

## Mathématiques et applications

Modélisations Analyses Numériques et Calculs Scientifiques  
MACS

### Mémoire de Master

# SIMULATION NUMÉRIQUE DU PHÉNOMÈNE DKT PAR MÉTHODE DE DOMAINE FICTIF AVEC MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE DISTRIBUÉ

Mahmoud ASSAF

Encadrant : Nicolas ROQUET, Yannick DESCANTES  
Laboratoire MAST-GPEM, Université Gustave Eiffel.

Spetembre 2024

## Résumé

Nous avons développé une méthode domaine fictif avec multiplicateurs de Lagrange distribués pour simuler le mouvement de particules circulaires rigides en suspension dans un fluide newtonien. Cette approche est une généralisation de la méthode de Patankar. [1], adaptée aux mêmes problèmes d'écoulements.

Dans notre mise en œuvre MDF/MLD le système fluide-particules est traité explicitement : chaque particule est prise en compte à l'aide d'une formulation faible combinée, garantissant que les forces et moments entre les particules et le fluide se compensent de manière adéquate. Les équations régissant le fluide sont résolues dans l'ensemble du domaine d'écoulement, y compris à l'intérieur des particules où le fluide est modélisé comme rigide grâce à une distribution appropriée de multiplicateurs de Lagrange.

Pour traiter les difficultés liées à la contrainte d'incompressibilité et à la convection, nous avons utilisé la technique de séparation d'opérateurs de Patankar. [1]. Nous avons modifié ce schéma à trois étapes pour résoudre le problème en deux étapes en utilisant la méthode des caractéristiques, ce qui nous permet d'éviter la résolution d'un sous-problème non linéaire. Pour la résolution des sous-problèmes linéaires mixtes apparaissant à chaque étape, nous avons employé la méthode du gradient conjugué sur le complément de Schur et la transformation de Fourier. Ceci est notamment rendu possible par une reformulation permettant d'éliminer la pondération par la masse volumique (qui est variable en espace) dans la matrice de masse..

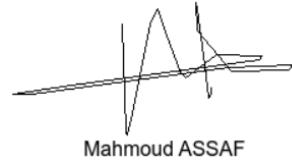
La validation du code a été effectuée par une étude de cas sur la sédimentation d'une particule dans le fluide. Nous avons ensuite étendu l'analyse au cas de la sédimentation de deux particules dans un canal en variant le nombre de Reynolds et le nombre de Froude. Les résultats ont été comparés à ceux obtenus par Patankar. [1] pour vérifier leur cohérence.

**Keywords :** Multiplicateur de Lagrange Distribué, Domaine Fictif, Eléments Finis, Sédimention, DKT, Simulation et Analyse Numérique.

## Déclaration

Je certifie par la présente que ce rapport constitue mon propre travail. Lorsque le langage d'autrui est cité, les guillemets le signalent, et le crédit approprié est accordé lorsque j'ai utilisé le langage, les idées, les expressions ou les écrits d'une autre personne.

Je déclare que le rapport décrit un travail original qui n'a pas été précédemment présenté pour l'obtention d'un autre diplôme dans une institution. Ce travail a été réalisé au laboratoire GPEM sous la direction de Nicolas Roquet et de Yannick Descantes.



Mahmoud ASSAF

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à Monsieur Nicolas Roquet, mon directeur de stage, pour son soutien précieux, ses conseils avisés, et son encadrement tout au long de ce projet. Son expertise et sa disponibilité ont été essentielles à l'accomplissement de ce travail.

Je remercie également les membres du laboratoire GPEM pour leur aide et leurs discussions enrichissantes qui ont contribué à la réalisation de cette recherche.

Je souhaite également remercier mes amis et ma famille pour leur soutien moral et leur patience durant cette période intensive de travail.

Enfin, je remercie toutes les personnes et institutions qui ont contribué de près ou de loin à la réussite de ce projet.

Merci à tous pour votre aide et votre soutien.

# Table des matières

<b>Liste des tableaux</b>	<b>vi</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Énoncé du problème . . . . .	2
1.2 Objectifs . . . . .	2
1.3 Synthèse du travail . . . . .	2
1.4 Organisation du rapport . . . . .	3
1.5 Liste des symboles . . . . .	4
<b>2 Modèle mathématique</b>	<b>5</b>
2.1 Modèle formel . . . . .	5
2.1.1 Équations du mouvement du fluide . . . . .	6
2.1.2 Équations du mouvement de la particule . . . . .	6
2.1.3 Transformation adimensionnelle . . . . .	8
2.2 Formulation variationnelle mixte du problème . . . . .	10
<b>3 Méthode numérique</b>	<b>16</b>
3.1 Le schéma à trois étapes de Patankar <i>et al.</i> . . . . .	17
3.2 Modification du Schéma numérique avec la méthode de caractéristiques . . . . .	19
3.2.1 Méthode des caractéristiques . . . . .	19
3.2.2 Schéma numérique en deux étapes : Prediction - Correction . . . . .	21
3.2.3 Existence et unicité pour les sous problèmes. . . . .	22
3.3 Approximation spatiale par éléments finis . . . . .	27
3.3.1 Choix des espaces d'approximation . . . . .	28
3.3.2 Discrétisation de problème . . . . .	28
3.3.3 Sous-systèmes linéaires à résoudre . . . . .	32
3.4 Considérations sur les systèmes linéaires . . . . .	35
3.4.1 Complément de Schur . . . . .	35
3.4.2 Solveur algébrique FPS . . . . .	38
3.5 Méthode de résolution des systèmes . . . . .	41
<b>4 Résultats numériques</b>	<b>45</b>
4.1 Validation du code . . . . .	45
4.1.1 Sédimentation d'une particule . . . . .	45
4.1.2 Phénomène DKT . . . . .	52
<b>5 Conclusion</b>	<b>60</b>

<b>6 Annexe</b>	<b>61</b>
.1 Appendice A . . . . .	61
.2 Appendice B . . . . .	63
.3 Appendice C . . . . .	66
.4 Appendice D . . . . .	68
<b>References</b>	<b>69</b>

# Table des figures

2.1	Système :Fluide +particle . . . . .	5
2.2	Particule-Frontière . . . . .	7
2.3	Normale de domaine . . . . .	11
3.1	Maillage : fluide + particules . . . . .	29
3.2	Élément de référence Q1-IsoQ2 pour le champ vitesse . . . . .	29
3.3	Élément de référence $Q_0$ pour la pression $P$ . . . . .	30
3.4	Élément triangulaire de référence $P_1$ pour $\lambda$ . . . . .	30
3.5	Schéma en temps . . . . .	43
4.1	Graphes des solutions approchées de G . . . . .	46
4.2	Graphes des Courbes de G en fonction de $dt$ . . . . .	48
4.3	$v_y$ de G en fonction de $dt$ . . . . .	49
4.4	Graphes des Courbes de $v_y$ et $v_x$ de G en fonction de $\rho$ . . . . .	50
4.5	Séquence de Drafting-Kissing-Tumbling (DKT) . . . . .	52
4.6	Trajectoires transversales des particules. . . . .	53
4.7	Trajectoires verticales des particules. . . . .	55
4.8	Solution approchée $v_x$ . . . . .	56
4.9	Solution approchée $v_y$ . . . . .	58

# 1 Introduction

L’Université Gustave Eiffel est une université nationale multi-site créée en 2020 sur un modèle innovant rassemblant pour la première fois en France le triptyque université/écoles/organisme de recherche, et dont l’ambition est de transformer la vie et les villes, ainsi que de répondre aux défis environnementaux et climatiques. Le campus de Nantes de cette université, initialement Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, est caractérisé par ses grands équipements permettant des expérimentations à échelle réelle dans les domaines du génie civil et, plus récemment, du développement durable.

Ce campus rassemble des chercheurs aux compétences variées au sein de son laboratoire GPEM (Granulats et Procédés d’Élaboration des Matériaux), reconnu pour son interdisciplinarité, allant de la recherche fondamentale aux applications concrètes. Les domaines couverts incluent les mathématiques appliquées, la physique, le génie civil, le génie des procédés et la chimie. Par exemple, la mécanique des fluides et des solides fait appel aux équations aux dérivées partielles pour modéliser l’écoulement des fluides dans les matériaux poreux. La simulation des transferts thermiques, via l’équation de la chaleur, optimise les procédés de séchage des matériaux. La méthode des éléments finis est utilisée pour analyser la résistance des structures, tandis que la cinétique chimique modélise les réactions au sein des matériaux en cours de fabrication. Enfin, la mécanique des milieux granulaires s’appuie sur des simulations pour étudier le comportement des granulats sous contrainte. Ces approches permettent d’améliorer la compréhension et l’optimisation des processus en génie civil.

## 1.1 Énoncé du problème

La simulation numérique directe du mouvement de corps rigides dans un fluide peut être appliquée dans de nombreux contextes liées à la ville durable, par exemple, les suspensions en sédimentation et fluidisées, le transport lubrifié, la fracturation hydraulique des réservoirs, blocage d'écoulement dans les procédés industriels, etc. La capacité de simuler le mouvement d'un grand nombre de particules dans un fluide est importante pour prédire les propriétés effectives du mélange particulaire dans de telles applications.

## 1.2 Objectifs

Dans notre travail, nous allons Simuler numériquement l'interaction entre deux grains solides séparés par une couche de fluide d'épaisseur variable « drafting-kissing-tumbling (DKT) », dont l'objectif est de calculer la trajectoire des grains ainsi que les champs de vitesses et de pression dans le fluide. La principale difficulté réside dans le calcul des forces d'interaction fluide/grain et grain/grain. D'un point de vue méthodologique, deux code de calcul développés au laboratoire GPEM : un code mettant en œuvre la méthode des domaines fictifs avec multiplicateurs de Lagrange distribués [1].

## 1.3 Synthèse du travail

Dans ce rapport, nous présentons une méthode de domaine fictif basée sur des multiplicateurs de Lagrange distribués (DLM) pour simuler le mouvement de particules rigides dans un fluide newtonien. Cette approche utilise une grille structurée fixe, supprimant la nécessité de remailler le domaine, tout en permettant l'emploi de solveurs rapides et économies en mémoire.

Les multiplicateurs de Lagrange contraint le tenseur de taux de déformation à l'intérieur des particules, garantissant leur rigidité. Cette méthode simplifie la modélisation des interactions fluide-particule, rendant possible l'étude de phénomènes tels que la sédimentation et l'agglomération dans diverses applications.

La discréttisation temporelle est réalisée avec la méthode de Marchuk modifiée, tandis que la discréttisation spatiale repose sur un maillage rectangulaire global, facilitant le calcul avec des méthodes comme la Transformée de Fourier rapide (FST pour Fast Fourier Transform dans la littérature) et les éléments finis classiques. En somme, cette méthode optimise le coût numérique des simulations tout en assurant des interactions fluide-particule réaliste dans des systèmes complexes.

## 1.4 Organisation du rapport

Ce rapport est structuré pour offrir une compréhension claire et approfondie des travaux réalisés durant le stage. Chaque section est conçue pour aborder des aspects spécifiques du projet, depuis les bases théoriques jusqu'aux résultats finaux. Voici la structure détaillée du rapport :

La section 2 est dédiée aux modèles mathématiques utilisés pour analyser les phénomènes étudiés. Elle présente la formulation des équations régissant le mouvement du fluide et des particules, ainsi que leur mise adimensionnelle. Elle aborde également la formulation variationnelle mixte du problème, fournissant ainsi les bases théoriques nécessaires pour les méthodes numériques employées par la suite.

La section 3 détaille les méthodes numériques employées pour résoudre les modèles mathématiques. Elle débute par une présentation du schéma en trois étapes de Patankar, puis décrit les modifications apportées via la méthode des caractéristiques. Cette section explique également les aspects relatifs à l'existence et à l'unicité des solutions pour les sous-problèmes, ainsi que les techniques d'approximation numérique utilisées. Les considérations sur les systèmes linéaires, notamment le complément de Schur et les solveurs algébriques, y sont également abordées en détail.

Enfin, la section 4 présente et analyse les résultats des simulations numériques. Elle commence par la validation du code utilisé, suivie de l'analyse de la sédimentation d'une particule et de la technique DKT. Les résultats sont comparés aux prévisions théoriques pour évaluer la performance des méthodes numériques appliquées et valider les approches employées.

Divers détails sont renvoyés en annexe pour faciliter la fluidité de la lecture du rapport. En particulier le théorème de Stokes en 2D, le théorème d'existence et d'unicité du problème continu, le théorème de l'inf-sup (ou LBB), le produit tensoriel et ses propriétés importantes, un exemple de couples d'espaces incompatibles, ainsi que l'algorithme du gradient conjugué.

## 1.5 Liste des symboles

- $\text{Re} = \frac{\rho_f U L}{\eta}$  est le nombre de Reynolds,
- $\Delta t$  est le pas de temps,
- $F_r = \frac{U}{\sqrt{g_0 L}}$  est le nombre de Froude,
- $g$  est le champ de gravité,
- $\rho_f$  est la densité du fluide,
- $\rho_s$  est la densité de la particule,
- $t$  est le temps,  $\mathbf{x} = (x, y)$  est l'espace,
- $D[u] = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$  est le tenseur des taux de déformation,
- $(u \cdot \nabla)u = \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^2$ ,
- $\text{div } u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}$ ,
- $\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ ,
- $U$  une vitesse caractéristique,
- $L$  une longueur caractéristique,
- $P$  pression caractéristique,
- $\eta$  viscosité dynamique,
- $T = \frac{L}{U}$  temps caractéristique,
- $u^* = \frac{u}{U}$  Vitesse adimensionnelle,
- $p^* = \frac{p}{P_0}$  Pression adimensionnelle,
- $x^* = \frac{x}{L}$  Position adimensionnelle,
- $t^* = \frac{t}{T}$  Temps adimensionnel,
- $\Delta t^* = \frac{\Delta t}{T}$  Intervalle de temps adimensionnel.

## 2 Modèle mathématique

### 2.1 Modèle formel

Nous considérons deux particules en chute libre,  $P_1$  et  $P_2$ , dans un réservoir  $\Omega$  fermé et rempli de fluide, placées l'une derrière l'autre. Nous nous limitons ici à une présentation en 2D, où  $P_1$  et  $P_2$  sont des particules circulaires de même masse volumique,  $\rho_s$ . Le fluide est supposé être newtonien, c'est-à-dire qu'il ne présente pas de propriétés complexes telles que la viscoélasticité ou la viscoplasticité. L'accent est mis principalement sur l'étude d'un schéma numérique, laissant de côté les cas de géométries complexes de grains et du domaine.

Soit  $\Omega$  le domaine de calcul, un rectangle délimité par les côtés  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ , contenant à la fois le fluide et les particules, et  $P(t) = \bigcup_{i=1}^2 P_i(t)$  représentant le domaine des particules à l'instant  $t$ , où chaque  $P_i(t)$  désigne l'intérieur de la  $i^{\text{ème}}$  particule avec  $i = 1, 2$  (voir figure 2.1).

Nous supposons, pour simplifier, que la vitesse du fluide satisfait une condition aux limites de Dirichlet homogène sur la frontière extérieure  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$ , et que  $\rho_s$  (masse volumique des particules) et  $\rho_f$  (masse volumique du fluide) sont constantes et non nécessairement égales. De plus, nous supposons qu'aucune autre force volumique n'intervient dans l'écoulement.

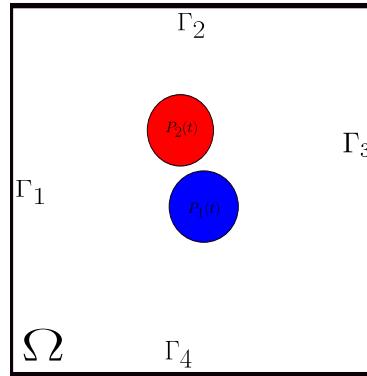


FIGURE 2.1 – Système :Fluide +particle

### 2.1.1 Équations du mouvement du fluide

Les équations qui régissent le mouvement du fluide sur  $\Omega \setminus \overline{P(t)}$  sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_f g, & \Omega \setminus \overline{P(t)}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \Omega \setminus \overline{P(t)}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_i & \partial P_i(t), i = 1, 2 \\ \mathbf{u} = 0 & \Gamma, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \partial P_i(t), i = 1, 2, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \Omega \setminus \overline{P(0)}. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec :

- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  est le vecteur vitesse du fluide et  $p(\mathbf{x}; t)$  est la pression,
- $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  sur  $\Omega / P(t)$ , car la masse du fluide reste constante au cours du mouvement pour un fluide incompressible, (la densité du fluide est considérée comme constante).
- $\boldsymbol{\sigma}$  représente le tenseur des contraintes,  $\boldsymbol{\sigma} = -pI + \boldsymbol{\tau}$ , où  $p$  est la pression thermodynamique du fluide,  $I$  est le tenseur identité,  $\boldsymbol{\tau}$  est le tenseur des contraintes. Dans notre étude, le fluide sélectionné est de nature newtonienne, pour lequel la relation  $\boldsymbol{\tau} = 2\eta D[\mathbf{u}]$  est vérifiée.

### 2.1.2 Équations du mouvement de la particule

Les mouvements des particules peuvent être représentés en termes de vitesses de translation et angulaires en utilisant la deuxième loi de Newton Gloviwnski *et al.*[2].

Dans la formulation actuelle, nous traitons la particule comme un fluide soumis à une contrainte de rigidité supplémentaire comme dans l'article de Patankar *et al.*[1]. Les équations gouvernant le mouvement des particules sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_s \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_s g, & \text{dans } P(t), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{dans } P(t), \\ D[\mathbf{u}] = 0, & \text{dans } P(t), \\ \mathbf{u} = u_i, & \text{sur } \partial P(t), \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}, & \text{sur } \partial P(t), \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \text{dans } P(0). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

avec :

- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  est le vecteur vitesse du fluide dans la zone rigide,
- $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  sur  $P(t)$ , car la densité du fluide est considérée comme constante.
- $D[\mathbf{u}] = 0$  sur  $P(t)$ , la contrainte de rigidité et qu'il faut que la vitesse initiale  $u_0$  doit satisfaire cette équation.

- $\mathbf{g}$  représente l'accélération de la pesanteur, c'est un vecteur constant de  $R^2$ .
- $\sigma$  représente le tenseur des contraintes,  $\sigma = -pI + L + \tau$ , où  $p$  est la pression du fluide,  $I$  est le tenseur identité,  $L$  est la contrainte de rigidité (multiplicateur de Lagrange) donne lieu à un champ  $\lambda$  tel que  $L = D[\lambda]$ .

### Stratégie de collision Gloviwnski et al.[3]

Pour empêcher les particules de se pénétrer les unes les autres ou de pénétrer les quatre parois  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ , nous adoptons la stratégie de collision suivante. Notez bien que les particules sont circulaires donc la technique peut facilement être étudiée.

Considérons ici  $N$  particules  $P_1, P_2, \dots, P_N$ , la stratégie consiste à ajouter une force répulsive exercée sur la  $i^{\text{ème}}$  particule par les autres particules et par les parois. Pour la force répulsive entre particules, nous prenons

$$F_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } d_{i,j} > R_i + R_j + r; \\ \frac{1}{E_p} \left( \frac{R_i + R_j + r - d_{i,j}}{R_i + R_j + r} \right)^2 (X_i - X_j), & \text{si } d_{i,j} \leq R_i + R_j + r; \end{cases}$$

où  $d_{i,j} = \|X_i - X_j\|$  est la distance entre les centres des particules  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$ ,  $R_i$  est le rayon de la  $i^{\text{ème}}$  particule,  $r$  est la portée de la force, et  $E_p$  est un petit paramètre de “raideur” positive.

Pour la force répulsive entre une particule et une paroi, nous prenons

$$F_{w_{i,j}} = \begin{cases} 0, & \text{si } d'_{i,j} > 2R_i + r; \\ \frac{1}{E_w} \left( \frac{2R_i + r - d'_{i,j}}{2R_i + r} \right)^2 (X_i - X'_{i,j}), & \text{si } d'_{i,j} \leq 2R_i + r; \end{cases}$$

où  $d'_{i,j} = \|X_i - X'_{i,j}\|$  est la distance entre le centre de la  $i^{\text{ème}}$  particule et la particule imaginaire  $P'_{i,j}$  située de l'autre côté de  $\Gamma_j$  (voir Fig. 2.2), et  $E_w$  est un autre petit paramètre de “raideur” positive.

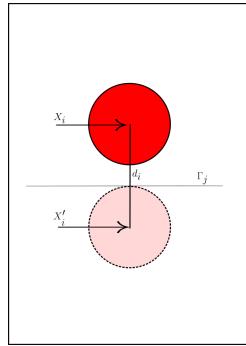


FIGURE 2.2 – Particule-Frontière

### 2.1.3 Transformation adimensionnelle

L'adimensionnement des équations est une technique fondamentale en physique et en ingénierie qui présente de nombreux avantages. Adimensionner des équations consiste à utiliser des variables adimensionnelles au lieu de variables physiques.

L'adimensionnement des équations du mouvement est une étape importante car il permet de remplacer les inconnues du problème, telles que la vitesse et la pression, par des inconnues ayant le même ordre de grandeur. Cela est particulièrement utile d'un point de vue numérique.

Cette technique permet de simplifier les équations et de réduire la complexité des problèmes, tout en mettant en évidence les paramètres clés et les relations de similitude.

#### Forme adimensionnelle de l'équation (2.1)

Nous avons :

- $\rho_f \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u : \rho_f \frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} u^* + u^* \cdot \nabla^* u^* \right)$
- $\nabla p : \frac{P_0}{L} \nabla p^*$
- $2\eta \nabla \cdot D[u] : 2\eta \frac{U}{L^2} \nabla \cdot D[u^*]$
- $\rho_f g : \rho_f g_0 e_z$

En remplaçant ces termes dans l'équation (1) du système (2.1) :

$$\rho_f \frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* \right) = -\frac{P_0}{L} \nabla p^* + 2\eta \frac{U}{L^2} \nabla \cdot D[u^*] + \rho_f g_0 e_z$$

En multipliant par  $\frac{L^2}{\eta U}$ , Nous obtenons :

$$\rho_f \frac{UL}{\eta} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} u^* + u^* \cdot \nabla^* u^* \right) = -\frac{P_0 L}{\eta U} \nabla p^* + 2\nabla \cdot D[u^*] + \rho_f \frac{UL}{\eta} \frac{g_0 L}{U^2} g^* \quad (2.3)$$

Nous remplaçons  $Re$  est le nombre de Reynolds par  $\frac{\rho_f U L}{\eta}$  et  $F_r$  est le nombre de Froude par  $\frac{U}{\sqrt{g_0 L}}$  dans l'équation (2.3), nous obtenons :

$$Re \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* \right) = -\frac{P_0 L}{\eta U} \nabla p^* + 2\nabla \cdot D[u^*] + \frac{Re}{F_r^2} g^*$$

N.B. : Nous allons supprimer l'astérisque (\*) dans la forme adimensionnée pour rendre l'équation plus lisible.

$$Re \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\frac{P_0 L}{\eta U} \nabla p + 2\nabla \cdot D[u] + \frac{Re}{F_r^2} g$$

Nous choisissons la pression caractéristique d'une façon  $P_0 = \frac{\eta U}{L}$ , nous obtenons alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Re}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\right) = -\nabla p + 2\nabla \cdot D[\mathbf{u}] + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} g, & \forall x \in \Omega / \overline{P(t)} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \Omega / \overline{P(t)} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_i & \partial \overline{P_i(t)}, i = 1, 2 \\ \mathbf{u} = 0 & \Gamma, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \partial \overline{P_i(t)}, i = 1, 2 \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \Omega / \overline{P(0)} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

**Forme adimensionnelle du système (2.2)** Nous avons :

- $\rho_s \frac{\partial u}{\partial t} u + u \cdot \nabla u \quad : \quad \rho_s \frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} u^* + u^* \cdot \nabla^* u^* \right)$
  - $\nabla p \quad : \quad \frac{P_0}{L} \nabla p^*$
  - $2\eta \nabla \cdot D[u] \quad : \quad 2\eta \frac{U}{L^2} \nabla \cdot D[u^*]$
  - $\rho_s g \quad : \quad \rho_s g_0 g^*$
  - $2\nabla \cdot D[\lambda] \quad : \quad \frac{\lambda_0}{L^2} \nabla \cdot D[\lambda^*]$

En remplaçant ces termes dans l'équation (1) du système (2.2) :

$$\rho_s \frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* \right) = -\frac{P_0}{L} \nabla p^* + 2\eta \frac{U}{L^2} \nabla \cdot D[u^*] + \frac{\lambda_0}{L^2} \nabla \cdot D[\lambda^*] + \rho_s g_0 e_z$$

En multipliant par  $\frac{L^2}{\eta U}$ , Nous obtenons :

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{\rho_f U L}{\eta} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* \right) = - \frac{P_0 L}{\eta U} \nabla p^* + 2 \nabla \cdot D[u^*] + \frac{\lambda_0}{\eta U} \nabla \cdot D[\lambda^*] + \frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{\rho_f U L}{\eta} \frac{g_0 L}{U^2} e_z \quad (2.5)$$

En remplaçant le nombre de Reynolds  $Re$  par  $\frac{\rho_f U L}{\eta}$  et le nombre de Froude  $F_r$  par  $\frac{U}{\sqrt{g_0 L}}$  dans l'équation (2.5), nous obtenons :

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} \text{Re} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* \right) = -\frac{P_0 L}{\eta U} \nabla p^* + 2 \nabla \cdot D[u^*] + \frac{\lambda_0}{\eta U} \nabla \cdot D[\lambda^*] + \frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} g^*$$

N.B. : Pour des raisons de lisibilité, nous allons supprimer l'astérisque (\*) dans la forme adimensionnée de l'équation. Nous choisissons la caractéristique de longueur  $\lambda_0$  de la manière suivante :  $\lambda_0 = \eta U$  et la pression caractéristique  $P_0$  telle que  $P_0 = \frac{\eta U}{L}$ . Nous obtenons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_s}{\rho_f} \text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + 2\nabla \cdot D[\mathbf{u}] + \nabla \cdot D[\lambda] + \frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} g \quad \forall x \in P(t), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } P(t), \\ D[\mathbf{u}] = 0, \quad \text{dans } P(t), \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_i, \quad \text{sur } \partial P(t), \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}, \quad \text{sur } \partial P(t), \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \text{pour } t = 0 \text{ dans } P(0) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

## 2.2 Formulation variationnelle mixte du problème

En dérivant la forme faible en espace les équations (1) des systèmes (2.4) et (2.6), les forces et les moments hydrodynamiques sur les particules peuvent être complètement éliminés en combinant les équations de mouvement du fluide et des particules en une seule équation faible de mouvement pour le système fluide-particule combiné. Cette équation, appelée l'équation combinée de mouvement, a été introduite pour la première fois par Hesla (1991), qui l'a utilisée comme base pour un schéma par éléments finis pour la simulation directe du mouvement des particules dans un fluide newtonien. Comme nous le verrons, l'équation combinée de mouvement est complètement générale, elle s'applique à tout système fluide-particule, même si le fluide est viscoélastique.

Soit  $H_0^1(\Omega \setminus \overline{P(t)})$  l'espace des fonctions test pour le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ , muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega \setminus P(t))} = \|D[\mathbf{u}]\|_{L^2}.$$

Soit également  $L_0^2(\Omega \setminus P(t))$  l'espace des fonctions pour la pression  $p$ , défini par

$$L_0^2(\Omega \setminus P(t)) = \{q \in L^2(\Omega \setminus \overline{P(t)}) \mid \int_{\Omega \setminus \overline{P(t)}} q \, dx = 0\}.$$

Nous multiplions l'équation (1) du système (2.4) par une fonction test  $v \in H_0^1$  et nous intégrons sur  $\Omega \setminus \overline{P(t)}$ . Nous obtenons alors :

$$\text{Re} \int_{\Omega \setminus P(t)} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega \setminus P(t)} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx - 2 \int_{\Omega \setminus P(t)} (\nabla \cdot D[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{v} \, dx = 0$$

En utilisant la formule de Green sur les termes de la contrainte et de la pression, nous obtenons :

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega \setminus P(t)} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dx - \int_{\Omega \setminus P(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx \\ - 2 \int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{v} dx + 2 \int_{\Omega \setminus P(t)} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx = 0.$$

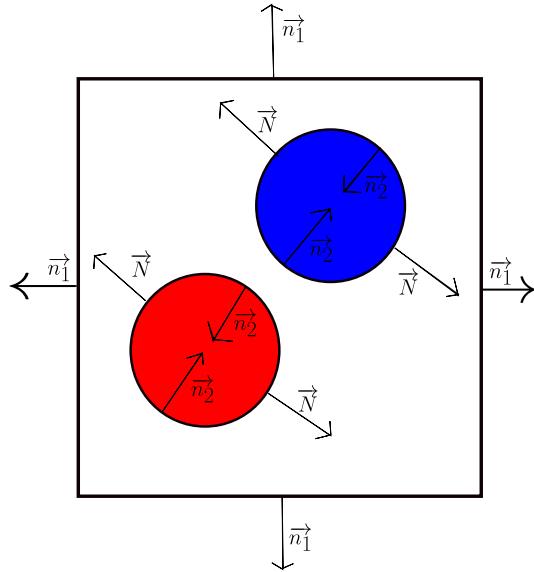


FIGURE 2.3 – Normale de domaine

Or,  $\int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} p(\mathbf{v} \cdot n) dx = \int_{\Gamma} p(\mathbf{v} \cdot n_1) dx + \int_{\partial P(t)} p(\mathbf{v} \cdot n_2) dx$  et comme  $\mathbf{v} = 0$  sur  $\Gamma$  car  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{P(t)})$ , alors

$$\int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} p(\mathbf{v} \cdot n) dx = \int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} p(\mathbf{v} \cdot n_2) dx.$$

Or  $n_2 = -N$  (voir figure 2.3), donc

$$\int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} p(\mathbf{v} \cdot n) dx = - \int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} p(\mathbf{v} \cdot N) dx.$$

De même,

$$\int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} (\nabla \cdot D[\mathbf{u}] \cdot n) \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Gamma} (\nabla \cdot D[\mathbf{u}] \cdot n_1) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial P(t)} (\nabla \cdot D[\mathbf{u}] \cdot n_2) \cdot \mathbf{v} dx,$$

et donc,

$$\int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot n) \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\partial P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot n_2) \cdot \mathbf{v} dx,$$

ce qui implique que

$$\int_{\partial(\Omega \setminus P(t))} (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot n) \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\partial P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot N) \cdot \mathbf{v} dx.$$

D'où l'équation :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus P(t)} [\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} - p(\nabla \cdot \mathbf{v})] dx \\ & + 2 \int_{\Omega \setminus P(t)} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx + \int_{\partial P(t)} [2(\nabla \cdot D[\mathbf{u}] \cdot N) \cdot \mathbf{v} - p(\mathbf{v} \cdot N)] dx = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour la contrainte d'incompressibilité, nous multiplions par une fonction test scalaire  $q \in L^2(\Omega \setminus P(t))$  et intégrons sur  $\Omega \setminus P(t)$  :

$$\int_{\Omega \setminus P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q dx = 0 \quad (2.8)$$

En ajoutant les équations (2.7) et (2.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_{\Omega \setminus P(t)} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\partial P(t)} p(\mathbf{v} \cdot N) dx - \int_{\Omega \setminus P(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx \\ & + 2 \int_{\Omega \setminus P(t)} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx + 2 \int_{\partial P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot N) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega \setminus P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q dx = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

D'où la formulation faible du système (2.4) :

Trouver  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{P(t)})$  et  $p \in L_0^2(\Omega \setminus P(t))$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega \setminus P(t)} [\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} + 2 \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}]] dx \\ - \int_{\partial P(t)} p(\mathbf{v} \cdot N) dx + 2 \int_{\partial P(t)} (\nabla \cdot D[\mathbf{u}] \cdot N) \cdot \mathbf{v} dx \\ + \int_{\Omega \setminus P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q dx - \int_{\Omega \setminus P(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx = 0, \quad \Omega \setminus \overline{P(t)}, \quad (1) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_i \quad \text{sur } \partial P_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (2) \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \Omega \setminus \overline{P(0)}. \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega \setminus P(t)), \forall q \in L^2(\Omega \setminus P(t))$$

Soit  $H^1(\Omega \setminus P(t))^2$  l'espace des solutions pour le champ de vitesse dans le domaine rigide  $P(t)$ . Nous multiplions l'équation (1) du système (2.6) par une fonction test  $v$  et intégrons sur  $P(t)$ . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_{P(t)} \frac{\rho_s}{\rho_f} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx + \\ & + \int_{P(t)} \nabla p \cdot \mathbf{v} dx - 2 \int_{P(t)} (\nabla \cdot D[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{P(t)} (\nabla \cdot D[\lambda]) \cdot \mathbf{v} dx = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green sur le terme de contrainte et de la pression, nous obtenons :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \int_{P(t)} \frac{\rho_s}{\rho_f} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial P(t)} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}) dx - \\ \int_{P(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx + 2 \int_{P(t)} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx - 2 \int_{\partial P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v} dx \\ + \int_{P(t)} \mathbf{D}[\lambda] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx - \int_{P(t)} ((\nabla \cdot \mathbf{D}[\lambda]) \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v} dx = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour la contrainte d'incompressibilité, nous multiplions par une fonction test scalaire  $q \in L^2(P(t))$  et intégrons sur  $\Omega \setminus P(t)$ , nous obtenons alors :

$$\int_{P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q dx = 0 \quad (2.12)$$

La contrainte de rigidité (3) du système (2.6) peut également être mise en œuvre en imposant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot D[\mathbf{u}] = 0 & P(t), \quad (1) \\ D[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial P(t). \quad (2) \end{cases} \quad (2.13)$$

Les deux équations (1) et (2) du système (2.13) peuvent se combiner pour s'écrire sous la contrainte suivante :

$$\int_{P(t)} D[\mu] : D[\mathbf{u}] dx = 0 \quad \forall \mu \in H^1(P(t))^2. \quad (2.14)$$

En effet :

Comme les conditions pour appliquer le théorème de Green sont bien remplies, en l'appliquant  $\mathbf{D}[\mu] : \mathbf{D}[\mathbf{u}]$ , nous obtenons :

$$\int_{P(t)} \nabla \mu : \mathbf{D}[\mathbf{u}] dx = \int_{\partial P(t)} \mu \cdot (\mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}) ds - \int_{P(t)} \mu \cdot (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}]) dx.$$

Nous avons :

- $\int_{\partial P(t)} \mu \cdot (\mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}) ds = 0$  car  $\mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial P(t)$
- $\int_{P(t)} \mu \cdot (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}]) dx = 0$  car  $\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}] = 0$  sur  $P(t)$

Nous déduisons que  $\int_{P(t)} \mathbf{D}[\mu] : \mathbf{D}[\mathbf{u}] dx = 0 \quad \forall \mu \in H^1(P(t))^2$ .

En ajoutant les trois équations (2.11), (2.12) et (2.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_{P(t)} \frac{\rho_s}{\rho_f} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx \\
& + \int_{\partial P(t)} p(\mathbf{v} \cdot N) dx - \int_{P(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx + 2 \int_{P(t)} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx - 2 \int_{\partial P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot N) \cdot \mathbf{v} dx \\
& + \int_{P(t)} \mathbf{D}[\lambda] \cdot \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx - \int_{\partial P(t)} ((\nabla \cdot \mathbf{D}[\lambda]) \cdot N) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{P(t)} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) dx + \int_{P(t)} \mathbf{D}[\mu] : \mathbf{D}[\mathbf{u}] dx = 0.
\end{aligned}$$

$$\forall \mu \in H^1(P(t))^2, \forall v \in H^1(P(t))^2 \text{ et } \forall q \in L^2(P(t))$$

D'où la formulation faible du problème (2.6)

Trouver  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega \setminus P(t))^2$  et  $\lambda \in H^1(P(t))^2$  tels que :

$$\left\{
\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_{P(t)} \frac{\rho_s}{\rho_f} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{P(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx \\
& + \int_{P(t)} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) dx + \int_{\partial P(t)} p(\mathbf{v} \cdot N) dx + 2 \int_{P(t)} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx \\
& - 2 \int_{\partial P(t)} (\nabla \cdot \mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot N) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{P(t)} \mathbf{D}[\lambda] \cdot \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx \\
& - \int_{\partial P(t)} ((\nabla \cdot \mathbf{D}[\lambda]) \cdot N) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{P(t)} \mathbf{D}[\mu] : \mathbf{D}[\mathbf{u}] dx = 0, \quad (1) \\
& \mathbf{u} = \mathbf{u}_i, \quad \text{sur } \partial P(t), \quad (2) \\
& \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}, \quad \text{sur } \partial P(t), \quad (3) \\
& \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \text{dans } P(0). \quad (4).
\end{aligned}
\right. \tag{2.15}$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \forall q \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ et } \forall \mu \in \mathbf{H}^1(\mathbf{P}(\mathbf{t}))^2$$

En additionnant les équations (1) de chacun des systèmes (2.10) et (2.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx + \operatorname{Re} \int_{P(t)} \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx \\
& - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) dx + 2 \int_{\Omega} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx \\
& + \int_{P(t)} D[\lambda] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx + \int_{P(t)} D[\mu] : \mathbf{D}[\mathbf{u}] dx = 0
\end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \forall q \in L^2(\Omega) \text{ et } \forall \mu \in H^1(P(t))^2.$$

Trouver  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$ ,  $p \in L_0^2(\Omega)$  et  $\lambda \in H^1(P(t))^2$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx + \text{Re} \int_{P(t)} \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx \\ \quad - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} \mathbf{q} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx + 2 \int_{\Omega} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx \\ \quad + \int_{P(t)} \mathbf{D}[\lambda] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx + \int_{P(t)} \mathbf{D}[\mu] : \mathbf{D}[\mathbf{u}] dx = 0, \quad (1) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \text{dans } \Omega, \quad (2) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \forall q \in L^2(\Omega) \text{ et } \forall \mu \in H^1(P(t))^2$$

$$\text{Soit la fonction } \rho(x) = \begin{cases} \frac{\rho_s}{\rho_f}, & \forall x \in P(t) \\ 1, & \forall x \in \Omega \setminus \overline{P(t)} \end{cases}$$

Ainsi, le système (2.16) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx + \text{Re} \int_{\Omega} (\rho(x) - 1) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx \\ \quad - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} \mathbf{q} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx + 2 \int_{\Omega} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx \\ \quad + \int_{P(t)} \mathbf{D}[\lambda] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx + \int_{P(t)} \mathbf{D}[\mu] : \mathbf{D}[\mathbf{u}] dx = 0, \quad (1) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2) \end{array} \right. \quad (2.17)$$

En simplifiant l'équation (1) du système (2.17), nous obtenons :

Trouver  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$ ,  $p \in L_0^2(\Omega)$  et  $\lambda \in H^1(P(t))^2$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \int_{\Omega} \rho(x) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} q (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx \\ \quad + 2 \int_{\Omega} D[\mathbf{u}] : D[\mathbf{v}] dx + \int_{P(t)} D[\lambda] : D[\mathbf{v}] dx + \int_{P(t)} D[\mu] : D[\mathbf{u}] dx = 0. \quad (1) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \text{dans } \Omega, \quad (2) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \forall q \in L^2(\Omega) \text{ et } \forall \mu \in H^1(P(t))^2$$

Dans la section suivante, nous présentons la méthode numérique utilisée dans l'article de Patankar *et al.* [4] pour résoudre le système d'équations, afin de mieux comprendre les modifications et le schéma employés dans notre travail.

### 3 Méthode numérique

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode numérique utilisée dans l'article de Patankar *et al.*[4], pour résoudre le système d'équations (2.18). Nous proposons une modification originale qui simplifie ce schéma et sa mise en oeuvre.

La nouvelle formulation est mise en œuvre pour les écoulements particulaires bidimensionnels, comme développé par Singh *et al.* [2]. Afin de mettre en évidence les modifications apportées par Patankar *et al.* [4] considèrent que le fluide en suspension est newtonien et que les particules sont circulaires, ce qui entraîne à négliger le mouvement angulaire des particules et simplifie le problème. Dans notre travail, nous avons respecté ces conditions afin de pouvoir comparer nos résultats à ceux de l'article de Patankar *et al.* [4].

Singh *et al.* [2] utilisent le schéma de séparation des opérateurs de Marchuk-Yanenko [5] pour la discrétisation temporelle, comme décrit également par Patankar *et al.* [4]. Cette méthode permet de gérer efficacement la discrétisation temporelle dans le contexte de la formulation modifiée.

Le système d'équations (2.18) constitue un problème entièrement couplé difficile à résoudre directement en raison de plusieurs sources de difficulté [6] :

1. La condition d'incompressibilité et la pression inconnue  $p$  associée ;
2. Les termes d'advection et de diffusion ;
3. La contrainte du mouvement de corps rigide dans  $P(t)$  et le multiplicateur de Lagrange distribué  $\lambda$  associé.
4. la détection et le calcul des forces de contact  $F_i$  et des couples  $T_i$  pour les deux particules.

Chacune de ces difficultés correspond à un opérateur spécifique (les premier et dernier étant essentiellement des opérateurs de projection).

Patankar *et al.* ont utilisé une approche de fractionnement d'opérateur de premier ordre [3] pour diviser le problème couplé en plusieurs sous-problèmes pour résoudre séquentiellement. Cette approche a été introduite pour la première fois par Glowinski *et al.* [7] dans le contexte des calculs d'écoulement chargé de particules et a ensuite été largement utilisée dans de nombreux articles. Les équations couplées peuvent être considérées comme un problème de valeur initiale de la forme générale suivante :

$$\frac{d\Phi}{dt} + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i(\Phi) = f$$

$$\Phi(t = 0) = \Phi_0$$

où les opérateurs  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  varient selon les différentes stratégies de fractionnement Patankar *et al.*[1], et  $\Phi$  est un vecteur de champs inconnus. Dans le travail de Patankar *et al.* [4]  $\Phi = (\mathbf{u}, p, \lambda)$  et une stratégie de fractionnement en trois étapes :

$$\frac{\Phi^{n+1/3} - \Phi^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_1(\Phi^n, \Phi^{n+1/3}) = f_1^{n+1}$$

$$\frac{\Phi^{n+2/3} - \Phi^{n+1/3}}{\Delta t} + \mathbf{A}_2(\Phi^n, \Phi^{n+2/3}) = f_2^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^{n+2/3}}{\Delta t} + \mathbf{A}_3(\Phi^n, \Phi^{n+1}) &= f_3^{n+1} \\ f_1^{n+1} + f_2^{n+1} + f_3^{n+1} &= f((n+1)\Delta t) \end{aligned}$$

où  $\Delta t$  est l'amplitude du pas de temps.

Nous avons utilisé deux étapes dans notre schéma ce qui rend le temps de calcul plus rapide et efficace. Dans les sections suivantes, nous présentons le schéma de Patankar *et al.* de discréétisation temporelle de chaque sous-problème, ainsi le schéma de notre travail.

### 3.1 Le schéma à trois étapes de Patankar *et al.*

Dans cette sous-section, nous allons détailler le schéma utilisé par Patankar *et al.*[1] afin de mieux comprendre son approche pour la discréétisation en temps.

#### — Étape 1 : Problème Stokes généralisé

Trouver  $\mathbf{u}^{n+1/3} \in H_0^1(t^{n+1})$  et  $p^{n+1/3} \in L_0^2(\Omega)$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1/3} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p^{n+1/3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1/3}) \, d\mathbf{x} \\ + 0.5 \times \int_{\Omega} 2D(\mathbf{u}^{n+1/3}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 0. \quad \forall \mathbf{v} \in W_0 \text{ et } q \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

#### Forme simplifiée :

Trouver  $\mathbf{u}^{n+1/3} \in H_0^1(t^{n+1})$  et  $p^{n+1/3} \in L_0^2(\Omega)$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1/3}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p^{n+1/3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{q} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1/3}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \eta D[\mathbf{u}^{n+1/3}] : D[\mathbf{v}] \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1 \text{ et } q \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

où  $v$  appartient à  $H_0^1(\Omega/p(t))$  et  $q$  appartient à  $L^2(\Omega)$ .

#### — Étape 2 : Les termes d'advection et de diffusion

Trouver  $\mathbf{u}^{n+2/3} \in H_0^1(t^{n+1})$  satisfaisant :

$$\int_{\Omega} \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+2/3} - \mathbf{u}^{n+1/3}}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+2/3} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+2/3} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + 0.5 \times \int_{\Omega} 2D[\mathbf{u}^{n+2/3}] : D[\mathbf{v}] \, d\mathbf{x} = 0,$$

pour tout  $\mathbf{v} \in H_0^1(t)$  et  $q \in L^2(\Omega)$ .

#### Forme simplifiée :

Trouver  $\mathbf{u}^{n+2/3} \in H_0^1(t^{n+1})$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+2/3}}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+2/3} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+2/3} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} D[\mathbf{u}^{n+2/3}] : D[\mathbf{v}] \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1/3}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

pour tout  $\mathbf{v} \in H_0^1$  et  $q \in L^2(\Omega)$ .

— **Étape 3 : Particules + rigidités**

Trouver  $\mathbf{u}^{n+1} \in H_0^1$  et  $\boldsymbol{\lambda}^{n+1} \in H^1(P(t^{n+1}))^2$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \int_{P(t^{n+1})} \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+2/3}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{P(t^{n+1})} \mathbf{A}_c^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ + \int_{P(t^{n+1})} D[\boldsymbol{\lambda}^{n+1}] : D[\mathbf{v}] \, d\mathbf{x} \\ + \int_{P(t^{n+1})} D[\boldsymbol{\mu}] : D[\mathbf{u}^{n+1}] \, d\mathbf{x} \\ + \int_{P(t^{n+1})} \operatorname{Re}(\rho_0 - 1) \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+2/3} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+2/3} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

pour tout  $\mathbf{v} \in H_0^1$  et  $\boldsymbol{\mu} \in H^1(P(t^{n+1}))^2$ .

**Forme simplifiée :**

Trouver  $\mathbf{u}^{n+1} \in H_0^1(t^{n+1})$  et  $\boldsymbol{\lambda}^{n+1} \in H^1(P(t^{n+1}))^2$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \int_{P(t^{n+1})} \rho_f \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{P(t^{n+1})} D[\boldsymbol{\lambda}^{n+1}] : D[\mathbf{v}] \, dx \\ + \int_{P(t^{n+1})} D[\boldsymbol{\mu}] : D[\mathbf{u}^{n+1}] \, dx \\ + \int_{P(t^{n+1})} \operatorname{Re}(\rho_0 - 1) \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ = \int_{P(t^{n+1})} \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+2/3}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ + \int_{P(t^{n+1})} \rho_s \mathbf{A}_c^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, dx \\ + \int_{P(t^{n+1})} \operatorname{Re}(\rho_0 - 1) \left( \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} - (\mathbf{u}^{n+2/3} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+2/3} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} \, dx, \end{aligned}$$

pour tout  $\mathbf{v} \in H_0^1$  et  $\boldsymbol{\mu} \in H^1(P(t^{n+1}))^2$ .

## 3.2 Modification du Schéma numérique avec la méthode de caractéristiques

Le but principal de ce stage est de modifier le schéma proposé par Patankar en l'adaptant à une approche en deux étapes, intégrant l'utilisation de la méthode des caractéristiques. Cette adaptation vise à simplifier et, potentiellement, accélérer les calculs.

Dans la sous-section suivante, nous décrirons brièvement la démarche utilisée pour réaliser ces modifications. Nous aborderons les détails techniques de l'implémentation du schéma en deux étapes et la manière dont la méthode des caractéristiques est intégrée pour améliorer les résultats obtenus.

### 3.2.1 Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques permet de découpler la partie purement convective de l'équation (1) du système (2.17). En effet, l'opérateur  $\frac{1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  peut être interprété comme une dérivée particulière, transformant ainsi les coordonnées eulériennes en coordonnées lagrangiennes. Grâce à cette reformulation, il devient théoriquement possible de suivre l'évolution des particules dans le temps le long de leur trajectoire, en résolvant pour chacune d'elles une équation différentielle, dite équation de caractéristiques :

$$\frac{dX(x, s; t)}{dt} = u(X(x, s; t))$$

où  $X(x, s; t)$  définit la position d'une particule à l'instant  $t$  qui se trouvait en  $x$  à l'instant  $s$ , avec  $X(x, s, s) = x$ .

Le traitement du terme convectif non linéaire se réduit ainsi à un problème de recherche du pied de caractéristiques, c'est-à-dire la position de la particule à l'instant précédent. Cette approche permet théoriquement d'éviter la contrainte liée à une condition CFL pour la discréétisation temporelle.

En effet, il a été démontré que si la trajectoire caractéristique est calculée avec précision, le schéma résultant est inconditionnellement stable. En somme, l'utilisation de la méthode des caractéristiques pour la discréétisation de l'équation (1) du système permet d'éliminer le terme non linéaire de cette équation.

### Principe de cette méthode

**1. Dérivée particulière :** On calcule la dérivée temporelle d'une fonction dépendant de la trajectoire temporelle. Si  $t \mapsto \mathbf{X}(t)$  est une trajectoire, alors on dérive  $t \mapsto u(t, \mathbf{X}(t))$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad \text{au point } (t, \mathbf{X}(t)).$$

Nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(t, X(t))} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \Big|_{(t, X(t))} = \frac{du}{dt} \Big|_{(t, X(t))}$$

**2. Différences finies** : Pour approcher cette dérivée particulière via un schéma en différences finies, on utilise :

$$\frac{d}{dt}(u(t, \mathbf{X}(t))) = \frac{u(t^{n+1}, \mathbf{X}(t^{n+1})) - u(t^n, \mathbf{X}(t^n))}{\Delta t}.$$

La position  $\mathbf{X}(t^n)$  est estimée par la méthode des caractéristiques, qui consiste à suivre la trajectoire des particules dans le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ .

**3. Vitesse** : La vitesse  $\mathbf{u}$  est la dérivée temporelle de la trajectoire  $\mathbf{X}$ , donnée par :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{X}(t)) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, \mathbf{X}(t))$$

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^n}{\Delta t} = \mathbf{u}(t^{n+1}, \mathbf{X}(t^{n+1})) \\ \mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}_{ij} \end{cases}$$

où  $\mathbf{X}^n$  et  $\mathbf{X}^{n+1}$  représentent les positions de la particule aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ .

**4. Estimation de  $\mathbf{X}^n$**  : On réarrange cette équation pour obtenir :

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{X}(t^{n+1}) - \Delta t \cdot \mathbf{u}(t^{n+1}, \mathbf{X}(t^{n+1})).$$

Ici,  $\mathbf{X}(t^{n+1})$  est un point connu de la grille, mais  $\mathbf{u}(t^{n+1}, \mathbf{X}(t^{n+1}))$  est une quantité inconnue.

**5. Approximation de  $\mathbf{u}(t^{n+1}, \mathbf{X}(t^{n+1}))$**  : Pour contourner ce problème, on fait l'approximation suivante :

$$\mathbf{u}(t^{n+1}, \mathbf{X}(t^{n+1})) \approx \mathbf{u}(t^n, \mathbf{X}(t^{n+1})).$$

Cette approximation consiste à utiliser la vitesse au temps précédent  $t^n$ , mais évaluée au point  $\mathbf{X}(t^{n+1})$ . Cela est généralement acceptable lorsque  $\mathbf{u}$  ne varie pas fortement entre deux pas de temps.

## Évaluation de $\mathbf{u}$

Pour évaluer  $\mathbf{u}$  (ou son approximation discrète  $\mathbf{u}_h$ ) au point  $\mathbf{X}(t^n)$  (ou plutôt  $\mathbf{X}^n$ ), il est nécessaire d'interpoler car  $\mathbf{X}^n$  ne correspond généralement pas à un point de la grille.

- **Interpolation** : Dans un maillage cartésien, cette interpolation est facilitée car il est aisément de localiser  $\mathbf{X}^n$  dans la grille en temps constant. On utilise les valeurs des points voisins pour interpoler la valeur de  $\mathbf{u}$  à  $\mathbf{X}^n$ .
- **Dérivée particulière** : Approximée par une différence finie.
- **Caractéristique** : Utilisée pour estimer les positions antérieures des particules.
- **Interpolation** : Nécessaire pour évaluer  $\mathbf{u}$  en des points non-grillés.

En résumé, cette méthode combine dérivation temporelle et spatiale en utilisant les caractéristiques et les différences finies, avec une interpolation pour estimer les valeurs en des points non-grillés, permettant ainsi de résoudre des problèmes dynamiques en suivant les trajectoires des particules dans un champ de vitesse.

### 3.2.2 Schéma numérique en deux étapes : Prediction - Correction

Nous avons utilisé la décomposition de Patankar *et al.* [1], que nous avons modifiée pour décomposer notre schéma en deux étapes distinctes. L'objectif de cette modification est de réduire le temps de calcul tout en conservant la même précision. Afin d'éviter de résoudre directement l'équation avec le terme non linéaire  $u \cdot \nabla u$ , nous avons adopté la méthode des caractéristiques. Cette approche permet de découpler la partie convective du problème en remplaçant  $\left(\frac{1}{\partial t} + u \cdot \nabla\right) u$  par  $\frac{du}{dt}$ .

Soit la décomposition en temps suivante :

**Étape 1  $[n ; n+\frac{1}{2}]$  : Résoudre un problème Stokes généralisé avec advection**

$$\begin{cases} \frac{\text{Re}}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{n+1/2} \cdot v \, dx - \int_{\Omega} p^{n+1/2} (\nabla \cdot v) \, dx + 2 \int_{\Omega} D[u^{n+1/2}] : D[v] \, dx \\ = \frac{R_e}{F_r^2} \int_{\Omega} g \cdot v \, dx + \frac{\text{Re}}{\Delta t} \int_{\Omega} u^n \circ X^n \cdot v \, dx. \\ \int_{\Omega} q (\nabla \cdot u^{n+1/2}) \, dx = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

**Étape 2  $[n+\frac{1}{2} ; n+1]$  : Imposer la rigidité**

$$\begin{cases} \frac{\text{Re}}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{n+1} \cdot v \, dx + \frac{1}{\rho_0} \int_{P(n+1)} D[\lambda^{n+1}] : D[v] \, dx = \text{Re} \int_{P(n+1)} \left[ \frac{1}{F_r^2} A_c^{n+1} + \right. \\ \left. ((1 - \frac{1}{\rho_0}) \left( \frac{1}{F_r^2} g + \frac{u^n \circ x^n - u^{n+1/2}}{\Delta t} \right)) \cdot v \, dx \right] + \frac{\text{Re}}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{n+1/2} \cdot v \, dx \\ \frac{1}{\rho_0} \int_{P(n+1)} D[u^{n+1}] : D[v] \, dx = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

**Vérification :**

Nous réécrivons l'équation (1) des systèmes (3.1) et (3.2) sous la forme suivante afin de faciliter sa simplification :

$$\begin{cases} \text{Re} \int_{\Omega} \left( \frac{u^{n+1/2} - u^n \circ X^n}{\Delta t} - \frac{1}{F_r^2} g \right) \cdot v \, dx - \int_{\Omega} p^{n+1/2} (\nabla \cdot v) \, dx + 2 \int_{\Omega} D[u^{n+1/2}] : D[v] \, dx = 0. \\ \int_{\Omega} q (\nabla \cdot u^{n+1/2}) \, dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Re} \int_{\Omega} \left( \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} \cdot v \, dx + \frac{1}{\rho_0} \int_{P(t^{n+1})} D[\lambda^{n+1}] : D[v] \, dx \right) \\ = \frac{\text{Re}}{F_r^2} \int_{P(n+1)} A_c^{n+1} \cdot v \, dx + \text{Re} \left( (1 - \frac{1}{\rho_0}) \left[ \frac{1}{F_r^2} g + \text{Re} \frac{u^n \circ x^n - u^{n+1/2}}{\Delta t} \right] \right) \cdot v \, dx \\ \frac{1}{\rho_0} \int_{P(n+1)} D[u^{n+1}] : D[v] \, dx = 0 \quad \forall x \in P(t^{n+1}). \\ R_e \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus P(t^{n+1}). \end{cases}$$

Ensuite, nous écrivons sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \int_{P(t^{n+1})} \left( \rho_0 \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} - (\rho_0 - 1) \frac{u^n \circ x^n - u^{n+1/2}}{\Delta t} \right) + \cdot v dx + \int_{P(t^{n+1})} D[\lambda^{n+1}] : D[v] dx \\ = \frac{\text{Re}}{F_r^2} \int_{P(t^{n+1})} A_c^{n+1} \cdot v dx + \text{Re}(\rho_0 - 1) \left[ \frac{1}{F_r^2} g + \text{Re} \cdot v \right] dx \\ \frac{1}{\rho_0} \int_{P(t^{n+1})} \text{div} D[u^{n+1}] : D[v] dx = 0 \quad \forall x \in P(t^{n+1}), \\ R_e \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} = 0 \quad \forall x \in \Omega / P(t^{n+1}). \end{array} \right.$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \int_{P(t^{n+1})} \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} \cdot v dx + \int_{P(t^{n+1})} D[\lambda^{n+1}] : D[v] dx \\ + \text{Re} \int_{P(t^{n+1})} \left( \rho_0 - 1 \right) \left( \frac{u^{n+1} - u^n \circ X^n}{\Delta t} - \frac{1}{F_r^2} g \right) \cdot v dx + \\ = \frac{\text{Re}}{F_r^2} \int_{P(t^{n+1})} \rho_0 A_c^{n+1} \cdot v dx \\ \frac{1}{\rho_0} \int_{P(t^{n+1})} \text{div} D[u^{n+1}] : D[v] dx = 0 \quad \forall x \in P(t^{n+1}), \\ R_e \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} = 0 \quad \forall x \in \Omega / P(t^{n+1}). \end{array} \right.$$

Puis, en ajoutant les équations (1) des systèmes (3.1) et (3.2), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \int_{\Omega} \rho(x) \left( \frac{u^{n+1} - u^n \circ X^n}{\Delta t} - \frac{1}{F_r^2} g \right) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1/2} (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx \\ + 2 \int_{\Omega} \mathbf{D}[\mathbf{u}^{n+1/2}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx + \int_{P(t^{n+1})} \mathbf{D}[\lambda^{n+1}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] dx = \frac{\text{Re}}{F_r^2} \int_{P(t^{n+1})} \rho_0 A_c^{n+1} \cdot \mathbf{v} dx \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Donc nous avons obtenus la même équation (2.18).

### 3.2.3 Existence et unicité pour les sous problèmes.

Dans cette sous-section, nous montrons l'unicité et l'existence de la solution du problème (3.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{Re}}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{n+1/2} \cdot v dx - \int_{\Omega} p^{n+1/2} (\nabla \cdot v) dx + 2 \int_{\Omega} D[u^{n+1/2}] : D[v] dx = f^{n+1/2} \\ \int_{\Omega} q (\nabla \cdot u^{n+1/2}) dx = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec } f^{n+1/2} = \frac{R_e}{F_r^2} \int_{\Omega} g \cdot v dx + \frac{\text{Re}}{\Delta t} \int_{\Omega} u^n \circ x^n \cdot v dx.$$

Pour des raisons de lisibilité, nous omettons les indices  $n + \frac{1}{2}$  dans les notations. Les termes variationnels de notre problème sont :

- $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est le champ de vitesse (inconnu).
- $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression (inconnue).
- $v \in H_0^1(\Omega)^2$  est une fonction test.
- $q \in L^2(\Omega)$  est une fonction test.

### 3.2. MODIFICATION DU SCHÉMA NUMÉRIQUE AVEC LA MÉTHODE DE CARACTÉRISTIQUES2

Les termes de l'équation ont un sens car  $u, v \in H_0^1(\Omega)^2$  et  $p \in L^2(\Omega)$ . On constate en outre que :  $f \in L^2(\Omega)^2$ . Ainsi, le problème est bien posé.

#### Espaces Fonctionnels

Nous cherchons  $p \in L_0^2(\Omega)$ , où  $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q dx = 0\}$ , cette condition assurant l'unicité de la solution.

Nous allons introduire les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto a(u, v) &= \frac{\text{Re}}{\Delta t} \int_{\Omega} u \cdot v dx + 2 \int_{\Omega} D[u] : D[v] dx \\ b : H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, p) \mapsto b(v, p) &= - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot v) dx \\ f(v) &= \frac{\text{Re}}{F_r^2} \int_{\Omega} g \cdot v dx + \frac{\text{Re}}{\Delta t} \int_{\Omega} (u \circ X) \cdot v dx. \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes, la formulation mixte du problème (3.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega) \text{ tels que} \\ a(u, v) + b(v, p) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^2 \quad (3.4a) \\ b(v, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \quad (3.4b) \end{cases}$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution  $(u, p)$ , nous devons nous appuyer sur l'analyse fonctionnelle et des résultats classiques tels que le théorème de Lax-Milgram et le lemme de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB).

Le théorème de Lax-Milgram assure que pour une forme bilinéaire coercive et continue, il existe une solution unique au problème associé.

Le lemme de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB), également connu sous le nom de condition de stabilité inf-sup, est crucial pour assurer l'existence et l'unicité des solutions dans les problèmes de fluides incompressibles. Cette condition stipule que pour les espaces fonctionnels appropriés, il doit exister une constante  $\beta > 0$  telle que pour tous les  $v \in V$  et  $q \in Q$  (où  $V$  et  $Q$  sont les espaces de fonctions pour les vitesses et les pressions, respectivement), on ait :

$$\sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_Y \quad \forall q \in Y.$$

En vérifiant ces conditions dans le cadre de notre problème, nous pouvons garantir l'existence et l'unicité de la solution  $(u, p)$  du problème (3.4).

#### Linéarité de $a(u, v)$ et $b(u, q)$

D'après la linéarité de l'intégrale et du produit scalaire, nous pouvons déduire que la

forme  $a(u, v)$  et  $b(v, q)$  sont bilinéaire.

#### Continuité de $a(u, v)$

Nous devons montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $u, v \in H_0^1(\Omega)^2$ ,

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)^2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)^2}.$$

En effet, soient  $u$  et  $v \in [H_0^1(\Omega)]^2$ , nous avons :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \frac{Re}{\Delta t} \int_{\Omega} u \cdot v \, dx + 2 \int_{\Omega} D[u] : D[v] \, dx \\ &= \frac{Re}{\Delta t} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_i \cdot v_i \, dx + 2 \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \, dx \quad (3.5) \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, il vient :

$$\begin{aligned} a(u, v) &\leq \frac{Re}{\Delta t} \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^2(\Omega)} + 2 \sum_{i=1}^2 \|D[u_i]\|_{L^2(\Omega)} \|D[v_i]\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{Re}{\Delta t} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|D[u]\|_{L^2(\Omega)^2} \|D[v]\|_{L^2(\Omega)^2} \\ &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)^2} \|v\|_{H^1(\Omega)^2} \quad \forall u, v \in [H_0^1(\Omega)]^2 \text{ et } C = \max\{2, \frac{Re}{\Delta t}\} \end{aligned}$$

ce qui établit la continuité de  $a$  sur  $H^1(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)^2$ .

Par ailleurs, l'inégalité de Korn :

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{D}[\mathbf{u}]\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^n,$$

#### Coercivité de $a(u, v)$

On doit montrer qu'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que pour tout  $u \in V$ ,

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2.$$

En effet, pour tout  $v$  dans  $[H_0^1(\Omega)]^2$ , En utilisant l'inégalité de Poincaré, nous avons :

$$a(u, u) = \frac{Re}{\Delta t} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|D[u]\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{Re}{\Delta t} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

$$a(u, u) = \frac{Re}{\Delta t} \|u\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2 \|D[u]\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \geq \min\{2, \frac{Re}{\Delta t}\} C \|u\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \quad \forall u \in [H_0^1(\Omega)]^2$$

#### Continuité de $b$

La forme  $b$  est continue sur  $[H_0^1(\Omega)]^2 \times L^2(\Omega)$  :

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} v) q \, dx \leq \|v\|_{H^1(\Omega)^2} \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in [H^1(\Omega)]^2, \forall q \in L^2(\Omega)$$

Pour établir que  $b$  du problème (3.1) vérifie la condition 'inf-sup', nous avons utilisé [Brezzi-Fortin] *Mixed and Hybrid Finite Element Methods page 58.*

### Conclusion

Le problème (3.1) continu admet une unique solution  $(u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ .

Dans cette partie, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.2).

$$\begin{cases} \frac{R_e}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{n+1} \cdot v \, dx - \frac{1}{\rho} \int_{p(t^{n+1})} D[\lambda^{n+1}] : D[v] \, dx = f^{n+1} \\ \int_{\mathbf{P}(t^{n+1})} \mathbf{D}[\mathbf{u}^{n+1}] : \mathbf{D}[\mu] \, dx = 0 \quad \forall \mu \in H^1(\mathbf{P}(t^{n+1}))^2. \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\text{avec } f^{n+1} = \frac{R_e}{F_r^2} \int_{\mathbf{P}(t^{n+1})} ((1 - \frac{1}{\rho}) g + A_c^{n+1}) \cdot v \, dx + \frac{R_e}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{n+1/2} \cdot v \, dx + \frac{R_e}{\Delta t} (1 - \frac{1}{\rho}) \int_{\mathbf{P}(t^{n+1})} u^n \circ X^n \cdot v \, dx$$

Pour des raisons de lisibilité, nous omettons les indices  $n+1$  dans les notations. Les termes variationnels de notre problème sont :

- $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est le champ de vitesse (inconnu).
- $L$  est la contrainte de rigidité (inconnue).
- $v \in V$  est une fonction test.

Les termes de l'équation ont un sens car  $u, v \in H_0^1(\Omega)^2$ . On constate en outre que  $f \in L^2(\Omega)^2$ . Ainsi, le problème est bien posé.

Nous réécrivons le système (3.6) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{R_e}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx - \frac{1}{\rho} \int_{p(t^{n+1})} \mathbf{D}[\lambda] : \mathbf{D}[\mathbf{v}] \, dx = \\ & \frac{R_e}{F_r^2} \int_{p(t^{n+1})} (\mathbf{g} + \mathbf{A}_c^{n+1}) \cdot \mathbf{v} \, dx + \frac{R_e}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{v} \, dx \\ & + \frac{R_e}{\Delta t} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \int_{p(t^{n+1})} \mathbf{u}^n \circ \mathbf{X}^n \cdot \mathbf{v}_h \, dx, \\ & \int_{p(t^{n+1})} -\frac{1}{\rho} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mu] \, dx = 0 \quad \forall \mu \in H^1(p(t^{n+1}))^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nous allons maintenant introduire les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a' : H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto a'(u, v) & = \frac{R_e}{\Delta t} \int_{\Omega} u \cdot v \, dx \end{aligned}$$

$$b' : H_0^1(\Omega)^2 \times H^1(p(t^{n+1}))^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, \lambda) \mapsto b'(v, \lambda) = -\frac{1}{\rho} \int_{p(t^{n+1})} D[\lambda] : D[v] dx$$

$$\begin{aligned} l : H_0^1(\Omega)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v) \mapsto l(v) &= \frac{R_e}{F_r^2} \int_{p(t^{n+1})} (g + A_c^{n+1}) \cdot v dx \\ &\quad + \frac{R_e}{\Delta t} \int_{\Omega^*} u^{n+1/2} \cdot v dx \\ &\quad + \frac{R_e}{\Delta t} (1 - \frac{1}{\rho}) \int_{p(t^{n+1})} u^n \circ X^n \cdot v_h dx \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes, la formulation mixte du problème (3.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^2 \times H^1(p(t^{n+1}))^2 \text{ tels que} \\ a'(u, v) + b'(v, \lambda) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^2 \quad (3.8a) \\ b'(u, \mu) = 0, \quad \forall \mu \in H^1(p(t^{n+1}))^2 \quad (3.8b) \end{cases}$$

### Linéarité de $a'(u, v)$ et $b'(u, q)$

D'après la linéarité de l'intégrale et du produit scalaire, nous pouvons déduire que la forme  $a'(u, v)$  et  $b'(u, q)$  sont bilinéaire.

### Continuité de la forme $b'$

La forme  $b'$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)^2 \times H^1(p(t^{n+1}))^2$  :

$$\begin{aligned} |b'(v, \lambda)| &= \left| -\frac{1}{\rho} \int_{p(t^{n+1})} \mathbf{D}[\lambda] : \mathbf{D}[v] dx \right| \\ &\leq c(\rho_0) \|v\|_{H^1(\Omega)^2} \|\lambda\|_{H^1(p(t^{n+1}))^2} \quad \forall v \in [H^1(\Omega)]^2, \forall \lambda \in H^1(p(t^{n+1}))^2 \end{aligned}$$

Pour la continuité et la coercivité de la forme  $a'$ , nous supposons qu'elle est continue et coercive, car cela semble rester une question ouverte dans la littérature.

**Conclusion** Nous supposons ici que la condition inf-sup est vérifiée. C'est un problème qui semble rester une question ouverte dans la littérature. En particulier, l'analyse numérique théorique de méthodes de type MDF/MLD a été réalisée dans [3] pour justifier notamment les simulations de Patankar, mais l'analyse a été faite avec un opérateur de projection différent. Le problème (3.2) continu admet une unique solution  $(u, \lambda) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H^1(p(t^{n+1}))^2$ .

### 3.3 Approximation spatiale par éléments finis

Nous reprenons d'abord les résultats théoriques de la section 3.1 en les appliquant à notre problème. En particulier, nous dégageons la condition de compatibilité que doivent satisfaire les espaces d'approximation en vitesse et en pression pour que le problème approché soit bien posé. Enfin, nous présentons un lemme utile permettant de vérifier cette condition de compatibilité.

#### Étape 1

Soit  $X_h \subset [H_0^1(\Omega)]^2$ ,  $M_h \subset L_0^2(\Omega)$  et  $Y_h \subset [H_0^1(P(t))]^2$ , les sous-espaces de dimension finie. La formulation mixte approchée s'écrit de façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in X_h, p_h \in M_h \text{ tels que} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = (f_h, v_h), \quad \forall v_h \in X_h \quad (3.6a) \\ b(u_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h \quad (3.6b) \end{cases}$$

Pour le problème discrete mixte (3.6) est bien posé si et seulement si les espaces  $X_h$  et  $M_h$  satisfont l'hypothèse de compatibilité, où  $X_h$  est un sous-espace discret pour la variable de vitesse  $u$  et  $M_h$  est un sous-espace discret pour la pression  $p$ .

A ce stade, nous devons montrer que la forme  $b$  vérifie la condition 'inf-sup' discrète suivante sur  $X_h \times M_h$ .

Nous supposons que  $b$  vérifie la condition 'inf-sup' discrète et qu'il existe une solution unique  $(u_h, p_h)$  du problème (3.3a) discret dans  $X_h \times M_h$ .

#### Étape 2

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in X_h, \lambda_h \in Y_h \text{ tels que} \\ a'(u_h, v_h) + b'(v_h, \lambda_h) = (f_h, v_h), \quad \forall v_h \in X_h \quad (3.7a) \\ b'(u_h, \mu_h) = 0, \quad \forall \mu_h \in Y_h \quad (3.7b) \end{cases}$$

Le problème mixte discret (3.7) est bien posé si et seulement si les espaces  $X_h$  et  $Y_h$  satisfont l'hypothèse de compatibilité, où  $X_h$  est un sous-espace discret pour la variable de vitesse  $u$  et  $Y_h$  est un sous-espace discret pour le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ .

À ce stade, il est nécessaire de démontrer que la forme bilinéaire  $b$  satisfait la condition discrète 'inf-sup' sur  $X_h \times Y_h$ . Pour plus de détails sur cette démonstration, vous pouvez consulter de [Brezzi et Fortin] *Mixed and Hybrid Finite Element Methods page 163 - 165*.

La satisfaction de la condition 'inf-sup' discrète est essentielle afin d'éviter des problèmes tels que l'instabilité de la solution ou une mauvaise convergence de la méthode numérique. Lors de la construction de méthodes numériques pour résoudre des problèmes mixtes, il est donc crucial de choisir les espaces d'approximation de  $u$  et  $\lambda$  de manière à respecter cette condition.

### 3.3.1 Choix des espaces d'approximation

Dans notre travail, nous utilisons les éléments finis  $Q1iso - Q2$  pour la vitesse et  $Q0$  pour la pression. Il est crucial de bien choisir les espaces d'approximation  $X_h$  et  $M_h$  pour la vitesse et la pression afin de satisfaire la condition discrète d'incompatibilité *inf-sup*. Nous illustrerons un exemple de couples d'éléments finis pour la vitesse et la pression qui ne respectent pas cette condition (voir l'appendice C), puis nous présenterons le couple choisi qui garantit sa satisfaction.

#### Avantages du choix $4Q1$ et $Q0$

Le couple d'éléments finis  $4Q1$  pour la vitesse et  $Q0$  pour la pression présente plusieurs avantages dans la résolution des équations de Navier-Stokes.

- **Compatibilité des espaces et condition *inf-sup* (LBB)** : Ce choix satisfait la condition *inf-sup*, garantissant la stabilité numérique et évitant les oscillations spurielles de la pression.
- **Simplicité de mise en œuvre** : L'utilisation de  $Q0$  pour la pression, constante sur chaque élément, réduit la complexité des calculs, facilitant ainsi la résolution des équations de Navier-Stokes.
- **Équilibre entre précision et coût computationnel** : Le choix de  $4Q1$  permet de mieux capturer les variations de la vitesse en subdivisant chaque élément, tout en maintenant un coût computationnel raisonnable.

### 3.3.2 Discréétisation de problème

Pour discréétiser le domaine, nous introduisons une grille d'éléments finis uniforme et fixe, indépendamment de la frontière réelle des particules mobiles, qui sera discréétisée par une triangulation  $T_H$  de manière à ce que  $H > h$  pour garantir que les triangles ne soient pas inclus dans un rectangle. Cela évite la construction de maillages adaptés aux frontières pour chaque position différente des particules mobiles et permet l'utilisation de solveurs rapides et efficaces.

#### Définir le domaine et le maillage :

Boîte 2D (maillage cartésien rectilinéaire).

Soient  $X_0 = (0; 0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\Omega = X_0 + ]0, L_1[ \times ]0, L_2[$  avec  $L_1 = 2$  et  $L_2 = 8.0$ . Soient de plus  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$  et  $\delta x_i, \delta y_j \in \mathbb{R}_+^*$ , pour  $i = 1, \dots, N_1$  et  $j = 1, \dots, N_2$ , on définit  $X_{i,j} = (x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2$  :

$$X_{1,1} = X_0, \quad X_{i+1,j} = X_{i,j} + \delta x_i \mathbf{e}_1, \quad X_{i,j+1} = X_{i,j} + \delta y_j \mathbf{e}_2, \quad X_{1+N_1,1+N_2} = X_0 + (L_1, L_2)$$

$$K_{i,j} = ]x_i, x_{i+1}[ \times ]y_j, y_{j+1}[,$$

$$\mathcal{T}_h(\Omega) = \{K_{i,j}; i = 1, \dots, N_1 \text{ et } j = 1, \dots, N_2\}$$

#### Avantages

- construction simple, rapide, (sans stockage)
- localisation d'un point en  $O(1)$  opérations

Dans notre simulation, nous avons utilisé les paramètres suivants :

- $X_0 = (0, 0)$ ,
- $L_1 = 2.0$ ,
- $L_2 = 8.0$ ,
- $N_1 = 128$  et  $N_2 = \text{int}(\frac{L_2}{L_1}) \times 128$  ,
- $\delta y_j = \delta x_j = H$ .

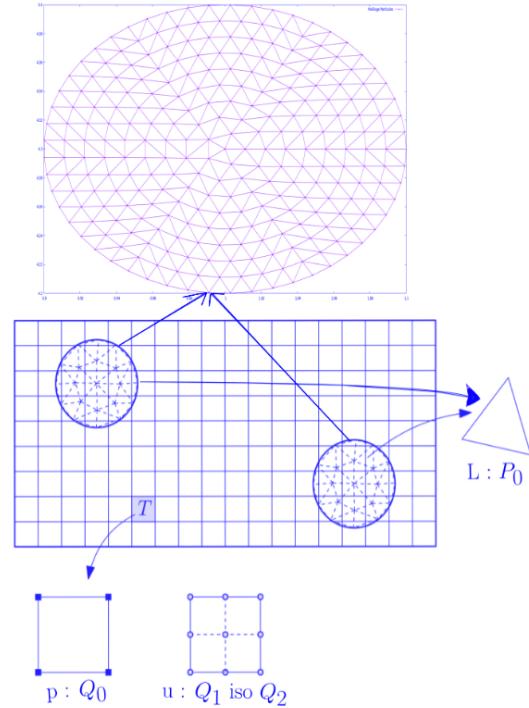


FIGURE 3.1 – Maillage : fluide + particules

Nous désignons les fonctions de base par :

- $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_{X_h}}$  fonctions de base de  $X_h \subset H_0^1(\Omega)^2$  .
- $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_{M_h}}$  fonctions de base de  $M_h \subset L^2(\Omega)$ .
- $\{\eta_i\}_{i=1}^{N_{Y_h}}$  fonctions de base de  $Y_h \subset H^1(p(t^{n+1}))^2$ .

On considère un élément de référence  $\widehat{K}_1$  Q1-IsoQ2 pour le champ vitesse  $u$  en 2D . Voir figure (3.2) ,  $\widehat{K}_2$  Q0 pour la pression  $P$  en 2D Voir figure (3.3) et  $\widehat{K}_3$  P1 pour  $\lambda$  en 2D Voir figure (3.4).

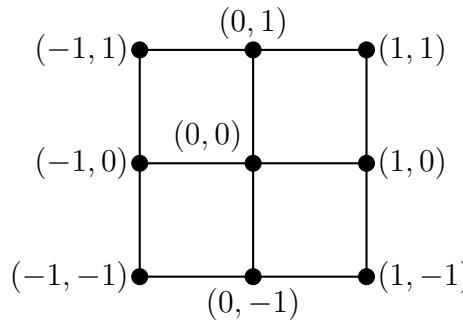


FIGURE 3.2 – Élément de référence Q1-IsoQ2 pour le champ vitesse

Nous allons d'abord déterminer les fonctions de base sur l'élément de référence. Ensuite, nous définirons la transformation affine  $\mathcal{F}_i : \widehat{T} \rightarrow T_i$  permettant de passer de

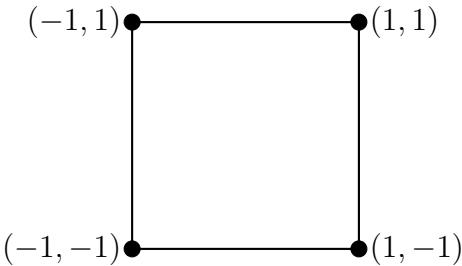


FIGURE 3.3 – Élément de référence  $Q_0$  pour la pression  $P$

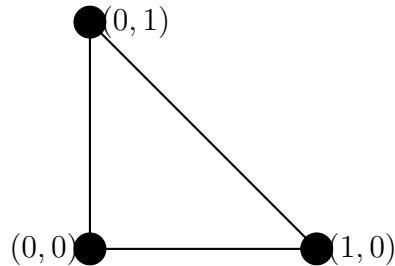


FIGURE 3.4 – Élément triangulaire de référence  $P_1$  pour  $\lambda$

l’élément de référence  $\hat{T}$  à un élément général  $T_{i,j}$ , pour un indice  $i$  fixé dans l’ensemble  $\{1, \dots, N_{\text{éléments}}\}$ . Enfin, nous déduirons la base de chaque élément  $T_{i,j}$  en utilisant la relation  $\phi_j^i = \hat{\phi}_j \circ \mathcal{F}_i^{-1}$ , où  $j$  dépend des éléments recherchés.

### Détermination de la base de l’espace $X_h$ (éléments isoQ2)

Pour un maillage quadrangulaire, les fonctions de base pour l’espace  $X_h$  peuvent être représentées comme suit. Les fonctions de base sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 par rapport à chaque variable sur chaque maille du sous-maillage  $T_{h/2}$ , obtenu en divisant par 2 le pas du maillage  $T_h$  de  $\Omega$ . Une fonction de base associée au noeud  $(i, j)$  vaut 1 en ce noeud et zéro aux autres noeuds. Son support est donc restreint à quatre mailles de  $T_{h/2}$ .

### Détermination de la base de l’espace $M_h$ (éléments Q0)

Pour chaque élément du maillage (chaque quadrilatère), les fonctions de base pour l’espace  $M_h$  sont des constantes. La fonction de base typique  $\psi_k$  pour un élément  $k$  est définie comme suit :

$$\psi_k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \text{ est dans l’élément } k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour un maillage quadrangulaire, vous aurez une fonction de base constante par élément, souvent notée  $\psi_k$ , où  $\psi_k$  est 1 sur l’élément  $k$  et 0 ailleurs.

### Détermination de la base de l’espace $Y_h$

La particule est modélisée à l’aide d’un maillage triangulaire. Dans ce cadre, l’espace  $Y_h$  utilisé est un espace d’éléments finis de type  $P_1$ . Cela signifie que les fonctions de base de cet espace sont des polynômes linéaires (de degré 1) définis sur chaque triangle du maillage.

## Remplacement du tenseur de déformation $D[\lambda]$ par une matrice symétrique $L$

Dans notre approche numérique, nous remplaçons le tenseur de déformation  $D[\lambda]$  par une matrice symétrique  $L$  afin de simplifier la détermination des fonctions de base dans l'espace  $Y_h$ .

Pour un maillage triangulaire, l'espace  $Y_h$  est de type  $P_1$ , c'est-à-dire que les fonctions de base sont des polynômes de degré 1 sur chaque triangle du maillage. Toutefois, la manipulation des fonctions  $P_1$  peut être complexe et requiert des calculs plus élaborés.

Afin de simplifier ces calculs, nous avons choisi d'approximer  $D[\lambda]$  par une matrice symétrique  $L$ , dont les composantes sont constantes  $P_0$  sur chaque élément du maillage. Ainsi, chaque maille contribue une valeur constante à l'approximation, réduisant ainsi le degré des fonctions de base et la complexité des calculs associés.

## Avantages de la Simplification

Le passage de  $D[\lambda]$  (avec des fonctions de base  $P_1$ ) à  $L$  (avec des fonctions de base  $P_0$ ) présente plusieurs avantages :

- **Réduction de la Complexité** : Les fonctions constantes  $P_0$  sont plus simples à gérer que les fonctions linéaires  $P_1$ . La détermination et l'intégration des fonctions  $P_0$  sont plus directes et moins coûteuses.
- **Facilitation des Calculs** : L'utilisation de la matrice symétrique  $L$  permet d'exprimer les équations du problème de manière plus simple, facilitant ainsi les opérations algébriques et les intégrations nécessaires pour la résolution du problème.
- **Optimisation des Algorithmes** : Les algorithmes de résolution sont plus efficaces avec les matrices symétriques et les fonctions constantes, ce qui réduit le temps de calcul et les ressources nécessaires.

Ainsi, le remplacement de  $D[\lambda]$  par  $L$  et l'utilisation de fonctions  $P_0$  permettent d'obtenir des résultats avec une complexité moindre tout en simplifiant les processus de calcul.

### 3.3.3 Sous-systèmes linéaires à résoudre

#### Étape 1

Nous substituons dans la formulation mixte approchée (3.6a), (3.6b), les développements suivants :  $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_{X_h}} u_i \varphi_i(x)$  et  $p_h(x) = \sum_{i=1}^{N_{M_h}} p_i \psi_i(x)$ . Nous considérons le problème discret approché

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1, u_2, \dots, u_{N_{X_h}}, p_1, p_2, \dots, p_{N_{M_h}} \text{ tels que} \\ \frac{Re}{\Delta t} u_j \sum_{j=1}^{N_{X_h}} \int_{\Omega} \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) dx + 2 \int_{\Omega} D[\varphi_i(x)] : D[\varphi_j(x)] dx \\ - \sum_{j=1}^{N_{M_h}} p_j \int_{\Omega} \psi_j(x) \operatorname{div} \varphi_i(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi_i(x) dx \\ \sum_{j=1}^{N_{X_h}} u_j \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi_i(x) \psi_j(x) dx = 0. \end{cases}$$

#### Assembler les matrices du système linéaire

Posons :

$$F_i = \frac{Re}{F_r^2} \int_{\Omega} g \cdot \phi_i dx + Re \int_{\Omega} u^n \circ x^n \cdot \left( \frac{\phi_i}{\Delta t} \right) dx$$

$$F \in \mathbb{R}^{N_{X_h}}, \quad F_i = (f, \varphi_i)$$

$$A_{ij} = \frac{Re}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) dx + 2 \int_{\Omega} D[\varphi_i(x)] : D[\varphi_j(x)] dx$$

$$A \in \mathbb{M}^{N_{X_h} \times N_{X_h}}, \quad A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

$$B_{ij} = - \int_{\Omega} \psi_j \operatorname{div} \varphi_i dx, \quad B \in \mathbb{M}^{N_{Y_h} \times N_{X_h}}, \quad B_{ji} = b(\varphi_i, \psi_j)$$

Alors nous avons :

$$\sum_{j=1}^{N_{X_h}} A_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{N_{M_h}} B_{ij}^T p_j = F_i \quad \forall i = 1, \dots, N_{X_h} \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{X_h}} B_{ij} u_j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N_{Y_h} \quad (3.10)$$

Nous avons ainsi obtenu un système linéaire de  $N_{X_h} + N_{M_h}$  équations à  $N_{X_h} + N_{M_h}$  inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

où les inconnues sont  $U = (u_1, \dots, u_{N_{X_h}})^T \in \mathbb{R}^{N_{X_h}}$  et  $P = (p_1, \dots, p_{N_{M_h}})^T \in \mathbb{R}^{N_{M_h}}$ .

## Étape 2

Nous substituons dans la formulation mixte approchée (3.7a), (3.7b), les développements suivants :  $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_{X_h}} u_i \varphi_i(x)$  et  $\lambda_h(x) = \sum_{i=1}^{N_{M_h}} \lambda_i \eta_i(x)$ .

Nous considérons le problème discret approché suivant :

Trouver  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{N_{X_h}}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_{Y_h}}$  tels que

$$\begin{cases} \frac{\text{Re}}{\Delta t} \mathbf{u}_j \sum_{j=1}^{N_{X_h}} \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \varphi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{j=1}^{N_{Y_h}} \lambda_j \int_{P(t^{n+1})} D[\lambda_j] : D[\varphi_i] \, d\mathbf{x} \\ = \int_{P(t^{n+1})} f(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \sum_{j=1}^{N_{X_h}} \mathbf{u}_j \int_{P(t^{n+1})} D[\varphi_j] : D[\varphi_i] \, d\mathbf{x} = 0. \end{cases}$$

### Assembler les matrices du système linéaire

Posons :

$$F'_i = \frac{R_e}{F_r^2} \int_{\Omega} g \cdot \phi_i \, dx + R_e \int_{\Omega} u^n \circ x^n \cdot \left( \frac{\phi_i}{\Delta t} \right) \, dx$$

$$F \in \mathbb{R}^{N_{X_h}}, \quad F_i = (f, \varphi_i)$$

$$A'_{ij} = \frac{Re}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) \, dx$$

$$A \in \mathbb{M}^{N_{X_h} \times N_{X_h}}, A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

$$B'_{ij} = - \int_{\Omega} \psi_j \operatorname{div} \varphi_i \, dx, \quad B' \in \mathbb{M}^{N_{Y_h} \times N_{X_h}}, \quad B'_{ji} = b(\varphi_i, \psi_j)$$

$$\text{Alors nous avons : } \sum_{j=1}^{N_{X_h}} A'_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{N_{M_h}} B'^T_{ij} p_j = F_j \quad \forall i = 1, \dots, N_{X_h}$$

$$\sum_{j=1}^{N_{X_h}} B'_{ij} u_j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N_{Y_h}$$

Nous avons ainsi obtenu un système linéaire de  $N_{X_h} + N_{Y_h}$  équations à  $N_{X_h} + N_{Y_h}$  inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A' & B'^T \\ B' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

où les inconnues sont  $U = (u_1, \dots, u_{N_{X_h}})^T \in \mathbb{R}^{N_{X_h}}$  et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N_{Y_h}})^T \in \mathbb{R}^{N_{M_h}}$ .

Les matrices  $A$  et  $A'$  des systèmes linéaires (3.11) et (3.12) sont de grande taille et possèdent une structure très particulière (creuse et tridiagonale par blocs). Il est donc important de connaître une technique de résolution de ces systèmes, qui soit moins coûteuse en temps tout en préservant la précision. Dans la section suivante, nous présentons la méthode de résolution de notre problème.

## Discrétisation de $\int_{P(t)} (D(u_h) : D(\mu_H)) dx = 0$

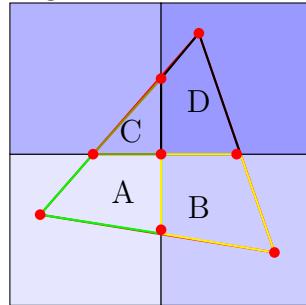
Pour discréteriser le problème

$$\int_{P(t)} (D(u_h) : D(\mu_H)) dx = 0$$

où  $P(t)$  est un disque de rayon  $r$ , avec  $u_h$  sont des champs vitesse approchées définie sur  $(H^1(\Omega))^2$  et  $\forall \mu \in (H^1(p(t^{n+1})))^2$ . Nous allons utiliser la méthode des éléments finis,  $u_h = \sum u_{ih}\psi_i$ , avec  $\psi_i$  sont les fonctions de base de type Q1 definie sur le maillage 4Q1 de  $\Omega$  et nous considerons  $\mu$  comme fonction de base de type P1 definie sur le maille triangulaire de  $p(t)$ .

## Étapes de l'algorithme

- **Maillage :**
  - Utiliser un maillage triangulaire pour discréteriser le disque  $P(t)$ .
  - Utiliser une grille quadrilatérale pour discréteriser la grille de fond  $G_h$ .
- **Calcul des dérivées des fonctions de base :**
  - Calculer les dérivées des fonctions de base P1 sur chaque triangle.
  - Calculer les dérivées des fonctions de base 4Q1 sur chaque quadrilatère.
  - Les fonctions de base P1 ont des dérivées constantes sur chaque triangle.
  - Les fonctions 4Q1 ont des dérivées qui varient linéairement sur chaque quadrilatère.
- **Calculer la géometrie P1/4Q1 :**
  - Algorithme Surtherlond - Hodgman.



- **Intégration sur les éléments :**
  - Utiliser la quadrature de Gauss pour intégrer le produit des dérivées sur chaque élément.
  - L'intégration est effectuée en utilisant des points de quadrature de Gauss. Pour un triangle, une quadrature de Gauss à 3 points peut être utilisée.
- **Assemblage de la matrice :**
  - Assembler les contributions des éléments pour former la matrice de raideur globale  $K$ .

## 3.4 Considérations sur les systèmes linéaires

Dans cette section, nous rappelons des concepts clés de la théorie des matrices et de l'analyse de Fourier (FST) utilisés pour résoudre les systèmes linéaires (3.11) et (3.12). Nous introduisons d'abord la notion de *complément de Schur*, un outil fondamental pour la résolution de systèmes linéaires de grande dimension.

Nous présentons ensuite certaines propriétés importantes du système linéaire approché, essentielles pour comprendre son comportement et appliquer efficacement les méthodes de résolution.

Nous décrivons l'utilisation d'un solveur linéaire basé sur la transformée de Fourier rapide (FST) à chaque itération du gradient conjugué pour résoudre les systèmes (3.11) et (3.12). La FST optimise les calculs en exploitant la structure des matrices, réduisant ainsi le coût computationnel.

Enfin, nous examinons la méthode du gradient conjugué, une approche itérative efficace pour les grands systèmes linéaires avec des matrices symétriques définies positives. Elle permet une convergence rapide et une gestion optimale de la mémoire. Nous expliquons son application dans notre cas et les avantages qu'elle offre par rapport à d'autres techniques.

### 3.4.1 Complément de Schur

Soient les matrices  $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times p}$ , et  $D \in \mathbb{R}^{q \times q}$ , avec  $D$  inversible. Considérons également la matrice  $M \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)}$  définie par :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Le complément de Schur du bloc  $D$  de la matrice  $M$  est la matrice  $\mathbb{R}^{p \times p}$  donnée par :

$$A - BD^{-1}C.$$

Pour plus d'informations sur le complément de Schur, vous pouvez consulter la page Wikipédia suivante : Complément de Schur.

Nous avons obtenu les systèmes linéaires (3.11) et (3.12) sous la forme générale suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix},$$

où les blocs de matrices  $A$ ,  $B$ ,  $U$ , et  $F$  dépendent de chaque étape. Le complément de Schur du bloc  $A$  de la matrice  $M$  est alors la matrice  $\mathbb{R}^{q \times q}$  donnée par :

$$S = BA^{-1}B^T.$$

**Démonstration :**

À partir de l'équation du système :

$$AU + B^T P = F,$$

isolons  $U$  :

$$U = A^{-1}(F - B^T P).$$

Substituons cette expression de  $U$  dans l'équation :

$$BU = 0.$$

Cela donne :

$$BA^{-1}(F - B^T P) = 0.$$

En développant et simplifiant, nous obtenons :

$$BA^{-1}F - BA^{-1}B^T P = 0.$$

Ainsi :

$$-BA^{-1}B^T P = -BA^{-1}F.$$

Finalement, nous avons :

$$SP = BA^{-1}F,$$

où  $S = BA^{-1}B^T$ .

## Propriétés de la Matrice $S$

### Symétrie de $S$

La matrice  $S$  est symétrique. Pour le démontrer, considérons la transposée de  $S$  :

$$S = BA^{-1}B^T$$

Calculons la transposée de  $S$  :

$$S^T = (BA^{-1}B^T)^T = (B^T)^T(A^{-1})^TB^T = BA^{-1}B^T$$

Ainsi,  $S$  est égale à sa transposée, ce qui montre qu'elle est symétrique.

## Définie Positive de $S$

La matrice  $S$  est définie positive. Pour le démontrer, considérons un vecteur non nul  $P$ . Nous souhaitons montrer que :

$$P^T S P > 0$$

Calculons cette expression :

$$P^T S P = P^T (B A^{-1} B^T) P = (B^T P)^T A^{-1} (B^T P)$$

Comme les espaces  $X_h$  et  $M_h$  sont compatibles, la condition  $LBB$  est satisfaite, alors  $B$  est surjective. De plus, comme  $A$  est définie positive,  $A^{-1}$  est également définie positive.

Soit  $P \neq 0$ . Alors,  $B^T P \neq 0$ . Cela est dû au fait que  $B$  est surjective, ce qui implique que  $B$  est également injective (c'est-à-dire que son noyau est réduit à zéro). Par conséquent,  $B^T P$  est également non nul.

## Résolution des système linéaires

Nous écrivons le système linéaire (3.11) sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{cases} AU + B^T P = F \\ BU = 0 \end{cases} &\leftrightarrow \begin{cases} AU = F - B^T P \\ BU = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} U = A^{-1}(F - B^T P) \\ BU = 0 \end{cases} \\ &\leftrightarrow \begin{cases} AU = F - B^T P \\ SP = BA^{-1}F \end{cases} \quad \text{avec} \quad S = BA^{-1}B^T \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pour résoudre l'équation (2) du système (3.13), nous avons utilisé la méthode du gradient conjugué, car  $S$  est symétrique et définie positive.

Étant donné que  $A$  possède une structure particulière (tridiagonale par blocs), les calculs peuvent utiliser la transformée de Fourier rapide (FST). Dans la sous-section suivante, nous décrivons brièvement ce solveur et expliquons son intérêt dans notre travail. Nous avons ainsi adopté une approche basée sur le solveur rapide de Poisson (FSP), que nous détaillerons dans la même sous-section.

En substituant  $P$  dans l'équation (1) du système (3.13), nous obtenons un système de la forme

$$AU = W, \text{ où } W = F - B^T P \tag{3.14}$$

Comme  $A$  est symétrique et définie positive, l'équation (1) de (3.13) par la méthode du gradient conjugué. Cependant, la taille importante de la matrice  $A$  dans les systèmes (3.11) et (3.12) rend les calculs coûteux en temps, notamment lors de la phase de produit matrice-vecteur  $Ap_k$  à chaque itération du gradient conjugué. Pour atténuer ce coût, nous avons appliqué la méthode FSP, qui sera détaillée dans la sous-section suivante.

### 3.4.2 Solveur algébrique FPS

#### Difficultés rencontrées et méthodes utilisées

Dans cette sous-section, nous aborderons les difficultés rencontrées lors de l'utilisation de la méthode du gradient conjugué pour résoudre le système  $SP = BA^{-1}F$ , ainsi que la méthode employée pour résoudre l'équation  $AU = F - B^TP$ .

Les méthodes directes classiques, telles que l'élimination de Gauss ou la factorisation LU, sont souvent inefficaces pour des matrices de grande dimension en raison de leur consommation élevée de mémoire et de temps de calcul. En particulier, la résolution des systèmes (3.11) et (3.12) par la méthode du gradient conjugué est particulièrement coûteuse en temps à cause du produit matrice-vecteur à chaque itération (voir l'algorithme à l'Appendice D).

Pour surmonter cette difficulté, nous avons utilisé le solveur rapide de Poisson (FSP), qui se révèle extrêmement efficace, notamment avec un maillage régulier.

La matrice  $A$  est adaptée à l'utilisation de la Transformée de Fourier Rapide (FST) car :

- $A$  est une matrice tridiagonale par blocs.
- $A$  la condition des sommes croisées .

La Transformée de Fourier Rapide (FST) convertit les opérations de multiplication matricielle en un produit point à point dans l'espace de Fourier. Cela réduit le coût de calcul de  $O((N_1 \times N_2)^2)$  à  $O(N_1 \times N_2 \log(N_2))$  et le stockage de  $O((N_1 \times N_2)^{3/2})$  à  $O(N_1)$ . C'est une méthode quasi optimale, ce qui est particulièrement avantageux pour les grands systèmes.

Ainsi, le solveur FST peut diagonaliser les blocs de la matrice  $A$ , transformant le système linéaire en un ensemble de systèmes beaucoup plus simples à résoudre.

Nous définirons la Transformée de Fourier Rapide (FST) pour le calcul de  $A^{-1}F$ , où  $A$  est une matrice de grande taille et tridiagonale par blocs, et  $F$  est un vecteur connu. Nous présenterons ensuite le solveur rapide de Poisson pour résoudre le problème  $SP = BA^{-1}F$ , avec  $S = BA^{-1}B^T$ , où  $A$ ,  $B$ , et  $F$  sont des éléments connus.

#### Définition de la Transformée de Fourier Rapide et du solveur rapide de Poisson

Considérons une matrice  $A$  de grande taille, ainsi qu'une matrice tridiagonale par blocs qui satisfait la même structure que  $A$  dans le système (3.11) et  $A'$  dans le système (3.12). Soit  $F$  un vecteur connu et  $w$  un vecteur inconnu dont l'objectif est de trouver  $w$  tel que :

$$w = A^{-1}F$$

Cela peut être réécrit comme :

$$Aw = F$$

Étant donné que  $A$  est une matrice tridiagonale par blocs symétrique, nous pouvons l'exprimer sous la forme :

$$A = T_{N2} \otimes I_{N3} + I_{N2} \otimes T_{N3} \quad (3.15)$$

Les matrices tridiagonales symétriques telles que  $T_{N2}$  et  $T_{N3}$  peuvent souvent être simplifiées en utilisant la Transformation de Fourier discrète (FST). Plus précisément, il existe une matrice  $S$  symétrique telle que :

$$T_N = S_N \Lambda_N S_N^T$$

où  $\Lambda_N$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $T_N$ , et  $S$  est la matrice associée à la FST, définie par :

$$[S_N]_{jk} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right)$$

pour tout  $j, k \in \{1, \dots, N_2\}$ ,

et

$$\Lambda_N = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

avec

$$\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)$$

Nous appliquons  $S_{N2} \otimes I_{N3}$  à l'équation  $Aw = F$ , ce qui donne :

$$(S_{N2} \otimes I_{N3})Aw = (S_{N2} \otimes I_{N3})F$$

Posons  $G = (S_{N2} \otimes I_{N3})F$  et substituons (3.15) dans l'équation  $Aw = F$ . Nous obtenons :

$$(S_{N2} \otimes I_{N3})(T_{N2} \otimes I_{N3} + I_{N2} \otimes T_{N3})w = G \quad (3.16)$$

En développant cette équation, nous avons :

$$(S_{N2} \otimes I_{N3})(T_{N2} \otimes I_{N3})w + (S_{N2} \otimes I_{N3})(I_{N2} \otimes T_{N3})w = G$$

Posons  $V = (S_{N2} \otimes I_{N3})w$ . Alors,  $w = (S_{N2} \otimes I_{N3})^{-1}V$ , et comme  $(S_{N2} \otimes I_{N3})^{-1} = (S_{N2} \otimes I_{N3})$ , nous avons :

$$w = (S_{N2} \otimes I_{N3})V \quad (3.17)$$

En développant (3.16), nous obtenons :

$$(S_{N2} \otimes I_{N3})(T_{N2} \otimes I_{N3})(S_{N2} \otimes I_{N3}) + (S_{N2} \otimes I_{N3})(I_{N2} \otimes T_{N3})(S_{N2} \otimes I_{N3})V = G \quad (3.18)$$

En utilisant la propriété de produit matriciel  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ , nous obtenons :

$$(S_{N2} \otimes I_{N3})(T_{N2} \otimes I_{N3})(S_{N2} \otimes I_{N3}) + (S_{N2} \otimes I_{N3})(I_{N2} \otimes T_{N3})(S_{N2} \otimes I_{N3}) = \Lambda_{N2} \otimes I_{N3} + I_{N2} \otimes T_{N3}$$

En effet :

$$(S_{N2} \otimes I_{N3})(T_{N2} \otimes I_{N3})(S_{N2} \otimes I_{N3}) = (S_{N2}T_{N2}S_{N2}^{-1}) \otimes (I_{N3})$$

Comme  $S_{N2}T_{N2}S_{N2}^{-1} = \Lambda_{N2}$ , on a :

$$(S_{N2} \otimes I_{N3})(T_{N2} \otimes I_{N3})(S_{N2} \otimes I_{N3}) = \Lambda_{N2} \otimes I_{N3}$$

D'où l'équation (3.16) se simplifie en :

$$(\Lambda_{N2} \otimes I_{N3} + I_{N2} \otimes T_{N3})V = G \quad (3.19)$$

Ce qui équivaut à résoudre  $N_3$  systèmes de la forme :

$$(\Lambda_j I_{N3} + T_{N3})V_j = G_j \quad \forall j \in \{1, \dots, N_3\}$$

avec  $T$  étant une matrice tridiagonale. Pour résoudre ce problème, nous pouvons utiliser une méthode directe d'ordre  $O(N_1 \times N_2)$ . Ensuite, nous déterminons  $U$  en utilisant  $w = (S_{N2} \otimes I_{N3})V$ . En conclusion, nous avons :

$$\begin{cases} G = (S_{N2} \otimes I_{N3})F & (\text{FST}) \\ (\Lambda_j I_{N3} + T_{N3})V_j = G_j & \forall j \in \{1, \dots, N_3\} \quad (\text{Méthode directe}) \\ w = (S_{N2} \otimes I_{N3})V & (\text{FST inverse}) \end{cases}$$

Pour résoudre le problème  $SP = BA^{-1}F$  avec  $S = BA^{-1}B^T$ , nous procérons comme suit :

1. Nous calculons d'abord  $W_1 = A^{-1}F$  en utilisant la méthode FSP.
2. Ensuite, nous calculons  $W_2 = BW_1$ . Ce produit n'est pas coûteux en temps puisque la matrice est creuse.
3. Nous obtenons alors  $SP = W_2$  avec  $S = BA^{-1}B^T$ .

Pour résoudre le nouveau problème, étant donné que  $S$  est une matrice définie positive et de très grande dimension, nous utilisons la méthode du gradient conjugué. Cependant, une contrainte dans la résolution de ce système  $SP = W_2$  est que le produit de la matrice  $S$  par  $P_K$  est très coûteux en temps et en stockage à chaque itération du gradient conjugué. Pour plus de détails, voir l'algorithme du gradient conjugué à l'appendice D.

Pour résoudre notre problème, nous appliquons à l’itération  $k$ -ième du gradient conjugué l’algorithme suivant :

1. Nous cherchons  $W_3 = B^T P^K$ .
2. Puis, nous calculons  $W_4 = A^{-1} W_2$  en utilisant la méthode FSP.
3. Ensuite, nous obtenons  $W_5 = BW_4$ . Ainsi, nous calculons à chaque itération du gradient conjugué le vecteur  $W^K$  de manière rapide.

Enfin, pour trouver  $U$ , nous remplaçons  $P$  dans l’équation  $AU = F - B^T P$  et résolvons ce système par la méthode FSP.

## 3.5 Méthode de résolution des systèmes

Pour résoudre le problème

$$SP = BA^{-1}F \quad \text{avec} \quad S = BA^{-1}B^T,$$

nous procédons de la manière suivante :

1. \*\*Calcul de  $W_1$ \*\* : Tout d’abord, nous calculons  $W_1 = A^{-1}F$  en utilisant la méthode FPS (Méthode de Factorisation de Pivot de Schur).
2. \*\*Calcul de  $W_2$ \*\* : Ensuite, nous calculons  $W_2 = BW_1$ . Ce produit est peu coûteux en temps de calcul car la matrice est creuse.
3. \*\*Obtention de  $SP$ \*\* : Nous obtenons alors  $SP = W_2$ , avec  $S = BA^{-1}B^T$ .

Pour résoudre le nouveau problème, étant donné que  $S$  est une matrice définie positive et de grande dimension, nous utilisons la méthode du gradient conjugué. Cependant, le produit  $SP_K$  est très coûteux en termes de temps et de stockage à chaque itération du gradient conjugué. Pour plus de détails, voir l’algorithme du gradient conjugué à l’appendice D.

Pour résoudre notre problème, nous appliquons à l’itération  $k$ -ième du gradient conjugué l’algorithme suivant :

1. \*\*Calcul de  $W_3$ \*\* : Cherchez  $W_3 = B^T P^K$ .
2. \*\*Calcul de  $W_4$ \*\* : Puis calculez  $W_4 = A^{-1}W_2$  en utilisant la méthode FPS.
3. \*\*Calcul de  $W_5$ \*\* : Ensuite, calculez  $W_5 = BW_4$ . Ainsi, nous calculons à chaque itération du gradient conjugué le vecteur  $W^K$  de manière rapide.

Enfin, pour déterminer  $U$ , nous remplaçons  $P$  dans l’équation  $AU = F - B^T P$  et nous résolvons ce système par la méthode FPS.

Pour résoudre les systèmes (3.11) et (3.12), nous appliquons la même méthode en ajustant la matrice de masse  $A \in \mathbb{M}^{N_2 \times N_3}$  pour chaque système.

Pour le système (3.11), nous avons :

$$A_{ij} = \frac{Re}{dt}(\phi_i, \phi_j) - 2((\nabla \phi_i, \nabla \phi_j))$$

donc  $A = \text{trid}_{N_2}(\Delta, T)$ , où  $\Delta_j$  et  $T_j$  sont des matrices tridiagonales symétriques par blocs, avec des lignes de chaque bloc identiques (maillage régulier et pas  $\Delta x$  constant). La matrice  $A$  vérifie la condition des sommes croisées avec  $C \in \mathbb{M}^{n \times m}(\mathbb{R})$  :

$$C_{i-1,j} + C_{i+1,j} = C_{i,j-1} + C_{i,j+1} \quad \forall i = 2, \dots, n-1 \text{ et } j = 2, \dots, m-1$$

Ainsi, nous pouvons utiliser la méthode FPS pour la résolution des systèmes (3.11) et (3.12).

Pour le système (3.12), nous avons :

$$A_{ij} = \frac{Re}{dt}(\phi_i, \phi_j)$$

et nous remarquons l'importance de la division par  $\rho_0$  pour obtenir une matrice de masse  $A$  tridiagonale symétrique par blocs avec des lignes de chaque bloc identiques (maillage régulier et pas  $\Delta x$  constant). La matrice  $A$  vérifie également la condition des sommes croisées avec  $C \in \mathbb{M}^{n \times m}(\mathbb{R})$  :

$$C_{i-1,j} + C_{i+1,j} = C_{i,j-1} + C_{i,j+1} \quad \forall i = 2, \dots, n-1 \text{ et } j = 2, \dots, m-1$$

Par conséquent, nous utilisons la méthode FPS pour la résolution des systèmes (3.11) et (3.12).

Dans notre travail, nous avons codé deux routines, `cg_div` et `cg_D`, pour bien distinguer la matrice de masse dans les deux systèmes différents (3.11) et (3.12).

Le but est de calculer la vitesse et la pression aux étapes intermédiaires et finales de chaque pas de temps. Voici les principales étapes de la résolution impliquées entre  $n$  et  $n + 1/2$ , puis entre  $n + 1/2$  et  $n + 1$  :

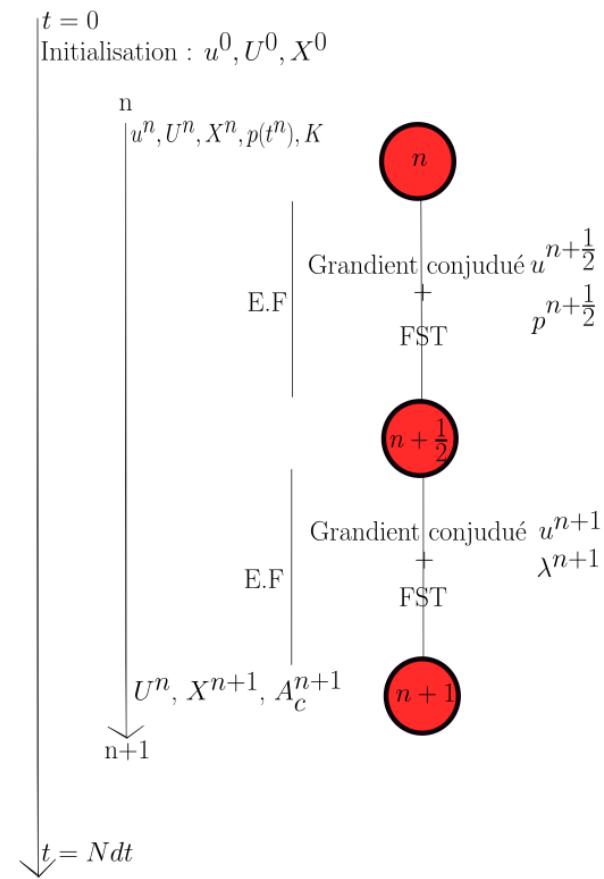


FIGURE 3.5 – Schéma en temps

---

**Algorithm 1:** Schéma de calcul pour la mise à jour des positions et des vitesses

---

**Input:**  $u_{0,h}, U_0, X_0, M, r, \Delta t, \mathbb{K}$ 
**Output:**  $U^n, X^{n+1}, A_c^{n+1}$ 
**1 Initialisation :**
**2**  $u^0 = u_{0,h}, U^0 = U_0, X^0 = X_0;$ 
**3 for**  $n = 1$  to  $Ndt$  **do**
**4    1. Calcul de la vitesse de translation  $U^n$  :**

$$U^n = \frac{1}{M} \int_{P(t_n)} \rho_s u^n dx$$

**5    2. Initialisation de la position intermédiaire :  $X^{n+1,0} = X^n;$** 
**6    for**  $k = 1$  to  $\mathbb{K}$  **do**
**7     3. Calcul de la position prédictive  $X^{*,n+1,k}$  :**

$$X^{*,n+1,k} = X^{n+1,k-1} + \frac{U^n + U^{n-1}}{2} \frac{\Delta t}{K}$$

**4. Correction de la position  $X^{n+1,k}$  :**

$$X^{n+1,k} = X^{*,n+1,k} + M^{-1} \frac{F(X^{n+1,k-1}) + F(X^{*,n+1,k})}{2} \frac{(\Delta t)^2}{2K^2}$$

**8    5. Mise à jour de la position de la particule :**

$$X^{n+1} = X^{n+1,\mathbb{K}}$$

**6. Mise à jour de l'accélération :**

$$A_c^{n+1} = \frac{X^{n+1} - X^n - \Delta t \frac{U^n + U^{n-1}}{2}}{\Delta t^2 / 2}$$

**7. Calcul de  $u^{n+\frac{1}{2}}, p^{n+\frac{1}{2}}$  par Gradient Conjugué + FPS**

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n+\frac{1}{2}} \\ p^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F' \\ 0 \end{pmatrix}$$

**8. Calcul de  $u^{n+1}$  et  $\lambda^{n+1}$  par Gradient Conjugué + FPS**

$$\begin{pmatrix} A' & B'^T \\ B' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n+1} \\ \lambda^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F' \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

**Notes :**  $F$  force de collision agissant sur les particules pour les empêcher de se pénétrer mutuellement ou de pénétrer les parois du domaine.

---

## 4 Résultats numériques

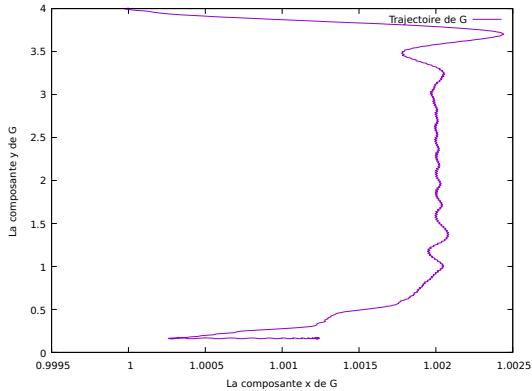
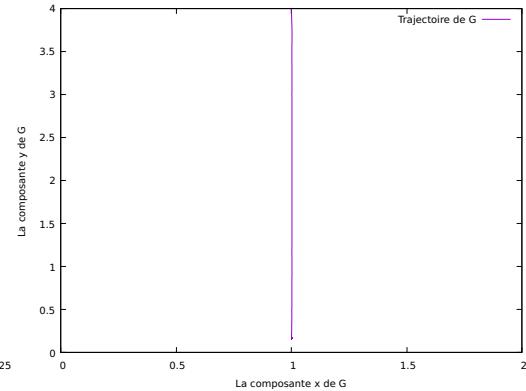
### 4.1 Validation du code

#### 4.1.1 Sédimentation d'une particule

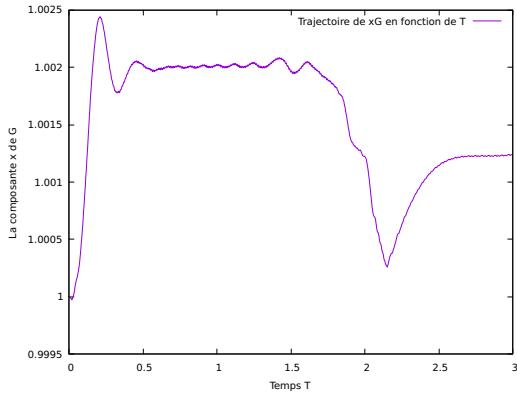
Dans cette section, nous allons valider notre code de domaine fictif MDL sur une boite rectangulaire en le comparant aux résultats existants pour la sédimentation d'une particule circulaire dans un fluide newtonien. La sédimentation d'une particule circulaire dans une boite rectangulaire est utilisée comme premier test.

Une grille uniforme de  $N_y \times N_y \times \text{int} \frac{L_2}{L_1}$  est utilisée pour la simulation. Pour comparaison, d'autres résultats publiés [7] pour le même problème sont également présentés dans la figure (4.3). On peut clairement observer une bonne concordance entre ces résultats. La petite différence observée sur la figure (4.1.1) après que la particule touche le fond est attribuée à la différence dans les méthodes numériques et les traitements des interactions particule-paroi dans les calculs.

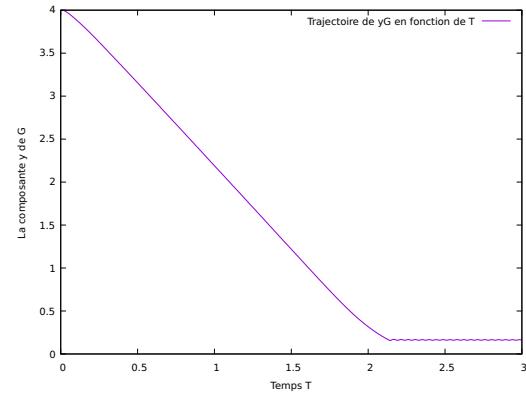
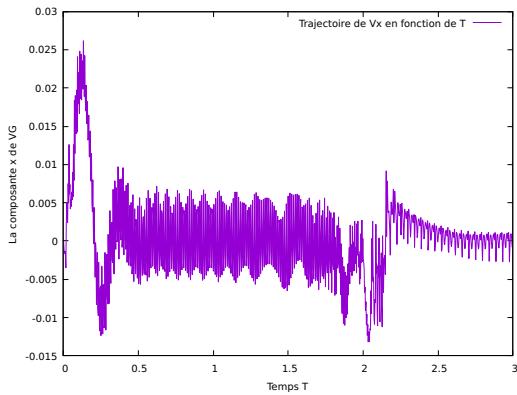
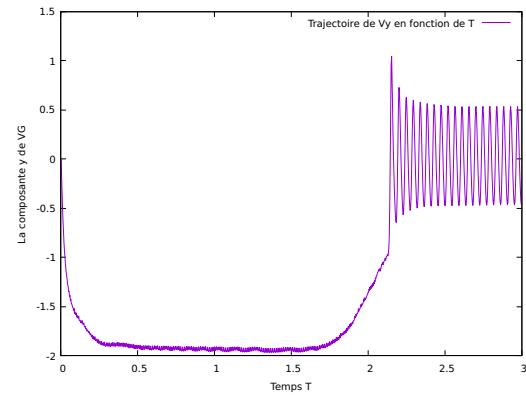
FIGURE 4.1 – Graphes des solutions approchées de G

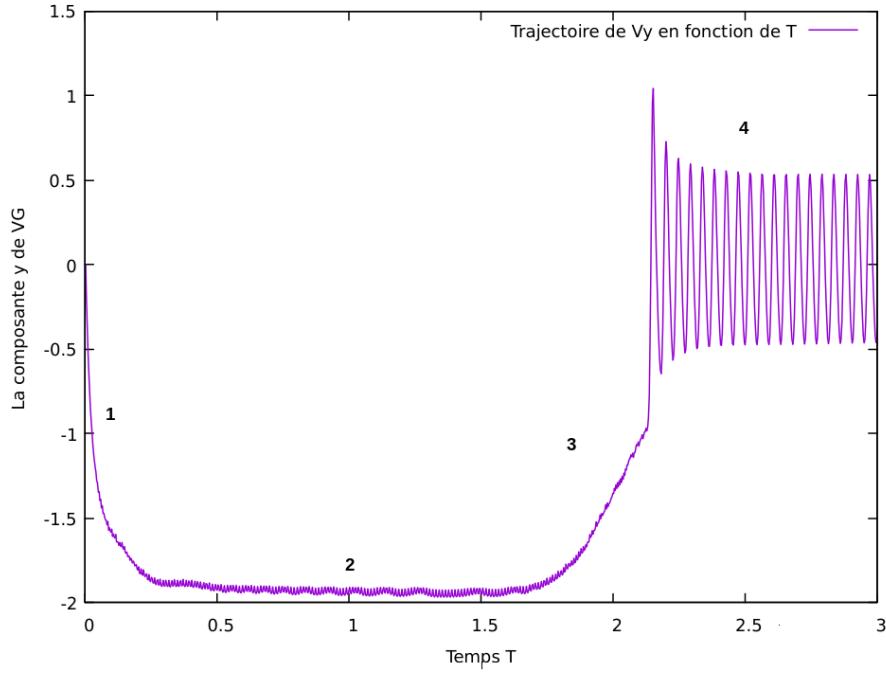
(a) Trajectoire de G sur  $(0.9995 ; 1.00025)$ (b) Trajectoire de G sur  $(0 ; 2)$ 

(c) La composante x de G en fonction de T



(d) La composante y de G en fonction de T

(e)  $v_x$  de G en fonction de T(f)  $v_y$  de G en fonction de T

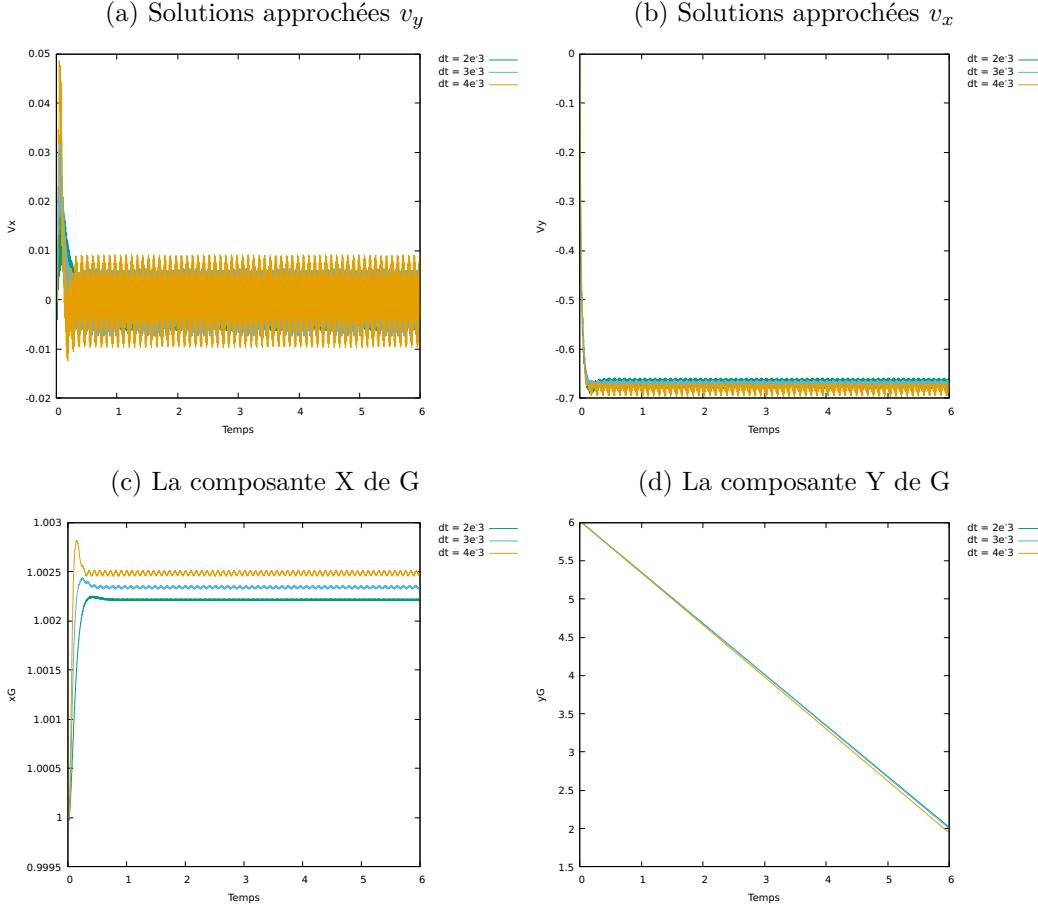


## Analyse de la Sédimentation d'une Particule dans un Fluide Newtonien

La simulation se déroule dans un domaine rectangulaire de largeur  $L_1 = 2$  et de hauteur  $L_2 = 8$ . Une particule circulaire rigide, de diamètre  $D = 0,25$  cm et de densité  $\rho_s = 10$ , est initialement placée à la position (1; 6) dans un fluide de densité  $\rho_f = 1,0$ . Le nombre de Reynolds est  $Re = 1,0$ , et le nombre de Froude est  $Fr = 0,1$ . Le pas de temps utilisé est  $dt = 3 \times 10^{-4}$ , et le nombre total de pas de temps est  $Ndt = 2 \times 10^4$ . Au temps initial  $t = 0$ , la particule ainsi que le fluide sont au repos.

Sous l'influence de la gravité avec une accélération  $g$ , la particule commence à se déplacer vers le bas. Le processus de sédimentation peut être résumé en plusieurs phases :

1. **Phase initiale (mise en mouvement)** : La particule, soumise à la force gravitationnelle, surmonte la résistance du fluide et commence à accélérer vers le bas.
2. **Phase de stabilisation** : La particule atteint une vitesse stable lorsque les forces de gravité sont compensées par la résistance du fluide (force de traînée).
3. **Interaction avec les parois** : Lorsque la particule approche du fond du domaine, des interactions hydrodynamiques avec les parois peuvent se manifester, affectant son mouvement.
4. **Phase finale (arrêt)** : La particule finit par atteindre le fond du domaine, où elle s'immobilise. À ce stade, la vitesse de la particule devient nulle en raison de l'absence de mouvement possible et des forces équilibrées entre le fluide et la paroi.

FIGURE 4.2 – Graphes des Courbes de G en fonction de  $dt$ 

Les composantes  $y$  de la vitesse en fonction du temps pour un maillage  $N_y = 64$  avec des pas de temps de  $0,002, 0,003$  et  $0,004$ . Les courbes obtenues pour les quatre simulations ( $T_1, T_2$  et  $T_3$ ) montrent que les courbes de la vitesse verticale  $v_y$  en fonction du pas de temps  $dt$  sont pratiquement identiques. La particule accélère vers le bas jusqu'à atteindre sa vitesse terminale autour de  $t \approx 0,2$ . Après avoir atteint cette vitesse terminale, elle continue à tomber avec une vitesse presque constante. Le nombre de Reynolds pour la particule est  $Re = 1$  et le nombre de Froude est  $0,1$ .

Pour évaluer la stabilité numérique de notre méthode, nous avons effectué des simulations avec quatre cas de test différents en variant le pas de temps ( $\Delta t$ ) et le nombre d'itérations ( $N_{dt}$ ). Les détails des paramètres utilisés sont les suivants :

- $T_1 : \Delta t = 2 \times 10^{-3}, N_{dt} = 3000$
- $T_2 : \Delta t = 3 \times 10^{-3}, N_{dt} = 2000$
- $T_3 : \Delta t = 4 \times 10^{-3}, N_{dt} = 1500$

Les simulations ont été effectuées sur l'intervalle de temps  $T \in [0; 6]$ . La figure 4.1.1 montre les courbes obtenues pour ces différents cas de test.

Comme le montre la figure 4.1.1, les courbes de vitesse correspondant aux différents

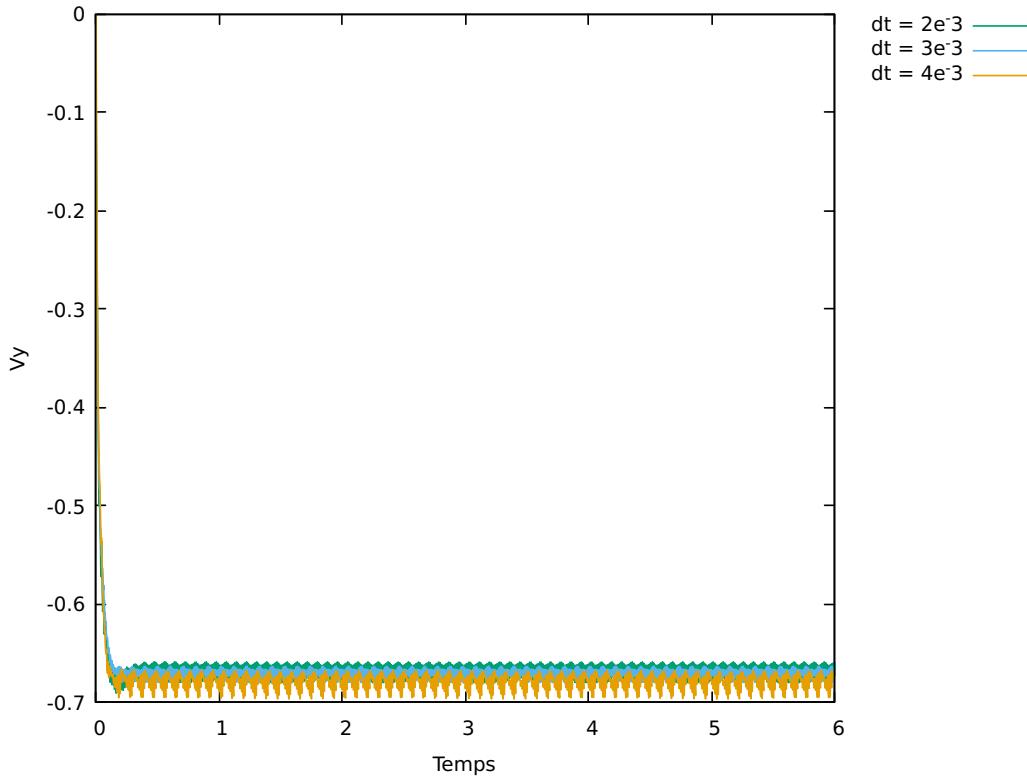


FIGURE 4.3 –  $v_y$  de G en fonction de  $dt$

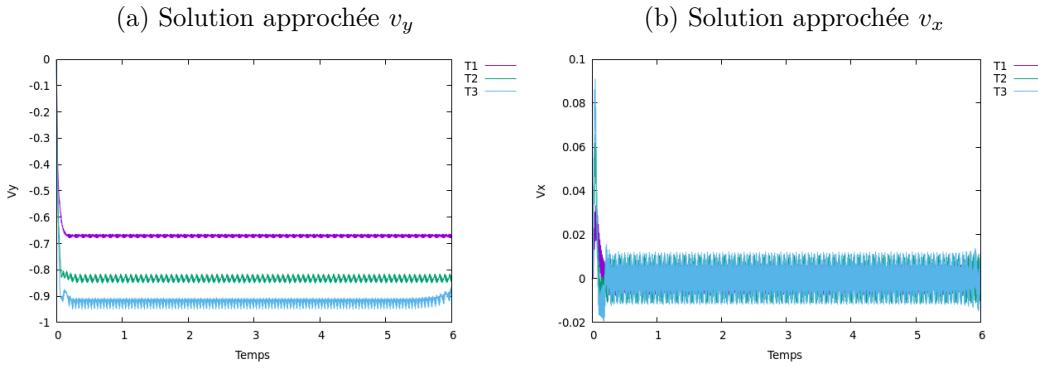
pas de temps sont très proches les unes des autres. Cette similitude est particulièrement évidente tout au long de l'intervalle de temps étudié,  $T \in [0; 6]$ .

Les courbes presque identiques pour les différentes valeurs de  $\Delta t$  indiquent que la méthode numérique est stable. La stabilité est confirmée par l'absence de variations significatives dans les résultats, même lorsque le pas de temps varie considérablement.

La proximité des courbes, indépendamment des variations de  $\Delta t$ , démontre que les solutions numériques sont convergentes. Cela signifie que la méthode converge vers une solution stable lorsque le pas de temps est réduit, ce qui assure la fiabilité des résultats obtenus avec différents paramètres de simulation.

La validation est renforcée par le fait que les différences entre les courbes sont minimes, ce qui confirme que notre méthode numérique est bien conçue et que les résultats ne dépendent pas de manière significative du choix du pas de temps. Cette constatation permet de choisir un pas de temps plus grand, ce qui peut améliorer l'efficacité computationnelle sans compromettre la précision des résultats.

En conclusion, les résultats des simulations montrent une bonne stabilité numérique et une convergence des solutions. La similarité des courbes pour différents pas de temps valide la robustesse de notre méthode numérique et permet d'optimiser les simulations en utilisant des pas de temps plus grands lorsque cela est approprié.

FIGURE 4.4 – Graphes des Courbes de  $v_y$  et  $v_x$  de G en fonction de  $\rho$ 

## Analyse de la variation de la densité des particules

Dans cette section, nous étudions l'influence de la densité des particules  $\rho$  sur leur vitesse de sédimentation dans un fluide newtonien, en maintenant les autres paramètres constants.

### Analyse numérique

Nous avons observé que l'augmentation de la densité  $\rho$  entraîne une accélération de la vitesse verticale  $v_y$  :

- Pour  $\rho = 5$ , la vitesse  $v_y$  est modérée.
- À  $\rho = 10$ ,  $v_y$  augmente de manière significative.
- Enfin, pour  $\rho = 15$ , la vitesse continue d'augmenter.

Cette tendance montre une relation positive entre la densité des particules et leur vitesse verticale.

### Interprétation physique

L'augmentation de la densité  $\rho$  modifie l'équilibre des forces agissant sur la particule :

- **Force de gravité** : Elle augmente proportionnellement à  $\rho$ , car  $F_g = \rho V g$ , où  $V$  est le volume de la particule.
- **Force de flottabilité** : Elle reste constante, dépendant uniquement de la densité du fluide et du volume de la particule.
- **Force de traînée** : La traînée augmente avec la vitesse  $v_y$ , mais une particule plus dense atteint une vitesse plus élevée avant que cette force n'équilibre les forces gravitationnelles.

Ainsi, une particule plus dense subit une accélération verticale plus rapide, d'où l'augmentation de  $v_y$ .

### Analyse de la composante horizontale $v_x$

La composante horizontale  $v_x$  reste pratiquement inchangée malgré la variation de  $\rho$ . Ceci s'explique par l'absence de forces horizontales significatives :

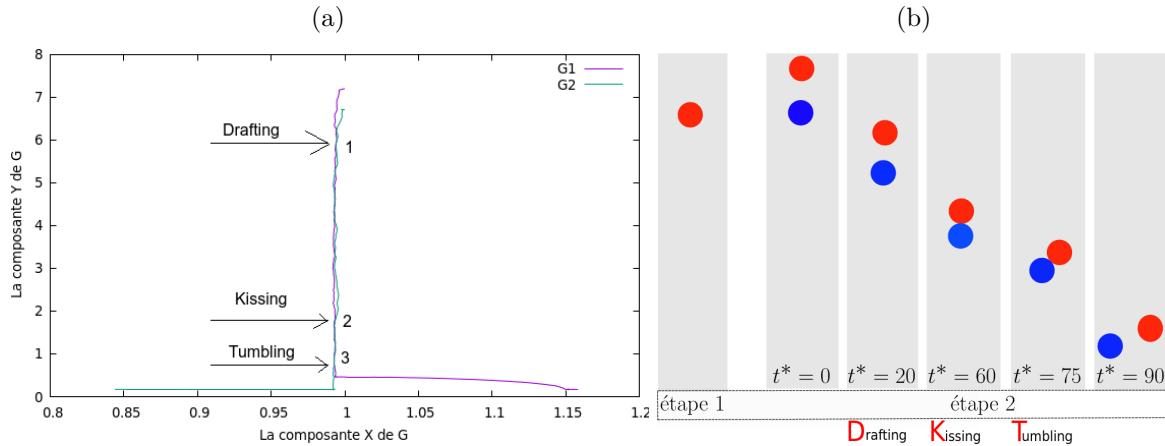
- **Inertie horizontale** : En l'absence de perturbations latérales, la particule conserve sa vitesse initiale.
- **Absence de force motrice horizontale** : Contrairement à la direction verticale, il n'y a pas de force notable qui affecte la direction horizontale.

Ainsi, la densité des particules n'a pratiquement aucun impact sur la composante horizontale  $v_x$ , qui reste stable.

### 4.1.2 Phénomène DKT

Le phénomène DKT (Drafting, Kissing, Tumbling) décrit l'interaction dynamique entre deux particules en suspension dans un fluide, et se déroule en trois phases distinctes :

FIGURE 4.5 – Séquence de Drafting-Kissing-Tumbling (DKT)



#### 1. Drafting (Aspiration ou sillage)

**Description :** Les particules se déplacent l'une vers l'autre sous l'effet des forces hydrodynamiques et gravitationnelles. Elles interagissent par les forces de pression et de viscosité du fluide sans contact direct.

**Comportement :** Les particules se rapprochent progressivement, influencées par le sillage créé par la particule en amont, mais restent séparées.

#### 2. Kissing (Collision ou rapprochement)

**Description :** Les particules se rapprochent suffisamment pour que leurs surfaces se touchent légèrement, sans fusionner.

**Comportement :** Les forces de contact, telles que la répulsion ou l'attraction, deviennent significatives. Les particules interagissent plus fortement mais ne se collent pas encore.

#### 3. Tumbling (Séparation ou basculement)

**Description :** Les particules peuvent entrer en contact substantiel et commencer à fusionner ou se coller l'une à l'autre.

**Comportement :** Les particules modifient leur trajectoire en raison de l'agrégation ou de la collision, avec des changements possibles dans la dynamique du fluide autour des particules.

## Problème de test de sédimentation

Nous validons le code en simulant la sédimentation de deux particules circulaires dans un fluide newtonien, en utilisant des conditions similaires à celles de Jafari et al. [8]. Les paramètres de la simulation sont les suivants :

- **Dimensions de la boîte :**  $L_1 \times L_2 = 2 \times 8$
- **Densité du fluide :**  $\rho_f = 1.0$
- **Densité des particules :**  $\rho_s = 1.01$
- **Diamètre des particules :**  $D = 0.125$
- **Positions initiales :** Les particules sont placées sur la ligne centrale de la boîte, à des hauteurs de 7.2 et 6.8, respectivement.

Les simulations débutent avec les particules au repos à  $t = 0$  et sont soumises à la gravité. La dérivée normale de la vitesse est supposée nulle à la frontière de sortie, et des conditions de non-glissement sont appliquées aux parois gauche et droite. Les tests sont réalisés avec deux pas de temps différents et deux tailles de maillage, conformément aux conditions décrites par Singh et al. [2].

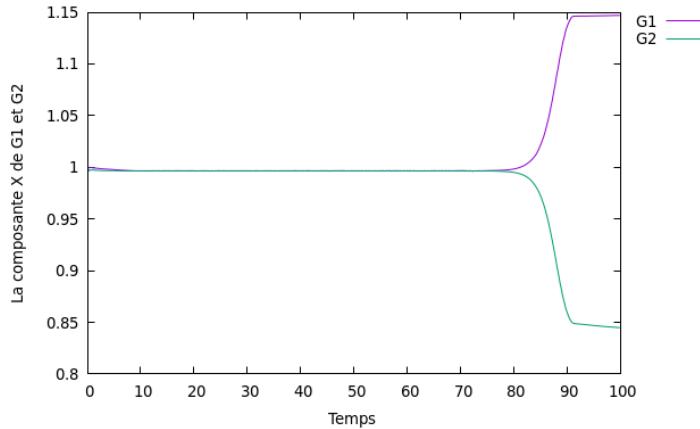


FIGURE 4.6 – Trajectoires transversales des particules.

## Trajectoires transversales des deux particules dans le phénomène DKT

### 1. Drafting (Aspiration ou sillage)

Au début de la sédimentation, la particule G1 crée un sillage derrière elle, réduisant la résistance pour la particule G2, qui modifie sa trajectoire transversale.

**Position  $x(t)$  :**

- **Pour la particule G1** : La position transverse  $x_{G1}(t)$  reste quasiment constante.
- **Pour la particule G2** : La position transverse  $x_{G2}(t)$  peut légèrement varier en raison du sillage de G1.

En résumé :

$$\begin{aligned}x_{G1}(t) &\approx \text{constante}, \\x_{G2}(t) &\text{peut légèrement varier.}\end{aligned}$$

**2. Kissing (Collision ou rapprochement)**

Lors de la phase de "kissing", G2 rattrape G1. Les deux particules se rapprochent, modifiant légèrement leurs trajectoires transversales.

**Position  $x(t)$  :**

- **Pour la particule G1** : La position transverse  $x_{G1}(t)$  peut rester constante ou légèrement dévier.
- **Pour la particule G2** : La position transverse  $x_{G2}(t)$  continue à converger vers celle de G1, avec une possible réduction de la vitesse transverse.

En résumé :

$$\begin{aligned}x_{G1}(t) &\text{peut rester constant ou légèrement dévier,} \\x_{G2}(t) &\text{se rapproche de } x_{G1}(t).\end{aligned}$$

**3. Tumbling (Séparation ou basculement)**

Après le rapprochement, les particules se séparent en raison des forces hydrodynamiques accrues, entraînant un basculement des trajectoires.

**Position  $x(t)$  :**

- **Pour la particule G1** : Sa position transverse  $x_{G1}(t)$  peut montrer une légère augmentation ou diminution en raison des perturbations.
- **Pour la particule G2** : La position transverse  $x_{G2}(t)$  montre un écart plus important en raison de la séparation.

En résumé :

$$\begin{aligned}x_{G1}(t) &\text{commence à s'écarte légèrement,} \\x_{G2}(t) &\text{montre un écart plus important.}\end{aligned}$$

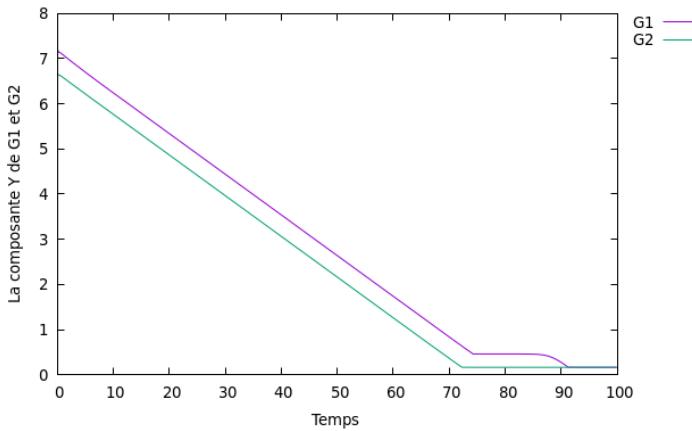


FIGURE 4.7 – Trajectoires verticales des particules.

## Trajectoires verticales des deux particules dans le phénomène DKT

Les trajectoires verticales des particules sont également affectées par le phénomène DKT, en raison des interactions hydrodynamiques.

### 1. Drafting (Aspiration ou sillage)

Dans cette phase, la particule G2, bénéficiant du sillage créé par G1, accélère plus rapidement.

**Trajectoire verticale  $y(t)$  :**

- **Pour la particule G1 :** La trajectoire verticale  $y_{G1}(t)$  est relativement constante.
- **Pour la particule G2 :** La trajectoire verticale  $y_{G2}(t)$  est accélérée, grâce à la réduction de la traînée fluide.

En résumé :

$$\begin{aligned} y_{G1}(t) &\text{descend régulièrement,} \\ y_{G2}(t) &\text{descend plus rapidement.} \end{aligned}$$

### 2. Kissing (Collision ou rapprochement)

Lorsque G2 rattrape G1, les deux particules ont des vitesses verticales proches.

**Trajectoire verticale  $y(t)$  :**

- **Pour la particule G1 :** La trajectoire verticale  $y_{G1}(t)$  reste relativement constante, avec des perturbations possibles.
- **Pour la particule G2 :** La trajectoire verticale  $y_{G2}(t)$  ralentit légèrement à mesure qu'elle entre dans une zone de perturbation accrue.

En résumé :

$y_{G1}(t)$  reste constante ou légèrement perturbée,  
 $y_{G2}(t)$  ralentit et converge vers  $y_{G1}(t)$ .

### 3. Tumbling (Séparation ou basculement)

Après le rapprochement, les particules se séparent, modifiant leurs trajectoires verticales.

**Trajectoire verticale  $y(t)$  :**

- **Pour la particule G1 :** La trajectoire verticale  $y_{G1}(t)$  peut légèrement augmenter en vitesse.
- **Pour la particule G2 :** La trajectoire verticale  $y_{G2}(t)$  ralentit à cause de la traînée accrue après la séparation.

En résumé :

$y_{G1}(t)$  peut légèrement augmenter en vitesse,  
 $y_{G2}(t)$  ralentit progressivement.

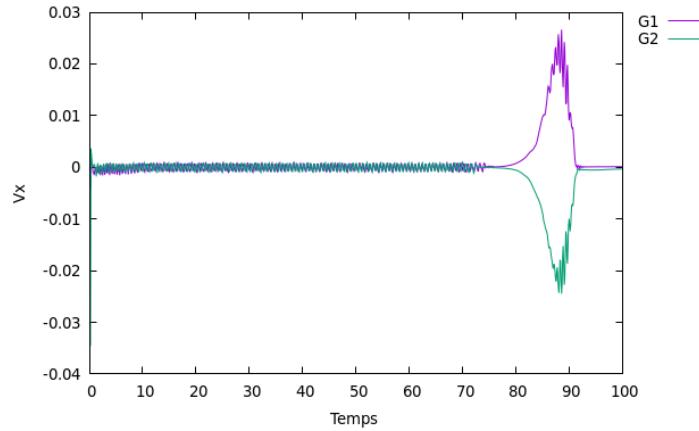


FIGURE 4.8 – Solution approchée  $v_x$

### Comportement de $V_x$ des deux particules dans le phénomène DKT

La vitesse transverse  $V_x(t)$  des particules dans le phénomène DKT est influencée par les interactions hydrodynamiques à chaque étape du phénomène.

### 1. Drafting (Aspiration ou sillage)

Pendant la phase de drafting, la particule G1 crée un sillage qui réduit la résistance pour la particule G2, modifiant leurs vitesses transversales.

#### Comportement de $V_x(t)$ :

- **Pour la particule G1 :** La vitesse transverse  $V_{x,G1}(t)$  reste relativement constante au début, car G1 se déplace principalement verticalement avec peu d'interaction latérale.
- **Pour la particule G2 :** La particule G2 bénéficie du sillage, ce qui peut entraîner une légère augmentation de sa vitesse transverse  $V_{x,G2}(t)$  en raison de la réduction de la résistance fluide et de l'attraction vers le sillage de G1.

En résumé :

$$\begin{aligned} V_{x,G1}(t) &\approx \text{constante}, \\ V_{x,G2}(t) &\text{peut légèrement augmenter.} \end{aligned}$$

### 2. Kissing (Collision ou rapprochement)

Lors de la phase de kissing, la particule G2 rattrape G1, et leurs vitesses transversales s'ajustent en fonction de leur proximité.

#### Comportement de $V_x(t)$ :

- **Pour la particule G1 :** La vitesse transverse  $V_{x,G1}(t)$  peut rester constante ou subir une légère perturbation due à la présence accrue de la particule G2 et aux modifications de l'écoulement autour de G1.
- **Pour la particule G2 :** La vitesse transverse  $V_{x,G2}(t)$  peut diminuer légèrement ou devenir plus stable à mesure que G2 se rapproche de G1, avec une courbe plus plate pendant le rapprochement.

En résumé :

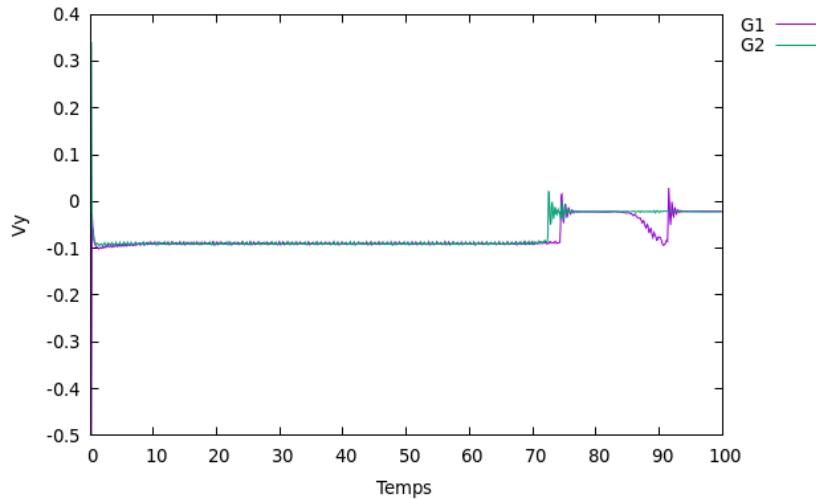
$$\begin{aligned} V_{x,G1}(t) &\text{peut rester constant ou légèrement perturbé,} \\ V_{x,G2}(t) &\text{tend à se stabiliser ou diminuer.} \end{aligned}$$

### 3. Tumbling (Séparation ou basculement)

Après le rapprochement, les particules se séparent, ce qui modifie leur vitesse transverse.

#### Comportement de $V_x(t)$ :

- **Pour la particule G1 :** La vitesse transverse  $V_{x,G1}(t)$  peut montrer une légère variation en raison des perturbations causées par la séparation des particules.

FIGURE 4.9 – Solution approchée  $v_y$ 

- **Pour la particule G2 :** La vitesse transverse  $V_{x,G2}(t)$  peut augmenter ou montrer une variation plus marquée en raison du basculement des trajectoires et des forces hydrodynamiques accrues.

En résumé :

- $V_{x,G1}(t)$  peut varier légèrement,
- $V_{x,G2}(t)$  peut augmenter ou montrer une variation plus marquée.

## Comportement de $V_y$ des deux particules dans le phénomène DKT

La vitesse verticale  $V_y(t)$  des particules dans le phénomène DKT est influencée par les interactions hydrodynamiques et la gravité à chaque étape du phénomène.

### 1. Drafting (Aspiration ou sillage)

Pendant la phase de drafting, la particule G1 génère un sillage qui réduit la traînée pour la particule G2, affectant ainsi leurs vitesses verticales.

#### Comportement de $V_y(t)$ :

- **Pour la particule G1 :** La vitesse verticale  $V_{y,G1}(t)$  reste relativement constante, car G1 est principalement influencée par la gravité avec une traînée fluide stable.
- **Pour la particule G2 :** En raison du sillage créé par G1, la particule G2 subit moins de résistance, ce qui conduit à une augmentation de sa vitesse verticale  $V_{y,G2}(t)$ . Sa vitesse verticale est donc plus élevée comparée à celle de G1.

En résumé :

- $V_{y,G1}(t) \approx \text{constante},$
- $V_{y,G2}(t)$  augmente en raison de la réduction de la traînée.

## 2. Kissing (Collision ou rapprochement)

Lors de la phase de kissing, la particule G2 rattrape G1, et leurs vitesses verticales se rapprochent.

**Comportement de  $V_y(t)$  :**

- **Pour la particule G1 :** La vitesse verticale  $V_{y,G1}(t)$  reste relativement constante, bien que de légères perturbations puissent se produire en raison des interactions avec la particule G2.
- **Pour la particule G2 :** La vitesse verticale  $V_{y,G2}(t)$  peut montrer une légère diminution à mesure que G2 se rapproche de G1 et que les forces hydrodynamiques deviennent plus complexes.

En résumé :

- $V_{y,G1}(t)$  reste constante ou légèrement perturbée,
- $V_{y,G2}(t)$  peut légèrement diminuer.

## 3. Tumbling (Séparation ou basculement)

Après le rapprochement, les particules se séparent, entraînant des modifications dans leurs vitesses verticales.

**Comportement de  $V_y(t)$  :**

- **Pour la particule G1 :** La vitesse verticale  $V_{y,G1}(t)$  peut légèrement augmenter en raison des modifications dans l'écoulement fluide après la séparation des particules.
- **Pour la particule G2 :** La vitesse verticale  $V_{y,G2}(t)$  peut montrer une diminution progressive en raison de l'augmentation de la traînée après la séparation, ce qui ralentit la particule.

En résumé :

- $V_{y,G1}(t)$  peut légèrement augmenter,
- $V_{y,G2}(t)$  diminue progressivement.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle formulation de la méthode des domaines fictifs basée sur les multiplicateurs de Lagrange pour les écoulements particulaires. Dans cette approche, le mouvement rigide est imposé en exigeant que le tenseur de taux de déformation soit nul aux points occupés par des solides rigides. Cette formulation conduit à un champ de multiplicateurs de Lagrange pour le mouvement rigide, de manière analogue à la façon dont la pression apparaît comme un multiplicateur de Lagrange pour l'incompressibilité. La nouvelle formulation est mise en œuvre en modifiant le code DLM pour les écoulements particulaires bidimensionnels développé par Singh et al.[2]. Le code fournit des résultats qui concordent avec l'approche DLM originale lorsque les densités ne correspondent pas et avec les expériences.

L'algorithme actuel ne nécessite aucune condition supplémentaire sur l'espace des multiplicateurs de Lagrange lorsque les densités du fluide et des particules correspondent. Dans cette approche, les vitesses de translation des particules ne sont pas présentes dans les équations de mouvement combinées.

## 6 Annexe

### .1 Appendice A

#### Théorème de Stokes en 2D

Soit  $V$  une fonction vectorielle, tel que  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  s'exprime comme suit :

$$\int_K \nabla \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\partial K} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$$

où  $K$  est le domaine,  $\partial K$  est sa frontière (contour),  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant de  $\partial K$ , et  $ds$  est l'élément de longueur sur  $\partial K$ .

Pour généraliser :

$$\int_K D(v_i) dx = \int_{\partial K} (v_{1i}, v_{2i}) \cdot \mathbf{n} ds$$

avec le tenseur des déformations  $D(v_i)$  pour un vecteur  $v_i = (v_{1i}, v_{2i})$  est défini par :

$$D(v_i) = \frac{1}{2} \left( \nabla v_i + (\nabla v_i)^T \right)$$

Pour chaque composante  $v_{1i}$  et  $v_{2i}$ , le tenseur  $D(v_i)$  est :

$$D(v_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1i}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2i}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1i}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2i}}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_{2i}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

#### Formule de Green

$$\int_{\Omega/p(t)} (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{v} d\Omega = - \int_{\Omega/p(t)} \sigma : D[\mathbf{v}] d\Omega + \int_{\partial(\Omega/p(t))} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS$$

Or

$$\int_{\partial(\Omega/p(t))} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS = \int_{\Gamma} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\partial p(t)} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS$$

#### Théorème de l'Existence et unicité du problème continu

On fait les hypothèses suivantes :

- La forme  $a$  est coercive sur  $X \times X$  :

Il existe  $\alpha > 0$  tel que  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X$ .

- Lemme de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB)** La forme  $b$  satisfait la condition 'inf-sup' :

Il existe  $\beta > 0$  tel que

$$\sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_Y \quad \forall q \in Y.$$

## Théorème de l'inf-sup (ou LBB)

Considérons un problème de type Stokes ou un problème de diffusion-élévation dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . On suppose que :

- $V$  est un espace de fonctions pour les vitesses (par exemple, des fonctions vectorielles dans  $H^1(\Omega)^d$ ).
- $Q$  est un espace de fonctions pour les pressions (par exemple, des fonctions scalaires dans  $L^2(\Omega)$ ).

Le théorème de l'inf-sup affirme qu'il existe une constante  $\beta > 0$  telle que :

$$\inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{a(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geq \beta$$

où  $a(v, q)$  est une forme bilinéaire associée au problème, et  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_Q$  sont les normes respectives dans les espaces  $V$  et  $Q$ . En d'autres termes :

$$\inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{a(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} > 0$$

## .2 Appendice B

### Produit tensoriel

Le produit tensoriel entre deux matrices  $A$  et  $B$  est noté  $A \otimes B$ . Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  et  $B$  est une matrice de taille  $p \times q$ , alors le produit  $A \otimes B$  est une matrice de taille  $(m \times p) \times (n \times q)$ .

Formellement, si :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Alors le produit tensoriel  $A \otimes B$  est défini comme :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Chaque élément  $a_{ij}$  de la matrice  $A$  est multiplié par la matrice entière  $B$ .

### Propriétés importantes du produit tensoriel

Le produit tensoriel de Kronecker possède plusieurs propriétés intéressantes :

— **Associativité** :

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

— **Distributivité (sur l'addition)** :

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

— **Interaction avec le produit matriciel classique** :

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

Cette propriété est particulièrement utile pour factoriser des produits de matrices de grande dimension.

— **Transposition** :

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

— **Multiplication par un scalaire** : Si  $\alpha$  est un scalaire, alors :

$$\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$$

— **Inverse (s'il existe)** : Si  $A$  et  $B$  sont des matrices inversibles, alors :

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

## Recherche de $\Lambda_N$ et $S_N$

Pour une matrice tridiagonale symétrique de Toeplitz  $T_N$ , nous pouvons calculer ses valeurs propres  $\Lambda_N$  et sa matrice de diagonalisation  $S_N$ .

### 1. Trouver les valeurs propres $\Lambda_N$

Les matrices tridiagonales symétriques de Toeplitz ont des valeurs propres qui peuvent être calculées analytiquement. Pour une matrice  $T_N$  de taille  $N \times N$ , de la forme :

$$T_N = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

les valeurs propres  $\lambda_k$  sont données par la formule suivante :

$$\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

où  $a$  est l'élément diagonal de  $T_N$ , et  $b$  est l'élément hors-diagonal. La matrice diagonale des valeurs propres sera donc :

$$\Lambda_N = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$$

### 2. Trouver la matrice de diagonalisation $S_N$

La matrice de diagonalisation  $S_N$ , qui diagonalise  $T_N$ , est formée à partir des vecteurs propres de  $T_N$ . Les éléments de  $S_N$  sont donnés par :

$$[S_N]_{jk} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right), \quad j, k = 1, 2, \dots, N$$

Les colonnes de  $S_N$  représentent les vecteurs propres associés à chaque  $\lambda_k$ .

## Résumé des étapes :

1. **Calcul des valeurs propres  $\Lambda_N$**  : Utiliser la formule

$$\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)$$

pour trouver les valeurs propres.

2. **Construction de la matrice  $S_N$**  : Utiliser la relation

$$[S_N]_{jk} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right)$$

pour construire la matrice de diagonalisation.

Ainsi,  $T_N$  peut être diagonalement simplifiée par  $S_N$  :

$$T_N = S_N \Lambda_N S_N^T$$

### .3 Appendice C

#### Exemple de couples d'espaces incompatibles

L'exemple le plus connu d'espaces incompatibles en méthode des éléments finis est celui où les composantes de la vitesse sont approchées par des polynômes de  $Q_1$  (éléments linéaires par morceaux sur chaque élément quadrilatéral) et la pression est approchée par des éléments  $P_0$  ( constantes par élément).

Considérons le domaine carré  $\Omega = [0, 1]^2$  et définissons un maillage cartésien uniforme. Soit  $N$  un entier plus grand que 2. Posons  $h = 1/N$  et pour  $0 \leq i, j \leq N$ , notons  $a_{ij}$  le point de coordonnées  $(ih, jh)$  et  $K_{ij}$  la maille carrée dont le nœud en bas à gauche est  $a_{ij}$  (voir le tableau (.3)). Notons  $T_h = \bigcup_{ij} K_{ij}$  le maillage ainsi constitué.

Nous définissons maintenant les espaces d'approximation suivants :

$$X_h = \left\{ u_h \in [C^0(\Omega)]^2 ; \forall K_{ij} \in T_h ; u_h \circ TK_{ij} \in Q_1^2, u_h|_\Gamma = 0 \right\},$$

l'espace des vitesses discrètes où chaque composante de la vitesse est linéaire par morceaux sur chaque élément  $K_{ij}$ .

$$M_h = \left\{ p_h \in L_0^2(\Omega) ; \forall K_{ij} \in T_h ; p_h \circ TK_{ij} \in P_0 \right\},$$

l'espace des pressions discrètes, constantes par élément  $K_{ij}$ .

Pour simplifier, nous notons  $p_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$  la valeur de  $p_h$  sur  $K_{ij}$  et  $(u_{ij}, v_{ij})$  les valeurs des composantes cartésiennes de  $u_h$  au nœud  $a_{ij}$ .

-1	+1	-1	+1	-1
-1	+1	-1	+1	-1
-1	+1	-1	+1	-1
-1	+1	-1	+1	-1
	$M_{ij}$			

Pour montrer que la condition "inf-sup" (ou LBB) n'est pas satisfaite, il suffit de montrer qu'il existe un champ de pression  $p_h \in M_h$  tel que  $\int_\Omega (\nabla \cdot u_h) p_h dx = 0$ , pour tout  $u_h \in X_h$ . Par définition de  $M_h$ ,  $p_h$  est constant sur chaque maille. Par conséquent, l'intégrale se simplifie :

$$\int_{K_{ij}} (\nabla \cdot u_h) p_h dx = p_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \int_{\partial K_{ij}} (u_h \cdot n) ds$$

$$\int_{\partial K_{ij}} (u_h \cdot n) ds = h \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1}}{2} + \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i,j+1}}{2} - \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} - \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} \right)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot u_h) p_h \, dx = \sum_{K_{ij} \in T_h} p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \int_{K_{ij}} (\nabla \cdot u_h) \, dx.$$

En faisant d'abord la somme sur toutes les mailles, puis en réarrangeant les termes pour faire la somme sur tous les noeuds internes (c'est-à-dire en utilisant une sommation par parties), nous obtenons :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot u_h) p_h \, dx = -h^2 \sum_{0 < i, j < N} (u_{i,j} (\partial_1 p)_{ij} + v_{i,j} (\partial_2 p)_{ij})$$

ou nous avons posé :

$$\begin{aligned} (\partial_1 p)_{ij} &= \frac{1}{h} \left[ \frac{p_{i+1/2,j+1/2} + p_{i+1/2,j-1/2} - p_{i-1/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}}{2} \right] \\ (\partial_2 p)_{ij} &= \frac{1}{h} \left[ \frac{p_{i+1/2,j+1/2} + p_{i-1/2,j+1/2} - p_{i+1/2,j-1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}}{2} \right] \\ \sum_{K_{ij} \in T_h} p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \int_{K_{ij}} (\nabla \cdot u_h) \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi  $\int_{\Omega} (\nabla \cdot u_h) p_h \, dx = 0$  pour tout  $u_h \in X_h$  si et seulement si :  $p_{i+1/2,j+1/2} = p_{i-1/2,j-1/2}$  et  $p_{i-1/2,j+1/2} = p_{i+1/2,j-1/2} \forall 1 \leq i, j \leq N - 1$ .

Ce système décrit a priori un espace de dimension 2 dont l'une des deux directions de base est le champ constant. Cependant, la droite vectorielle engendrée par les constantes est exclue de l'espace d'approximation  $M_h$ , puisque le champ de pression est de moyenne nulle. En revanche, l'autre direction de base est engendrée par une fonction qui prend alternativement les valeurs +1 et -1 sur deux mailles adjacentes (voir le tableau (.3)).

Nous concluons donc que la condition "inf-sup" n'est pas satisfaite. En d'autres termes, les espaces  $X_h$  et  $M_h$  sont incompatibles pour résoudre notre problème, car ils ne garantissent pas l'unicité et la stabilité de la solution.

## .4 Appendice D

### Algorithme du gradient conjugué

**Algorithm 2:** Algorithme du gradient conjugué

```

1 Choisir  $x_0$  (souvent  $x_0 = 0$ );
2 Calculer  $r_0 = b - Ax_0$  et poser  $p_0 = r_0$ ;
3  $k = 0$ ;
4 while  $\|r_k\|$  n'est pas suffisamment petit do
5    $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$ ;
6    $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ ;
7    $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$ ;
8   if  $\|r_{k+1}\|$  est suffisamment petit then
9     stop;
10   $\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$ ;
11   $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$ ;
12   $k = k + 1$ ;
```

## References

- [1] N. PATANKAR, P. SINGH, D. JOSEPH, R. GLOWINSKI et T. PAN, « A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, » English (US), *International Journal of Multiphase Flow*, t. 26, n° 9, p. 1509-1524, sept. 2000, Funding Information : We acknowledge the support from NSF under KDI/NCC grant NSF/CTS-9873236 and the University of Minnesota Supercomputing Institute. The authors are indebted to Todd Hesla, for his careful proofreading of the manuscript., ISSN : 0301-9322. DOI : 10.1016/S0301-9322(99)00100-7.
- [2] P. SINGH, D. JOSEPH, T. HESLA, R. GLOWINSKI et T.-W. PAN, « A Distributed Lagrange Multiplier/Fictitious Domain Method for Viscoelastic Particulate Flows, » *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, t. 91, p. 165-188, juill. 2000. DOI : 10.1016/S0377-0257(99)00104-4.
- [3] R. GLOWINSKI, T. PAN, T. HESLA, D. JOSEPH et J. PÉRIAUX, « A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies : Application to Particulate Flow, » *Journal of Computational Physics*, t. 169, n° 2, p. 363-426, 2001, ISSN : 0021-9991. DOI : <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6542>. adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999100965422>.
- [4] N. A. PATANKAR, P. SINGH, D. D. JOSEPH, R. GLOWINSKI et T. -. PAN, « A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, » *International Journal of Multiphase Flow*, t. 26, n° 9, p. 1509-1524, jan. 2000. DOI : 10.1016/S0301-9322(99)00100-7.
- [5] G. MARCHUK, « Splitting and alternating direction methods, » in sér. Handbook of Numerical Analysis, t. 1, Elsevier, 1990, p. 197-462. DOI : [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(05\)80035-3](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(05)80035-3). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570865905800353>.
- [6] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN, T. HESLA et D. JOSEPH, « A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, » *International Journal of Multiphase Flow*, t. 25, n° 5, p. 755-794, 1999, ISSN : 0301-9322. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(98\)00048-2](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(98)00048-2). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932298000482>.
- [7] R. GLOWINSKI, *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] X. ZHANG et P. TAHMASEBI, « Drafting, Kissing and Tumbling Process of Two Particles : The Effect of Morphology, » *International Journal of Multiphase Flow*, t. 160, p. 104379, 2023, ISSN : 0301-9322. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2023.104379>. adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932223000022>.