x) e, e \rangle |$$

□

## 7 LIEN ENTRE L'ERREUR ET L'ERREUR D'INTERPOLATION

Nous n'étudions pas, à priori, directement l'erreur d'interpolation. En effet, l'erreur qui nous intéresse est celle définie de la manière suivante :

**DÉFINITION 14. ERREUR**

Soit  $u$  la solution exacte au problème étudié, et soit  $u_h$  la solution calculée par une méthode d'éléments finis. Soit  $K$  un tétraèdre du maillage quelconque. On note  $e$  l'**erreur** sur  $K$ , définie ainsi :

$$e = \| u - u_h \|_{L^\infty(K)}$$

Nous désirons donc relier l'erreur qui nous intéresse avec l'erreur d'interpolation. Pour cela, nous avons besoin de rappeler un théorème et un lemme tous deux essentiels.

**THÉORÈME 15. LAX-MILGRAM**

Soit  $V$  un espace de Hilbert. Soit  $a(.,.)$  une forme bilinéaire continue et  $V$ -coercive. Soit  $l(.)$  une forme linéaire continue sur  $V$ . Alors le problème variationnel "trouver  $u \in V$  tel que  $a(u, v) = l(v) \forall v \in V$  admet une unique solution.

**LEMME 16. CÉA**

Soient  $V$  un espace de Hilbert,  $a(.,.)$  une forme bilinéaire, et  $l$  une forme linéaire satisfaisant les hypothèses du théorème de **Lax-Milgram**. Soit  $V_h$  un sous espace fermé de  $V$ . Alors il existe un unique  $u_h \in V_h$  tel que  $\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$ . De plus, nous avons :

$$\| u - u_h \|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \| u - v_h \|_V = \frac{M}{\alpha} d(u, V_h)$$

où  $M$  est la constante de continuité et  $\alpha$  la constante de coercivité.

Ainsi, le lemme de Céa nous indique que pour des problèmes elliptiques, l'erreur est majorée par l'erreur d'interpolation. En pratique, on se rend compte que cette inégalité reste de vraie pour des problèmes non elliptiques, mais nous ne possédons pas de preuve de ce résultat.

## 8 CONSTRUCTION D'UN PREMIER ESTIMATEUR D'ERREUR À PARTIR DE LA HESSIENNE

Comme mentionné dans les parties précédentes, nous avons pu effectuer la majoration suivante pour l'erreur d'interpolation :

$$e_{\text{interpol}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^2 \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} | \langle H_u(x) e, e \rangle |$$

De plus, la section précédente nous a permis de justifier que l'erreur était majorée par l'erreur d'interpolation. Par conséquent, on en déduit la majoration suivante :

$$e \leq \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^2 \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} | \langle H_u(x) e, e \rangle |$$

Nous allons nous servir de cette majoration pour construire un estimateur d'erreur adéquat, afin de déduire les nouvelles métriques appropriées. En effet, on ne peut pas directement poser l'estimateur d'erreur comme étant égal au membre de droite de l'inégalité, puisque trop complexe à calculer. Il nous faut donc partir de cette formulation afin d'en déduire une plus simple.

### PROPOSITION 17. MAJORATION DE L'ERREUR

On peut majorer l'erreur par la quantité suivante :

$$e \leq \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^2 \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} | \langle H_u(x) | e, e \rangle |$$

### DÉMONSTRATION

La matrice Hessienne,  $H_u$  est une matrice  $3 \times 3$  symétrique. Par conséquent, on peut la décomposer de la manière suivante :

$$| H_u | = R | \Lambda | R^{-1} \quad \text{avec} \quad | \Lambda | = \begin{pmatrix} | \lambda_1 | & 0 & 0 \\ 0 & | \lambda_2 | & 0 \\ 0 & 0 & | \lambda_3 | \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  désignent les valeurs propres de  $H_u$  et  $R$  désigne la matrice de passage, composée des vecteurs propres associés aux  $\lambda_i, 1 \leq i \leq 3$ . Par conséquent, on a la majoration suivante :

$$e \leq \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^2 \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} | \langle H_u(x) | e, e \rangle |$$

□

La complexité réside en le calcul des deux maxima informatiquement dans la majoration. L'objectif de l'estimateur d'erreur est de définir par la suite une nouvelle métrique en chaque noeud pour adapter la taille des éléments.

Supposons qu'il existe un tenseur métrique  $\bar{\mathcal{M}}(K)$  tel que la région définie par  $\{ \langle \vec{v}, \bar{\mathcal{M}}(K) \vec{v} \rangle, \forall \vec{v} \subset K \}$  soit de volume minimal et tel que :

$$\max_{e \in E_K} | \langle H_u(x) | e, e \rangle | \leq \langle \bar{\mathcal{M}}(K) e, e \rangle$$

L'erreur peut être donc définie de la sorte :

$$e = \frac{9}{32} \max_{e \in E_K} \langle \bar{\mathcal{M}}(K) e, e \rangle$$

Soit  $\epsilon$  l'erreur maximale tolérée sur chacun des éléments du maillage, tel que :

$$\epsilon = \frac{9}{32} \max_{e \in E_K} \langle \bar{\mathcal{M}}(K)e, e \rangle$$

Posons  $\mathcal{M}(K)$  tel que  $\mathcal{M}(K) = \frac{9}{32\epsilon} \bar{\mathcal{M}}(K)$  le tenseur métrique désiré. Alors, la relation précédente devient :

$$\langle \mathcal{M}(K)e, e \rangle = 1 \quad \forall e \in E_K \quad \Longleftrightarrow \quad l_{\mathcal{M}(K)}(e)^2 = 1 \quad \forall e \in E_K$$

On peut définir la métrique cherchée de manière plus explicite :

**DÉFINITION 18. MÉTRIQUE RECHERCHÉE**

Soit  $\epsilon$  l'erreur tolérée sur les éléments. Soient  $h_{\min}$  et  $h_{\max}$  les tailles minimales et maximales des arêtes pour les éléments. Soient  $\lambda_i, 1 \leq i \leq 3$  les valeurs propres de la Hessienne  $H_u$ , telle que  $H_u = R\Lambda R^{-1}$  avec  $\Lambda$  la matrice composée des valeurs propres de  $H_u$  et  $R$  la matrice de passage composée des vecteurs propres associés. Alors :

$$\mathcal{M} = R\tilde{\Lambda}R^{-1} \quad \text{avec} \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix}$$

On a la définition des  $\tilde{\lambda}_i, 1 \leq i \leq 3$  suivante :

$$\tilde{\lambda}_i = \min \left( \max \left[ \frac{9}{32} \times \frac{|\lambda_i|}{\epsilon}, \frac{1}{h_{\max}^2} \right], \frac{1}{h_{\min}^2} \right)$$

L'objectif du travail étant de considérer un champ P2 continu pour le champ solution, cela implique que le champ des gradients sera P1 discontinu et que le champ de matrices Hessiennes sera à fortiori P0 discontinu. En résumé, nous obtenons une matrice Hessienne par élément de maillage et puisque la métrique est directement calculée à partir de cette dernière, nous obtenons par conséquent une métrique par élément de maillage. Cependant, afin d'adapter la taille des éléments, il nous faut prescrire au mailleur une métrique par noeud. La solution que nous avons adoptée est de considérer les noeuds un par un. Pour chacun des noeuds, on fait la moyenne des métriques calculées sur chacun des éléments auxquels le dit noeud appartient. Cette moyenne formera la nouvelle métrique au noeud à fournir au mailleur. On peut par exemple représenter ceci en 2D, par souci de lisibilité :

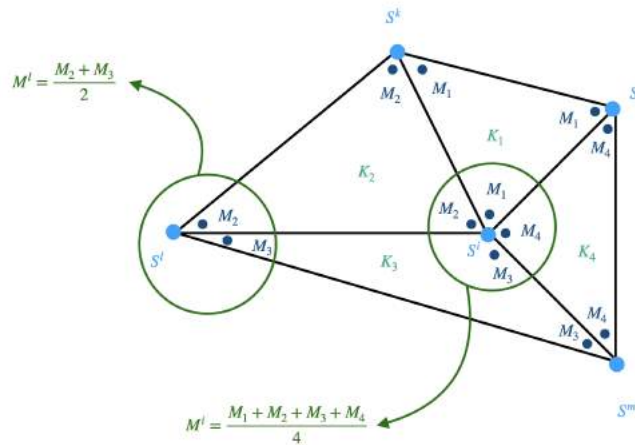


FIGURE 9 – Passage d'un champ métrique P0 discontinu à un champ métrique P1 continu

## 9 UTILISATION DU GRADIENT POUR LA CONSTRUCTION DE L'ESTIMATEUR D'ERREUR

La seconde méthode consiste à utiliser plutôt le gradient, à la place de la Hessienne. Cette méthode-ci est déjà codée en réalité pour le cas P1, mais on désire l'adapter au cas P2. Ce qui suit est valable en P1 comme en P2, sauf mention du contraire. On donnera dans cette partie les expressions des quantités mises en jeu lors du calcul de la nouvelle métrique. Le procédé est en réalité un peu différent de ce qui a été fait précédemment.

Rappelons tout d'abord quelques résultats. Désignons par  $u$  la solution exacte au problème cherchée, et par  $u_h$  son interpolation aux noeuds. Par conséquent, cela implique qu'aux noeuds du maillages on a pour chaque noeud  $x_i$  l'égalité  $u_h(x_i) = u(x_i)$ , par définition de l'interpolée.

On notera dans toute la suite  $X^{ij} = X^i - X^j$  pour n'importe quelle quantité  $X$ . Pour une arête, on note donc  $S^{ij}$  l'arête reliant les sommets  $S^i$  et  $S^j$ . En particulier, si on pose  $U^i = u(x_i) = u_h(x_i)$ , alors  $U^{ij} = U^i - U^j$ .

La méthode du gradient repose sur l'erreur selon l'arête. L'idée est d'estimer l'erreur selon chaque arête, puis de comparer cette erreur avec une erreur tolérée, choisie préalablement. Par la suite, il faut adapter la longueur des arêtes afin de respecter l'erreur tolérée suivant chaque arête.

### DÉFINITION 19. ERREUR SELON L'ARÊTE

Si l'on note  $e_{ij}$  l'erreur le long de l'arête reliant les sommets  $S^i$  et  $S^j$ , alors son expression est donnée par :

$$e_{ij} = |G^{ij} \cdot S^{ij}|$$

avec  $G^{ij}$  la différence entre la valeur du gradient en  $S^i$  et celle en  $S^j$ .

Toute la difficulté réside en le calcul de ce gradient. En effet, en P1, le gradient est continu. On peut donc facilement calculer le gradient aux différents noeuds, pour ensuite estimer l'erreur selon l'arête, et ensuite adapter la taille des arêtes et remailler facilement. La méthode, comme mentionné précédemment, a déjà été implémentée en P1. Notre objectif est donc de trouver une stratégie pour adapter cette méthode au cas P2. L'idée de la méthode en P1, c'est de calculer le gradient selon chaque arête, puis de déterminer l'erreur selon l'arête et enfin d'adapter le maillage, comme nous le décrivons un peu plus bas, grâce au **coefficient d'étirement selon l'arête**. Ce qui diffère dans le cas P2 par rapport au cas P1, c'est qu'on obtient des valeurs différentes de gradients pour le même noeud  $S^i$  selon l'élément  $K_j$  dans lequel on se place.

La première idée que nous avons eue a été d'adapter le code déjà mis en place pour calculer une "dérivée" plus appropriée à la situation. En d'autres termes, à la place de calculer le gradient, qui fournirait donc dans le cas P2 des résultats à priori non exploitables, on calcule une "dérivée" d'un ordre suffisant. Pour le cas P2, on calcule une "dérivée" d'ordre 2, pour un cas P3 une dérivée d'ordre "3", etc... Et on met cette "dérivée" à la place de  $G^{ij}$  dans notre formule et on procède dès lors comme en P1. Ceci représente la **méthode 2**.

L'autre approche consiste à trouver une manière de prendre en compte ces différentes valeurs de gradients afin de se ramener à un champ continu et de pouvoir donner une unique valeur du gradient à un noeud  $S^i$  donné. L'idée est d'effectuer une moyenne de toutes les valeurs calculées pour le noeud  $i$  dans chacun des éléments  $K_j$  contenant  $S^i$ , et d'attribuer ce vecteur moyenne comme nouvelle valeur du gradient au noeud  $S^i$ .

Afin de faciliter la compréhension de cette **troisième méthode**, on décide de d'abord se placer dans un cas 2D pour illustrer le principe de la méthode proposée. On désire dans cet exemple approximer la valeur du gradient au sommet  $S^i$ , contenu au sein de cinq éléments différents, notés respectivement  $K_1, K_2, K_3, K_4$  et  $K_5$ . La valeur du gradient au sommet indicé  $i$  dans l'élément indicé  $j$  sera donc notée  $G_j^i$ . Pour obtenir la valeur finale de  $G^i$ , il nous suffit alors de faire une moyenne des  $G_j^i$ . On obtient alors un champ de gradients P1 continu.



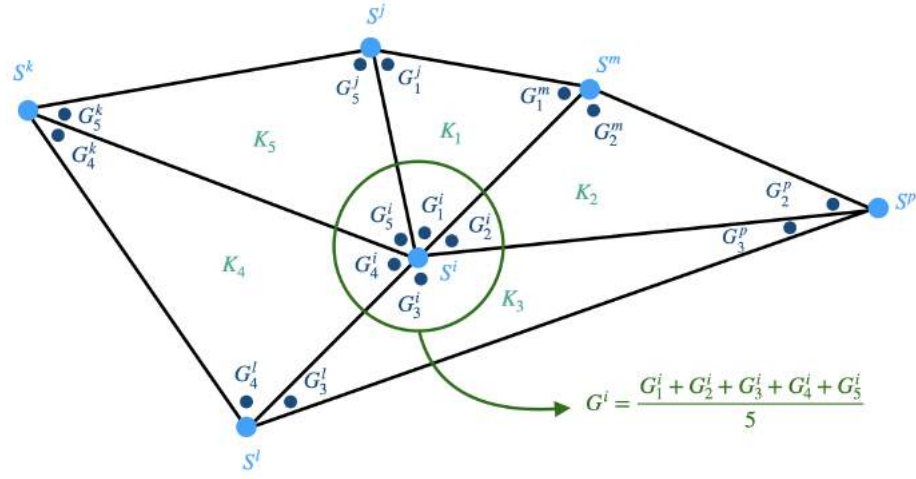


FIGURE 10 – Approximation du gradient au noeud en 2D

La valeur ainsi obtenue, quelque soit la méthode, pour l'erreur selon l'arête  $e_{ij}$  permet donc de calculer un nouvel élément : le **coefficient d'étirement**. Un tel coefficient va permettre d'ajuster la métrique en chaque point.

**DÉFINITION 20.** *COEFFICIENT D'ÉTIREMENT SELON L'ARÊTE*

On note  $k_{ij}$  le **coefficient d'étirement selon l'arête** reliant les sommets  $S^i$  et  $S^j$ , et sa formule est donnée par :

$$k_{ij} = \frac{e_{ij}}{e}$$

où  $e$  est l'erreur souhaitée pour que celle-ci soit équirépartie sur notre maillage.

À partir de ce coefficient d'étirement, on peut reconstruire une nouvelle métrique en chaque noeud du maillage, qu'il faudra dès lors fournir au mailleur afin que ce dernier puisse adapter le maillage précédent afin de se rapprocher au mieux du maillage unité.

**DÉFINITION 21.** *NOUVELLE MÉTRIQUE AU NOEUD  $i$*

La **nouvelle métrique** au sommet  $S^i$  est donnée par l'expression :

$$M_i = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{|\Gamma(i)|} \sum_j k_{ij}^2 S^{ij} \otimes S^{ij} \right)$$

Les procédés mis en place par le mailleur pour adapter le maillage, en accord avec les nouvelles métriques prescrites aux différents noeuds sont ceux décrit dans la partie sur la génération et l'adaptation de maillages.

## Septième partie

# TESTS SUIVANT LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

Cette partie comporte l'ensemble des résultats numériques obtenus lors de ce stage, ainsi que leurs interprétations.

## 10 PREMIER TEST AVEC LA MÉTHODE DU GRADIENT P1 EN 2D POUR LA VALIDATION DE LA STRUCTURE DU CODE

Afin de valider nos codes et notre structure d'appel aux différentes fonctions, nous avons dans un premier temps voulu faire quelques cas tests sur des éléments finis P1, et en 2D. Nous avons donc testé une méthode déjà codée et dont nous savions qu'elle devait fonctionner.

Nous partons donc d'un carré  $[0; 1] \times [0; 1]$  dont nous réalisons un premier maillage grossier initial, ci-après. Nous imposons un nombre de remaillages maximal, ainsi que des tailles minimales et maximales, en guise de sécurité, paramètres que nous fixerons ci-après.

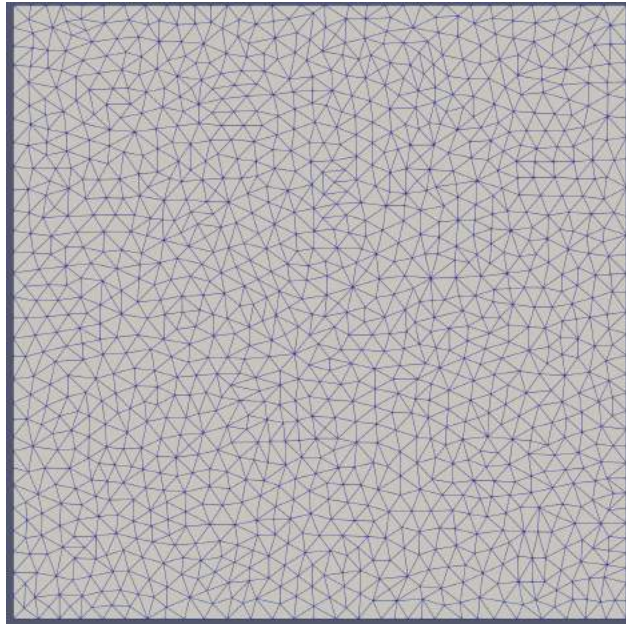


FIGURE 11 – Maillage initial

Nous imposons donc un champ solution  $u$  et effectuons le remaillage en fonction de celui-ci. Le champ  $u$  choisi est tiré du document intitulé *Aspects Théoriques et Numériques pour les Fluides Incompressibles*, rédigé par Pascal Frey et Yannick Privat. Nous pourrions donc par la suite comparer nos résultats aux leurs, afin de valider ou d'invalidier nos tests. Nous imposons donc le champ solution suivant :

$$u(x, y) = \tanh(-100[y - 0.5 - 0.25\sin(2\pi x)]) + \tanh(100[y - x])$$

L'estimateur d'erreur utilisé est basé sur l'erreur selon l'arête, calculée grâce au gradient, comme expliqué ci-dessus. Puisque nous sommes avec des éléments finis P1, le champ est continu et il est inutile pour le moment de faire une moyenne sur chaque noeud des différentes valeurs du gradient selon l'élément dans lequel le noeud se trouve.

Les résultats obtenus par Pascal Frey et Yannick Privat sont les suivants. À gauche se trouve leur maillage initial et à droite, leur maillage final.

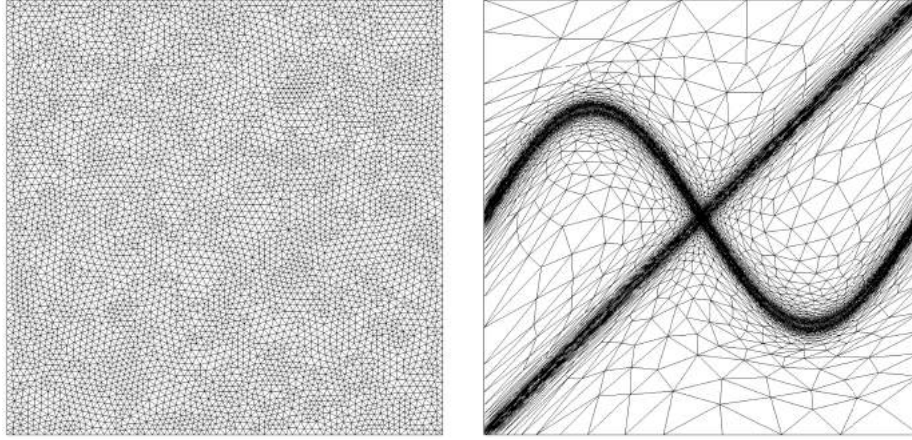


FIGURE 12 – Maillage initial et maillage final pour les tests de Frey et Privat

En ce qui concerne nos choix de paramètres, nous n'avions pas à notre disposition ceux choisis par Pascal Frey et Yannick Privat. Nous avons donc fait plusieurs tests pour nous rendre compte de ce qui fournissait le meilleur résultat. Nous avons fixé une taille d'arête devant être comprise  $h_{\min} = 0.001$  et  $h_{\max} = 0.4$ . Nous bloquons le processus tout d'abord à 5 remaillages. L'erreur répartie devrait être inférieure à  $2 \times 10^{-4}$ . Pour le côté parallèle, nous avons fixé un nombre de noeuds minimal à 8000 et maximal à 20000. Nous nous plaçons de plus sur un carré  $[0; 1] \times [0; 1]$ . Voici donc les résultats successifs des différents remaillages effectués :

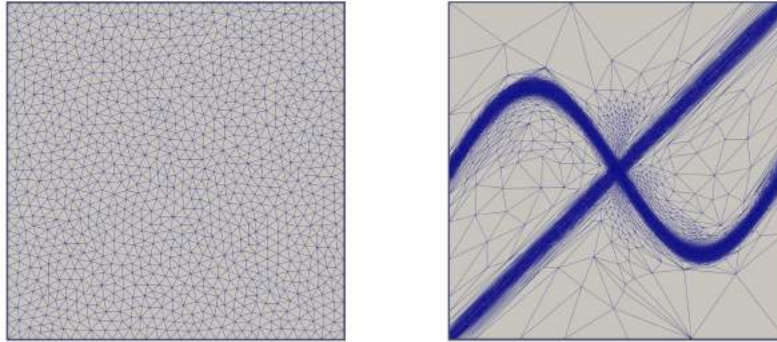


FIGURE 13 – Maillage initial et premier remaillage

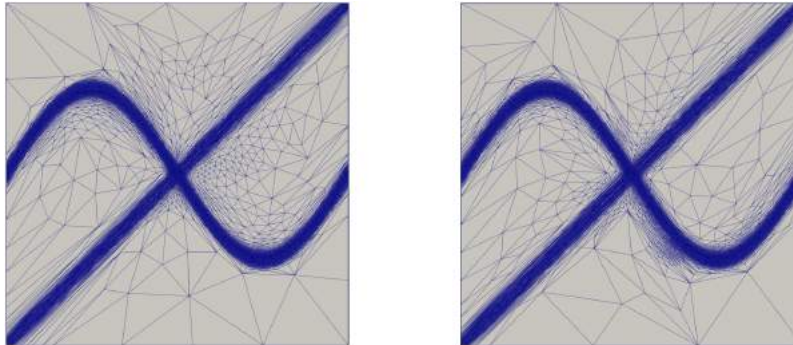


FIGURE 14 – Second et troisième remaillages

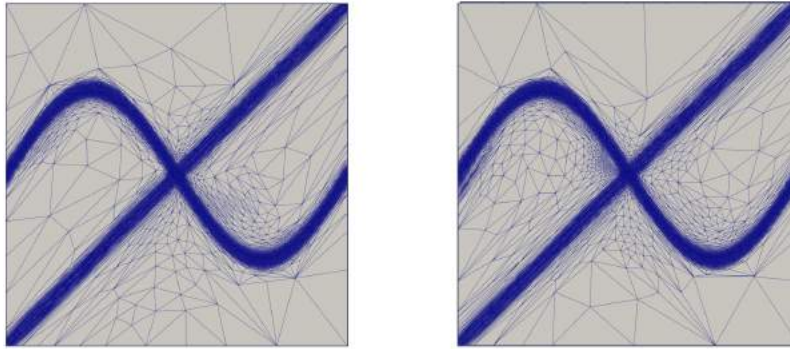


FIGURE 15 – Quatrième et dernier remaillages

On peut tout d'abord effectuer une constatation évidente : on obtient un remaillage très similaire à celui obtenu par Pascal Frey et Yannick Privat. De plus, on peut constater que l'on a bien un maillage **anisotrope**. En effet, près des zones où le remaillage est très fin, on observe que les triangles sont très aplatis. Ainsi, le remaillage prend bien en compte la direction. On peut effectuer un nombre un peu plus important de remaillages. En réalité, on constate que cela ne change pas grand chose dans notre cas test (les résultats obtenus très rapidement sont vraiment convenables). Voici ce que nous obtenons par exemple au bout de 10 remaillages :

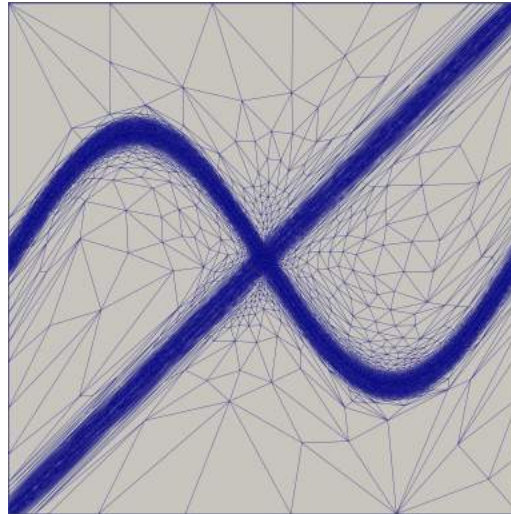


FIGURE 16 – Dixième remaillage



## 11 RÉSULTATS AVEC LA MÉTHODE DE LA HESSIENNE SUR UN CHAMP P2 EN 2D

On se place cette fois-ci dans le cas d'un champ P2 en 2D, afin de se placer dans le cadre qui nous intéresse. Nous avons décidé de reprendre le même cas test pour comparer les deux méthodes : celle du gradient, et celle de la Hessienne. On décide donc de partir du maillage initial suivant :

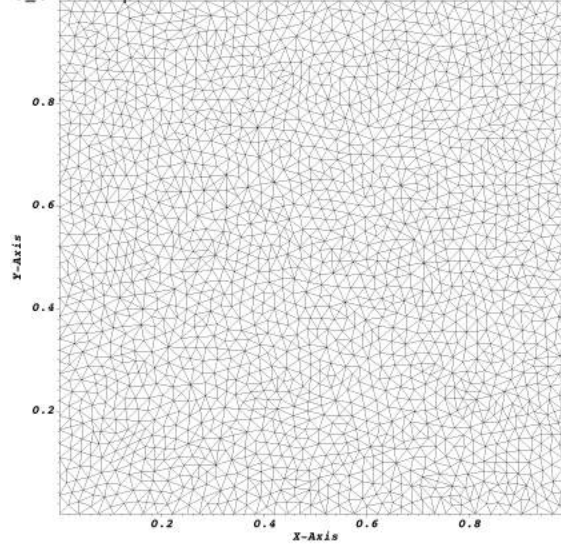


FIGURE 17 – Maillage initial pour la méthode de remaillage par la matrice Hessienne

Dans un premier temps, avant même de remailler, nous avons décidé d'afficher le champs de matrices Hessiennes et le champ des métriques à fournir au mailleur, afin de vérifier que tout était bien cohérent. Nous avons dès lors obtenu ces deux représentations :

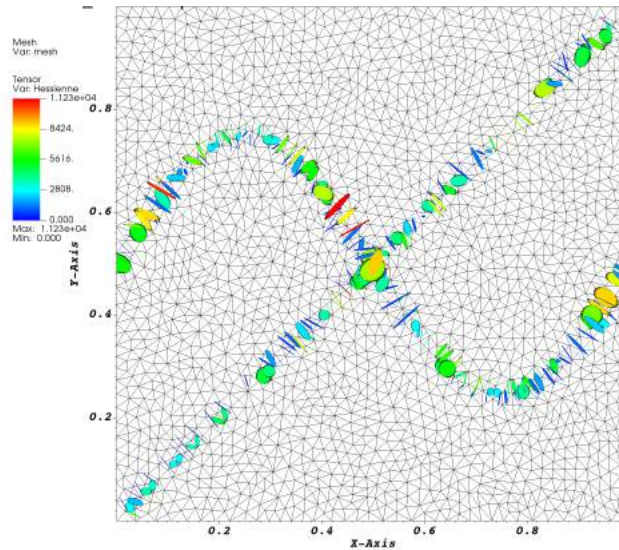


FIGURE 18 – Champ de matrices Hessiennes

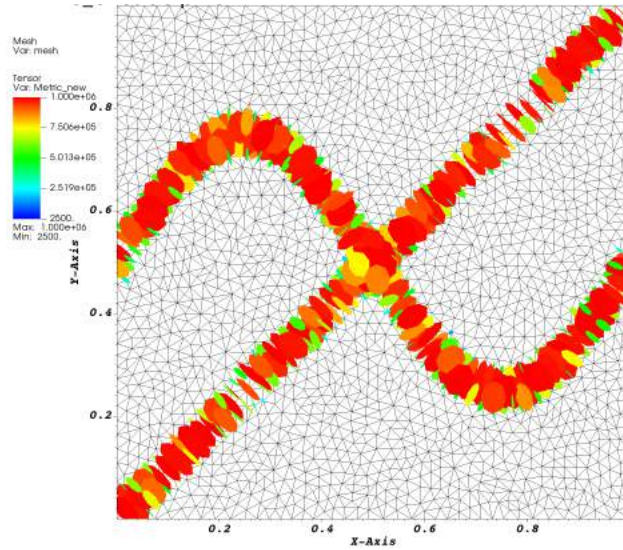


FIGURE 19 – Champ de métriques à fournir au mailleur

On observe donc une corrélation avec les résultats attendus. En effet, on peut remarquer que les zones à remailler seront les mêmes que celles qui ont été remaillées avec la méthode du gradient dans le cas P1.

Nous pouvons donc passer aux étapes de remaillage, puisque nous nous sommes assurés que les zones à remailler étaient bien cohérentes vis à vis des résultats attendus. Nous effectuons comme précédemment cinq remaillages afin d'observer l'évolution de ceux-ci. Voici donc les résultats que nous obtenons :

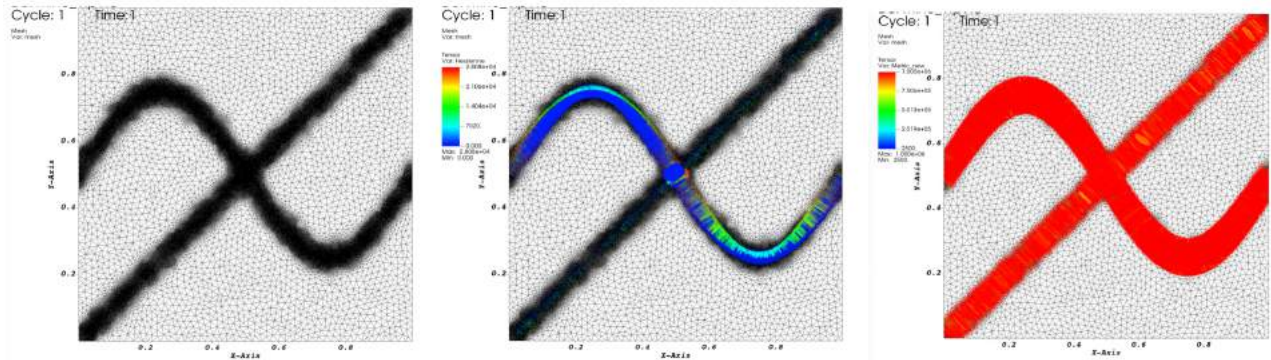


FIGURE 20 – Premier remaillage - Champ des matrices Hessiennes - Champ des métriques

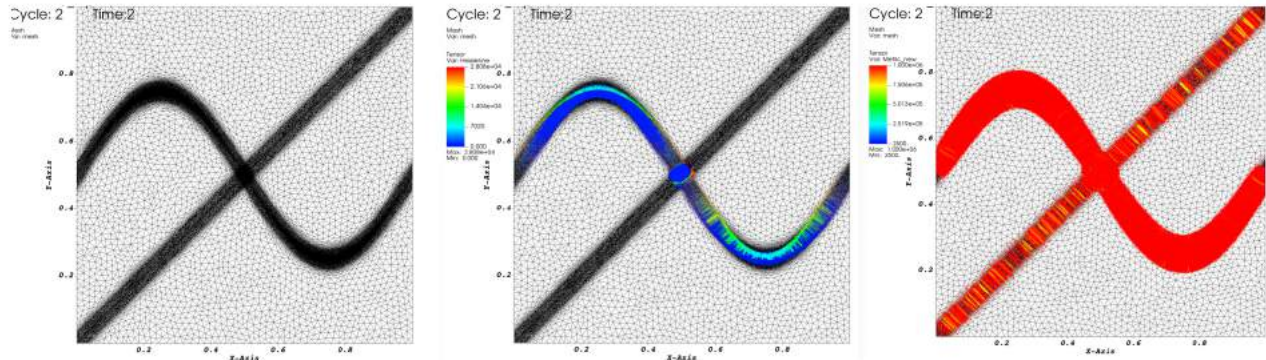


FIGURE 21 – Second remaillage - Champ des matrices Hessiennes - Champ des métriques



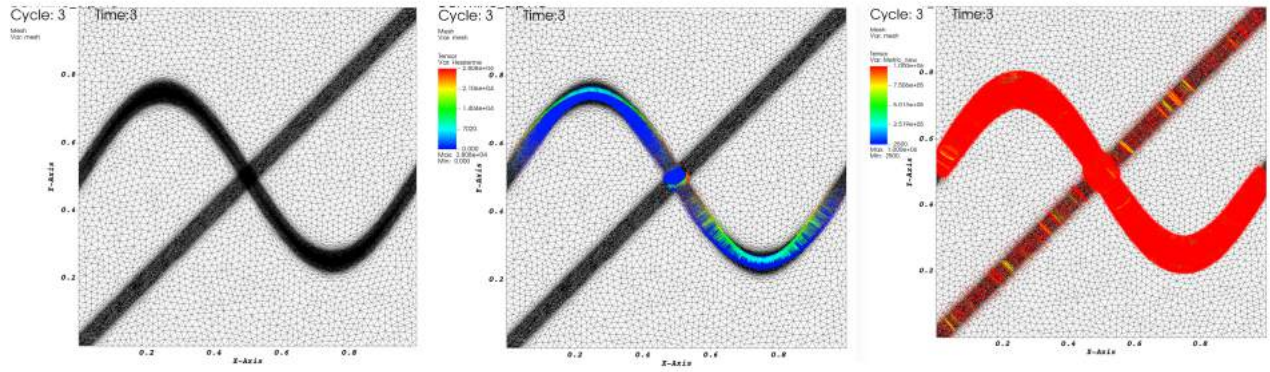


FIGURE 22 – Troisième remaillage - Champ des matrices Hessiennes - Champ des métriques

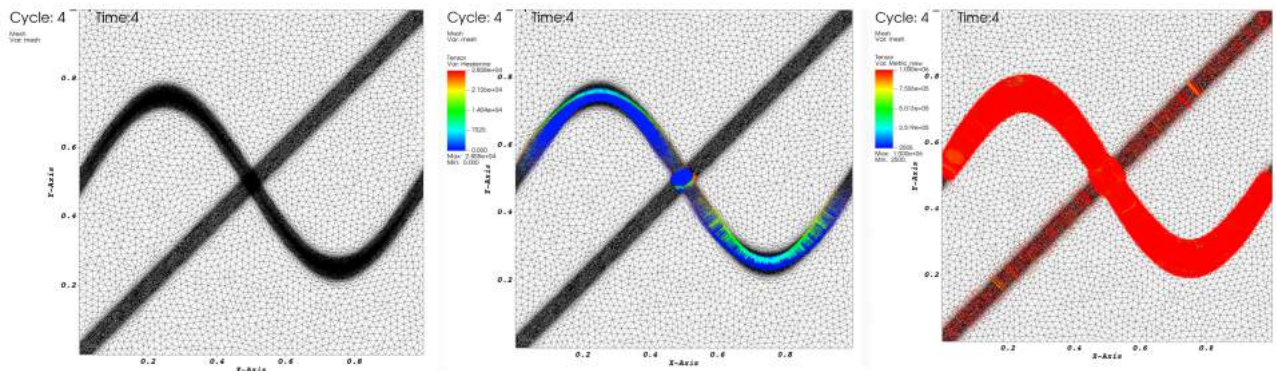


FIGURE 23 – Quatrième remaillage - Champ des matrices Hessiennes - Champ des métriques

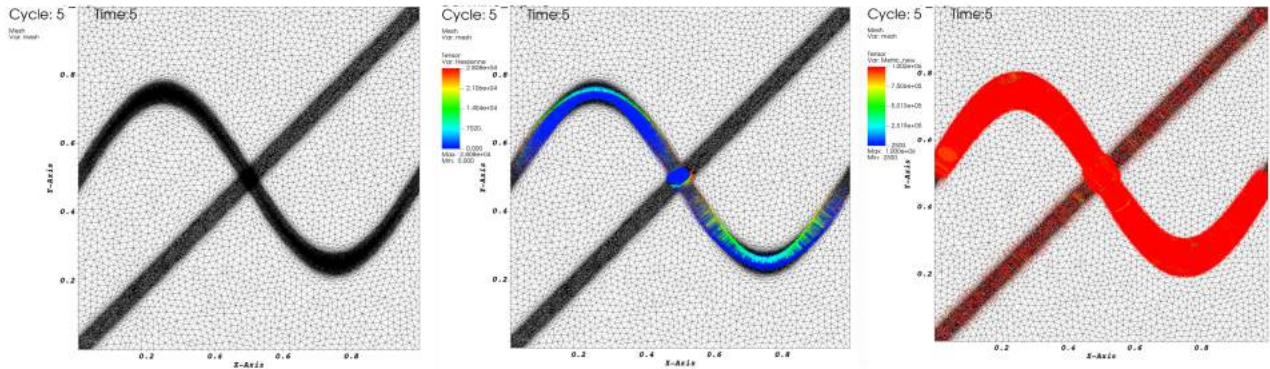


FIGURE 24 – Quatrième remaillage - Champ des matrices Hessiennes - Champ des métriques

Nous pouvons faire quelques commentaires et émettre quelques critiques vis à vis de la méthode. La première remarque que nous pouvons faire c'est que les résultats obtenus sont satisfaisants, dans le sens où l'on retrouve bien le bon motif. Les endroits nécessitant un maillage plus fin ont bien été adaptés de la sorte. Néanmoins, on remarque que le maillage demeure très fin dans les zones où il n'a plus à l'être. De plus, on note un maillage isotrope et non anisotrope. Enfin, nous ne possédons pas de critère d'arrêt. Nous nous contentons de prescrire un nombre de remaillage à effectuer, mais sans condition d'arrêt.

On peut relever le nombre de noeuds pour chacun des remaillages effectués. On obtient dès lors les résultats numériques suivants :

	Remaillage 1	Remaillage 2	Remaillage 3	Remaillage 4
Nombre de noeuds	2267	2062	2129	2087

FIGURE 25 – Nombre de noeuds pour chaque remaillage

On peut également s'intéresser à l'erreur, et tout d'abord aux endroits où l'erreur est le plus présente. Pour cela, on prend un maillage bien plus fin, que l'on considère comme maillage de référence, sur lequel on évalue la solution, que l'on prétend exacte, puis on compare l'écart entre les valeurs sur le maillage adapté et le maillage très fin. On constate donc sur les graphiques ci-dessous que l'erreur suit bien le motif de la fonction :

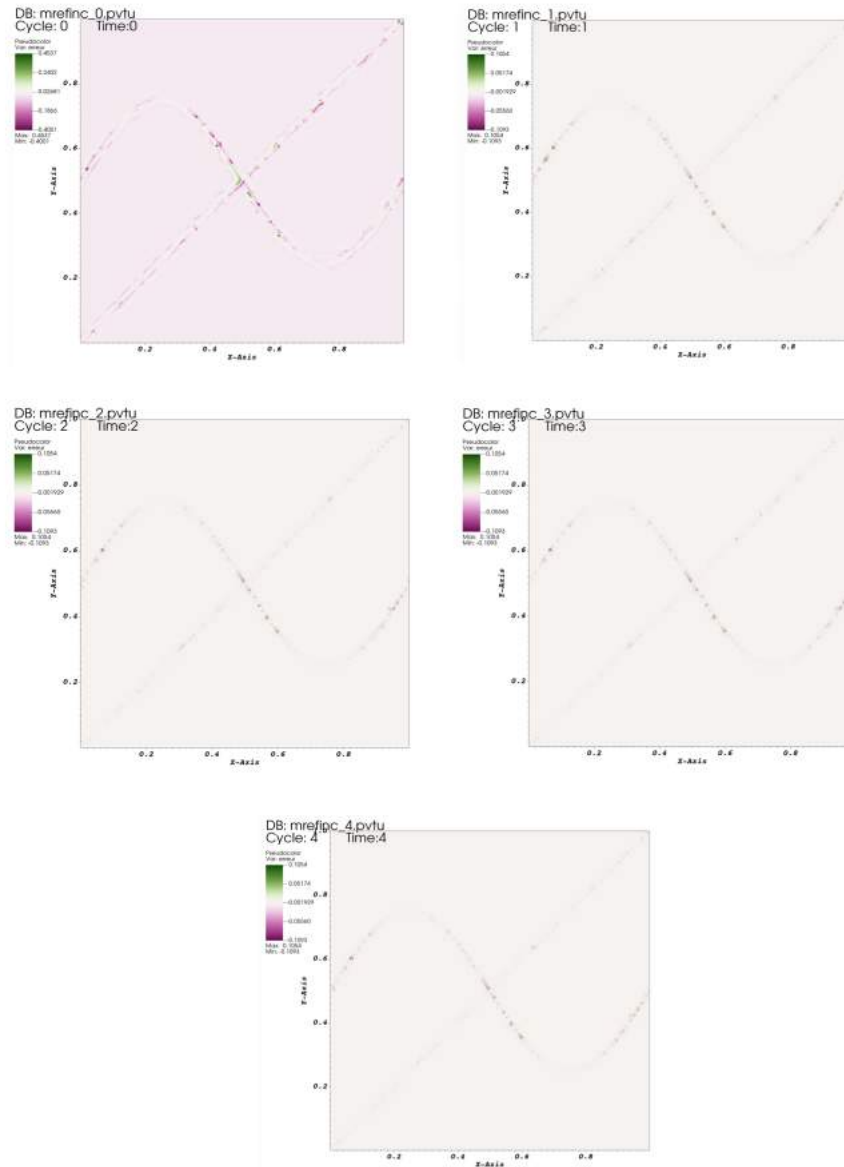


FIGURE 26 – Localisation de l'erreur sur le maillage initial et sur les 4 premiers remaillages



Afin de ne pas posséder uniquement des résultats qualitatifs, bien que très visuels, nous désirons calculer l'erreur L2 commise entre la solution calculée sur les remaillages effectués, et la solution espérée. Nous obtenons les résultats suivants :

	Maillage initial	Remaillage 1	Remaillage 2	Remaillage 3	Remaillage 4
Erreur en norme L2	0.0156986	0.00282622	0.00263724	0.00254935	0.00253582

FIGURE 27 – Erreur en norme L2 commise sur le maillage initial et les remaillages effectués

On peut également représenter ces résultats sous la forme graphique, afin d'illustrer la convergence vers la solution exacte :

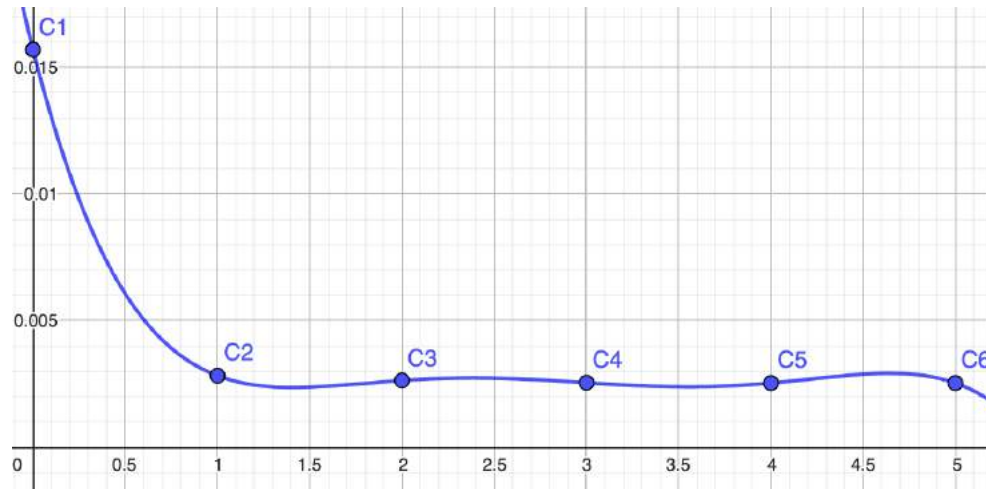


FIGURE 28 – Erreur en norme L2 commise sur le maillage initial et les remaillages effectués

## 12 AMÉLIORATION DE LA MÉTHODE DE LA HESSIENNE SUR UN CHAMP P2 EN 2D

Le premier souci que nous avons pu remarquer avec la méthode de la Hessienne élaborée dans un premier temps, c'est que les zones qui ne sont pas spécialement à remailler le sont tout de même un peu. Nous allons donc adapter les valeurs de  $h_{\min}$  et de  $h_{\max}$ . De plus, nous allons introduire un coefficient de régularisation de l'erreur  $w$  dans la formule suivante :

$$\tilde{\lambda}_i = \min \left( \max \left[ w \times \frac{9}{32} \times \frac{|\lambda_i|}{\epsilon}, \frac{1}{h_{\max}^2} \right], \frac{1}{h_{\min}^2} \right)$$

Ce coefficient permet d'imposer à des métriques trop marginales (trop petites ou trop grandes) de se fixer aux valeurs de  $\frac{1}{h_{\max}^2}$  ou  $\frac{1}{h_{\min}^2}$ . Pour notre exemple, nous considérons  $w = 0.004$ . Nous considérons toujours la même fonction comme champ solution.

Nous partons également d'un maillage un peu plus grossier (mais cela ne change rien au résultat obtenu à l'issue des remaillages) :

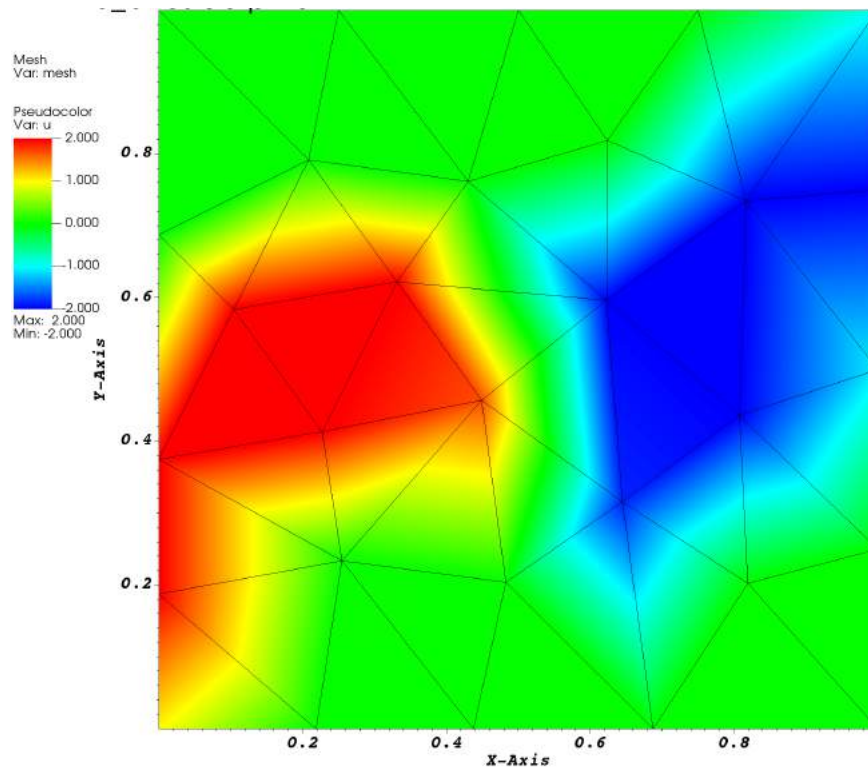


FIGURE 29 – Maillage initial avec champ solution  $u$

Nous obtenons donc les premiers remaillages suivants :

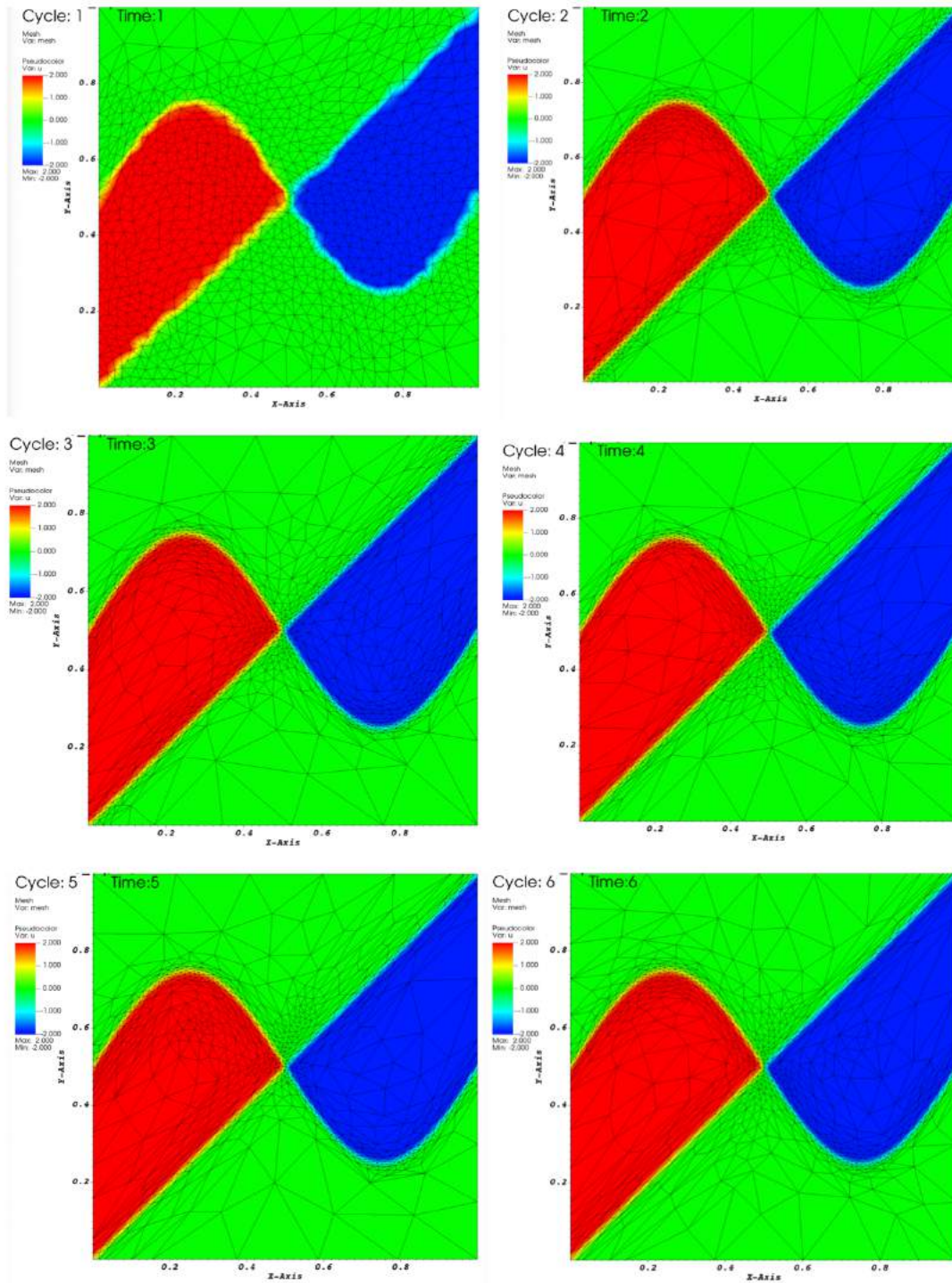


FIGURE 30 – Six premiers remaillages avec le champ solution  $u$

La première remarque que nous pouvons effectuer, c'est qu'on a cette fois-ci bien un maillage anisotrope. De plus, on observe toujours le bon motif de remaillage, tout en conservant un maillage grossier dans les zones où l'on n'a pas besoin de remailler.

En ce qui concerne le nombre de noeuds à chaque remaillage, nous avons les données suivantes :

	Remaillage 1	Remaillage 2	Remaillage 3	Remaillage 4	Remaillage 5	Remaillage 6
Nombre de noeuds	1003	1053	961	824	836	830

FIGURE 31 – Nombre de noeuds pour chaque remaillage

On peut également s'intéresser à l'erreur commise. Si on considère l'écart entre le graphe attendu et le graphe obtenu sur le maillage actuel, on obtient les représentations d'erreur suivantes :

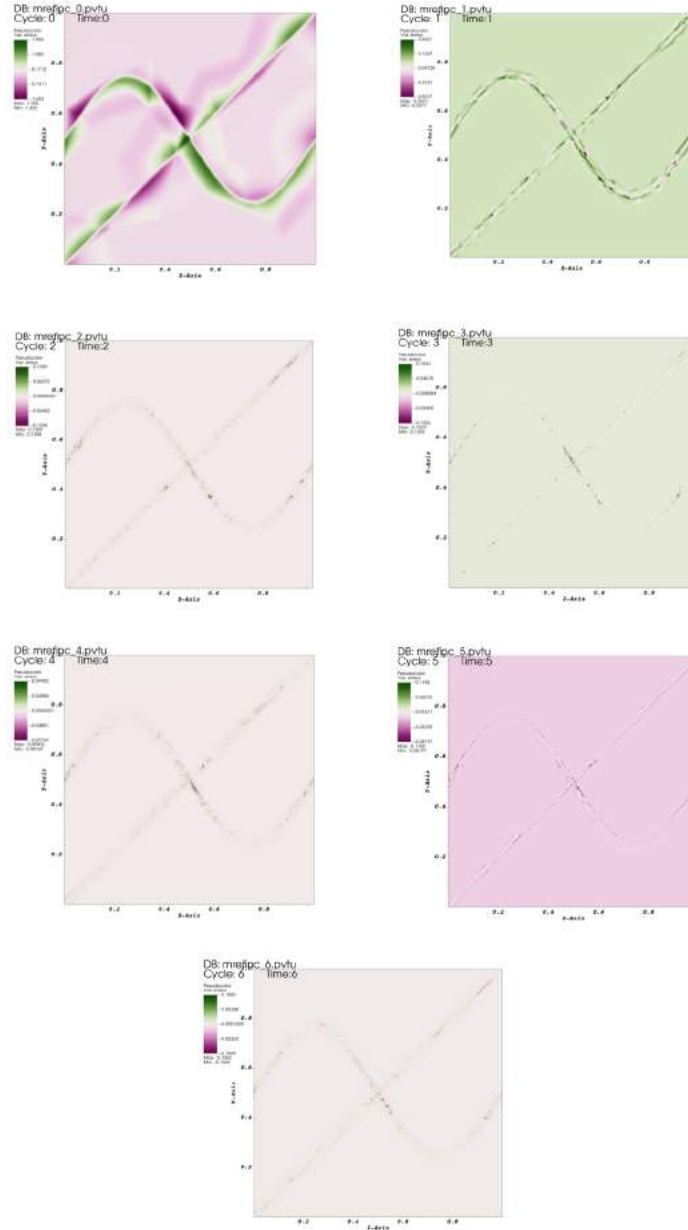


FIGURE 32 – Localisation de l'erreur  $u_{\text{ref}} - u_{\text{calc}}$  pour le maillage initial et les six premiers remaillages

On observe bien que l'erreur est localisée sur la zone du dessin de la fonction, et le motif s'estompe au fur et à mesure des remaillages, preuve que le maillage se perfectionne bien.

Afin d'avoir des résultats quantitatifs, et non seulement qualitatifs, nous pouvons déterminer l'erreur en norme L2. Nous obtenons les résultats numériques suivants, preuve de convergence vers la solution :

	Maillage initial	Remaillage 1	Remaillage 2	Remaillage 3	Remaillage 4	Remaillage 5	Remaillage 6
<b>Erreur en norme L2</b>	0.312212	0.0265856	0.00396193	0.00308205	0.0030068	0.00278474	0.00275371

FIGURE 33 – Erreur en norme L2

On peut ainsi représenter ces valeurs sur un graphe, ce qui nous permet d'obtenir des résultats un peu plus visuels : la convergence saute alors aux yeux.

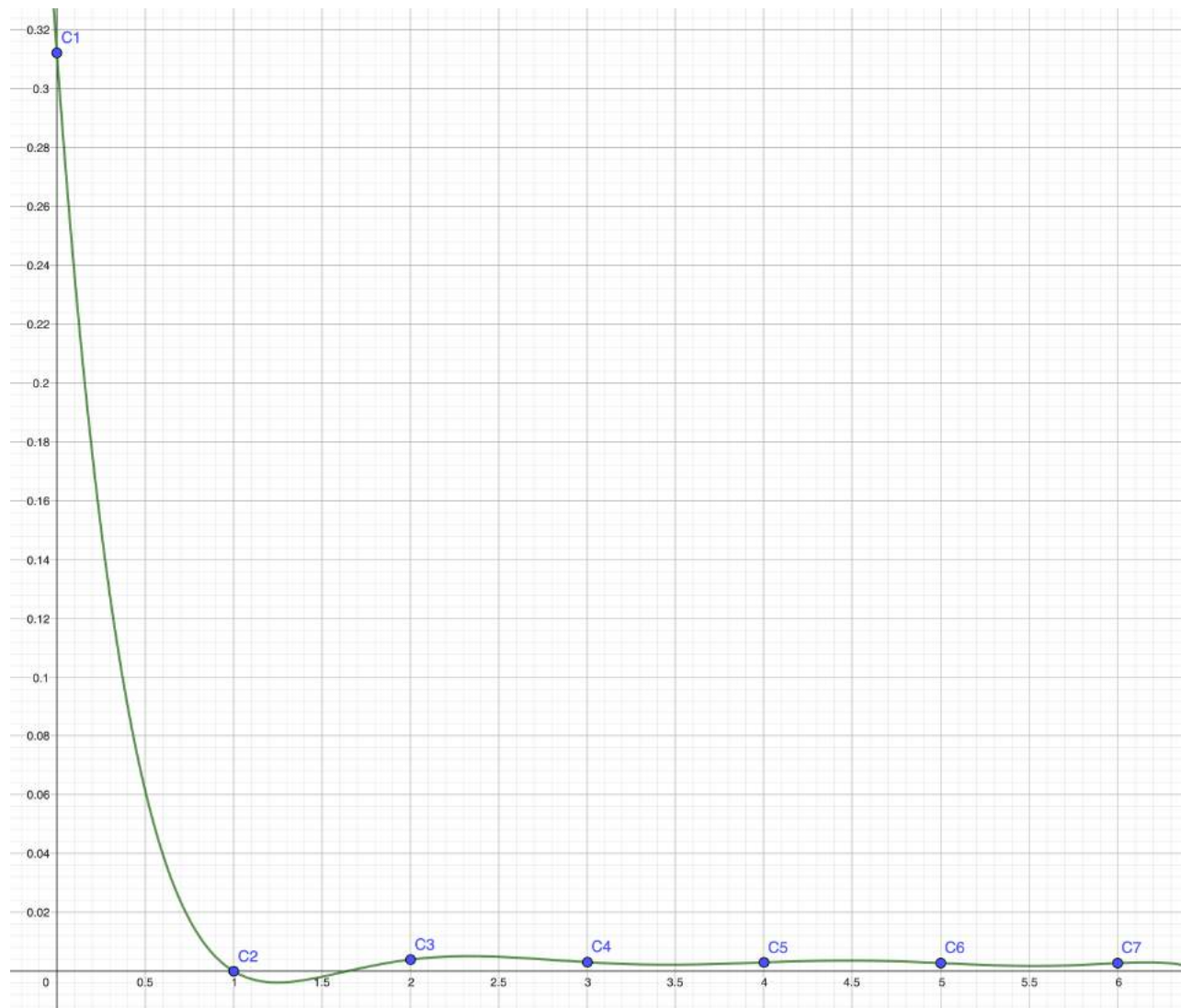


FIGURE 34 – Erreur en norme L2



### 13 ADAPTATION DE LA MÉTHODE DE LA HESSIENNE SUR UN CHAMP P2 EN 3D

Nous sommes partis, pour adapter la méthode en 3D, de la version améliorée de la méthode de la Hessienne 2D. Il a suffi d'adapter les tailles des matrices mises en jeu. Cependant, l'adaptation de maillages en 3D est bien plus coûteuse que celle en 2D. Il est donc impératif de modifier les valeurs de  $h_{\min}$  et de  $h_{\max}$ , qui représentent respectivement les tailles minimales et maximales à respecter lors du remaillage. Nous avons donc fixé les paramètres suivants :

$$h_{\min} = 0.01 \quad h_{\max} = 0.2$$

Nous conservons la valeur pour le coefficient de régularisation :  $w = 0.004$ . Nous conservons la même fonction 2D testée dans les cas tests précédents. Nous partons donc du maillage initial suivant :

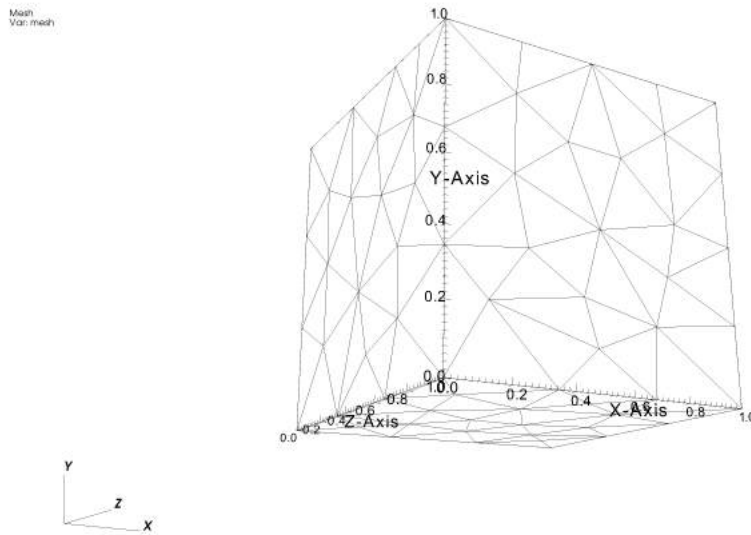


FIGURE 35 – Maillage initial 3D

Nous pouvons dès lors représenter le champ solution  $u$ , le champ de matrices Hessiennes, et le champ de métriques :

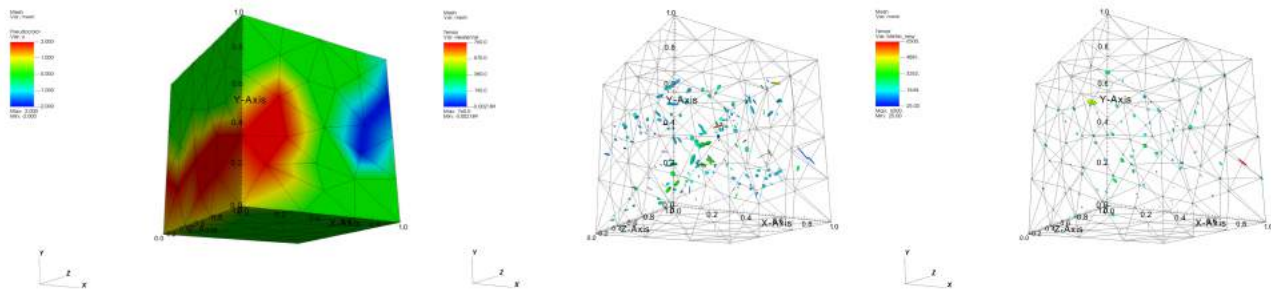


FIGURE 36 – Avant remaillage : champ  $u$  - champ de matrices Hessiennes - champ de métriques

Ensuite, nous obtenons les différents remaillages successifs, que l'on voit bien anisotropes :

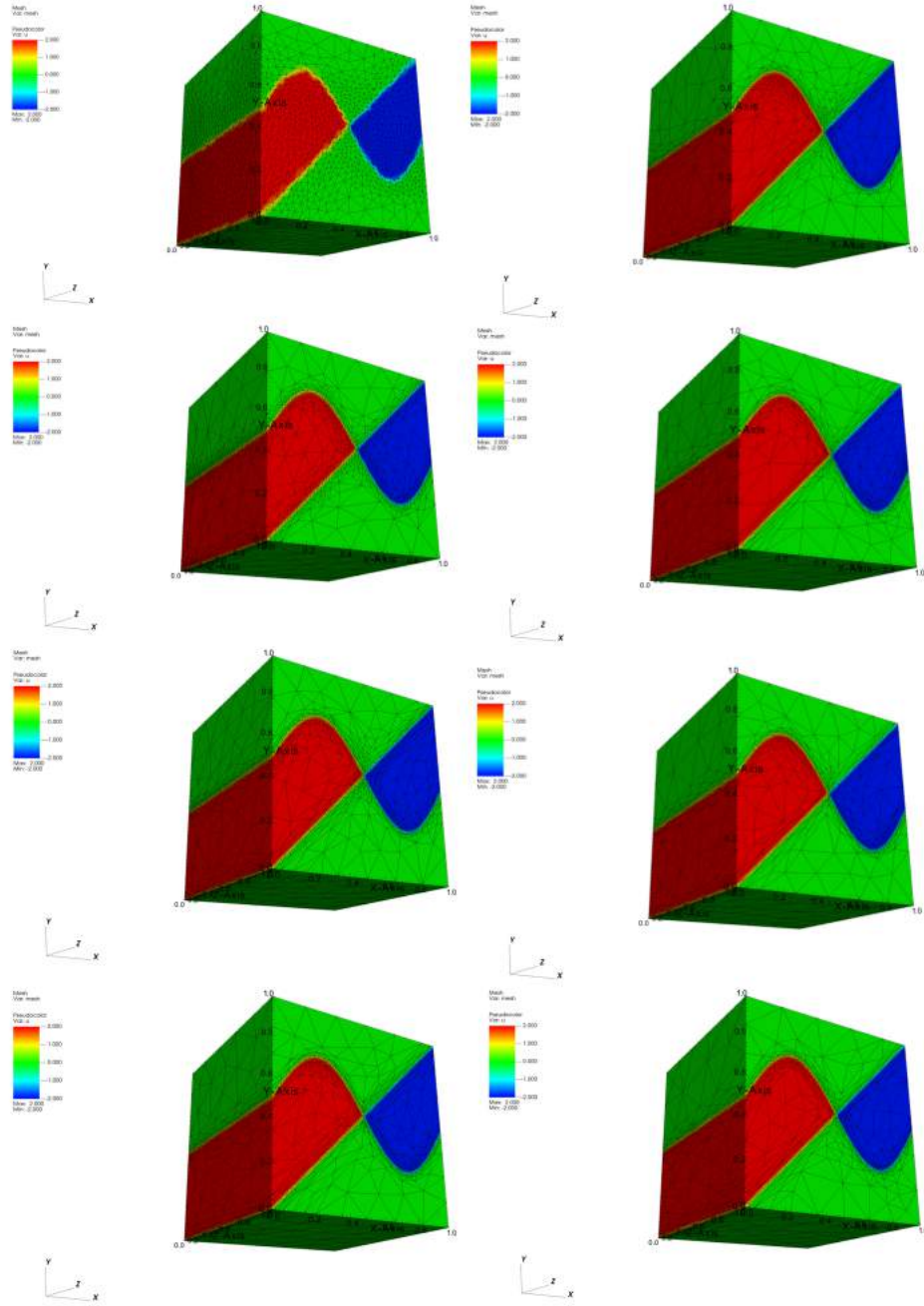


FIGURE 37 – De bas en haut : huit premiers remaillages successifs avec le champ solution  $u$  en couleurs

Sans surprise, le motif obtenu est bien toujours conforme à nos attentes, présent uniquement sur la face avant et arrière du cube, puisque nous représentons une fonction 2D. De plus, on remarque que sur la face latérale, le long de la jonction entre la zone rouge et la zone verte, le maillage s'étire de plus en plus, illustrant bien le côté anisotrope. Si l'on observe le bord des faces latérales du cube, on a bien un nombre de triangle minimal, conforme aux paramètres fixés. En conclusion, la méthode avec la matrice Hessienne fournit des résultats satisfaisants. Nous ne pouvons cependant pas dire si c'est la méthode optimale.

Pour ce qui est du nombre de noeuds obtenus à chaque remaillage, nous obtenons les résultats suivants :

	<b>Remaillage 1</b>	<b>Remaillage 2</b>	<b>Remaillage 3</b>	<b>Remaillage 4</b>	<b>Remaillage 5</b>	<b>Remaillage 6</b>	<b>Remaillage 7</b>	<b>Remaillage 8</b>
<b>Nombre de noeuds</b>	28893	33028	15278	10455	8565	7578	7016	6870

FIGURE 38 – Nombre de noeuds pour chaque remaillage

Nous ne réaliserons pas de calcul d'erreur sur les cas 3D, car prendre un maillage fin et évaluer la solution dessus est déjà très coûteux en 2D, mais l'est d'autant plus en 3D. Cela serait donc bien trop coûteux à calculer.



## 14 ÉLABORATION D'UN NOUVEAU CAS TEST 3D POUR LA MÉTHODE DE LA HESSIENNE AVEC UNE FONCTION À TROIS VARIABLES

On décide dans ce cas test de rendre le motif représenté un peu plus complexe, en faisant intervenir les trois variables d'espace,  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le choix de la fonction représentée se base tout de même sur le motif 2D travaillé auparavant. Nous avons donc choisi de travailler avec la fonction :

$$u(x, y, z) = \tanh(-100[y-0.5-0.25\sin(2\pi x)]) + \tanh(100[y-x]) + \tanh(-100[z-0.5-0.25\sin(2\pi y)]) + \tanh(100[z-y])$$

Nous obtenons donc les remaillages successifs suivants :

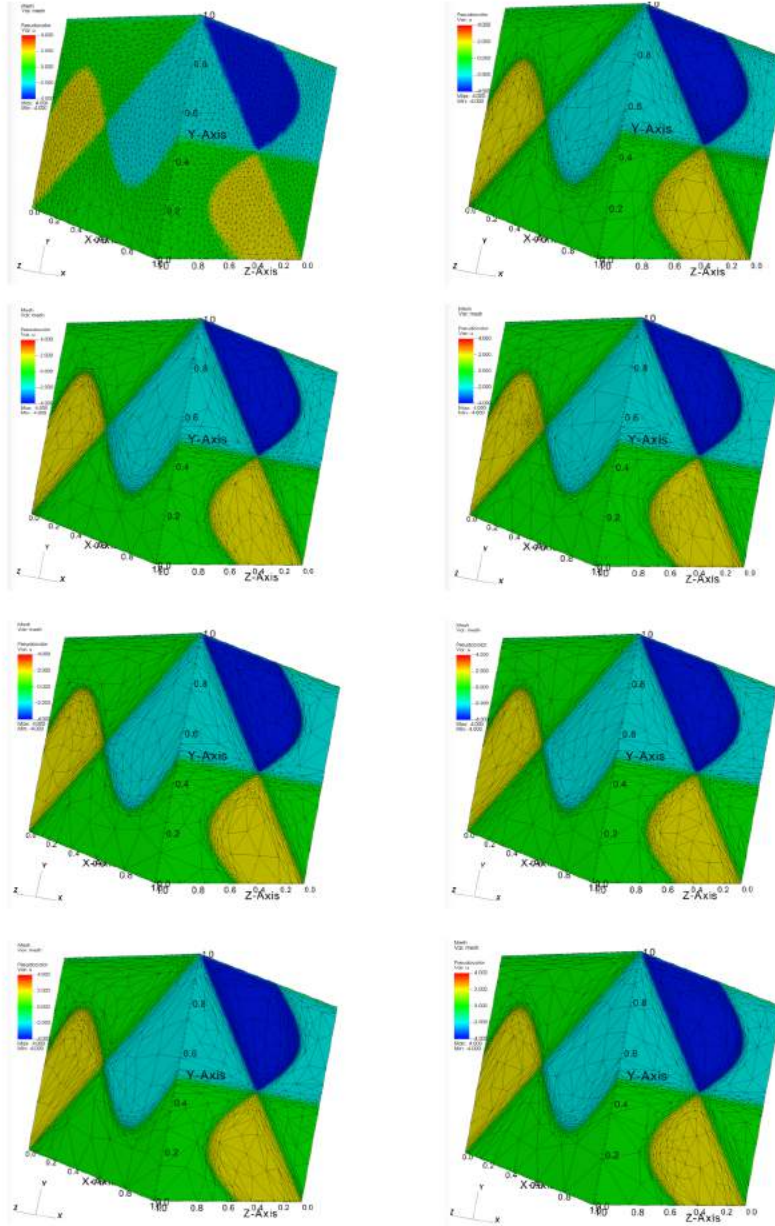


FIGURE 39 – De gauche à droite, les 8 premiers remaillages avec la fonction  $u$

En termes de résultats quantitatifs, nous obtenons les nombre de noeuds suivants pour chacun des remaillages :

	Remaillage 1	Remaillage 2	Remaillage 3	Remaillage 4	Remaillage 5	Remaillage 6	Remaillage 7	Remaillage 8
Nombre de noeuds	71302	89801	48520	38615	34840	33597	32575	32389

FIGURE 40 – Nombre de noeuds pour chaque remaillage

De même que pour le cas test précédent, nous ne donnerons pas de courbe d'erreur, pour les mêmes raisons.

## 15 RÉSULTATS AVEC LA MÉTHODE 2 DU GRADIENT SUR UN CHAMP P2 EN 2D

Nous adaptons cette fois-ci la méthode 2 du gradient pour l'appliquer sur un champ P2, comme expliqué précédemment, en calculant la dérivée associée à l'ordre choisi. L'objectif est de comparer l'efficacité des deux méthodes testées sur des champs P2, afin de pouvoir identifier laquelle il est souhaitable d'utiliser. Nous nous proposons donc de réaliser nos tests sur le même cas test, dans les mêmes conditions et avec des paramètres identiques à ceux utilisés dans la méthode de la Hessienne. Nous partons de surcroît toujours du même maillage initial afin de ne pas fausser les résultats et de se placer dans des conditions identiques en tout point à celles testées précédemment.

Pour réaliser les premiers tests sur la méthode, il nous faut élaborer des tests progressifs. Tout d'abord nous mettrons en place un test 2D sur une fonction dépendant uniquement de  $x$ . On augmentera progressivement l'ordre de la solution et celui du champ de calcul. Dans un second temps, nous ferons la même chose mais avec une fonction dépendant uniquement de  $y$ . L'objectif par la suite est de combiner les deux afin d'obtenir un test 2D sur une fonction de  $x$  et de  $y$ .

### 15.1 TESTS AVEC UNE FONCTION DÉPENDANT D'UNE SEULE VARIABLE

Nous partons d'un maillage vraiment simple cette fois-ci :

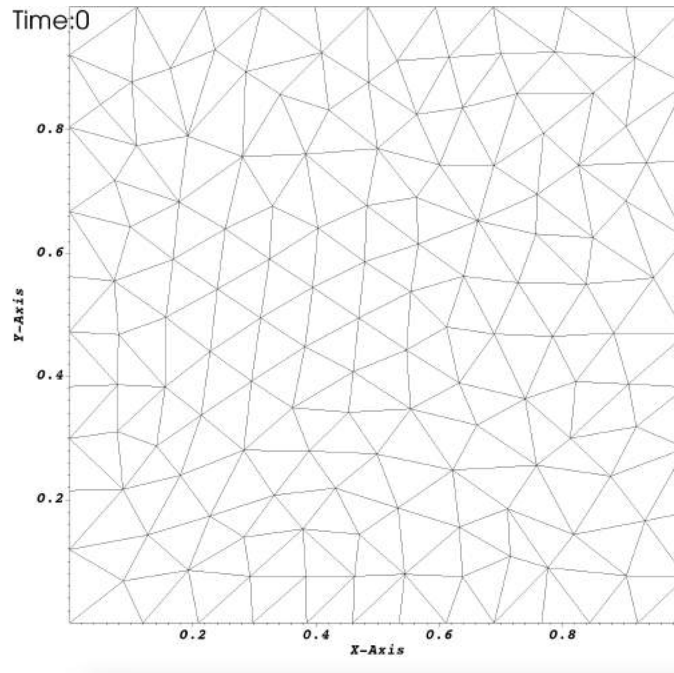


FIGURE 41 – Maillage initial pour les tests 2D

Nous considérons la fonction  $u(x) = 10x^n$ , où nous ferons varier le paramètre  $n$ , appelé ordre de la solution. L'objectif en faisant varier ce paramètre est de voir si l'estimateur d'erreur permet de remailler uniquement lorsque c'est nécessaire ou pas.

Voici donc les résultats obtenus et les différents tests réalisés :

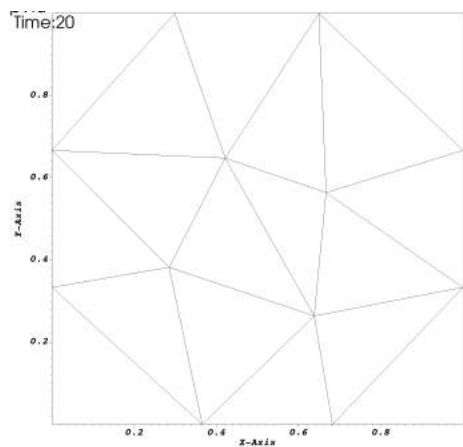


FIGURE 42 –  $n = 1$  - champ P1

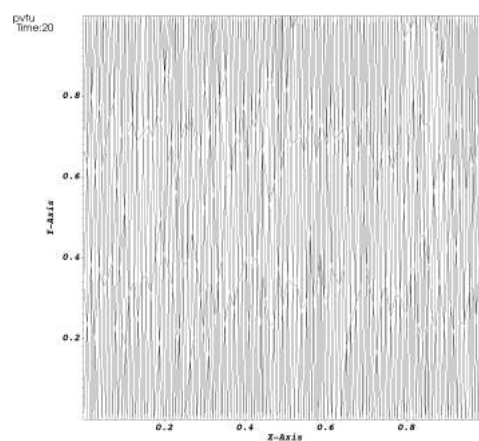


FIGURE 43 –  $n = 2$  - champ P1

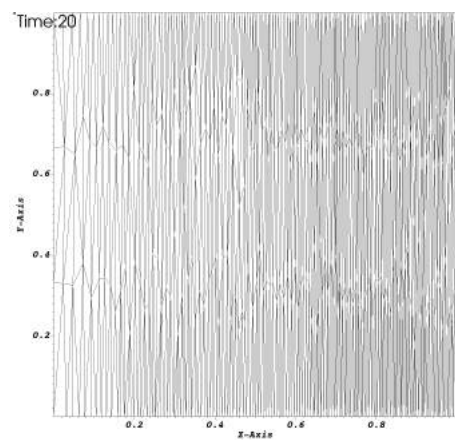


FIGURE 44 –  $n = 3$  - champ P1

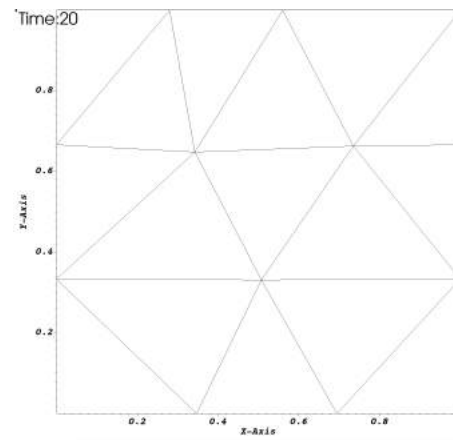


FIGURE 45 –  $n = 1$  - champ P2

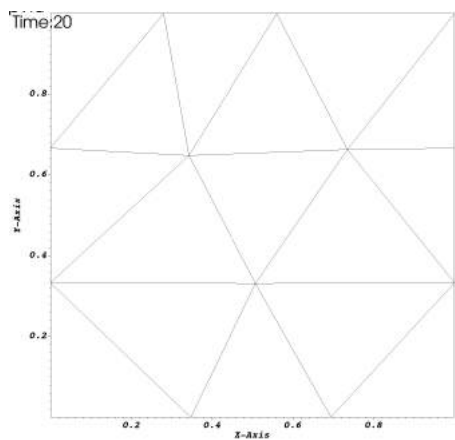


FIGURE 46 –  $n = 2$  - champ P2

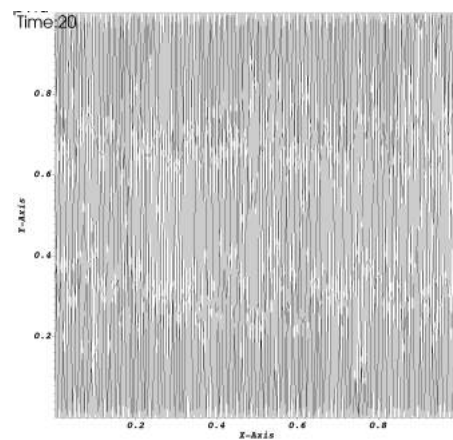
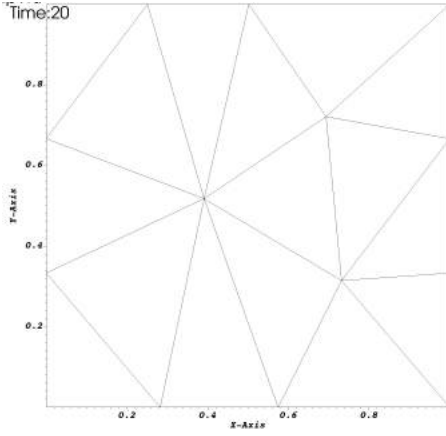
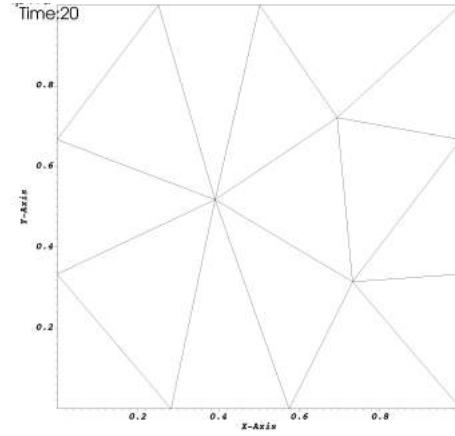
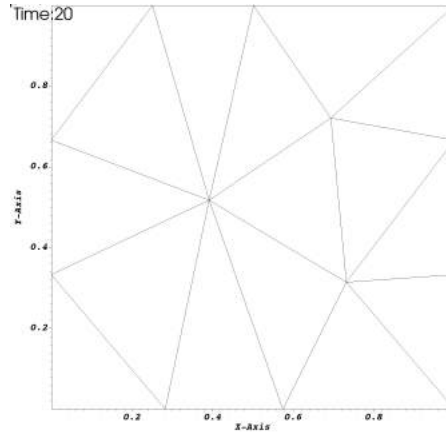


FIGURE 47 –  $n = 3$  - champ P2

FIGURE 48 –  $n = 1$  - champ P3FIGURE 49 –  $n = 2$  - champ P3FIGURE 50 –  $n = 3$  - champ P3

Nous pouvons émettre quelques remarques. La première, c'est que lorsque que l'on a un champ  $P_m$  avec un ordre  $n$  de la solution, et que  $m > n$ , alors le maillage va bien ne pas remailler plus finement et au contraire mettre le maillage le plus grossier : en effet, il n'y a pas d'erreur, donc inutile de remailler. En revanche, si on a  $m \leq n$  alors on remaillie bien. De plus, dans le cas  $n = m + 2$ , on voit bien que plus on va vers la droite, plus le maillage est raffiné, ce qui concorde avec le choix de la fonction.

Pour poursuivre les tests, nous avons choisi de tester une fonction qui ne dépendait cette fois-ci que de la variable  $y$ . Nous partons toujours du même maillage simplifié, représenté en figure (41). Nous considérons dès lors la fonction  $u(y) = 10y^n$ , où nous faisons toujours varier le paramètre  $n$ . Nous avons obtenu des résultats similaires, mais cette fois-ci orientés suivant l'axe des  $y$ .

## 15.2 GÉNÉRALISATION À UNE FONCTION DÉPENDANT DE DEUX VARIABLES

Nous avons donc comme objectif de combiner la méthode élaborée pour une fonction dépendant de  $x$  et celle élaborée pour une fonction dépendant de  $y$ , afin d'obtenir une méthode dépendant à la fois de  $x$  et de  $y$ . Malheureusement nous n'y sommes pas parvenus. Les modifications effectuées étaient faites à tâtons, et nous manquions de théorie derrière. Nous nous sommes rendus compte que les résultats obtenus semblaient être dépendants d'un paramètre qu'il fallait fixer au cas par cas. Il nous est donc impossible d'obtenir une méthode générale de cette manière. Nous laissons donc cette idée de côté.

## Huitième partie

# CONCLUSION

Nous avons, au cours de ce stage, pu élaborer une méthode P2 d'adaptation de maillages, basée sur la Hessienne de la solution. Ce point là semble être une vraie réussite quand aux objectifs du stage. Cependant, nous ne sommes pas parvenus à adapter la méthode du gradient P1 en P2. Il reste cependant à tester la troisième méthode, basée elle aussi sur le gradient de la solution, qui, peut sembler prometteuse.

Ce stage aura été instructif pour moi, tant sur l'appréhension des notions nouvelles, telles que la notion de métrique, ou plus généralement celle d'adaptation de maillages, et de maillages anisotropes qui jusque là m'étaient inconnus. Ce stage m'aura également permis d'apprendre à coder en C++, non sans difficultés, de par un apprentissage entièrement autodidacte, mais cela représente désormais un apport non négligeable à mon portefeuille de compétences.

## Neuvième partie

# ANNEXES

## 16 FONCTIONS DE FORME POUR LE TÉTRAÈDRE DE RÉFÉ- RENCE

Il nous faut dans un premier temps déterminer les coordonnées barycentriques associées à notre tétraèdre de référence. Résolvons donc le système :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \lambda_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \lambda_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \lambda_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{x} \\ \lambda_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{y} \\ \lambda_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{z} \\ \lambda_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} \end{cases}$$

Notons dès lors  $(\hat{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq 10}$  la base canonique recherchée. Elle vérifie alors  $\sigma_j(\hat{\Phi}_i) = \delta_i^j$  pour tous  $1 \leq i, j \leq 10$ .

- Exprimons  $\hat{\Phi}_1$  : on remarque que  $\lambda_1$  vaut 1 en  $\hat{a}^1$  et s'annule en  $\hat{a}^2, \hat{a}^3, \hat{a}^4, \hat{m}^{23}, \hat{m}^{24}$  et  $\hat{m}^{34}$ . De plus,  $2\lambda_1 - 1$  s'annule en  $\hat{m}^{12}, \hat{m}^{13}$  et  $\hat{m}^{14}$ . Donc  $\lambda_1(2\lambda_1 - 1)$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{a}^1$  où il vaut 1. On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$ .
- Exprimons  $\hat{\Phi}_2$  : on remarque que  $\lambda_2$  vaut 1 en  $\hat{a}^2$  et s'annule en  $\hat{a}^1, \hat{a}^3, \hat{a}^4, \hat{m}^{13}, \hat{m}^{34}$  et  $\hat{m}^{14}$ . De plus,  $2\lambda_2 - 1$  s'annule en  $\hat{m}^{12}, \hat{m}^{23}$  et  $\hat{m}^{24}$ . Donc  $\lambda_2(2\lambda_2 - 1)$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{a}^2$  où il vaut 1. On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_2 = \lambda_2(2\lambda_2 - 1)$ .
- Exprimons  $\hat{\Phi}_3$  : on remarque que  $\lambda_3$  vaut 1 en  $\hat{a}^3$  et s'annule en  $\hat{a}^1, \hat{a}^2, \hat{a}^4, \hat{m}^{12}, \hat{m}^{14}$  et  $\hat{m}^{24}$ . De plus,  $2\lambda_3 - 1$  s'annule en  $\hat{m}^{13}, \hat{m}^{23}$  et  $\hat{m}^{34}$ . Donc  $\lambda_3(2\lambda_3 - 1)$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{a}^3$  où il vaut 1. On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_3 = \lambda_3(2\lambda_3 - 1)$ .
- Exprimons  $\hat{\Phi}_4$  : on remarque que  $\lambda_4$  vaut 1 en  $\hat{a}^4$  et s'annule en  $\hat{a}^1, \hat{a}^2, \hat{a}^3, \hat{m}^{12}, \hat{m}^{13}$  et  $\hat{m}^{23}$ . De plus,  $2\lambda_4 - 1$  s'annule en  $\hat{m}^{14}, \hat{m}^{24}$  et  $\hat{m}^{34}$ . Donc  $\lambda_4(2\lambda_4 - 1)$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{a}^4$  où il vaut 1. On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_4 = \lambda_4(2\lambda_4 - 1)$ .
- Exprimons  $\hat{\Phi}_5$  associé à  $\hat{m}^{12}$  : on remarque que  $\lambda_1\lambda_2$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{m}^{12}$  où il vaut  $\frac{1}{4}$ . On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_5 = 4\lambda_1\lambda_2$ .
- Exprimons  $\hat{\Phi}_6$  associé à  $\hat{m}^{13}$  : on remarque que  $\lambda_1\lambda_3$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{m}^{13}$  où il vaut  $\frac{1}{4}$ . On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_6 = 4\lambda_1\lambda_3$ .
- Exprimons  $\hat{\Phi}_7$  associé à  $\hat{m}^{14}$  : on remarque que  $\lambda_1\lambda_4$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{m}^{14}$  où il vaut  $\frac{1}{4}$ . On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_7 = 4\lambda_1\lambda_4$ .
- Exprimons  $\hat{\Phi}_8$  associé à  $\hat{m}^{23}$  : on remarque que  $\lambda_2\lambda_3$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{m}^{23}$  où il vaut  $\frac{1}{4}$ . On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_8 = 4\lambda_2\lambda_3$ .
- Exprimons  $\hat{\Phi}_9$  associé à  $\hat{m}^{24}$  : on remarque que  $\lambda_2\lambda_4$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{m}^{24}$  où il vaut  $\frac{1}{4}$ . On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_9 = 4\lambda_2\lambda_4$ .
- Exprimons  $\hat{\Phi}_{10}$  associé à  $\hat{m}^{34}$  : on remarque que  $\lambda_3\lambda_4$  s'annule en tout point sauf en  $\hat{m}^{34}$  où il vaut  $\frac{1}{4}$ . On a donc l'expression :  $\hat{\Phi}_{10} = 4\lambda_3\lambda_4$ .

## 17 DÉTAIL DU CALCUL DE $F_K^{-1}$

Sur la première ligne, nous pouvons réaliser l'opération suivante :

$$L_1 \leftarrow (L_1 - x_1) \times \frac{1}{x_2 - x_1} - (L_2 - x_2) \times \frac{1}{y_2 - y_1}$$

Ainsi, on obtient sur la ligne 1 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} + \hat{y} \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} + \hat{z} \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} - \mathfrak{X} - \hat{y} \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} - \hat{z} \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ \iff \hat{y} \left( \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \right) + \hat{z} \left( \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1} \right) &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{aligned}$$

On procède de manière similaire sur la ligne 2 :

$$L_2 \leftarrow (L_2 - x_2) \times \frac{1}{y_2 - y_1} - (L_3 - x_3) \times \frac{1}{z_2 - z_1}$$

On obtient ainsi sur la ligne 2 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} + \hat{y} \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} + \hat{z} \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1} - \mathfrak{X} - \hat{y} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} - \hat{z} \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} - \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \\ \iff \hat{y} \left( \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} - \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) + \hat{z} \left( \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1} - \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} \right) &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} - \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{aligned}$$

Les lignes 1 et 2 ne comportent plus que les inconnues  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$ . Il nous est donc possible de trouver l'expression de chacune de ces deux inconnues. Tout d'abord, on fait subir à la ligne 1 l'opération suivante :

$$L_1 \leftarrow L_1 \times \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - L_2 \times \frac{(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}$$

On obtient donc sur la ligne 1 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} + \hat{z} \frac{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)}{\cancel{(x_2 - x_1)}\cancel{(y_2 - y_1)}} \times \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}\cancel{(y_2 - y_1)}}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} \\ - \mathfrak{X} - \hat{z} \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{\cancel{(y_2 - y_1)}\cancel{(z_2 - z_1)}} \times \frac{\cancel{(y_2 - y_1)}\cancel{(z_2 - z_1)}}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ = \\ \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)}{\cancel{(x_2 - x_1)}\cancel{(y_2 - y_1)}} \times \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}\cancel{(y_2 - y_1)}}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} \\ - \frac{(y - y_1)(z_2 - z_1) - (z - z_1)(y_2 - y_1)}{\cancel{(y_2 - y_1)}\cancel{(z_2 - z_1)}} \times \frac{\cancel{(y_2 - y_1)}\cancel{(z_2 - z_1)}}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \end{aligned}$$



On obtient ainsi l'expression suivante pour  $\hat{z}$  :

$$\hat{z} = \frac{(x-x_1)(y_2-y_1) - (y-y_1)(x_2-x_1)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)} - \frac{(y-y_1)(z_2-z_1) - (z-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)}$$

On peut donc remplacer la valeur de  $\hat{z}$  dans la ligne 2 afin d'en déduire une expression de  $\hat{y}$ . On obtient :

$$\hat{y} = \frac{(y-y_1)(z_2-z_1) - (z-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)} \times \frac{(y_2-y_1)(z_2-z_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)}$$

$$- \hat{z} \frac{(y_4-y_1)(z_2-z_1) - (z_4-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)} \times \frac{(y_2-y_1)(z_2-z_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)}$$

D'où l'expression pour  $\hat{y}$  :

$$\hat{y} = \frac{(y-y_1)(z_2-z_1) - (z-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)}$$

$$- \frac{(x-x_1)(y_2-y_1) - (y-y_1)(x_2-x_1)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)} - \frac{(y-y_1)(z_2-z_1) - (z-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)}$$

$$- \frac{(x_4-x_1)(y_2-y_1) - (y_4-y_1)(x_2-x_1)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)} - \frac{(y_4-y_1)(z_2-z_1) - (z_4-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)}$$

$$\times \frac{(y_4-y_1)(z_2-z_1) - (z_4-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)}$$

On peut donc en déduire l'expression de  $\hat{x}$  à partir de la dernière ligne du système, la ligne 3. On obtient alors :

$$\hat{x} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \hat{y} \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \hat{z} \frac{x_4-x_1}{x_2-x_1}$$

D'où l'expression pour  $\hat{x}$  :

$$\hat{x} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \left( \frac{(y-y_1)(z_2-z_1) - (z-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)} \right.$$

$$- \frac{(x-x_1)(y_2-y_1) - (y-y_1)(x_2-x_1)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)} - \frac{(y-y_1)(z_2-z_1) - (z-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)}$$

$$- \frac{(x_4-x_1)(y_2-y_1) - (y_4-y_1)(x_2-x_1)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)} - \frac{(y_4-y_1)(z_2-z_1) - (z_4-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)}$$

$$\times \frac{(y_4-y_1)(z_2-z_1) - (z_4-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)} \left. \right) \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$$

$$- \frac{(x-x_1)(y_2-y_1) - (y-y_1)(x_2-x_1)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)} - \frac{(y-y_1)(z_2-z_1) - (z-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)} \frac{x_4-x_1}{x_2-x_1}$$

$$- \frac{(x_4-x_1)(y_2-y_1) - (y_4-y_1)(x_2-x_1)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)} - \frac{(y_4-y_1)(z_2-z_1) - (z_4-z_1)(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)(z_2-z_1) - (z_3-z_1)(y_2-y_1)} \frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}$$

## 18 Calcul de la matrice $\text{Jac}F_K^{-1}$

- Exprimons  $\nabla\hat{\Phi}_1$  associé à  $\hat{a}^1$  :

$$\nabla\hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}}\hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{y}}\hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{z}}\hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 4\hat{x} + 4\hat{y} + 4\hat{z} \\ -3 + 4\hat{x} + 4\hat{y} + 4\hat{z} \\ -3 + 4\hat{x} + 4\hat{y} + 4\hat{z} \end{pmatrix}$$

- Exprimons  $\nabla\hat{\Phi}_2$  associé à  $\hat{a}^2$  :

$$\nabla\hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}}\hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{y}}\hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{z}}\hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\hat{x} - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Exprimons  $\nabla\hat{\Phi}_3$  associé à  $\hat{a}^3$  :

$$\nabla\hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}}\hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{y}}\hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{z}}\hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\hat{y} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Exprimons  $\nabla\hat{\Phi}_4$  associé à  $\hat{a}^4$  :

$$\nabla\hat{\Phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}}\hat{\Phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{y}}\hat{\Phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{z}}\hat{\Phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\hat{z} - 1 \end{pmatrix}$$

- Exprimons  $\nabla\hat{\Phi}_5$  associé à  $\hat{m}^{12}$  :

$$\nabla\hat{\Phi}_5(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}}\hat{\Phi}_5(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{y}}\hat{\Phi}_5(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{z}}\hat{\Phi}_5(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 8\hat{x} \\ -4\hat{x} \\ -4\hat{x} \end{pmatrix}$$

- Exprimons  $\nabla\hat{\Phi}_6$  associé à  $\hat{m}^{13}$  :

$$\nabla\hat{\Phi}_6(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}}\hat{\Phi}_6(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{y}}\hat{\Phi}_6(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{z}}\hat{\Phi}_6(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\hat{y} \\ 4 - 8\hat{y} \\ -4\hat{y} \end{pmatrix}$$

- Exprimons  $\nabla\hat{\Phi}_7$  associé à  $\hat{m}^{14}$  :

$$\nabla\hat{\Phi}_7(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}}\hat{\Phi}_7(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{y}}\hat{\Phi}_7(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \partial_{\hat{z}}\hat{\Phi}_7(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\hat{z} \\ -4\hat{z} \\ 4 - 8\hat{z} \end{pmatrix}$$

- Exprimons  $\nabla \widehat{\Phi}_8$  associé à  $\widehat{m}^{23}$  :

$$\nabla \widehat{\Phi}_8(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\widehat{x}} \widehat{\Phi}_8(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \\ \partial_{\widehat{y}} \widehat{\Phi}_8(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \\ \partial_{\widehat{z}} \widehat{\Phi}_8(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\widehat{y} \\ 4\widehat{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Exprimons  $\nabla \widehat{\Phi}_9$  associé à  $\widehat{m}^{24}$  :

$$\nabla \widehat{\Phi}_9(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\widehat{x}} \widehat{\Phi}_9(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \\ \partial_{\widehat{y}} \widehat{\Phi}_9(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \\ \partial_{\widehat{z}} \widehat{\Phi}_9(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\widehat{z} \\ 0 \\ 4\widehat{x} \end{pmatrix}$$

- Exprimons  $\nabla \widehat{\Phi}_{10}$  associé à  $\widehat{m}^{24}$  :

$$\nabla \widehat{\Phi}_{10}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\widehat{x}} \widehat{\Phi}_{10}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \\ \partial_{\widehat{y}} \widehat{\Phi}_{10}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \\ \partial_{\widehat{z}} \widehat{\Phi}_{10}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\widehat{z} \\ 4\widehat{y} \end{pmatrix}$$

Il nous faut donc enfin déterminer la matrice Jacobienne de  $F_K^{-1}$ . On note  $F_K^{-1(i)}$  la  $i$ -ème coordonnée du vecteur  $F_K^{-1}$ . La matrice Jacobienne s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \partial_x F_K^{-1(1)} & \partial_y F_K^{-1(1)} & \partial_z F_K^{-1(1)} \\ \partial_x F_K^{-1(2)} & \partial_y F_K^{-1(2)} & \partial_z F_K^{-1(2)} \\ \partial_x F_K^{-1(3)} & \partial_y F_K^{-1(3)} & \partial_z F_K^{-1(3)} \end{pmatrix}$$

Il faut donc exprimer toutes les dérivées partielles.

- Exprimons  $\partial_x F_K^{-1(1)}$  :

$$\begin{aligned} \partial_x F_K^{-1(1)} &= \frac{1}{x_2 - x_1} \\ &\quad - \frac{y_2 - y_1}{\frac{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}} \\ &\quad \times \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \\ &\quad - \frac{y_2 - y_1}{\frac{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}} \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

- Exprimons  $\partial_y F_K^{-1(1)}$  :

$$\begin{aligned} \partial_y F_K^{-1(1)} = & \left( - \frac{z_2 - z_1}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \right. \\ & - \frac{x_2 - x_1}{\frac{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{z_2 - z_1}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}} \\ & \times \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \left. \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \right. \\ & - \frac{x_2 - x_1}{\frac{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{z_2 - z_1}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}} \\ & \left. - \frac{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)} \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} \right) \end{aligned}$$

- Exprimons  $\partial_z F_K^{-1(1)}$  :

$$\begin{aligned} \partial_z F_K^{-1(1)} = & \left( \frac{y_2 - y_1}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \right. \\ & - \frac{y_2 - y_1}{\frac{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}} \\ & \times \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \left. \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \right. \\ & - \frac{y_2 - y_1}{\frac{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}} \\ & \left. - \frac{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)} \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} \right) \end{aligned}$$

- Exprimons  $\partial_x F_K^{-1(2)}$  :

$$\begin{aligned} \partial_x F_K^{-1(2)} = & - \frac{y_2 - y_1}{\frac{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}} \\ & \times \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \end{aligned}$$

- Exprimons  $\partial_y F_K^{-1(2)}$  :

$$\begin{aligned} \partial_y F_K^{-1(2)} = & \frac{z_2 - z_1}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ & + \frac{x_2 - x_1}{\frac{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}} \\ & + \frac{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)} \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

- Exprimons  $\partial_z F_K^{-1(2)}$  :

$$\begin{aligned} \partial_z F_K^{-1(2)} &= -\frac{y_2 - y_1}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ &\quad - \frac{y_2 - y_1}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ &\quad + \frac{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \\ &\quad \times \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)} \end{aligned}$$

- Exprimons  $\partial_x F_K^{-1(3)}$  :

$$\partial_x F_K^{-1(3)} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)}}{\frac{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}}$$

- Exprimons  $\partial_y F_K^{-1(3)}$  :

$$\partial_y F_K^{-1(3)} = \frac{-\frac{x_2 - x_1}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{z_2 - z_1}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}}{\frac{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}}$$

- Exprimons  $\partial_z F_K^{-1(3)}$  :

$$\partial_z F_K^{-1(3)} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}}{\frac{(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_4 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}}$$

Nous avons donc pleinement déterminé la matrice Jacobienne.



## Dixième partie

## BIBLIOGRAPHIE

- Adrien **LOSEILLE** - *Mesh Generation for scientific computing*, 2020
- Pascal **FREY** - *Estimateurs d'erreur géométriques et adaptation de maillages*
- Cécile **DOBRZYNSKI** - *Adaptation de maillage anisotrope 3D et application à l'aéro-thermique des bâtiments*, 2005
- Rémi **FEUILLET**, Adrien **LOSEILLE**, Frédéric **ALAUZET** - *Optimization of  $P^2$  meshes and applications*, 2020
- Doug **PAGNUTTI**, Carl **OLLIVIER-GOOCH** - *A generalized framework for high order anisotropic mesh adaptation*, 2009
- Ruili **ZHANG**, Amaury **JOHNEN**, Jean-François **REMACLE**, François **HENROTTE**, Arthur **BAWIN** - *The generation of unit  $P^2$  meshes : error estimation and mesh adaptation*
- Pascal **FREY**, Frédéric **ALAUZET** - *Anisotropic mesh adaptation for CFD computations*, 2004
- Thierry **COUPEZ** - *Metric construction by lenght distribution tensor and edge based error for anisotropic adaptative meshing*, 2010
- Hugues **DIGONNET**, Thierry **COUPEZ**, Patrice **LAURE**, Luisa **SILVA** - *Massively parallel anisotropic mesh adaptation*, 2019
- Modesar **SHAKOOR**, Chung **HAE PARK** - *A higher-order finite element method with unstructured anisotropic mesh adaptation for two phase flows with surface tension*, 2021
- Jiaxin **ZHAO** - *Direct multiphase mesh generation from 3D images using anisotropic mesh adaptation and a redistancing equation*, 2016