QUASI-CRISTAUX, ÉCHANTILLONNAGE IRRÉGULIER ET THÉORIE DU CONTRÔLE

YVES MEYER

On m'a demandé d'analyser l'œuvre mathématique d'**Enrique Zuazua** (Bilbao) et, presque le même jour, je dus évaluer un programme de recherche proposé par **Nir Lev** (Bar-Ilan, Israël). J'acceptai ces deux corvées. Zuazua est un mathématicien appliqué, travaillant en théorie du contrôle et en mécanique des fluides. Zuazua écrivit sa thèse sous la direction de **Jacques-Louis Lions**. Lev est un mathématicien pur, travaillant en analyse harmonique. Son directeur de thèse fut **Alexander Olevskii**.

Une joyeuse surprise m'attendait.

Il existe une relation surprenante entre l'échantillonnage irrégulier, la répartition modulo 1 et la théorie du contrôle.

Les travaux de **Sergei A. Avdonin** (Control theory, Nonharmonic Fourier series, University of Alaska, Fairbanks) relient ceux de Lev à ceux de Zuazua.

Sergei Avdonin
Department of mathematics
Fairbanks, Alaska
White Mountains and the Yukon river

Citation de Sergei Avdonin:

> *My approach is based on deep and heretofore incompletely exploited connections between* **nonharmonic Fourier series**, **control theory** *for partial differential equations, inverse problems of mathematical physics, and* **signal processing**. *This approach is now recognized by specialists, and I collaborate with many mathematicians, scientists, and engineers all over the world in developing my methods.*

S. Avdonin

Mathematical Congress of the Americas in Guanajuato, Mexico.

1. La discrépance et le théorème de Kesten

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et soit $\alpha \in \mathbb{T}$ un nombre irrationnel, modulo 1. Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{T}$ de longueur $|I| < 1$, on désigne par $\nu(\alpha, n, I)$ le nombre d'entiers $k \in [0, n-1]$ tels que $k\alpha \in I$:

$$\nu(\alpha, n, I) = \#\{k;\ k\alpha \in I,\ 0 \leq k \leq n-1\} \tag{1.1}$$

Les points $k\alpha$, $k \in \mathbb{N}$, sont équirépartis sur le cercle $\mathbb{T}$ et l'on a, pour tout intervalle I,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu(\alpha, n, I)}{n} = |I| \tag{1.2}$$

Une mesure quantitative de cette équidistribution est donnée par la discrépance

$$D(\alpha, n, I) = \nu(\alpha, n, I) - n|I| \tag{1.3}$$

On a $D(\alpha, n, I) = o(n)$, $n \to \infty$, et cette estimation est uniforme en I. Si p_n/q_n sont les réduites du développement en fraction continue de α, on a

$$|D(\alpha, q_n, I)| \leq 2 \tag{1.4}$$

Il en résulte que $D(\sqrt{2}, n, I) = O(\log n)$ et que cette estimation est uniforme en I.

D'autre part, pour tout α, il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait

$$\sup_{I\subset\mathbb{T}} |D(\alpha, n, I)| > c \log n \tag{1.5}$$

pour une infinité de valeurs de n.

Erich Hecke (1887-1947) a démontré que pour certains intervalles particuliers I la discrépance est bornée. Plus précisément, si $|I| \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$, alors $D(\alpha, n, I) = O(1)$ quand $n \to \infty$. Pour le vérifier, on introduit la fonction auxiliaire, **périodique de période 1**, $f(x)$ dont la restriction à $[0, 1[$ est $f(x) = \chi_I(x) - |I|$. Le théorème de Hecke équivaut à

$$|\sum_{0}^{n-1} f(k\alpha)| \leq C \tag{1.6}$$

Pour démontrer (1.6) on introduit l'équation aux différences:

$$g(x + \alpha) - g(x) = f(x) \tag{1.7}$$

où $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ est donnée et $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ est l'inconnue. La preuve du théorème de Hecke découle du lemme suivant

Lemme 1.1. *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) *Il existe $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ telle que*

$$g(x + \alpha) - g(x) = f(x)$$

(b) *Il existe une constante C telle que pour tout n on ait*

$$\| \sum_{0}^{n-1} f(x + k\alpha)\|_\infty \leq C \tag{1.8}$$

L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est triviale et l'on a $C \leq 2\|g\|_\infty$. En effet, le membre de gauche de (1.8) est une série télescopique dont les termes se détruisent deux à deux, sauf le premier et le dernier.

L'implication $(b) \Rightarrow (a)$ ne nous sera pas utile. Le théorème de Hecke est (1.8) avec $x = 0$. Attention!

Retournons à la preuve du théorème de Hecke. Si $I = [0, \alpha)$ et donc $f(x) = \chi_I(x) - \alpha$, la solution de (1.7) est la fonction en dents de scie $g(x)$, périodique de période 1 et égale à $1/2 - x$ sur $[0, 1)$. On a donc

$$|\sum_{0}^{n-1} f(k\alpha)| = |g(n\alpha) - g(0)| \leq 1 \tag{1.9}$$

et $|D(\alpha, n, I)| \leq 1$. Le cas général s'obtient par le même argument.

L'équation aux différences (1.7) a joué un rôle considérable dans les travaux de Michel Herman (1942-2000). Le problème posé (conjecture d'Arnold) était de savoir si tout difféomorphisme Φ du tore qui est C^∞ et dont le nombre de rotation α est irrationnel et n'est pas un nombre de Liouville est C^∞-conjugué à une rotation d'angle α. Le problème linéarisé correspondant est (1.7) et l'analyse fine de la perte de régularité dans la résolution de (1.7) était essentielle dans les travaux de Michel Herman.

La réciproque du théorème de Hecke est vraie (conjecture de Erdös et Szüsz, prouvée par Harry Kesten).

Le résultat suivant, dû à Gady Kozma et Nir Lev, améliore le théorème de Kesten.

Théorème 1.1. *Soit α un nombre irrationnel et E un ensemble borélien dont la frontière est de mesure nulle. Si $D(\alpha, n, E)$, $n \in \mathbb{N}$, appartient à BMO alors $|E| \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$.*

Une suite c_n, $n \in \mathbb{N}$, appartient à BMO si et seulement si la suite *paire* correspondante $x_n = c_{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$, appartient à $BMO(\mathbb{Z})$. Un exemple est $c_n = \log \sqrt{n^2 + 1}$.

Mais il n'existe aucun intervalle I tel que

$$D(\alpha, n, I) = c \log n, \ n \geq 2 \tag{1.10}$$

Sinon il viendrait, grâce au théorème 2.1, $|I| \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ ce qui impliquerait $|D(\alpha, n, I)| \leq C$. En revanche on a $|D(\sqrt{2}, n, I)| \leq c \log n$ uniformément en I.

Voici la généralisation $n-$dimensionnelle. A toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on associe sa périodisée $\tilde{f}$ définie sur le tore $\mathbb{T}^n$ par

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x + k) \tag{1.11}$$

Alors les coefficients de Fourier c_k de $\tilde{f}$ et la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f sont reliés par $c_k = \hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

Un vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est irrationnel si $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Alors le sous-groupe $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

A tout ensemble borélien borné $K \subset \mathbb{R}^n$ on associe (a) la fonction indicatrice χ_K de K puis (b) la fonction $\tilde{\chi}_K$ définie sur le tore $\mathbb{T}^n$ en périodisant χ_K.
Attention! La fonction $\tilde{\chi}_K$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, n'est pas nécessairement une fonction indicatrice. Si K est un domaine fondamental pour le réseau $\mathbb{Z}^n$, alors $\tilde{\chi}_K(x) = 1$ presque partout.

Définition 1. *Soit* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *un vecteur irrationnel. Soit* $K \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble intégrable au sens de Riemann et borné. Posons*

$$f(x) = \tilde{\chi}_K(x) - |K| \tag{1.12}$$

Alors K *est un* **bounded remainder set** *pour* α *s'il existe une constante* $C = C(\alpha, K)$ *telle que l'on ait*

$$\Big|\sum_{l=0}^{m-1} f(x + l\alpha)\Big| \leq C \tag{1.13}$$

pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ *et presque tout* $x \in \mathbb{T}^n$.

Il suffit pour qu'il en soit ainsi que (1.13) soit vérifiée pour un $x_0 \in \mathbb{T}^n$.

Tout domaine fondamental pour le réseau $\mathbb{Z}^n$ possède cette propriété. La classe $\mathcal{K}$ des *bounded remainder* *sets* est *stable par réunion finie disjointe* et elle est *invariante par translation.*

2. Dualité de Fourier

Définition 2. *Une* **base de Riesz** *d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est l'image d'une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ par un isomorphisme, non nécessairement isométrique, $T : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$.*

En dimension finie toute base est une base de Riesz. Une base de Schauder d'un espace de Hilbert n'est pas nécessairement une base de Riesz.

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borélien borné de mesure de Lebesgue positive. Nous supposerons désormais que la frontière de K est de mesure nulle et nous dirons alors que K est intégrable au sens de Riemann. Soit $\mathcal{H} = L^2(K)$ l'espace de Hilbert des fonctions définies sur K et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur K. Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble discret.

Définition 3. *Les ensembles Λ et K sont en dualité de Fourier si les fonctions*

$$\exp(2\pi i\lambda \cdot x),\ \lambda \in \Lambda, \tag{2.1}$$

constituent une **base de Riesz** *de $L^2(K)$. Nous dirons que K est un ensemble de Fourier s'il existe un ensemble de fréquences Λ tel que les fonctions* $\exp(2\pi i\lambda \cdot x)$, $\lambda \in \Lambda$, *forment une base de Riesz de* $L^2(K)$.

C'est le cas si et seulement si toute fonction $f \in L^2(K)$ s'écrit, de façon **unique**,

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \exp(2\pi i \lambda \cdot x) \tag{2.2}$$

avec

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |c(\lambda)|^2 \simeq \|f\|_2^2.$$

Une version équivalente de la définition 2 est l'étude du *cas* **critique** *de l'échantillonnage irrégulier.*

On écrit $F \in PW_K$ si $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et si le support de la transformée de Fourier

$$\widehat{F}(y) = \int \exp(-2\pi i y \cdot x) f(x)\, dx$$

de F est inclus dans K. On définit l'opérateur d'échantillonnage $S: \; PW_K \mapsto l^2(\Lambda)$ par $S(F) = F(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Alors Λ et K sont en dualité de Fourier si et seulement si S est un **isomorphisme** entre PW_K et $l^2(\Lambda)$.

Cela entraîne que la mesure $|K|$ de K soit égale à la densité de Λ mais cette condition (échantillonnage critique de Shannon) n'est évidemment pas suffisante.

Lemme 2.1. *Si Λ et K sont en dualité de Fourier, il existe un $\epsilon > 0$ tel que si*

$$\Lambda' = \{\lambda + \epsilon(\lambda),\ \ \lambda \in \Lambda,\ \ |\epsilon(\lambda)| \leq \epsilon\}$$

alors Λ' et K sont aussi en dualité de Fourier.

Lemme 2.2. *Si Λ et K sont en dualité de Fourier, alors, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda+\tau$ et $K+y$ sont aussi en dualité de Fourier. De même pour toute matrice $n \times n$ inversible A, $A(\Lambda)$ et $(A^*)^{-1}(K)$ sont en dualité de Fourier.*

Pour construire des exemples, on débute avec $K = [0,1]$, $\Lambda = \mathbb{Z}$, (séries de Fourier usuelles) et on applique les lemme 1.1 et 1.2. En fait on utilise des versions améliorées du lemme 1.1, comme le théorème de Kadec. Pour construire d'autres exemples, L. Bezuglaja, V. Katsnelson, A. Kohlenberg, Y. Lyubarskii et K. Seip utilisent le lemme suivant:

Lemme 2.3. *Pour tout ensemble fini $E \subset \mathbb{Z}^n$ de cardinalité q il existe un ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}^n$ de même cardinalité q et un entier N tels que la matrice carrée $(\exp(2\pi i l \cdot k/N))_{k\in E,\, l\in F}$ soit inversible.*

Il en résulte facilement que $\Lambda = N^{-1}F + \mathbb{Z}^n$ et $K = E + [0,1]^n$ sont en dualité de Fourier. Ici Λ dépend de K.

Avant les travaux de Nir Lev on ne savait rien de plus. On ne sait toujours pas si la boule unité de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, est un ensemble de Fourier.

Définition 4. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un réseau. Un domaine fondamental V pour ce réseau est un ensemble borélien tel qu'à des ensembles de mesure nulle près, les translatés $V+\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, constituent une partition de $\mathbb{R}^n$.*

Si V est un domaine fondamental borné, alors il est équidécomposale à $[0,1]^n$ en utilisant des translations par $k \in \mathbb{Z}^n$.

Le réseau dual $\Gamma^* \subset \mathbb{R}^N$ est défini par

$$\Gamma^* = \{y;\ \exp(2\pi i\, y \cdot x) = 1,\ \ \forall x \in \Gamma\}$$

Lemme 2.4. *Soit V un ensemble borélien et Γ un réseau. Les deux propriétés suivantes équivalentes :*

(a) *V est un domaine fondamental pour le réseau Γ*
(b) *Γ^* et V sont en dualité de Fourier.*

Une amélioration spectaculaire du lemme 1.4 a été obtenue par Nir Lev et ses collaborateurs. Ils démontrent la dualité de Fourier si

(a) le réseau Γ^* est remplacé par un **quasi-cristal** (simple et cohérent) Λ
(b) le domaine fondamental V est remplacé par un **ensemble à reste borné** K relativement à Λ
(c) $|K| = \operatorname{dens} \Lambda$.

Ingrédients:

(a) Un théorème de H. Kesten en répartition modulo 1
(b) un théorème de **S. Avdonin**, motivé par la théorie du contrôle.

3. Le cas des séries de Fourier

Soit α un nombre irrationnel et soit $I \subset \mathbb{T}$ un intervalle **semi-ouvert**: $I = [a, b)$ ou $I = (a, b]$ de longueur $|I| < 1$. Définissons $\Lambda(\alpha, I)$ comme l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $k\alpha \in I$. Grâce à la propriété d'équirépartition nous savons que la densité de $\Lambda(\alpha, I)$ est égale à $|I|$. On a alors (Kozma et Lev)

Théorème 3.1. *Supposons d'abord que $|I| \in \alpha\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$. Soient ensuite $J_m \subset \mathbb{T}$, $1 \leq m \leq M$, des intervalles. Supposons que*

(a) *Les intervalles J_m soient deux à deux disjoints*
(b) *La longueur de chaque J_m appartienne à $\alpha\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$*
(c) *La somme des longueurs des intervalles J_m, $1 \leq j \leq M$, soit égale à $|I|$.*

Soit K la réunion des J_m, $1 \leq m \leq M$.

Alors les fonctions $exp(2\pi i\lambda x)$, $\lambda \in \Lambda(\alpha, I)$, forment une base de Riesz de $L^2(K)$.

L'ensemble borélien borné K est un *bounded remainder set* relativement à α et le quasi-cristal $\Lambda(\alpha, I)$ est simple et cohérent (défini plus loin). La conclusion deviendrait fausse si l'on remplaçait $I = [-\alpha, 0)$ par $I = (-\alpha, 0)$ ou par $I = [-\alpha, 0]$. Chaque point compte dans la définition de $\Lambda(\alpha, I)$. Nous verrons que la condition $|I| \in \alpha\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ est nécessaire. Voici une illustration. Pour tout nombre réel x la partie entière de x, notée $[x]$ est le plus grand entier $k \leq x$. Soit $\beta > 1$ un nombre irrationnel et soit Λ_β l'ensemble de tous les $\lambda = [k\beta]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Alors le théorème 3.1 s'applique avec $\alpha = 1/\beta$ et $I = (-\alpha, 0]$. Si $\beta > 4$, le théorème 1/4 de Kadec aurait permis de conclure pour $K = [0, \alpha]$. Mais le théorème de Kadec ne fonctionne plus si K n'est pas un intervalle.

La preuve du théorème 3.1 utilise une version améliorée de la remarque suivante. Soit α un nombre irrationnel et soit $K \subset \mathbb{T}$ un intervalle semi-ouvert de longueur $|K| < 1$. Définissons $\Lambda(\alpha, K)$ comme l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $k\alpha \in K$ et écrivons $\Lambda(\alpha, K)$ comme une suite croissante $\{\lambda_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$. Alors on a

Lemme 3.1. *Il existe une constante C telle que*

$$|\lambda_j - \frac{j}{|K|}| \leq C, \quad j \in \mathbb{Z},$$

si et seulement si $|K| \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$.

4. Généralisation

Voici deux théorèmes découverts par Grepstad et Lev [4] :

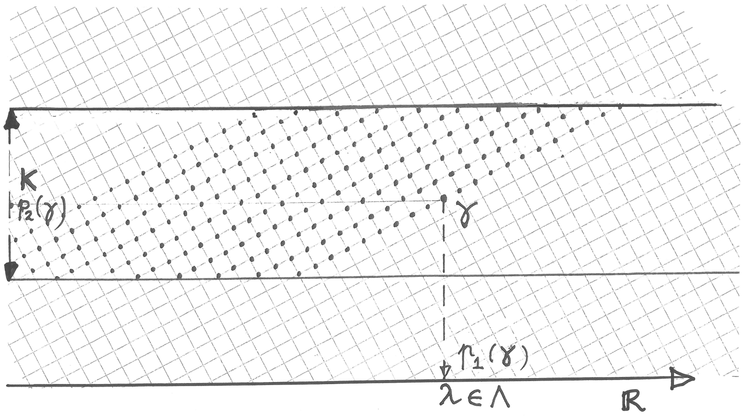
Théorème 4.1. *Soit* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *un quasi-cristal simple défini par une fenêtre* $I = [a, b)$ *telle que* $b - a = |I| \notin p_2(\Gamma)$. *Alors il n'existe aucun ensemble borné intégrable au sens de Riemann* K *tel que les fonctions* $\exp(2\pi i\lambda \cdot x)$, $\lambda \in \Lambda$, *constituent une base de Riesz de* $L^2(K)$.

Voici maintenant un résultat positif, énoncé dans un cas particulier. Pour tout nombre réel x, on désigne par $[x] \in \mathbb{Z}$ la partie entière de x et par $\{x\} \in [0, 1)$ sa partie décimale. On suppose que les nombres $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et qu'il en est de même pour $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 1+\alpha \cdot \beta$. On désigne alors par $\Lambda(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des $\lambda = m+\beta\{\alpha\cdot m\}$; $m \in \mathbb{Z}^n$. L'ensemble ainsi défini est un quasi-cristal dont la fenêtre est $[0, 1)$. Avec ces notations on a

Théorème 4.2. *Soit* K *un ensemble intégrable au sens de Riemann vérifiant les deux conditions suivantes:* $|K| = 1$ *et* K *est un* bounded remainder set *pour le vecteur* α. *Alors les fonctions* $\exp(2\pi i\lambda\cdot x)$, $\lambda \in \Lambda(\alpha, \beta)$, *constituent une base de Riesz de* $L^2(K)$

Si $\beta = 0$, ce théorème est faux. Ce n'est donc pas un résultat que l'on puisse obtenir par perturbation à partir du cas où $\Lambda = \mathbb{Z}^n$. En effet, si $\beta = 0$ et si les fonctions $\exp(2\pi i\lambda\cdot x)$, $\lambda \in \Lambda(\alpha, \beta)$, constituent une base de Riesz de $L^2(K)$, K est nécessairement un domaine fondamental pour le réseau Λ. Ce n'est pas le cas, en général, pour les ensembles K du théorème 4.2.

Plus généralement soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ un quasi-cristal simple défini par une fenêtre $I = [a, b)$. Ce quasi-cristal Λ est dit cohérent si $|I| \in p_2(\Gamma)$. C'est le cas de l'ensemble Λ du théorème 4.2. La définition des quasi-cristaux simples sera donnée dans un instant. Le théorème 4.2 se généralise alors à cette situation à condition (a) que Λ soit défini par une présentation canonique qui sera explicitée dans un instant et que (b) α soit défini.



Cut and projection

Γ is a lattice, $\gamma \in \Gamma$

$\gamma = (p_1(\gamma), p_2(\gamma))$

$p_1 : \Gamma \to p_1(\Gamma)$ is one-to-one

$p_2(\Gamma)$ is dense in $\mathbb{R}$

$\Lambda = \{ p_1(\gamma) \,;\, \gamma \in \Gamma,\ p_2(\gamma) \in K \}$.

4.1. **Les quasi-cristaux simples.** Dans cet exposé les quasi-cristaux $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ seront définis par le schéma "cut and projection" [14]. Soit $m \in \mathbb{N}, N = n + m$, $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^N$. Pour $(x, y) = X \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, on note $x = p_1(X)$ et $y = p_2(X)$. Le réseau dual $\Gamma^* \subset \mathbb{R}^N$ est défini par $\exp(2\pi i\, y \cdot x) = 1$ pour tout $x \in \Gamma$ et tout $y \in \Gamma^*$. Alors $p_1^* : \Gamma^* \mapsto \mathbb{R}^n$ et $p_2^* : \Gamma^* \mapsto \mathbb{R}^m$ sont définis comme p_1, p_2. Supposons que $p_1 : \Gamma \to p_1(\Gamma)$ soit biunivoque et que $p_1(\Gamma)$ soit un sous-groupe dense de $\mathbb{R}^n$. Nous imposons les mêmes propriétés à p_2. Il en découle que $p_1^* : \Gamma^* \to p_1^*(\Gamma^*)$ est biunivoque et que $p_1^*(\Gamma^*)$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}^n$ et de même pour p_2^*.

Définition 5. *Soit $W \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble borélien intégrable au sens de Riemann de mesure positive. Alors le quasi-cristal $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ défini par Γ et W est*

$$\Lambda = \{\lambda = p_1(\gamma);\ \gamma \in \Gamma,\ p_2(\gamma) \in W\} \tag{4.1}$$

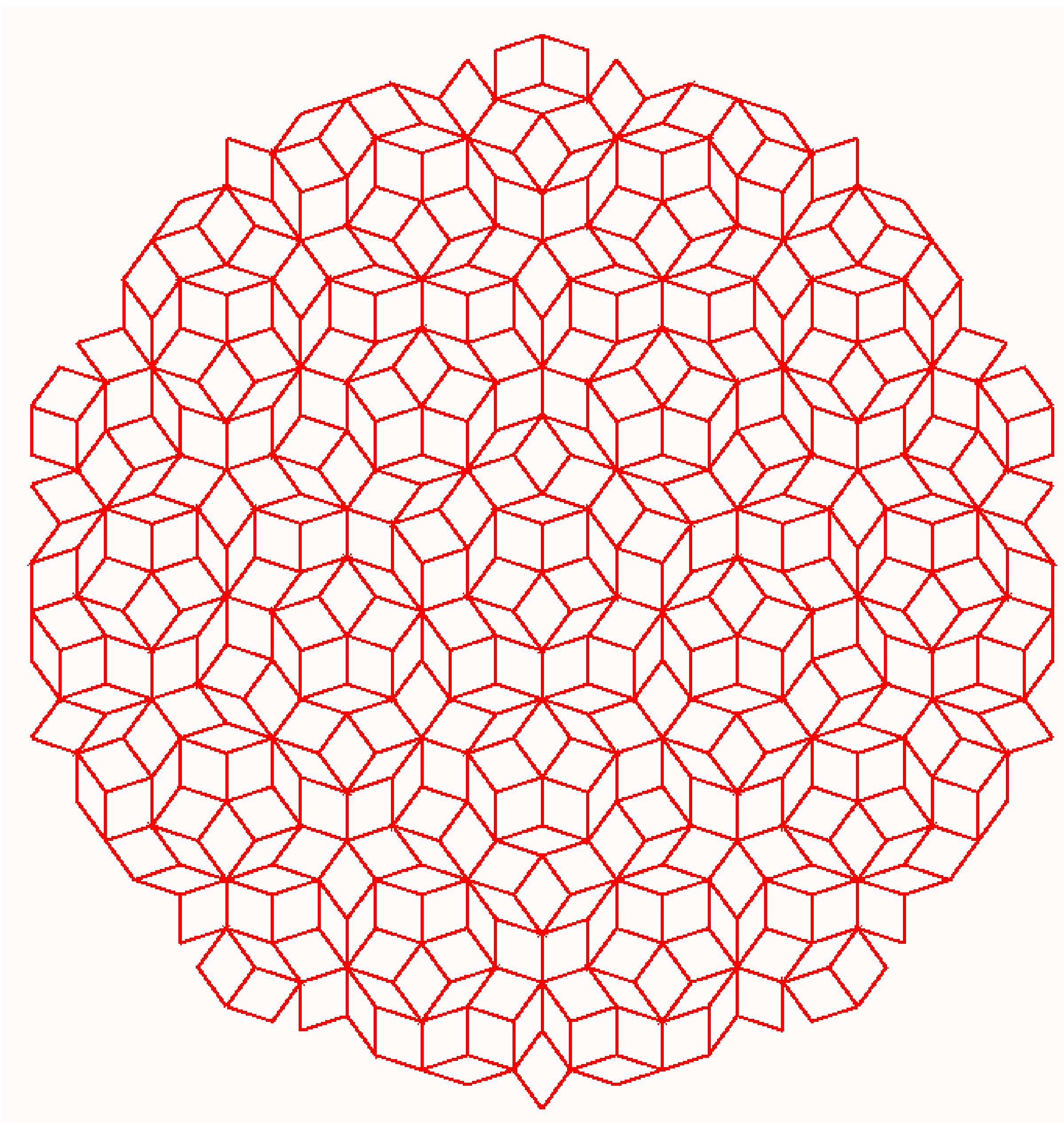
L'ensemble borélien W est la *fenêtre* du quasi-cristal Λ.

Définition 6. *Un quasi-cristal est simple si $m = 1$ et si $W = [a, b)$ ou $W = (a, b]$ est un intervalle semi-ouvert.*

La définition de α dans la généralisation théorème 4.2 dépendra des paramètres qui interviennent dans la définition du quasi-cristal.

Après un changement de repère, on peut supposer que le réseau Γ est donné par la recette suivante.

On a $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$ si et seulement si $\gamma_1 = m + \beta(\alpha \cdot m - l)$, $\gamma_2 = l - \alpha \cdot m$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}^n$, $l \in \mathbb{Z}$. Ici $x \cdot y$ est le produit scalaire entre x et y. En outre la définition des ensembles modèles implique que les nombres $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 1 + \alpha \cdot \beta$ sont aussi linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.



4.2. **Le lemme de dualité.** Grepstad et Lev utilisent deux ingrédients pour démontrer le théorème 4.1. Le premier est un *lemme de dualité* entre la propriété d'interpolation stable et la propriété d'échantillonnage stable. L'origine de cette observation se trouve dans [10]. En reprenant les notations de l'introduction, Λ est un ensemble d'échantillonnage stable si l'opérateur d'échantillonnage $S : PW_K \mapsto l^2(\Lambda)$ est inversible à gauche ($TS = I$). De même Λ est un ensemble d'interpolation stable si cet opérateur est inversible à droite ($SL = I$).

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un réseau, tout comme dans la définition 4, $W = I$ un intervalle et soit $\Lambda(\Gamma, I) \subset \mathbb{R}^n$ le quasi-cristal simple défini par (4.1). Le quasi-cristal dual $\Lambda^*(\Gamma^*, K) \subset \mathbb{R}$ est défini par

(4.2)
$$\Lambda^*(\Gamma^*, K) = \{\lambda^* = p_2^*(\gamma^*);\ \gamma^* \in \Gamma^*,\ p_1^*(\gamma^*) \in K\}$$

Lemme 4.1. *Supposons que $\partial K \cap p_1(\Gamma^*) = \emptyset$. Alors $\Lambda(\Gamma, I)$ est un ensemble d'échantillonnage stable pour PW_K si et seulement si $\Lambda^*(\Gamma^*, K)$ est un ensemble d'interpolation stable pour PW_I. De façon semblable $\Lambda(\Gamma, I)$ est un ensemble d'interpolation stable pour PW_K si et seulement si $\Lambda^*(\Gamma^*, K)$ est un ensemble d'échantillonnage stable pour PW_I.*

4.3. **Le théorème de Pavlov.** Le second ingrédient de la preuve du théorème 4.1 est le théorème de Pavlov dont voici l'énoncé.

Pour un ensemble discret de points $\Lambda* \subset \mathbb{R}$ nous désignons par $n_{\Lambda^*}(x)$ la fonction de comptage définie par

$$n_{\Lambda^*}(b) - n_\Lambda(a) = \#(\Lambda^* \cap [a, b)),\ a < b,$$

qui est définie modulo une constante additive. On utilisera la version suivante du théorème de Hruščev, Nikolskii et Pavlov.

Théorème 4.3. *Soit $\tau > 0$. Si les fonctions*

$$\exp(2\pi i\lambda x),\ \lambda \in \Lambda^*,$$

constituent une base de Riesz de $L^2[0, \tau]$, alors $f(x) = n_{\Lambda^*}(x) - \tau x$ est une fonction de $BMO(\mathbb{R})$.

Pour démontrer le théorème 4.1 il suffit de relier la propriété $n_{\Lambda^*}(x) - \tau x \in BMO(\mathbb{R})$ à une condition de même type sur la discrépance $D(\alpha, n, S)$ et d'utiliser l'analogue $n-$dimensionnel du théorème 1.1. On obtient alors $|S| \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$. Mais le théorème de H.J. Landau donne $|I| = |S|$ ce qui termine la démonstration.

4.4. **Le théorème de S.A. Avdonin.** Le lemme de dualité est aussi employé pour ramener la preuve du théorème 4.2 au cas unidimensionnel. Alors Grepstad et Lev utilisent un théorème de S.A. Avdonin qui est une amélioration spectaculaire du théorème 1/4 de Kadec. Voici ce dont il s'agit :

Théorème 4.4. *Soit α une constante positive et λ_j, $j \in \mathbb{Z}$, une suite de nombres réels vérifiant les conditions (a), (b) et (c)*

(a) $|\lambda_j - \lambda_k| \geq \alpha > 0,\ j \neq k$

(b) $\sup_{j\in\mathbb{Z}} |\lambda_j - j| \leq C$

(c) *Il existe une constante γ et un entier N tel que*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \Big| \frac{1}{N} \sum_{j=k}^{k+N-1} \big(\lambda_j - j - \gamma\big) \Big| = \theta < \frac{1}{4} \tag{4.3}$$

Alors le système $\exp(2\pi i\, x\lambda_j)$, $j \in \mathbb{Z}$, *est base de Riesz de* $L^2[0,1]$.

Par exemple $\lambda_j = j + \frac{1}{3}\sin(2\pi\omega j)$ remplit ces conditions si ω est irrationnel. Le théorème de Beurling suffisait pour démontrer les résultats sur l'échantillonnage irrégulier que j'avais obtenus avec B. Matei tandis que les résultats spectaculaires de Grepstad et Lev nécessitent le théorème d'Avdonin. Il est intéressant d'observer que la valeur précise 1/4 dans le théorème d'Avdonin ne joue aucun rôle dans la preuve et pourrait être remplacé par n'importe quelle constante positive.

5. Problèmes ouverts

Le premier problème est d'étendre les théorèmes 4.1 et 4.2 à des quasi-cristaux généraux.

Le second est d'étendre ces théorèmes à $L^p(K)$, $1 < p \leq \infty$. Le théorème 4.2 est-il encore vrai dans ce contexte ? La preuve du lemme 2.1 qui est essentiel à la preuve du théorème 4.2 ne se généralise pas à L^p.

En dimension 1, soit I un intervalle et$PW_I \subset L^\infty(\mathbb{R})$ le sous espace de L^∞ composé des fonctions dont la transformée de Fourier est portée par I. Beurling découvrit des condition nécessaires et suffisante aux propriétés d'échantillonnage stable et d'interpolation stable en norme L^∞.

Lemme 5.1. *Soit I un intervalle et soit Λ un ensemble uniformément discret. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $f \in PW_I \Rightarrow \|f\|_\infty \leq C\sup_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|$
(b) $\underline{\mathrm{dens}}\,\Lambda > |I|$

Beurling démontra aussi le résultat suivant :

Lemme 5.2. *Soit I un intervalle et Λ un ensemble u.d. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *Pour toute suite $c(\lambda) \in l^\infty(\Lambda)$ il existe une fonction $f \in PW_I \cap L^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$f(\lambda) = c(\lambda),\ \lambda \in \Lambda$$

(b) $\overline{\mathrm{dens}}\,\Lambda < |I|$

Théorème 5.1. *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ un quasi-cristal simple et $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) *Toute fonction continue f sur K est la restriction à K d'une fonction presque-périodique $F(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\exp(2\pi i\lambda\cdot x)$ dont les fréquences appartiennent à Λ*
(b) $|K| < \mathrm{dens}\,\Lambda$.

Ce résultat doit être complété par le suivant.

Théorème 5.2. *De même les deux propriétés suivantes d'un ensemble compact K, intégrable au sens de Riemann, sont équivalentes*

(c) *Il existe une constante C telle que*

$$\|F\|_\infty \leq C \sup_{x \in K} |F(x)|$$

pour toute somme trigonométrique finie $F(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \exp(2\pi i \lambda \cdot x)$ dont les fréquences appartiennent à Λ

(d) $|K| > \operatorname{dens} \Lambda$.

La propriété (a) doit être comparée à l'échantillonnage stable et est impliquée par $|K| < \operatorname{dens} \Lambda$ comme dans le cas L^2. La propriété (c) rejoint l'interpolation stable et est impliquée par $|K| > \operatorname{dens} \Lambda$ comme dans le cas L^2. En revanche si $|K| = \operatorname{dens} \Lambda$, K n'est jamais un ensemble d'échantillonnage stable ou d'interpolation stable au sens de (a) et (c). La preuve du théorème 5.1 dans [17] est basée sur une variante du lemme 4.1 et sur le théorème de Beurling.

6. La théorie de Landau

Le spectre $\sigma(f)$ de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est le support de sa transformée de Fourier $\hat{f}$. Ici la transformée de Fourier est normalisée par la convention que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i\, x \cdot \xi) f(x)\, dx \tag{4.4}$$

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borélien. L'espace de Paley Wiener PW_K est défini par

$$PW_K = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n);\ \ \sigma(f) \subset K\} \tag{4.5}$$

Si K est compact, toute fonction $f \in PW_K$ est bandlimited, ce qui permet de l'échantillonner efficacement. Définissons cet échantillonnage. Un ensemble de points $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est uniformément discret (u.d.) s'il existe un $\gamma > 0$ tel que

$$\lambda, \lambda' \in \Lambda,\ \ \lambda \neq \lambda' \Rightarrow |\lambda - \lambda'| \geq \gamma > 0 \tag{4.6}$$

Si $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est uniformément discret et si K est compact, toute fonction $f \in PW_K$ est régulière et peut donc être échantillonnée sur Λ. L'opérateur $S\ :\ PW_K \mapsto l^2(\Lambda)$ défini par $S(f) = (f(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ est continu. Est-il inversible à gauche ? Un inverse à gauche est un opérateur continu $T\ :\ l^2(\Lambda) \mapsto PW_K$ tel que $TS = \mathrm{I}$ on PW_K. Si c'est le cas toute $f \in PW_K$ peut être reconstruite à partir de son échantillonnage $(f(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$. Le théorème de Nyquist-Shannon répond à cette question quand $n = 1$, $K = [-\omega, \omega]$, et $\Lambda = h\mathbb{Z}$. Alors S est inversible à gauche si et seulement si $0 < h \leq 1/2\omega$: la densité de Λ ne peut être inférieure à la mesure de K.

En toute généralité H. J. Landau démontra que S n'a pas d'inverse à gauche quand $\operatorname{dens}\Lambda < |K|$ [7].

Définition 7. *Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Un ensemble de points $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble d'échantillonnage stable pour PW_K si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite*

(a) *L'opérateur* $S : PW_K \mapsto l^2(\Lambda)$ *a un inverse à gauche*

(b) *Il existe une constante* C *telle que*

$$f \in PW_K \Rightarrow \|f\|_2^2 \leq C \sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2 \tag{4.7}$$

(c) *toute* $F \in L^2(K)$ *est la somme d'une série de Fourier généralisée*

$$F(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda) \exp(2\pi i\, \lambda \cdot x) \tag{4.8}$$

où

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |c(\lambda)|^2 \leq C \int_K |F(x)|^2\, dx \tag{4.9}$$

et où (4.8) converge vers F *dans* $L^2(K)$.

Si Λ est un ensemble d'échantillonnage stable pour PW_K, toute fonction "band-limited" $f \in PW_K$ peut être reconstruite à partir de son échantillonnage $f(\lambda),\ \lambda \in \Lambda$, et cette reconstruction peut s'effectuer par un algorithme linéaire. Cette remarque résulte des propriétés des "frames". Finalement l'opérateur d'échantillonnage $S : PW_K \mapsto l^2(\Lambda)$ est inversible à gauche.

Nous considérons maintenant la propriété d'interpolation stable [7].

Définition 8. *Soit* K *une partie compacte de* $\mathbb{R}^n$. *Alors* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *est un ensemble d'interpolation stable pour* PW_K *s'il existe une constante* C *telle que pour toute suite de carré sommable* $c(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, *on ait*

$$(4.10)\quad \sum_{\lambda\in\Lambda} |c(\lambda)|^2 \le C \int_K |\sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\exp(2\pi i\, x\cdot\lambda)|^2\, dx$$

References

[1] S.A. Avdonin, *On the question of Riesz bases of exponential functions in L^2*, Vestnik Leningrad. Univ. 13 (1974), 5-12 (Russian). English translation in Vestnik Leningrad Univ. Math. 7 (1979), 203-211.

[2] S.A. Avdonin and S.A. Ivanov, *Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*, Cambridge University Press (1995).

[3] A. Beurling, *Balayage of Fourier-Stieltjes transforms*, in the Collected Works of Arne Beurling, vol. 2, Harmonic Analysis. Birkhäuser, Boston, 1989.

[4] S. Grepstad and N. Lev, *Universal sampling, quasicrystals and bounded remainder sets.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris (to appear).

[5] S. Grepstad and N. Lev, *Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation*, preprint (2014), arXiv:1404.0165.

[6] G. Kozma and N. Lev, *Exponential Riesz bases, discrepancy of irrational rotations and BMO*, J. Fourier Anal. Appl. 17 (2011), 879-898.

[7] H. J. Landau, Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions, Acta Math. 117 (1967), 37-52.

[8] N. Lev, *Riesz bases of exponentials on multiband spectra*, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 3127-3132.

[9] J-L. Lions, *Sur le contrôle ponctuel de systèmes hyperboliques ou de type Petrowski*, Séminaire Equations aux dérivées partielles (Polytechnique), (1983-1984), exp. no. 20, 1-20.

[10] B. Matei and Y. Meyer, *Quasicrystals are sets of stable sampling*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346 (2008), 1235-1238.

[11] B. Matei and Y. Meyer, *Simple quasicrystals are sets of stable sampling*, Complex Var. Elliptic Equ. 55 (2010), 947-964.

[12] B. Matei and Y. Meyer, *A variant of compressed sensing*, Revista Matemática Iberoamericana 25 (2009), no. 2, 669-692.

[13] Y. Meyer, *Quasicrystals, Diophantine Approximation and Algebraic Numbers*, Beyond Quasicrystals, F. Axel, D. Gratias (eds.) Les Editions de Physique, Springer (1995) 3-16.

[14] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic analysis*, North-Holland, (1972).

[15] Y. Meyer, *Quasicrystals, almost periodic patterns, mean-periodic functions and irregular sampling*, African Diaspora Journal of Mathematics, Volume 13, Number 1, (2012) 145, Special Issue.

[16] Y. Meyer, *Addendum to "Quasicrystals, almost periodic patterns, mean periodic functions and irregular sampling"*, African Diaspora Journal of Mathematics, to appear.

[17] Y. Meyer, *Séries trigonométriques spéciales et corps quadratiques*, Studia Mathematica, 44, (1972) 321-333.

[18] A. Olevskii and A. Ulanovskii, *A universal sampling of band-limited signals*, C.R.Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006) 927-931.

Yves Meyer
CMLA, ENS-Cachan,
94235 Cachan Cedex

yves.meyer@cmla.ens-cachan.fr