INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE

NICOLAS PÉTRÉLIS

1. Introduction

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \mapsto (\bar{\mathbb{R}}, \text{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$ une fonction mesurable. L'objectif est de définir une notion d'intégrale de f contre μ qui généralise l'intégrale de Riemann et la somme de séries absoluement convergentes, i.e.,

- si $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \text{Bor}[a, b]$, $\mu = \lambda_1$ alors $\int_\Omega f(x)\, d\mu$ correspond à $\int_a^b f(x)dx$ au sens de Riemann quand f est Riemann intégrable.

- si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ mesure de comptage alors $\int_\Omega f(x)\, d\mu$ correspond à $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ quand $\sum_{n\geq 1} f(n)$ est absoluement convergente.

1.1. Intégrale des fonctions mesurables positives.

Definition 1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré et $n \in \mathbb{N}$. On considère une famille quelconque de nombre positifs $(\alpha_i)_{i=1}^n \in [0, \infty]^n$, et une famille quelconque d'événements $(A_i)_{i=1}^n \in \mathcal{A}^n$ *deux à deux disjoints*. La fonction $f : \Omega \to [0, \infty]$ définie par

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, 1_{A_i}(\omega) \tag{1.1}$$

est une fonction étagée positive et son intégrale contre μ est définie par

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \mu(A_i). \tag{1.2}$$

Remark 1.2. L'intégrale d'une fonction étagée positive ne dépend pas de sa décomposition sous la forme (1.1), i.e., si $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, 1_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j\, 1_{B_j}$ avec $(A_i)_{i=1}^n \in \mathcal{A}^n$ et $(B_j)_{j=1}^m \in \mathcal{A}^m$ deux familles d'événement de $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints* on a nécessairement

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i\, \mu(A_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j\, \mu(B_j).$$

La notion d'intégrale d'une fonction étagée positive nous permet de définir l'intégrale d'une fonction positive mesurable quelconque.

Definition 1.3. Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}^+, \text{Bor}(\bar{\mathbb{R}}^+))$ mesurable. L'intégrale de f contre μ est définie par

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu = \sup \Big\{ \int_\Omega g\, d\mu : \ g \text{ étagée et positive et } g \leq f \Big\}. \tag{1.3}$$

Date: September 13, 2016.

On peut facilement déduire de la définition les propriétés suivantes

- $\forall A \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A) = \int_\Omega 1_A \, d\mu$,
- si $\mu(\{\omega \in \Omega\colon f(\omega) = \infty\}) > 0$ alors $\int_\Omega f \, d\mu = \infty$,
- si f est mesurable positive alors $\int_\Omega f \, d\mu = 0$ ssi $f = 0$ μ-p.p.
- Soit $c \in \mathbb{R}^+$ et f mesurable positive alors $\int_\Omega cf \, d\mu = c \int_\Omega f \, d\mu$.
- Soient f, g mesurables positives telles que $f \geq g$ μ-p.p. alors $\int_\Omega f \, d\mu \geq \int_\Omega g \, d\mu$.
- En conséquence, si f, g sont mesurables positives telles que $f = g$ μ-p.p. alors $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$.

Remark 1.4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $B \in \mathcal{A}$. Si f est une fonction mesurable positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ on utilisera parfois la notation suivante

$$\int_B f \, d\mu = \int_\Omega f \, 1_B \, d\mu.$$

Dans la Définition 1.8 du premier chapitre on a défini la tribu trace de $\mathcal{A}$ sur B, i.e., $\mathcal{A}_B = \{A \cap B, A \in \mathcal{A}\}$. Dès lors, on peut considérer la restriction f_B de la fonction f au sous ensemble B et il est facile de prouver que f_B est une fonction mesurable positive sur $(B, \mathcal{A}_B, \mu)$. Son intégrale vérifie alors

$$\int_B f_B \, d\mu = \int_B f \, d\mu = \int_\Omega f \, 1_B \, d\mu.$$

Le théorème suivant nous indique que la suite des intégrales d'une suite croissante de fonctions mesurables positives converge vers l'intégrale de la limite de cette suite de fonction. Il nous donne donc une première condition suffisante sur la suite de fonction $(f_n)_{n=1}^\infty$ pour pouvoir échanger limite et intégrale.

Theorem 1.5. [Beppo-Levy: convergence monotone] *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré et $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. On note f la limite ponctuelle de $(f_n)_{n=1}^\infty$, i.e., $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \in [0, \infty]$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors f est une fonction mesurable positive et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu. \tag{1.4}$$

Un outil important dans de nombreuses preuve est enoncé dans la Proposition suivante. Il nous indique que toutes fonctions mesurable positive est la limite ponctuelle d'une suite croissante de fonctions étagées positives.

Proposition 1.6. Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\bar{\mathbb{R}}^+, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}^+))$ mesurable. Alors, il existe $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite croissante de fonctions étagées positives telle que

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Proof. Une telle suite peut être construite explicitement, il suffit de considérer

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{\left\{f\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right[\right\}} + n\,1_{\{f\geq n\}}$$

□

Du Théorème de Beppo-Levy et de la Proposition 1.6 on déduit:

- si f, g sont mesurables positives alors $\int_\Omega f + g\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu$,
- soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables positives sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, alors

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^\infty f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Nous terminons cette section concernant l'intégrale des fonctions mesurables positive en énonçant le lemme de Fatou qui est une conséquence du théorème de Beppo-Levy.

Lemma 1.7. [Lemme de Fatou] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mesurable et $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

1.2. **Mesures définies par densité.** On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On peut alors définir pour tout $A \in \mathcal{A}$ la quantité $\nu(A) = \int_A f d\mu$. On vérifie alors facilement que ν est une mesure et que $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$. De plus, pour toute fonction g mesurable positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ on a

$$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f d\mu.$$

On définit à présent une notion d'absolue continuité d'une mesure par rapport à une autre. Ceci nous permettra de déterminer quand une mesure admet une densité par rapport à une autre mesure.

Definition 1.8. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ et on note $\nu \ll \mu$ si tout ensemble de mesure nulle pour μ est aussi de mesure nulle pour ν (i.e., $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$). Dans le cas ou $\nu \ll \mu$ et $\mu \ll \nu$ on dit que μ et ν sont équivalentes.

Ceci nous amène au Théorème de Radon-Nikodym ci-dessous.

Theorem 1.9. [Radon-Nikodym] *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ et ν deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Si $\mu \ll \nu$, alors il existe une fonction f positive et mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que*

$$\mu(A) = \int_A f d\nu, \quad \textit{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

La fonction f est appelée densité de μ par rapport à ν et est notée $\frac{d\mu}{d\nu}$.

1.3. **Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque.** On peut décomposer de façon unique chaque fonction mesurable en une partie positive et une partie négative. L'intégrale d'une fonction mesurable sera donc définie comme l'intégrale de sa partie positive à laquelle on soustrait l'intégrale de sa partie négative (lorsque cette soustraction a bien un sens).

Definition 1.10. Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$ mesurable. On note $f^+ = \max\{f, 0\}$ la partie positive de f et $f^- = \max\{0, -f\}$ la partie négative de f. Les deux fonctions f^+ et f^- sont mesurables et positives et satisfont $f = f^+ - f^-$.

Avant de définir l'intégrale d'une fonction mesurable quelconque comme $\int f^+ - \int f^-$ il faut prendre garde au fait que la différence $+\infty - \infty$ n'est pas définie. C'est pour cette raison qu'on introduit dans la définition suivante une classe de fonctions dites intégrables.

Definition 1.11. Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$ mesurable. La fonction f est dite intégrable contre μ (ou μ-intégrable) si $\int_\Omega |f| d\mu < \infty$. Dès lors, l'intégrale de f est définie par

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu.$$

Ainsi construite, l'intégrale est linéaire sur l'espace vectoriel $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ contenant les fonctions $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{R}))$ intégrables, i.e., si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et si $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on a

$$\int_\Omega \alpha f + \beta g\, d\mu = \alpha \int_\Omega f\, d\mu + \beta \int_\Omega g\, d\mu. \tag{1.5}$$

Le cas de deux fonctions mesurables et égales μ-p.p. est étudié dans la Proposition suivante.

Proposition 1.12. Soient $f, g : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$ où f est intégrable, g mesurable et $f = g$ μ-p.p. Alors g est intégrable et

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu. \tag{1.6}$$

Remark 1.13. La Proposition 1.12 implique que si l'on change la valeur d'une fonction intégrable sur un ensemble mesurable et μ-négligeable, alors la fonction reste intégrable et son intégrale reste la même.

Le théorème nous donne une condition nécessaire pour échanger limite et intégrale avec des fonctions de signe quelconque.

Theorem 1.14. [Convergence dominée] Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$. Si

- il existe f: $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$ mesurable telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ μ-p.p.
- il existe g: $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}^+, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}^+))$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ μ-p.p.

Alors f_n est integrable $\forall n \in \mathbb{N}$ ainsi que f et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu. \tag{1.7}$$

A présent nous énonçons un théorème qui nous indique comment calculer l'intégrale d'une fonction composée avec une autre fonction mesurable. On considère donc $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ un espace mesuré et $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{E}, \mathcal{B})$ une application mesurable. On rappelle que l'on peut munir $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ de μ_f la mesure image de μ par f.

Theorem 1.15. [Théorème de Transfert] Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathcal{E}, \mathcal{B})$ mesurable.

(1) Version positive: soit $\varphi : (\mathcal{E}, \mathcal{B}) \to (\bar{\mathbb{R}}^+, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}^+))$ mesurable. Alors

$$\int_\Omega \varphi \circ f d\mu = \int_{\mathcal{E}} \varphi \, d\mu_f \tag{1.8}$$

(2) Version générale: soit $\varphi : (\mathcal{E}, \mathcal{B}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$ mesurable. Alors φ est μ_f intégrable ssi $\varphi \, o \, f$ est μ-intégrable et alors

$$\int_\Omega \varphi \circ f d\mu = \int_{\mathcal{E}} \varphi \, d\mu_f \tag{1.9}$$

1.4. **Intégrales de fonctions de plusieurs variables.** On étudie à présent l'intégrale d'une fonction définie sur un produit d'espaces mesurés. on considère donc $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ avec $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ des espaces mesurés et μ_1 et μ_2 des mesures **σ-finies**.

Theorem 1.16. [Fubini positif] Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}^+, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}^+))$ **mesurable** alors

- l'application suivante est mesurable

$$\begin{aligned} (\Omega_1, \mathcal{A}_1) &\to (\bar{\mathbb{R}}^+, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}^+)) \\ \omega_1 &\to \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \end{aligned}$$

- l'application suivante est mesurable

$$\begin{aligned} (\Omega_2, \mathcal{A}_2) &\to (\bar{\mathbb{R}}^+, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}^+)) \\ \omega_2 &\to \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1) \end{aligned}$$

- on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu(\omega_1, \omega_2) &= \int_{\Omega_1} \Big[\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \Big] \, d\mu_1(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \Big[\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1) \Big] \, d\mu_2(\omega_2) \end{aligned}$$

On voit donc que dans le cas d'une fonction positive, on peut calculer son intégrale en intégrant successivement sur ses différentes coordonnées et **dans l'ordre que l'on souhaite**.

Dans le cas d'une fonction de signe quelconque, il faut s'assurer avant de permuter les intégrales que la fonction est bien $\mu_1 \otimes \mu_2$ intégrables.

Theorem 1.17. [Fubini général] Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$ **intégrable** alors

- l'application suivante est μ_1-intégrable

$$\begin{aligned} (\Omega_1, \mathcal{A}_1) &\to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}})) \\ \omega_1 &\to \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \end{aligned}$$

- l'application suivante est μ_2-intégrable

$$\begin{aligned}(\Omega_2, \mathcal{A}_2) &\to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))\\ \omega_2 &\to \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1)\end{aligned}$$

- on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu(\omega_1, \omega_2) &= \int_{\Omega_1} \Big[\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_2(\omega_2) \Big]\, d\mu_1(\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_2} \Big[\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1) \Big]\, d\mu_2(\omega_2)\end{aligned}$$

Remark 1.18. Dans la pratique si l'on veut calculer l'intégrale d'une fonction de plusieur variables de signe quelconque, on commence par s'assurer que la fonction est bien intégrable. Pour cela on considère $|f|$ qui est une fonction mesurable positive et à laquelle on peut appliquer le Théorème de Fubini positif, ce qui permet d'intégrer successivement en les différentes coordonnées. Si ce calcul nous donne une intégrale de $|f|$ finie. Alors f est intégrable et on peut calculer son intégrale en appliquent Fubini général.

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray UMR 6629, Université de Nantes, 2 Rue de la Houssinière, BP 92208, F-44322 Nantes Cedex 03, France

E-mail address: `nicolas.petrelis@univ-nantes.fr`