Cours MASTER 2 MFA

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Département de Mathématiques

Université de Nantes

Programme 2014-2015

Contact : master-rech@math.univ-nantes.fr

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option : **x**

Année – semestre : **Année 2 - semestre 1**

<table>
<tr><td colspan="4">X9MF010</td><td colspan="2">Intitulé de l'UE : analyse approfondie</td></tr>
<tr><td>CM</td><td>TD</td><td>CTDI</td><td>TP</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>28</td><td>28</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">SECTION CNU 25/26</td><td>Nombre d'ECTS 6</td></tr>
<tr><td colspan="5">RESPONSABLE DE L'UE : C. BERTHON</td><td>Christophe.berthon@univ-nantes.fr</td></tr>
</table>

Prérequis :

Master 1 de Mathématiques

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées.

Ce module est constitué d'une part d'un cours magistral d'initiation (28H cours) et d'autre part de séances de TD illustrant le cours (28H), dans un des domaines de recherche en analyse représenté au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray. Le contenu et les intervenants pour ce cours changent chaque année

Le programme du cours 2014-2015 est le suivant :

<u>Introduction aux équations hyperboliques (cours : C. Berthon, TD : H. Mathis)</u>

(course given in English)

L'objectif de ce cours est d'introduire les outils de base pour l'analyse des systèmes hyperboliques de lois de conservation. De tels systèmes entrent dans de très nombreuses modélisations (aérodynamique, écoulements fluviaux et côtiers, tsunami, inondations, trafic routier...).

Dans un premier temps, le cas scalaire sera traité. On s'intéressera au problème de la perte de régularité de la solution et on introduira les solutions faibles. Dans le but de résoudre le problème de Riemann, on définira les solutions onde de détente et onde de choc et on introduira la notion d'entropie. Enfin, on établira le théorème d'existence et d'unicité de Kruzkov. La seconde partie sera dédiée aux systèmes hyperboliques de lois de conservation. On étendra les notions de solutions de type détente ou choc ainsi que l'entropie et on définira les solutions de type onde de contact. Il s'agira ici de résoudre le problème de Riemann pour les équations d'Euler en gaz parfait.

Compétences acquises :

Notions théoriques et modélisation en analyse des EDP hyperboliques.

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option : **x**

Année – semestre : **Année 2 - semestre 1**

X9MF020				Intitulé de l'UE : Géométrie
CM	TD	CTDI	TP	
28	28	0	0	
SECTION CNU 25/26				Nombre d'ECTS 6
RESPONSABLE DE L'UE : L. GUILLOPE				Laurent.guillope@univ-nantes.fr

Prérequis :

Master 1 de Mathématiques

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées.

Ce module est constitué d'une part d'un cours magistral d'initiation (28H cours) et d'autre part de séances de TD illustrant le cours (28H), dans un des domaines de recherche en topologie, géométrie ou algèbre représenté au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray. Le contenu et les intervenants pour ce cours changent chaque année

Le programme du cours 2014-2015 est le suivant :

Géométrie différentielle (cours : L. Guillopé, TD : J.-L. Milhorat)

Ce cours introduira la notion de variété différentiable et les outils de base de calcul différentiel associé (fibré tangent, champs de vecteurs, formes). Des premiers éclairages sur les groupes de transformations (groupes discrets, groupes de Lie) et les quotients induits seront abordés.

Les géométries classiques (euclidienne, sphérique, hyperbolique) fourniront de nombreux exemples. La notion de structure géométrique sera introduite et illustrée par les géométries dégagées par Thurston en dimension 3.

En attendant le début du cours, lire
http://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html

Compétences acquises :

Notions de base en géométrie différentielle

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option : **x**

Année – semestre : **Année 2 - semestre 1**

X9MF030				Intitulé de l'UE : Séminaire des étudiants
CM	TD	CTDI	TP	
20	0	0	0	

SECTION CNU 25/26	Nombre d'ECTS 6
RESPONSABLE DE L'UE : B. CHANTRAINE, J. VIOLA	Baptiste.chantraine@univ-nantes.fr Joseph.viola@univ-nantes.fr

Prérequis :

Master 1 de Mathématiques

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées.

Ce module est un complément aux cours de base en analyse et algèbre-géométrie-topologie. Il s'agit pour chaque étudiant de travailler pendant deux semaines environ sur un résultat non abordé en cours parmi une liste de sujet proposés, puis de le présenter à l'ensemble du groupe, lors d'un exposé d'une heure.

Chaque étudiant devra faire deux présentations, à choisir en géométrie-algèbre-topologie et/ou analyse.

Compétences acquises :

Complément de formation en analyse et/ou algèbre-géométrie-topologie, autonomie, capacité synthèse d'un résultat.

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option : **Analyse et Probabilités**

Année – semestre : **Année 2 - semestre 2**

X0MF040				Intitulé de l'UE : Analyse et probabilités 1
CM	TD	CTDI	TP	
28	0	0	0	

SECTION CNU 25/26	Nombre d'ECTS 6
RESPONSABLE DE L'UE : B. GREBERT	Benoit.grebert@univ-nantes.fr

Prérequis : Analyse complexe et réelle. Séries de Fourier et espaces de Sobolev

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées. Ce module est un cours avancés dans un des domaines de l'analyse ou des probabilités modernes, donné par un spécialiste du sujet. Le contenu et l'intervenant pour ce cours changent chaque année.

Le programme du cours 2014-2015 est le suivant :

Dynamique Hamiltonienne et formes normales (B. Grébert)

Un grand nombre d'équations aux dérivées partielles peuvent être vues comme des systèmes dynamiques de dimension infinie. Ce point de vue est très utile pour aborder les questions de stabilité (Théorème KAM) mais aussi pour isoler certains comportements résonants (forme normale résonantes).
Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'équation de Schrödinger non linéaire sur le cercle (et plus généralement sur le tore), dont une solution u est une fonction du temps et de l'espace, dans le cas des solutions petites, et où le terme non linéaire est donc un terme perturbatif.

Plan du cours :
1. Un panorama de la situation en dimension finie
2. Des exemples d'EDP non linéaires Hamiltoniennes
3. Théorème KAM en dimension infinie
4. Théorème de forme normale de Birkhoff pour les EDP
5. Forme normale résonante

Bibliographie:
1. V. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Graduate Texts Math. 60, Springer, New-York, 1978.
2. B. Grébert, Birkhof normal form and Hamiltonian PDEs, Partial differential equations and applications, 1-46, Sémin. Congr., 15, Soc. Math. France, Paris, 2007.
3. W. Craig, Problèmes de petits diviseurs dans les équations aux dérivées partielles, Panorama et synthèses, 9, SMF, Paris 2000.

Compétences acquises : Notions approfondies en dynamique Hamiltonienne

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option : **Analyse et Probabilités**

Année – semestre : **Année 2 - semestre 2**

X0MF050				Intitulé de l'UE : Analyse et Probabilités 2
CM	TD	CTDI	TP	
28	0	0	0	

SECTION CNU 25/26	Nombre d'ECTS 6
RESPONSABLE DE L'UE : X.-P. WANG	xue-ping.wang@univ-nantes.fr

Prérequis :

Master 2 premier semestre de Mathématiques

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées.

Ce module est un cours avancés dans un des domaines de l'analyse ou des probabilités modernes, donné par un spécialiste du sujet. Le contenu et l'intervenant pour ce cours changent chaque année

Le programme du cours 2014-2015 est le suivant :

Analyse semi-classique. (X.-P. Wang)

Le but de ce cours est de présenter quelques notions en analyse microlocale et semi-classique des équations aux dérivées partielles.
Le programme de ce cours comprend : transformée de Fourier et transformée de Wigner, opérateurs pseudo-différentiels, principe de correspondance, mesure semi-classique et pseudo-spectre semi-classique.
Les notions générales seront illustrées par des exemples importants en physique quantique comme l'équation de Schrödinger.

Livres de référence

1. A. Martinez, An introduction to semiclassical and microlocal analysis. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.
2. M. Zworski, Semiclassical analysis. Graduate Studies in Mathematics, 138. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012

Compétences acquises :

Notions de base en analyse microlocale et analyse semi-classique

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option : **Algèbre et géométrie**

Année – semestre : **Année 2 - semestre 2**

X0MF020				Intitulé de l'UE : Algèbre et géométrie 1
CM	TD	CTDI	TP	
28	0	0	0	

SECTION CNU 25/26	Nombre d'ECTS 6
RESPONSABLE DE L'UE : L. MEERSSEMAN	Laurent.meersseman@univ-angers.fr

Prérequis :

Un cours de géométrie différentielle de base.

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées. Ce module est un cours avancés dans un des domaines de l'algèbre, de la géométrie ou de la topologie, donné par un spécialiste du sujet. Le contenu et l'intervenant pour ce cours changent chaque année. Le programme du cours 2013-2014 est le suivant :

Géométrie analytique complexe et théorie des déformations (L. Meerseman)

Le but de ce cours est d'expliquer les fondements de la théorie des déformations de Kodaira-Spencer et Kuranishi, qui donne un cadre théorique général à la notion de modules utilisée par Riemann. Pour comprendre de quoi il s'agit, voici un exemple simple. Un tore complexe, c'est-à-dire le quotient du plan complexe C par les translations le long d'un réseau (combinaisons linéaires à coefficients entiers de deux vecteurs formant une base réelle de C) est topologiquement un produit de cercles (une bouée ou un donut en termes plus imagés), et ce quel que soit le réseau choisi; mais c'est aussi un objet relevant de l'analyse complexe. Ainsi les fonctions holomorphes du plan complexe invariantes par l'action du réseau définissent par passage au quotient des fonctions holomorphes sur le tore. On montre cette fois que les propriétés complexes d'un tore dépendent fortement du choix du réseau. Autrement dit la même surface topologique admet différentes (en fait une infinité de) structures de tore complexe. On parle d'un "espace de modules" de structures complexes. Déformer une structure complexe c'est la modifier sans toucher à la variété différentiable sous-jacente.

Programme succinct

Variétés complexes. Fibrés vectoriels. Champs de vecteurs et formes différentielles (p,q). Familles de variétés complexes compactes. Exemples. Cohomologie à valeurs dans les faisceaux. Les faisceaux O et Θ. Application de Kodaira-Spencer. Théorème de rigidité. Opérateurs différentiels entre fibrés. L'opérateur Dbar Le théorème de Kuranishi.

Bibliographie

K. Kodaira, "Complex Manifolds and Deformations of Complex Structures", Springer, Berlin, 1981.
J. Morrow, K. Kodaira, "Complex Manifolds", AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1971.
R. Narasimhan, "Analysis on Real and Complex Manifolds", North-Holland, Amsterdam, 1985.
R.O. Wells, "Differential Analysis on Complex Manifolds", Springer, Berlin, 2008.

Compétences acquises :

Notions approfondies en géométrie analytique complexe

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option : **Algèbre et géométrie**

Année – semestre : **Année 2 - semestre 2**

X0MF030				Intitulé de l'UE : Algèbre et géométrie 2
CM	TD	CTDI	TP	
28	0	0	0	

SECTION CNU 25/26	Nombre d'ECTS 6
RESPONSABLE DE L'UE : Y. ROLLIN	Yann.rollin@univ-nantes.fr

Prérequis :

Master 2 premier semestre de Mathématiques.

Programme - Contenu de l'UE : L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la rechercheen mathématiques pures ou appliquées. Ce module est un cours avancés dans un des domaines de l'algèbre, de la géométrie ou de la topologie, donné par un spécialiste du sujet. Le contenu et l'intervenant pour ce cours changent chaque année

Le programme du cours 2014-2015 est le suivant :

Géométrie Riemannienne (Y. Rollin)

Plan du cours :

(i) Préliminaires : Eléments de géométrie différentielle : variétés différentiables, espace tangent, champs de vecteurs, formes différentielles, tenseurs ; fibrations, fibrés vectoriels, fibrés principaux et distributions horizontale.

(ii) Métriques riemanniennes : Existence et premiers exemples : la sphère, l'espace euclidien et l'espace hyperbolique réel. Notion de longueur. Connexion de Levi-Civita et géodésiques. Espaces complets. Théorème de Hopf-Rinow; cut-locus et exemples.

(iii) Courbure : Le tenseur de courbure ; courbure de Ricci et courbure scalaire ; courbure sectionnelle ; courbure de Weyl et géométrie conforme. Champs de Jacobi et application exponentielle. Variéyé à courbure constante.

(iv) Classes caractéristiques via la théorie de Chern-Weil.

(v) Théorie de Hodge sur les variétés riemanniennes

(vi) Théorèmes de comparaison.

Références

[1] A. L. Besse. Einstein manifolds. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition.

[2] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. Riemannian geometry. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.

[3] J. Jost. Riemannian geometry and geometric analysis. Universitext. Springer, Heidelberg, sixth edition, 2011.

[4] S. Kobayashi and K. Nomizu. Foundations of di_erential geometry. Vol. I.Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[5] S. Kobayashi and K. Nomizu. Foundations of di_erential geometry. Vol. II. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.

Compétences acquises :

Notions approfondies en géométrie Riemannienne

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option :

Année – semestre : **Année 2 - semestre 2**

X0MF010				**Intitulé de l'UE : Stage de recherche**
CM	**TD**	**CTDI**	**TP**	
0	**0**	**0**	**0**	
SECTION CNU 25/26				**Nombre d'ECTS 30**
RESPONSABLE DE L'UE : F. HERAU				**Frederic.herau@univ-nantes.fr**

Prérequis :

Master 2 premier semestre de Mathématiques.

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées.

Ce module constitue les premiers pas de l'étudiant dans la recherche active. Il s'agit pendant 4 mois, et sous la direction d'un directeur de stage, d'effectuer une initiation à la recherche par un travail personnel, donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance devant plusieurs chercheurs.

Le choix du sujet se fait parmi ceux proposés chaque année par les chercheurs et enseignants-chercheurs des laboratoires avec lequel le M2 est cohabilité (LMJL à Nantes, LAREMA à Angers, LMBA à Vannes).

Ce travail a vocation, si les critères sont remplis, à être poursuivi lors d'une thèse en mathématiques pures ou appliquées.

Compétences acquises :

Formation initiale professionnelle à la recherche

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option : **Algèbre et géométrie**

Année – semestre : **Année 2 - semestre 2**

X9MF040				Intitulé de l'UE : cours complémentaire 1
CM	TD	CTDI	TP	
25	0	0	0	

SECTION CNU 25/26	Nombre d'ECTS 0
RESPONSABLE DE L'UE : G. MEIGNEZ	Gael.meignez@univ-ubs.fr

Prérequis : Master 2 premier semestre de mathématiques

.

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées.

Ce module est un cours de second niveau, optionnel, dans un des domaines de l'algèbre, de la géométrie ou de la topologie, donné par un spécialiste du sujet, à destination des étudiants autonomes et des chercheurs. Le contenu et l'intervenant pour ce cours changent chaque année

Le programme du cours 2013-2014 est le suivant :

Thurston's h-principle and the homotopic theory of foliations (G. Meignez)

(course given in English)

Foliations are a kind of geometric structure on manifolds. On a differentiable manifold of dimension n, a foliation of dimension p, with 0<=p<=n, is a field of p-planes which is integrable: in a neighborhood of every point, the field is constant in some chart of local coordinates. The homotopic theory of foliations solves the existence and classification problems for these objects by translating them into homotopy theory. It was initiated in the 1970's by the works of André Haefliger, John Mather, and especially William Thurston.

This course will be an introduction to this theory and especially to the ideas and methods of Thurston, which are in the same time geometric, constructive, general, and efficient. I shall introduce basic tools (foliations, Gamma-structures, jiggling, civilization); prove the classical results (Thurston's h-principle, Bott's obstruction to integrability, Haefliger's construction of the classifying space BGamma, Mather-Thurston's homology equivalence); introduce elements on the Godbillon-Vey invariant; and depending on time, give some recent improvements.

The prerequisites are the first elements on differentiable manifolds and differential geometry. We shall need to know a little about transversality, bundles, differential forms, triangulations, singular homology, De Rham cohomology, homotopy groups. One can get these elements e.g. in the first volume of Spivak's "Comprehensive introduction to Differential Geometry", or in Laudenbach's recent book, or in Greenberg's "Lectures on Algebraic Topology".

Compétences acquises :

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option : **Analyse et Probabilités**

Année – semestre : **Année 2 - semestre 2**

<table>
<tr><td colspan="4">X0MF060</td><td rowspan="3" colspan="2">Intitulé de l'UE : cours complémentaire 2</td></tr>
<tr><td>CM</td><td>TD</td><td>CTDI</td><td>TP</td></tr>
<tr><td>25</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">SECTION CNU 25/26</td><td>Nombre d'ECTS 0</td></tr>
<tr><td colspan="5">RESPONSABLE DE L'UE : M. CAFASSO</td><td>mattia. cafasso@univ-angers.fr,</td></tr>
</table>

Prérequis : Master 2 premier semestre de mathématiques

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées.

Ce module est un cours de second niveau, optionnel, dans un des domaines de l'analyse ou des probabilités contemporaines, donné par un spécialiste du sujet, à destination des étudiants autonomes et des chercheurs. Le contenu et l'intervenant pour ce cours changent chaque année

Le programme du cours 2013-2014 est le suivant :

Integrables PDEs and Riemann surfaces (M. Cafasso)

(course given in English)

.

After an introduction to the so-called Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation and its integrable properties, I will discuss its algebro-geometric solutions, i.e. those solutions of the equation written in terms of theta functions associated to Riemann surfaces. Necessary tools in the theory of Riemann surfaces will be introduced during the course, so no particular background in algebraic geometry is requested (just some notions of complex analysis). Time permitting, I will also mention some aspects of the so called Shottky problem and the Novikov conjecture, solved by Dubrovin, Arbarello - De Concini, Shiota.

Compétences acquises :

FORMATION : **Mathématiques et Applications**

Parcours/Spécialité : **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Option :

Année – semestre : **Année 2 - semestre 2**

X0MF00000				Intitulé de l'UE : cours complémentaire 3
CM	TD	CTDI	TP	
10	0	0	0	

SECTION CNU 25/26	Nombre d'ECTS 0
RESPONSABLE DE L'UE : A. GRYGORIAN	grigor@math.uni-bielefeld.de

Prérequis : Master 2 premier semestre de mathématiques

Programme - Contenu de l'UE :

L'objectif du Master recherche est de former des étudiants à l'apprentissage de la recherche en mathématiques pures ou appliquées.

Ce module est un cours de second niveau, optionnel, dans un des domaines de l'analyse ou des probabilités contemporaines, donné par un spécialiste du sujet, à destination des étudiants autonomes et des chercheurs. Le contenu et l'intervenant pour ce cours changent chaque année

Le programme du cours 2014-2015 est le suivant :

<u>Negative eigenvalues of Schroedinger operators (A. Grygorian).</u>

Consider a Schroedinger operator $-\Delta-V(x)$ in $\mathbf{R}^n$ and denote by $Neg(V)$ the number of its non-positive eigenvalues counted with multiplicity. The course is devoted to estimates of $Neg(V)$. The following results will be discussed.

1. A theorem of Cwikel-Lieb-Rozenblum: if $n\ge3$ then
$$ Neg(V)\le C \int V^{n/2}(x)dx $$
2. Theorems of Grigor'yan-Netrusov-Yau and Grigor'yan-Nadirashvili: if $n=2$ then
$$ Neg(V)\ge c \int V(x)dx $$
3. Results of Grigor'yan-Nadirashvili about upper bounds of Neg(V) in the case $n=2$.

Compétences acquises :