

Une solution *faible* sur  $[0, T)$  est un champ de vecteurs  $u$  tel que pour tout  $t$  avec  $0 < t < T$ ,

$$E[u](t) + 2\nu \int_0^t E[\partial_x u](t') dt' \leq E[u](0),$$

et pour toute fonction  $\psi(t, x)$ , et tout champ de vecteurs  $\varphi(t, x)$  à divergence nulle, de classe  $C^1$  et d'énergie finie ainsi que leurs dérivées,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 u_i(t', x') \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(t', x') dx' dt' = 0 \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 u_i(t', x') \left( \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i(t', x') + \nu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi_i(t', x') \right) dx' dt' \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^3 u_i(t', x') u_j(t', x') \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i(t', x') dx' dt' \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} u_i(t, x') \varphi_i(t, x') dx' - \int_{\mathbb{R}^3} u_i^0(x') \varphi_i(0, x') dx'. \end{aligned}$$

Cette formulation faible est en particulier vérifiée par les solutions classiques, comme on le voit en intégrant par parties les équations après les avoir multipliées par  $\psi$  et les  $\varphi_i$ .

Jean LERAY, en 1934, après avoir introduit la notion de solution faible — il parle de solution *turbulente* —, démontre le théorème d'existence :

*Soit  $u^0$  à divergence nulle et d'énergie finie, alors il existe (au moins) une solution faible sur  $[0, \infty)$ .*

*S'il existe une solution  $v$  régulière sur  $[0, T)$  pour la même donnée initiale  $u^0$ , alors toute solution faible  $u$  coïncide sur  $[0, T)$  avec  $v$ .*

Il obtient une solution faible en montrant que d'une suite  $\tilde{u}_a$  de solutions du problème régularisé, avec  $a$  qui tend vers 0, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un  $u$  qui convient. En effet les  $\tilde{u}_a$  vérifient uniformément l'égalité de dissipation d'énergie, et possèdent donc une propriété de compacité, comparable à l'hypothèse d'équicontinuité dans le théorème d'Arzela-Ascoli. La convergence des  $\tilde{u}_a$  vers  $u$  est assez forte pour passer à la limite dans les intégrales de la formulation faible.

Pour finir, voici deux questions qui sont restées sans réponses à ce jour, posées par Jean LERAY dans l'article *Sur le mouvement plan d'un fluide visqueux emplissant l'espace* [Acta Math. 63 (1934)] :

*[...] j'ai même indiqué une raison qui me fait croire à l'existence de mouvements devenant irréguliers au bout d'un temps fini ; je n'ai malheureusement pas réussi à forger un exemple d'une telle singularité [p. 193]. Il serait important de savoir s'il existe des solutions des équations de Navier qui deviennent irrégulières [p. 224].*

*Je n'ai pu établir de théorème d'unicité affirmant qu'à un état initial donné correspond une solution turbulente unique [p. 244].*