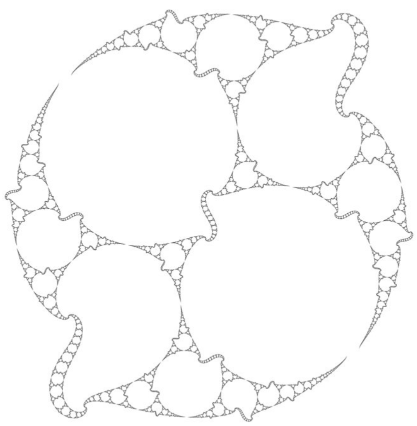
Sur le

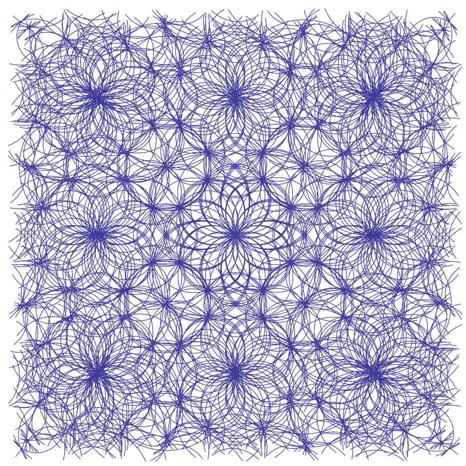
de

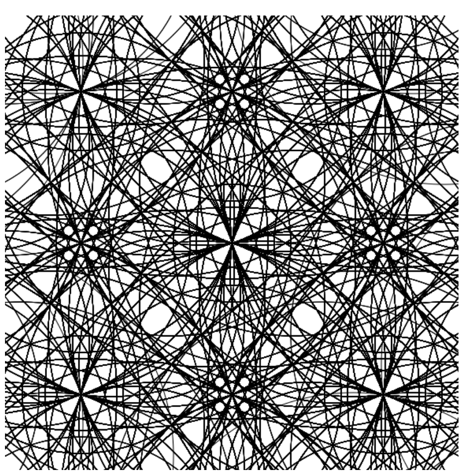
Frédéric Paulin

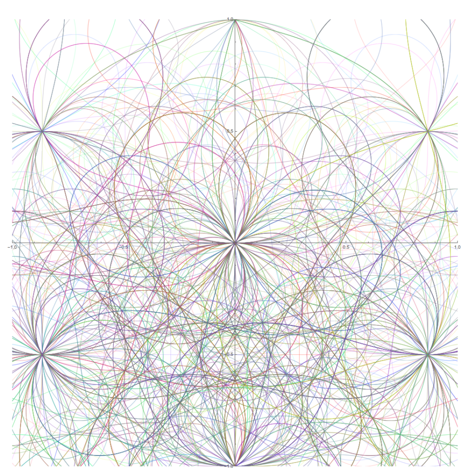
Université Paris-Saclay et Université de Nante

Colloquium Nante



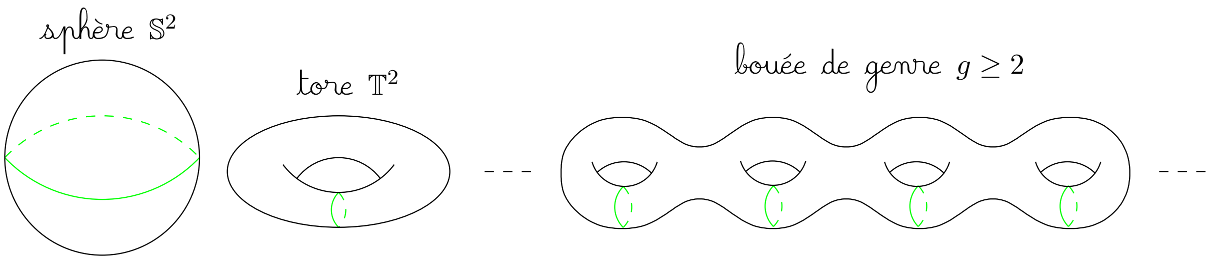






Lot 1 : ode aux surface

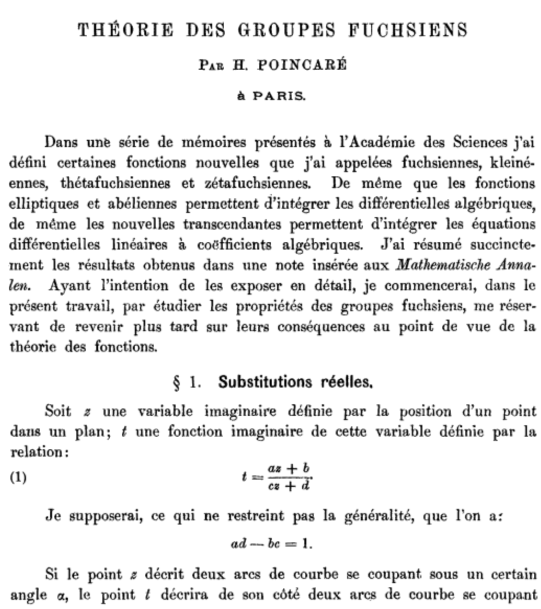
Classification de



Uniformisation de

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$ par homographie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$. Un groupe fuchsien e $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Théorème (Poincaré, 1907) : *Toute surface de genre $g \geq 2$ munie d'une structure conforme e* $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}/\Gamma$ *où* Γ *e*



THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS

PAR H. POINCARÉ

à PARIS.

Dans une série de mémoires présentés à l'Académie des Sciences j'ai défini certaines fonctions nouvelles que j'ai appelées fuchsiennes, kleinéennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes. De même que les fonctions elliptiques et abéliennes permettent d'intégrer les différentielles algébriques, de même les nouvelles transcendantes permettent d'intégrer les équations différentielles linéaires à coëfficients algébriques. J'ai résumé succinctement les résultats obtenus dans une note insérée aux *Mathematische Annalen*. Ayant l'intention de les exposer en détail, je commencerai, dans le présent travail, par étudier les propriétés des groupes fuchsiens, me réservant de revenir plus tard sur leurs conséquences au point de vue de la théorie des fonctions.

§ 1. **Substitutions réelles.**

Soit z une variable imaginaire définie par la position d'un point dans un plan; t une fonction imaginaire de cette variable définie par la relation:

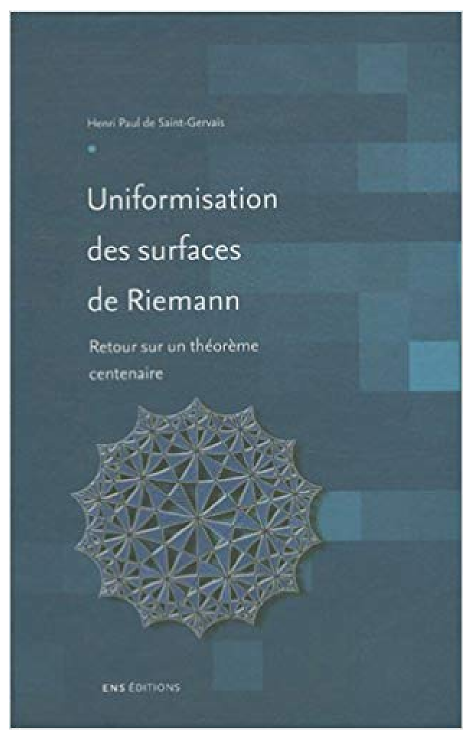
$$t = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{1}$$

Je supposerai, ce qui ne restreint pas la généralité, que l'on a:

$$ad - bc = 1.$$

Si le point z décrit deux arcs de courbe se coupant sous un certain angle α, le point t décrira de son côté deux arcs de courbe se coupant

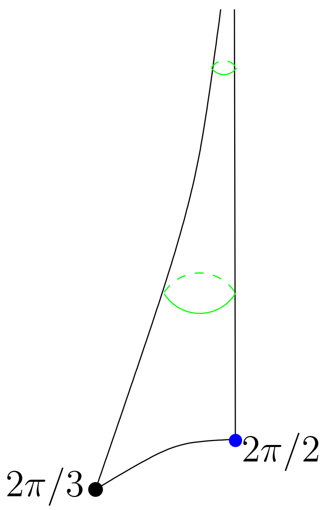
Acta mathematica. I. 1

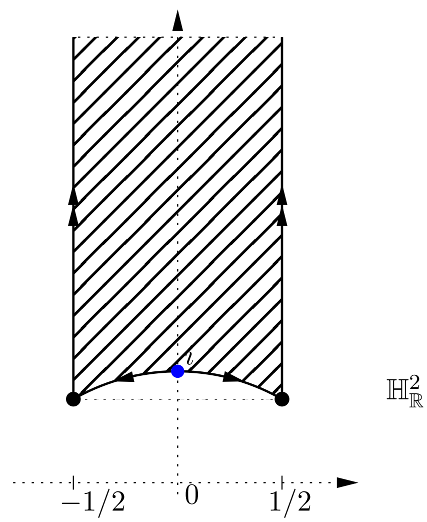


Parfois, le

Exemple : la courbe modulaire $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}/\,\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ e

deux point 2 et 3 :



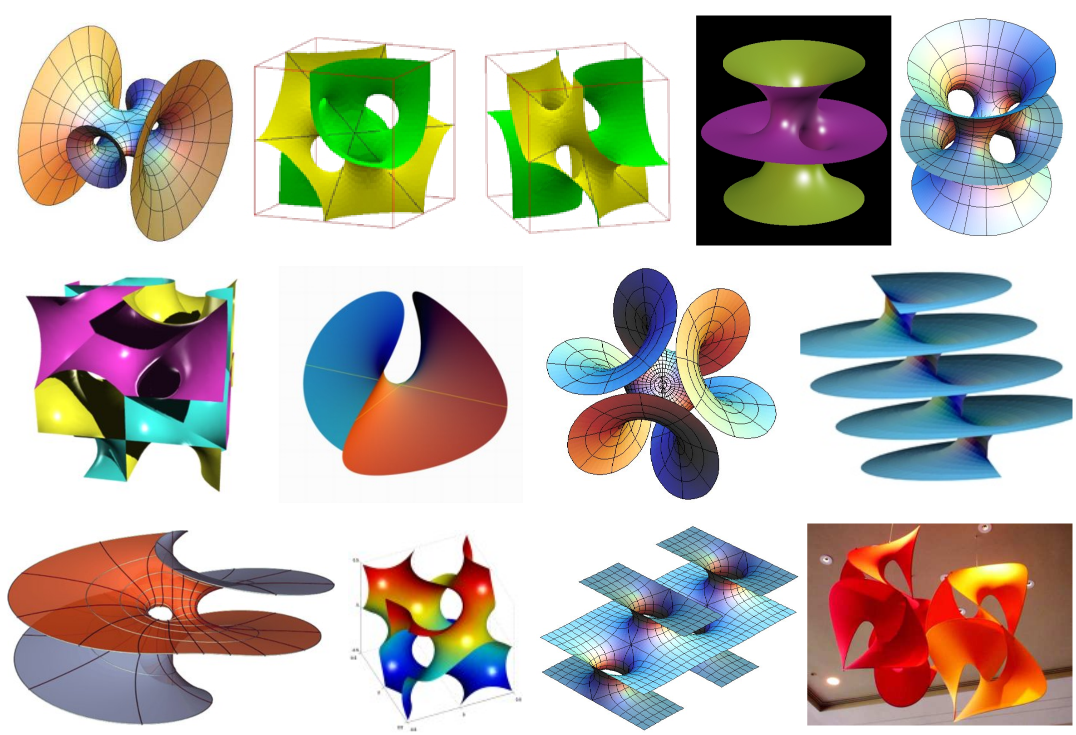


$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Nous allons nous intére

mergée

Exemple : de



Lot 2 : la dimension 2 au secours de la dimension 3

Soit M une variété (compacte, connexe, orientable) de dimension 3.

Méthode de Haken : Dans M, le S incompre

lacet dans S déformable en un point dans M l'e S) aident à étudier sa

to

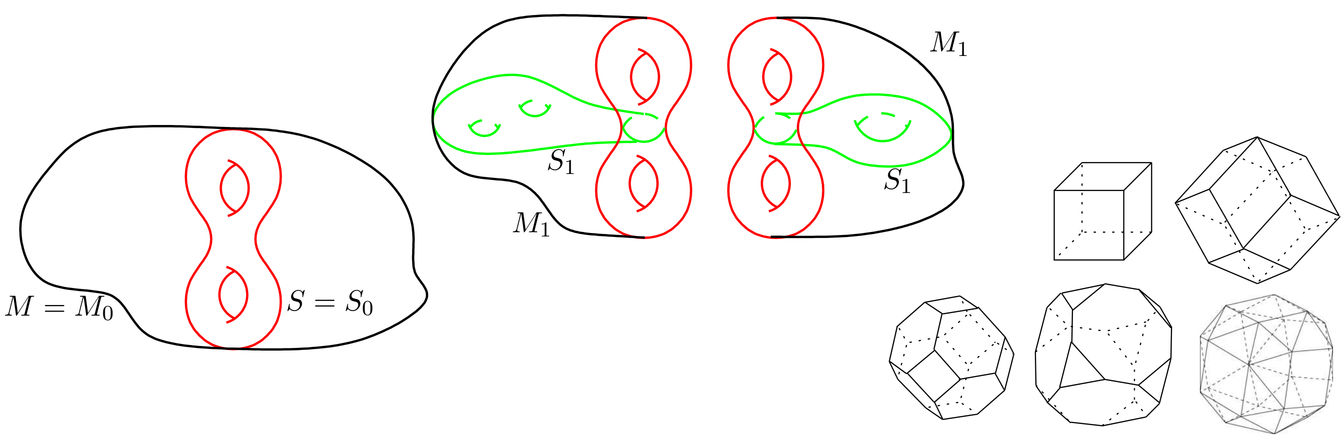


Fig 5 : Itération de découpe

Ce principe de couper pour simplifier e

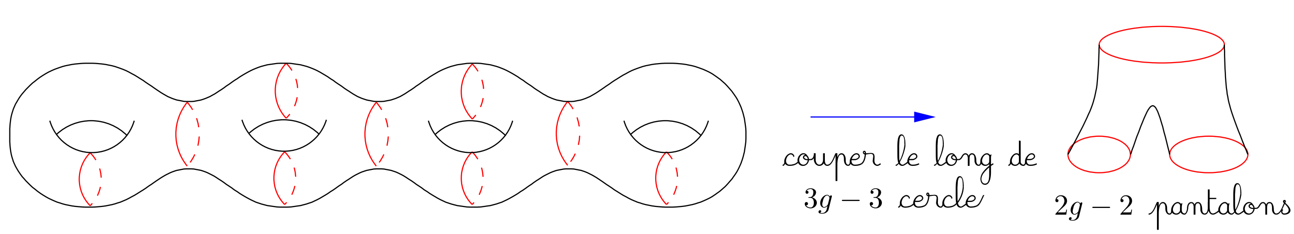


Fig 6 : Toute surface de genre $g \geq 2$ e

Le théorème d'hy

(s'il existe une surface incompre $g \geq 2$), de munir M d'une structure hy -1), sauf obtruction to

Théorème (Kahn-Markovic, 2012) : Si M e M admet de surface

Outil

re M).

Théorème (Agol, 2013), ré

Toute variété de dimension 3 admet un revêtement fini qui admet une surface incompre $g \geq 2$.

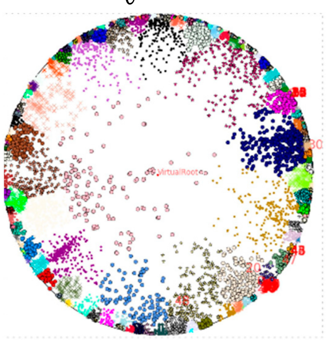
Outil + méthode

Lot 3 : en route vers l'infini et au-delà !

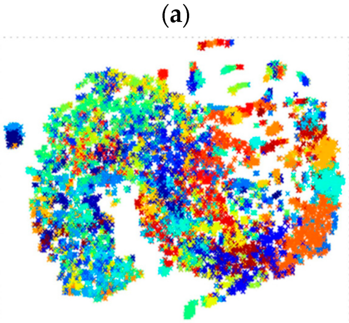
La nature adore le
sont de
groupe $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Publicité trans-thématique

(a) Le futur de



(a)



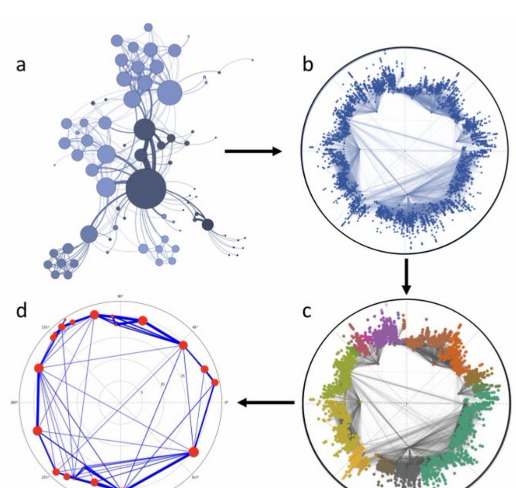
(c)

∗ A
chisée
bolique (a) versus le plan euclidien (c), par Mingming Lu et al.

∗ Prévisions statistique
courbure négative au sens d'Alexandrov (si, si !), par Quentin Paris [arXiv:2002.00852].

∗ Par Karen Vogtmann et al, l'e
bre

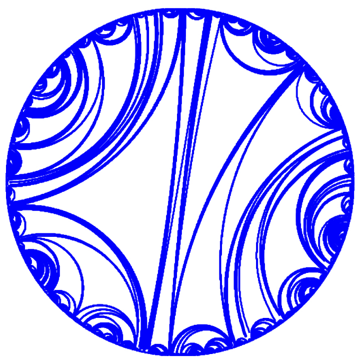
∗ Agrégation dans de
de connexions du plan hy
bolique, par Matteo Bruno et al [arXiv:1906.09082].

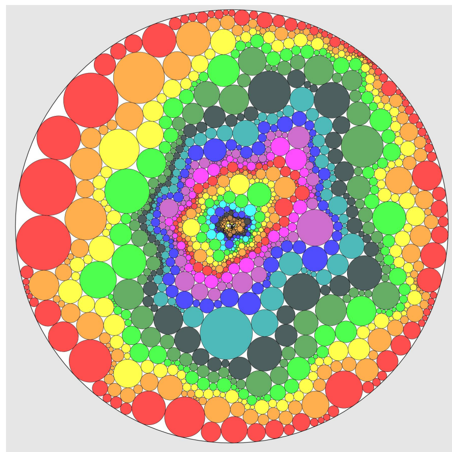


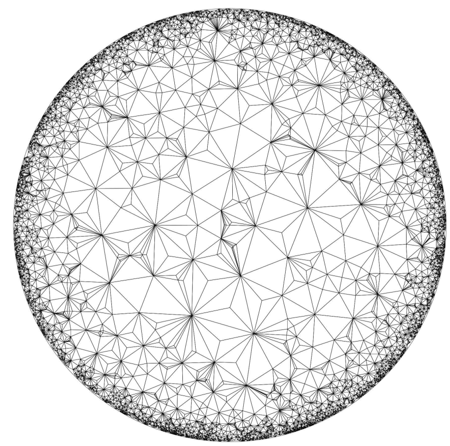
(b) La géométrie hy

laminations aléatoire

bolique $PSHIT$) : travaux de Le Gall, Curien, Kortchemski, Budzinski, etc (de







(C) Le

Théorème (Curien-Budzinski-Petri, 2019) : *Le diamètre minimal d'une surface hy* g *e* $\ln g$ *quand* $g \to +\infty$.

Outil

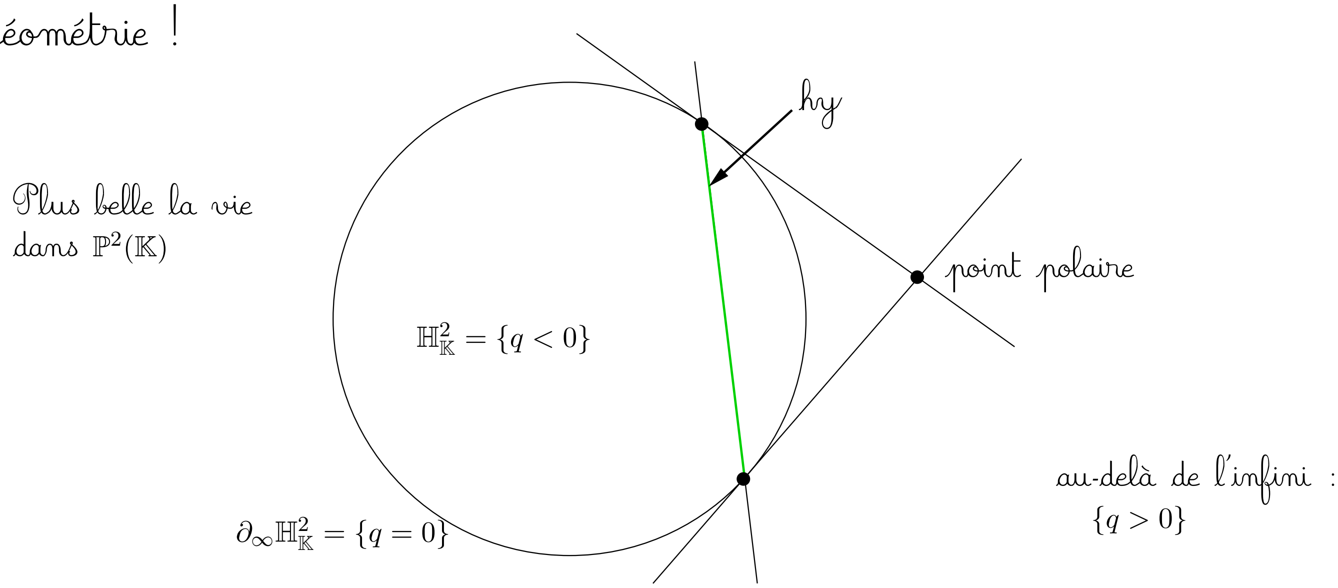
talons.

L'é

ty X, de groupe G.

Exemple $\mathbb{H}^2_{\mathbb{K}}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

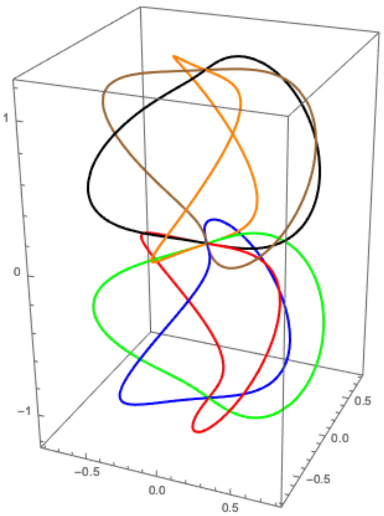
Soit $q : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(z_0, z_1, z_2) = -\overline{z_0}\, z_2 - \overline{z_2}\, z_0 + \overline{z_1}\, z_1$, alors $\mathbb{H}^2_{\mathbb{K}}$ e $\{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : q(z_0, z_1, z_2) < 0\}$ muni de l'unique (à scalaire prè riemannienne invariante par le sous-groupe $G = \mathrm{SO}(1,2)$, $\mathrm{SU}(1,2)$ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ pré q. C'e programme d'Erlangen de Klein : le groupe détermine la géométrie !

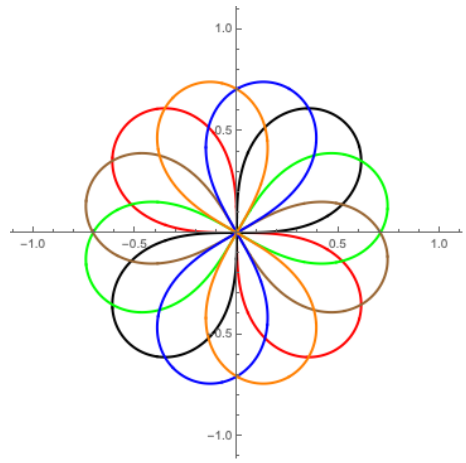


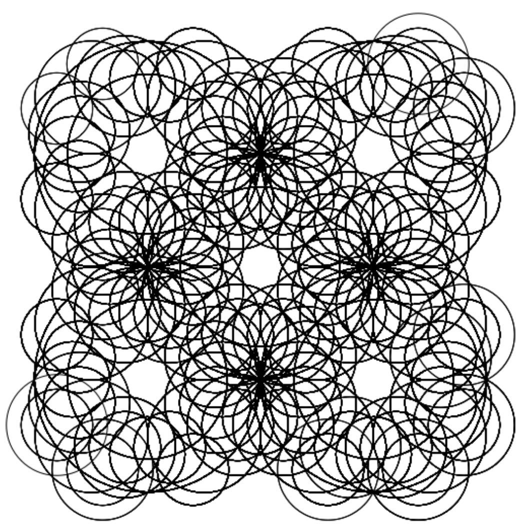
Un e X contient, à isométrie prè un nombre fini de sous-e prè $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Par exemple, il n'y en a qu'un dans $\mathbb{H}^3_{\mathbb{R}}$ et deux dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$: ce sont $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{H}^1_{\mathbb{C}} = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} : z_1 = 0\}$.

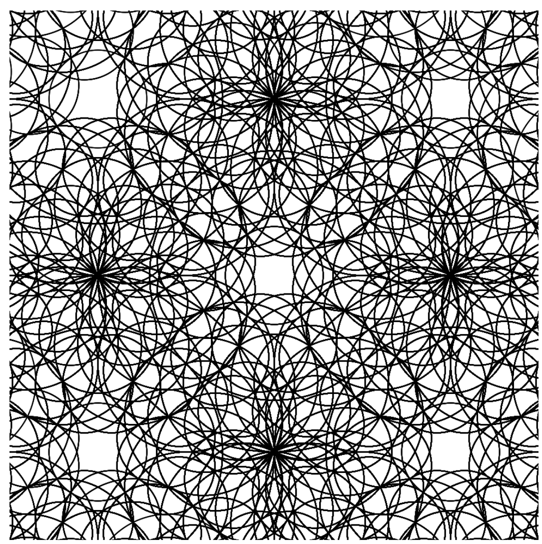
Le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de X e X partant d'un point donné. Par exemple, $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{K}} = \{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : q(z_0, z_1, z_2) = 0\}$ vérifie $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{S}^1$ et $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{S}^3$.

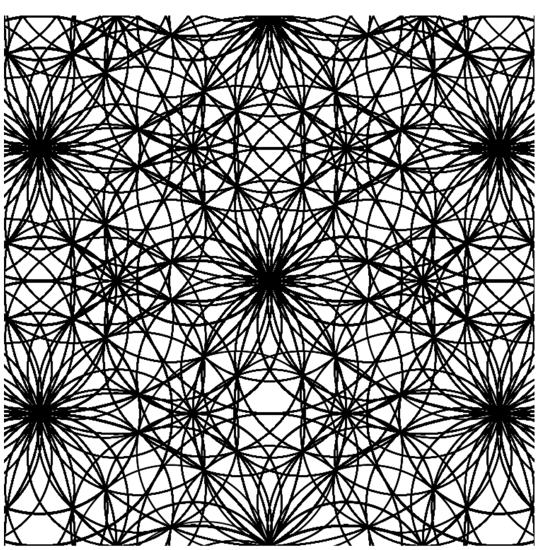
Chaque co $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ dans X comme ci-de $\partial_\infty X$.

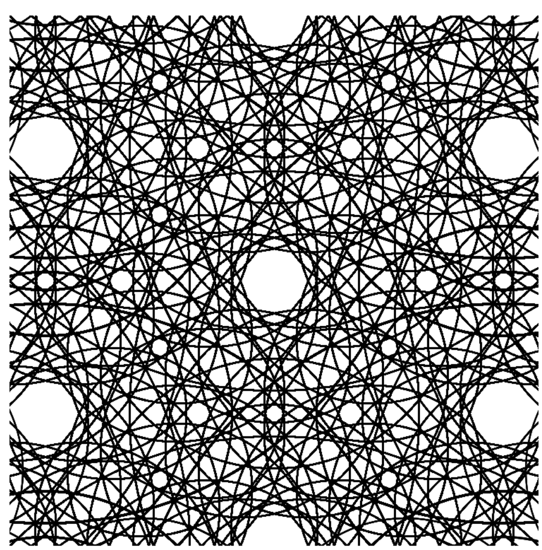












Lot 4 : sous-groupe

Deux sous-groupe
d'indice finie dans chacun d'eux.

Un sous-groupe arithmétique Γ de G e G
et à commensurabilité et conjugaison prè
groupe algébrique entier de point G.

Exemple • $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ groupe modulaire dans $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$,

- $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ groupe de Bianchi dans $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$,
- $\Gamma = \mathrm{SU}(1,2;\mathbb{Z}[i])$ groupe de Picard dans $G = \mathrm{SU}(1,2)$.
- (Théorème de Takeuchi, 1975) Le

commensurabilité et conjugaison prè

Problème encore trè
bilité et conjugaison prè
arithmétique G.

Théorème (Parkkonen-P, 2017-2018) : *Le*
$\mathrm{SU}(1,2;\mathbb{Z}[i])$ sont arithmétique
prè

Outil
de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} / \mathrm{SU}(1,2;\mathbb{Z}[i])$.