Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2017-2018
Agrégation externe de Mathématiques

ANALYSE COMPLEXE

1 Quelques calculs d'intégrales.

1. *Exercice classique pour s'entraîner.*

   Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \pi \quad , \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta} = \pi\sqrt{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^5-1}\, dx = \frac{4\pi}{5}\, \sin\frac{2\pi}{5}.$$

2. *Intégrales de Fresnel.*

   (a) Montrer que :

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx \quad , \quad J = \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx.$$

   sont convergentes.

   (b) Montrer que $I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
   Indication : on pourra utiliser le domaine $K_R = \{\ z \in \mathbb{C}\ ,\ \mid z \mid \leq R,\ Arg\ z \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$.

2 Autour de la transformée de Fourier.

3. *Transformée de Fourier de la Gaussienne.*

   On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{-ix\xi}\ dx \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(a) Vérifier que la fonction $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) A l'aide du théorème des résidus, calculer la transformée de Fourier de f.

Indication : on pourra intégrer la fonction $f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$ le long d'un rectangle du plan complexe judicieusement choisi.

4. *Un autre exemple.*

   (a) Vérifier que $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   (b) A l'aide du théorème des résidus, montrer que :
   $$\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}.$$

   (c) Cette transformée de Fourier est continue, paire et tend vers 0 à l'infini. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

5. *Principe d'incertitude de Heisenberg (version faible).*

   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose que f est à support compact. Montrer que $\hat{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

   (b) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et $\hat{f}$ soient à support compact.

3 Autour de la fonction Gamma.

6. *La formule des compléments.*

   (a) *Préambule : développement de $\pi \cot \pi z$*

   Soit $f(z) = \pi \; cot \; \pi z - \dfrac{1}{z} - \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\dfrac{1}{z+n} - \dfrac{1}{n} \right) \quad , \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$.

   i. Montrer que la fonction f ainsi définie se prolonge en une fonction, encore notée f, holomorphe dans $\mathbb{C}$.

   ii. Montrer que :
   $$f'(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

   iii. Montrer que :
   $$4f'(z) = f'(\frac{z}{2}) + f'(\frac{z+1}{2})$$

   iv. En déduire que si $M = \sup_{|z| \leq 2} | f'(z) |$, alors $M = 0$.

   v. Conclusion ?

(b) *Factorisation de* $\sin(\pi z)$.

i. En utilisant le théorème de factorisation de Weierstrass, montrer qu'il existe une fonction entière $g(z)$ telle que :

$$\sin\ \pi z \ = \ z\ e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

ii. En déduire que pour $z \notin \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

puis que :

$$\sin\ \pi z \ = \ \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

(c) *La formule des compléments*

i. A l'aide des factorisations de $\Gamma(z)$ et $\sin \pi z$, montrer que :

$$\forall z \notin \mathbb{Z},\ \Gamma(z)\ \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

ii. Retrouver le fait que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

iii. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\ \Gamma(it)\ | = \sqrt{\frac{\pi}{t \sinh\ \pi t}}\ (t \neq 0)\quad ,\quad |\ \Gamma(\frac{1}{2} + it)\ | = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh\ \pi t}}\ .$$

4 Autour de la fonction zéta.

7. *Fonction zéta de Riemann - Formule d'Euler.*

(a) Montrer que $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ est holomorphe dans le demi-plan $\Re e\ z > 1$.

(b) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que, si $\Re e\ z > 1$,

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}.$$

8. *Fonction zéta de Riemann aux entiers pairs.*

   (a) Vérifier que pour $\mid z \mid< \pi$,

   $$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} .$$

   (b) En déduire (en le justifiant soigneusement) que pour $\mid z \mid< \pi$,

   $$z \cot z = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) \frac{z^{2k}}{\pi^{2k}} .$$

   (c) On définit les nombres de Bernouilli B_n par la relation suivante :

   $$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_n}{(2n)!} z^{2n} .$$

   Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? Calculer B_1, B_2, B_3 et montrer que pour $\mid z \mid< \pi$,

   $$z \cot z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \, 2^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} .$$

   (Indication : on pourra commencer par vérifier que $\dfrac{z}{e^z - 1} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{z}{2} \coth(\dfrac{z}{2})$).

   (d) Déduire de ce qui précède que pour $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$\zeta(2k) = 2^{2k-1} B_k \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} .$$

5 La formule de Jensen.

9. *Intégrale de Poisson I : épreuve analyse agrégation externe 2009.*

   On définit pour $r \in [0, +\infty[$,

   $$F(r) = \int_0^{\pi} \ln \left(1 - 2r \cos t + r^2\right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(\mid 1 - re^{it} \mid) \, dt.$$

   (a) Montrer que $F(r)$ est bien définie.

   (b) Montrer que :

   $$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2r \cos(\frac{k\pi}{n}) + r^2\right) = (r^{2n} - 1) \frac{r-1}{r+1}.$$

(c) Montrer que $F(r) = 0$ si $r \in [0, 1[$ et que $F(r) = 2\pi \ln r$ si $r > 1$.

(d) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$, et en déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \mid 1 - e^{it} \mid \ dt = 0.$$

(e) Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $r \in]0, +\infty[$ tels que $\mid a \mid \leq r$. Vérifier que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \mid a - re^{it} \mid \ dt = 2\pi \ln r.$$

10. *Intégrale de Poisson II.*

Dans cet exercice, nous allons refaire le calcul de $F(r)$ pour $r \neq 1$ mais en utilisant la théorie des fonctions holomorphes.

(a) *Préambule.*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ étoilé par rapport à l'un de ses points a, (i.e pour tout $z \in U$, le segment de droite joignant a à z est contenu dans U), et soit f une fonction holomorphe sur U.

i. Montrer que f admet une primitive holomorphe sur U.

ii. On suppose que f ne s'annule pas sur U. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe g sur U telle que $f = e^g$.

(b) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\overline{D(0, r)} \subset U$, et soit f holomorphe sur U ne s'annulant pas sur $\overline{D(0, r)}$.

i. Montrer que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(\mid f(re^{i\theta}) \mid) \ d\theta = \ln(\mid f(0) \mid).$$

ii. En déduire la valeur de $F(r)$ pour $r \neq 1$.

11. *Epreuve analyse agrégation externe 2009.*

Soit f une fonction holomorphe sur $D(0, R)$ telle que $f(0) \neq 0$. On fixe $r < R$. On rappelle (théorème des zéros isolés) que f n'a qu'un nombre fini de zéros comptés avec multiplicités dans $\overline{D(0, r)}$. On note $a_1, \cdots, a_p$ ces zéros.

Démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(\mid f(re^{it}) \mid) \ dt = \ln(\mid f(0) \mid) + \sum_{i=1}^{p} \ln\left(\frac{r}{\mid a_i \mid}\right).$$

12. *Une jolie application.*

Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe $a, b, \alpha > 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \ , \ \mid f(z) \mid \leq a \ e^{b|z|^\alpha}.$$

On suppose de plus que f s'annule sur $\mathbb{Z}$.

(a) Donner un exemple de fonction f non identiquement nulle lorsque $\alpha = 1$.

(b) On suppose maintenant que $\alpha < 1$ et que f n'est pas identiquement nulle.

i. Démontrer qu'il existe un entier $k \geq 1$ telle que la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{z^k}$ ne s'annule pas en $z = 0$.

ii. Pour $r > 0$, on note $N(r)$ le nombre de zéros de g appartenant $\overline{D(0,r)}$ et soit $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} \mid g(z) \mid$. Montrer que :

$$N(r) \geq 2r - 1 \quad , \quad M(r) \leq a \ e^{br^\alpha} \ r^{-k}.$$

iii. En appliquant la formule de Jensen à la fonction g sur le disque $\overline{D}(0, 2r)$, montrer que l'on aboutit à une contradiction.