Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2017-2018
Agrégation Externe de Mathématiques

Analyse réelle

1 Suites réelles.

1.1 Exercices élémentaires.

1. *Suites arithmétiques-géométriques.*

   (a) Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

   (b) Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 \leq v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   i. Montrer que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   ii. Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   iii. Montrer que (u_n) est croissante.
   iv. Montrer que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\,(v_n - u_n)$.
   v. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   vi. Que peut-on en déduire ?

2. *La constante d'Euler.*

   On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par :

   $$u_n \; = \; 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n.$$

   (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (b) Tracer le graphe de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ et utiliser une intégrale pour montrer que :

   $$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1).$$

(c) En déduire que la suite (u_n) est positive.

(d) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite positive, notée γ et appelée constante d'Euler.

(e) On considère la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$v_n \;=\; \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}.$$

Déduire de la question d) que cette suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

(f) En utilisant la théorie de l'intégrale de Riemann, retrouver directement le résultat de la question précédente.

3. Soit (x_n) une suite bornée de nombres réels tels que :

$$e^{ix_n} \to 1 \;,\; e^{i\sqrt{2}x_n} \to 1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Montrer que $x_n \to 0$.

Commentaire : que peut-on dire d'une suite appartenant à un compact et qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence ?

1.2 Autour de l'algorithme de Babylone.

4. *Préambule.*

On considère la suite (x_n) définie par récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\;(x_n + \frac{2}{x_n})\;,\; x_0 = 1.$$

(a) Vérifier que $\forall n \geq 0$, $x_n \in [1, 2] \cap \mathbb{Q}$.

(b) Montrer que la suite (x_n) est monotone à partir de $n = 1$ et qu'elle converge vers $\sqrt{2}$.

(c) En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

(d) Retrouver que la suite (x_n) est convergente dans $\mathbb{R}$ en montrant directement qu'elle est de Cauchy.

5. *La méthode de Newton sur un exemple.*

On considère la fonction $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$. On cherche à construire une suite (x_n) qui converge vers l'unique solution positive de l'équation $f(x) = 0$, à savoir $\sqrt{2}$. On définit une nouvelle fonction $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(a) Vérifier que $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $g'(\sqrt{2}) = 0$.

(b) Montrer qu'il existe un voisinage fermé V de $\sqrt{2}$ tel que $g(V) \subset V$ et tel que g soit contactante sur V.

(c) En déduire que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $x_0 \in V$ converge vers l'unique point fixe de g dans V.

6. *Ordre de la méthode de Newton.*

Nous allons maintenant préciser comment la suite (x_n) tend vers $\sqrt{2}$.

(a) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $\sqrt{2}$ de la fonction g de l'exercice précédent.

(b) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{(x_n - \sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\, g''(\sqrt{2}).$$

(c) Quel est l'ordre de la méthode de Newton et que peut-on en déduire ?

(d) Sur cet exemple précis, on peut faire des calculs explicites. Montrer que :

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}}\right)^2$$

(e) En déduire que, lorsque $n \to +\infty$,

$$x_n - \sqrt{2} \sim 2\sqrt{2}\left(\frac{x_0 - \sqrt{2}}{x_0 + \sqrt{2}}\right)^{2^n}.$$

1.3 Asymptotiques de suites.

7. *Asymptotique d'une suite récurrente.*

On considère la suite récurrente : $x_{n+1} = \sin x_n$, $x_0 = 1$.

(a) Déterminer la limite de cette suite.

(b) Déterminer $\gamma > 0$ tel que $\dfrac{1}{x_{n+1}^\gamma} - \dfrac{1}{x_n^\gamma}$ converge vers limite finie non nulle.

(c) En déduire un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

(d) Même question avec la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $x_0 = 1$.

1.4 Autour de la densité.

8. Le but de l'exercice est d'étudier la suite $(\cos\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) La suite $(\cos\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $n_k = E\left((2k\pi)^2\right)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \cos(\sqrt{n_k}) = 1$.
   (c) En déduire la limite supérieure de $(\cos\sqrt{n})$.
   (d) En procédant de la même façon, déterminer la limite inférieure de $(\cos\sqrt{n})$ et montrer que la suite $(\cos(\sqrt{n}))_{n\geq 0}$ est dense dans $[-1,1]$.

9. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que, lorsque $x \to +\infty$,
$$f(x) \to +\infty \quad , \quad f'(x) \downarrow 0.$$
   (a) Montrer que la suite $(\cos(f(n))_{n\geq 0}$ est dense dans $[-1,1]$.
   (b) En particulier, retrouver que la suite $(\cos(\sqrt{n}))_{n\geq 0}$ est dense dans $[-1,1]$.

10. *Sous-groupes de* $(\mathbb{R},+)$*.*
   Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à zéro. On pose :
$$G^+ \ = \ \{\ x \in G\ ;\ x > 0\}.$$
   (a) Montrer que $m = Inf\ G^+$ existe dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que si $m > 0$, alors $m \in G^+$. En déduire que $G = m\mathbb{Z}$.
   (c) Soit α un irrationnel. Montrer que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

11. *Applications de la classification des sous-groupes additifs de* $\mathbb{R}$*.*
   (a) Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) Soit α un nombre irrationnel. Montrer que la suite $(< n\alpha >)$ est dense dans $[0,1]$ où $< x >= x - E(x)$ désigne la partie fractionnaire de x.
   (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que f est 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique. Montrer que f est une application constante.
   (d) Donner une autre preuve du résultat précédent en utilisant la théorie des séries de Fourier.

12. *Equirépartition modulo* 1.

Partie 1.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. On suppose que cette suite vérifie la propriété suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k x_n} \ = \ 0.$$

(a) Soit α un irrationnel. Montrer que la suite $(n\alpha)_{n\geq 1}$ vérifie la propriété précédente.

(b) Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$, $1-$périodique telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = 0$. Montrer que :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \ = \ 0.$$

Indication : on pourra utiliser le théorème de Féjer.

(c) En déduire que pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, $1-$périodique,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \ = \ \int_0^1 f(t)\ dt.$$

(d) Montrer que la propriété (2) est encore vraie pour les fonctions en escalier et écrire cette propriété pour $f = 1_{[a,b]}$.

Partie 2.

(a) A l'aide d'une calculatrice, observer le premier chiffre des 2^n pour $n \leq 30$. L'expérience semble montrer que le chiffre 1 apparaît nettement plus fréquemment que les autres chiffres. Déterminer sa fréquence d'apparition sur cette expérience.

(b) On désigne par log le logarithme décimal et par $< x >= x - E(x)$ la partie fractionnaire du nombre réel x. Montrer que 2^n a pour premier chiffre 1 si et seulement si $< n \log 2 >\in [0, \log 2[$.

(c) Montrer que $\log 2$ est un nombre irrationnel.

(d) Déduire de ce qui précède que :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\ Card\ \{n \leq N\ ;\ 2^n \text{ a pour premier chiffre 1 } \} \ = \ \log 2.$$

1.5 Autour de la compacité.

13. *Un exercice classique.*

    (a) Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble compact et (x_n) une suite d'éléments de X. On suppose que $x_{n+1} - x_n \to 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est un intervalle.

    (b) *Application* :
    Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. On définit la suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in [0,1]$ et on suppose que $x_{n+1} - x_n \to 0$. On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n).

       i. Montrer que A est inclus dans l'ensemble des points fixes de f.

       ii. En déduire que A est réduit à un seul élément. Conclusion ?

14. *Théorème du point fixe : méthode de compacité.*

    Soit I un compact de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application. On suppose que, pour tout couple (x, y) de points distincts de I, $\mid f(x) - f(y) \mid < \mid x - y \mid$.

    (a) Montrer que la fonction f a un unique point fixe l.

    (b) On définit la suite des itérés $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in I$. Nous allons démontrer que la suite (u_n) tend vers l. Pour cela, on étudie la suite $x_n = \mid u_n - l \mid$.

       i. Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite x positive.

       ii. Soit L une valeur d'adhérence de la suite (u_n). Vérifier que $f(L)$ est également une valeur d'adhérence.

       iii. Montrer que $\mid L - l \mid = x$ et $\mid f(L) - l \mid = x$.

       iv. Conclusion ?

2 Etude de quelques séries.

2.1 Quelques calculs de sommes.

15. *Un exemple amusant*

    Vérifier que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$$

16. *La série harmonique alternée (très facile).*

   (a) En utilisant la formule de Taylor Lagrange, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ = \ \ln 2 \ .$$

   (b) En déduire une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-2} près.

   (c) On échange l'ordre des termes dans la série harmonique alternée, en prenant un terme positif de cette série suivi de deux termes négatifs pris dans l'ordre :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} ...$$

   Vérifier qu'avec ce nouveau procédé de sommation, on obtient $\frac{1}{2} \ln 2$.

   (d) Conclusion ?

17. *La méthode la plus simple pour calculer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

   On rappelle que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\arcsin x \ = \ x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \ \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

   (a) Vérifier que pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$t \ = \ \sin t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \ \frac{(\sin t)^{2n+1}}{2n+1}.$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} \ dt = \frac{2.4....(2n)}{3.5...(2n+1)}.$$

   (c) En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad , \quad \text{puis que} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.2 La série des inverses des nombres premiers.

18. On note p_n le n^{ième} nombre premier ≥ 2 et soit

$$A_N \ = \ \{ \ q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N} \quad \text{avec } \alpha_j \in \mathbb{N}\}.$$

   (a) Montrer que :

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \ = \ \sum_{q \in A_N} \frac{1}{q}$$

   (b) En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}\right) \geq \ln(\ln(N+1))$$

   (c) Montrer que la série des inverses des nombres premiers est divergente.

2.3 Les nombres de Liouville.

19. Le but de ce problème est de démontrer la transcendance du nombre de Liouville :

$$\alpha \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} \ .$$

Supposons que α soit racine d'un polynôme $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ à coefficients entiers. On notera $M = Sup_{x \in [0,1]} \mid P'(x) \mid$.

   (a) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers N tel que $P(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{10^{k!}}) \neq 0$.

   (b) Pour N fixé vérifiant la question précédente, on pose $q = 10^{N!}$. Vérifier que :

$$\exists \ p \in \mathbb{N} \ , \ \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{10^{k!}} \ = \ \frac{p}{q} \ \text{et} \ 0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^N} \ ,$$

   et qu'il existe un entier A non nul tel que $P(\frac{p}{q}) = \frac{A}{q^n}$.

   (c) Montrer que :

$$\exists \ c \in \left]\frac{p}{q}, \alpha\right[\quad , \quad -P(\frac{p}{q}) = (\alpha - \frac{p}{q}) \ P'(c) \ .$$

   (d) En déduire que :

$$\frac{1}{q^n} \leq \frac{\mid A \mid}{q^n} \leq \frac{M}{q^N} \ .$$

   (e) Conclure.

2.4 Le lemme de Borel.

20. Soit(a_n) une suite quelconque de nombres réels. Le but de ce problème est de montrer qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = a_n$.

    (a) Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 1$ si $\mid x \mid \leq \frac{1}{2}$ et $supp(\chi) \subset [-1, 1]$. Déterminer une suite (λ_k) pour que la fonction

    $$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \chi(\lambda_k x)\ a_k \frac{x^k}{k!}$$

    réponde à la question.

    (b) Le résultat est-il encore vrai si on remplace $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ par f analytique ?

    (c) *Application* : Soit f une fonction C^∞ sur unn intervalle compact $[a, b]$ ayant des dérivées à gauche à tout ordre en b , (resp. à droite en a). Montrer que f est prolongeable en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3 Fonctions continues/dérivables et connexité.

21. *Surprenant.*

    (a) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.

    (b) Montrer que si un coureur parcourt 20 km en une heure, il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 10 km.

22. *Les polynômes de Legendre.*

    On définit le polynôme de Legendre par :

    $$L_n(t) = \frac{n!}{(2n)!}\ \frac{d^n}{dt^n}\left((t^2 - 1)^n\right).$$

    Montrer que L_n a n racines distinctes dans $] - 1, 1[$.

23. *Fonctions continues injectives.*

    (a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et injective. On définit

    $$A = \{(x, y) \in I \times I\ ;\ x < y\}.$$

i. Montrer que A est un ensemble connexe.

ii. On définit $g : I \times I \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = f(x) - f(y)$. Montrer que g ne s'annule pas dans A.

iii. En déduire que f est strictement monotone.

(b) Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$ continue telle que $f \circ f \circ f = Id$.

i. Montrer que $f = Id$.

ii. Le résultat est-il encore exact si $f \circ f = Id$?

24. *Le théorème de Darboux.*

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. On pose :

$$A = \{(x,y) \in I \times I \ ; \ x < y\}.$$

Soit $g : A \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$.

(a) Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

(b) En déduire que f' possède la propriété des valeurs intermédiaires, i.e $f'(I)$ est un intervalle.

4 Convexité.

25. *Très facile.*

(a) Vérifier que la fonction exponentielle est strictement convexe.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall a_1, \ ..., a_n \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \ \leq \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \ ,$$

avec égalité si et seulement si tous les a_k sont égaux.

(c) En déduire que :

$$n! \ \leq \ \left(\frac{n+1}{2} \right)^n .$$

(d) Montrer que le volume d'un pavé droit d'aire donnée est maximum lorsque c'est un cube.

26. *Très facile.*

Montrer qu'une application à la fois convexe et concave est affine.

27. Pour $x > 0$, on définit la fonction Gamma par :

$$\Gamma(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \; e^{-t}\; t^{x-1}\; dt.$$

(a) Vérifier que cette intégrale a bien un sens et que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(b) Montrer que $\Gamma \in C^\infty(]0,+\infty[)$.

(c) Montrer que Γ est convexe.

(d) Montrer que Γ est logarithmiquement convexe.

28. *Formule de Gauss.*

(a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\; dt.$

(b) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-s)^n \; s^{x-1}\; ds.$

Vérifier que pour $n \geq 1$, $I_n(x) = \dfrac{n}{x}\; I_{n-1}(x+1)$.

(c) En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \; \frac{n!\; n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}. \qquad (\textit{Formule de Gauss})$$

29. *Le théorème d'Artin.*

Soit $f\;$: $]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction logarithmiquement convexe. On suppose que f vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall x > 0 \;,\; f(x+1) = xf(x).$$

(a) En utilisant le théorème des trois pentes pour la fonction $g(x) = \ln(f(x))$, montrer que pour tout $x \in]0,1]$,

$$\ln(n^x) \leq \ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) \leq \ln((n+1)^x).$$

(b) A l'aide l'équation fonctionnelle et de la formule de Gauss, montrer que pour $x \in]0,1]$,

$$f(x) = f(1)\;\Gamma(x),$$

puis généraliser ce dernier résultat pour $x \in \mathbb{R}^+$.