TRIBUS, FONCTIONS MESURABLES

NICOLAS PÉTRÉLIS

1. Tribu

On considère Ω un ensemble (par ex. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^d$, $\{1, 3, 5, 7, 11\}$ etc...) et on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de cet ensemble. On considère à présent $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un sous ensemble de partie de Ω.

Definition 1.1. $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, i.e., si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(3) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable, i.e., si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Remark 1.2. *Les trois conditions impliquent nécessairement qu'une tribu contient $\emptyset$ et qu'une tribu est stable par intersection dénombrable.*

Donnons quelques exemples classiques de tribu. La plus petite tribu d'un ensemble Ω est $\{\emptyset, \Omega\}$. Elle est appelée tribu triviale de Ω. Il est facile de vérifier également que la plus grosse tribu de Ω est $\mathcal{P}(\Omega)$. Une intersection quelconque de tribu de Ω est une tribu de Ω, i.e., si $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ est une famille quelconque de tribu de Ω alors

$$\bigcap_{j\in J} \mathcal{A}_j \text{ est une tribu de } \Omega.$$

En revanche, une union de tribu n'est à priori pas une tribu.

Remark 1.3. *On emploie le terme d'événement pour désigner un élément d'une tribu.*

Definition 1.4. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{E}$ (notée $\sigma(\mathcal{E})$), la plus petite tribu sur Ω qui contient $\mathcal{E}$. Dès lors, $\sigma(\mathcal{E})$ est aussi l'intersection de toutes les tribus de Ω contenant $\mathcal{E}$, i.e.,

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{A}\,\text{tribu de }\Omega\colon\, \mathcal{E}\subset\mathcal{A}} \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Donnons plusieurs exemples de tribu engendrée, par ordre croissant de complexité.

- Soit $a \in \Omega$, alors $\sigma(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{a\}^c, \Omega\}$.

- Si Ω est dénombrable, $\sigma\big(\{\{a\}, a \in \Omega\}\big) = \mathcal{P}(\Omega)$.

Date: September 9, 2016.

- Si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une partition de Ω, i.e., $\Omega = \cup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ alors
$$\sigma(\{E_i,\, i \in \mathbb{N}\}) = \Big\{ \bigcup_{i\in T} E_i,\, T \subset \mathbb{N} \Big\}.$$
- Soit (Ω, d) un espace métrique, la tribu Borélienne de (Ω, d) est la tribu engendrée par les ouverts de Ω (pour la distance d). On la note $\mathrm{Bor}(\Omega)$.

Tribu Borélienne. Une tribu particulièrement importante pour nous sera la tribu Borélienne de $\mathbb{R}$ notée $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ (où implicitement la distance choisie est associée à une norme quelconque sur $\mathbb{R}$). $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ est donc la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$. Cependant, un résultat classique de topologie sur $\mathbb{R}$ nous indique que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On en conclut que
$$\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) = \sigma(\,]a, b[,\;\; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a < b).$$

Tribu image réciproque. Il nous sera souvent utile par la suite de considérer l'image réciproque d'une tribu par une fonction. Il se trouve qu'une telle image réciproque est alors une tribu de l'espace de départ. Ainsi si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ et que $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ est une espace mesurable on a
$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(B),\, B \in \mathcal{A}_2\}$$
qui est une tribu de Ω_1. On peut observer également que si $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E}_2)$ où $\mathcal{E}_2$ est un système de partie de $\mathcal{A}_2$, alors
$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2)) := \sigma(\{f^{-1}(B),\, B \in \mathcal{E}_2\}). \tag{1.2}$$

Definition 1.5. Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_d, \mathcal{A}_d)$ d espaces mesurables, on appelle tribu produit de $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_d$ la tribu sur $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$ engendrée par
$$\Big\{ A_1 \times \cdots \times A_d \colon (A_i)_{i=1}^d \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_d \Big\}.$$
Cette tribu produit est notée $\bigotimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$.

Exemple 1.6. Comme exemple de tribu produit, on peut considérer $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$ avec $d \in \mathbb{N}$. De même que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est réunion dénombrable de pavé de $\mathbb{R}^d$ de la forme $]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_d, b_d[$. Dès lors on peut affirmer que
$$\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d) = \sigma\Big(\textstyle\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[,\; a_i < b_i \in \mathbb{R} \Big) \subset \bigotimes_{i=1}^d \mathrm{Bor}(\mathbb{R}).$$
L'inclusion $\bigotimes_{i=1}^d \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$ sera prouvée plus tard.

Definition 1.7. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de Ω, on appelle sous tribu de $\mathcal{A}$ toute tribu de Ω incluse dans $\mathcal{A}$. De la même manière, si $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ alors $\sigma(\mathcal{E}_1)$ est une sous tribu de $\sigma(\mathcal{E}_2)$.

Il est évident que toute tribu d'un ensemble Ω est une sous tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Definition 1.8. soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un ensemble et une tribu sur cette ensemble. Soit $B \subset \Omega$, on appelle trace de $\mathcal{A}$ sur B la tribu de B définie par $\big\{B \cap A, A \in \mathcal{A}\big\} = \mathcal{A}_B$. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de partie (où système de partie) qui génère $\mathcal{A}$. Alors, $\mathcal{E}_B = \{B \cap A, A \in \mathcal{E}\}$ est un système de partie de B qui génère $\mathcal{A}_B$.

Exemple 1.9. soit I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ alors $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})_I = \mathrm{Bor}(I)$ puisque

$$\begin{aligned}\mathrm{Bor}(\mathbb{R})_I &= \sigma\big(\{O\colon\ O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\ \}\big)_I\\ &= \sigma\big(\{O\cap I\colon\ O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\ \}\big)\\ &= \sigma\big(\{O\colon\ O \text{ ouvert de } I\ \}\big)\\ &= \mathrm{Bor}(I).\end{aligned}$$

Remark 1.10. *Il sera souvent nécessaire de considérer des fonctions prenant éventuellement des valeurs infinie. Pour cela on définit* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$*. On définit alors*

$$\begin{aligned}\mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}) &= \sigma\big(\,\mathrm{Bor}(\mathbb{R})\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}\,\big) \qquad (1.3)\\ &= \sigma\big(\,[a,b], a\le b\in\bar{\mathbb{R}}\,\big)\end{aligned}$$

où par convention $[a,\infty] = [a,\infty[\cup\{\infty\}$*. On définit aussi des règles de calcul sur* $\bar{\mathbb{R}}$*, i.e.,*

$$\begin{aligned}a+\infty &= \infty \quad \text{si} \quad a\in\mathbb{R}\cup\{\infty\} \qquad (1.4)\\ a+(-\infty) &= -\infty \quad \text{si} \quad a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\\ 0\cdot\infty &= 0\cdot(-\infty) = 0\\ (-\infty)+\infty &= \text{indéterminée} \qquad (1.5)\end{aligned}$$

On peut prouver également que la trace de Bor $(\bar{\mathbb{R}})$ sur $\mathbb{R}$ est Bor $(\mathbb{R})$, i.e.,

$$\mathrm{Bor}\,(\bar{\mathbb{R}})_{\mathbb{R}} = \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R}).$$

2. Mesurabilité

On appelle **espace mesurable** la donnée d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ de cet ensemble $(\Omega,\mathcal{A})$.

Definition 2.1. *Soient* $(\Omega_1,\mathcal{A}_1)$ *et* $(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$ *deux espaces mesurables et* $f:\Omega_1\to\Omega_2$*. La fonction* f *est dite mesurable ssi*

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(B),\ B\in\mathcal{A}_2\}\subset\mathcal{A}_1.$$

2.1. Comment prouver la mesurabilité d'une fonction?

Dans la suite du cours nous allons définir une notion très générale d'intégrale, qui généralisera à la fois les sommes de séries absolument convergentes et les intégrales de Riemann. Cependant, de la même manière qu'on ne peut pas intégrer n'importe quelle fonction au sens de Riemann, on ne pourra pas intégrer n'importe quelle fonction au sens de cette nouvelle intégrale. Ainsi les fonctions devront satisfaire quelques conditions *minimales* pour pouvoir être intégrées. L'une de ces conditions est d'être mesurable. Il est donc important d'avoir des outils, des critères pour prouver qu'une fonction est mesurable.

Première méthode. On peut utiliser directement la définition de la mesurabilité, combinée avec l'égalité (1.2) qui concerne la tribu image réciproque. Ainsi, si $(\Omega_1,\mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$ sont deux espaces mesurables, si $\mathcal{E}_2$ est un système de partie de Ω_2 qui engendre $\mathcal{A}_2$ (i.e., $\mathcal{A}_2=\sigma(\mathcal{E}_2)$) alors $f:\Omega_1\to\Omega_2$ est mesurable ssi

$$f^{-1}(E)\in\mathcal{A}_1 \quad \text{pour tout} \quad E\in\mathcal{E}_2.$$

C'est par exemple très utile pour prouver la mesurabilité d'une fonction à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ puisque

$$\begin{aligned}\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) = \sigma(\{\text{ouverts de } \mathbb{R}\}) &= \sigma\big(\,]a,b[,\ a<b\in\mathbb{R}\,\big) = \sigma\big(\,[a,b],\ a<b\in\mathbb{R}\big) \\ &= \sigma\big(\,[a,b[,\ a<b\in\mathbb{R}\,\big) = \sigma\big(\,]a,b],\ a<b\in\mathbb{R}\big) \\ &= \sigma\big(\,]-\infty,b[,\ b\in\mathbb{R}\,\big) = \sigma\big(\,]-\infty,b],\ b\in\mathbb{R}\,\big) \\ &= \sigma\big(\,]a,\infty[,\ a\in\mathbb{R}\,\big) = \sigma\big(\,[a,\infty[,\ a\in\mathbb{R}\,\big).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Ainsi si $f:(\Omega,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ on obtient sa mesurabilité en prouvant par exemple que

$$f^{-1}([a,\infty[)\in\mathcal{A}, \quad \text{pour tout} \quad a\in\mathbb{R}.$$

Deuxième méthode. On peut prouver la mesurabilité d'une fonction en l'écrivant comme composée de fonctions plus simples dont on sait qu'elles sont mesurables. Ainsi, on utilisera les deux règles de compositions suivantes.

(1) **La composée de fonctions mesurables est mesurable.**
Soit $f:(\Omega_1,\mathcal{A}_1)\to(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$ et $g:(\Omega_2,\mathcal{A}_2)\to(\Omega_3,\mathcal{A}_3)$ deux fonctions mesurables, alors $g\,o\,f:(\Omega_1,\mathcal{A}_1)\to(\Omega_3,\mathcal{A}_3)$ est mesurable.

(2) **Une fonction dont les coordonnées sont mesurables est mesurable.**
Soit $f,g:(\Omega,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ mesurables alors

$$\begin{aligned}(\Omega,\mathcal{A}) &\to (\mathbb{R}^2,\ \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)) \\ \omega &\to (f(\omega),g(\omega))\end{aligned}$$

est mesurable.

Nous donnons à présent une liste de fonctions simples classiquement mesurables que l'on peut utiliser en combinaison avec les règles de composition (a) et (b) ci-dessus pour prouver qu'une fonction est mesurable.

(1) **Les fonctions indicatrices d'événements sont mesurables.**
Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace mesurable, et $A\in\mathcal{P}(\Omega)$ alors l'indicatrice de A définie par

$$\begin{aligned}1_A:\ (\Omega,\mathcal{A}) &\to (\mathbb{R},\ \mathrm{Bor}(\mathbb{R})) \\ \omega &\to 1_A(\omega)\end{aligned}$$

est mesurable ssi $A\in\mathcal{A}$.

(2) **Les fonctions continues sont mesurables.**
Soient (Ω,d_1) et (Ω_2,d_2) deux espace métriques que l'on considère comme des espaces mesurables munis de leur tribus Borélienne respectives. Si $f:(\Omega_1,d_1)\to(\Omega_2,d_2)$ est continue alors elle est mesurable.

En conséquence, avec les règles de composition on obtient

- **Les fonctions coordonnées sont mesurables.**
  Soit $d\in\mathbb{N}$ et $i\in\{1,\dots,d\}$ alors

$$\begin{aligned}\Pi_i:\ (\mathbb{R}^d,\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)) &\to (\mathbb{R},\ \mathrm{Bor}(\mathbb{R})) \\ (x_1,\dots,x_d) &\to x_i\end{aligned}$$

  est mesurable.

- **Une combinaison linéaire de fonctions mesurables est mesurable.** Soient $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ mesurables et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f + g$ est mesurable.
- **Le produit de fonctions mesurables est mesurable** Soient $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ mesurables alors $f \times g$ est mesurable.
- **Le** max **et le** min **de fonctions mesurables sont mesurables.** Soient $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ mesurables alors $\min\{f, g\}$ et $\max\{f, g\}$ sont mesurables.

(3) **Le** sup**, l'**inf **, la** lim sup **et la** lim inf **d'une suite de fonctions mesurables sont mesurables.**
Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$. Alors les fonctions

$$\begin{aligned}(\Omega, \mathcal{A}) &\to (\bar{\mathbb{R}},\ \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))\\ \omega &\to \sup\{f_n(\omega), n \in \mathbb{N}\},\\ \omega &\to \inf\{f_n(\omega), n \in \mathbb{N}\},\\ \omega &\to \limsup_{n\to\infty}\ f_n(\omega),\\ \omega &\to \liminf_{n\to\infty}\ f_n(\omega),\end{aligned}$$

sont mesurables.

(4) **La limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.**
Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$ telle que $\forall \omega \in \Omega$ la suite $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}$. Alors

$$\begin{aligned}(\Omega, \mathcal{A}) &\to (\bar{\mathbb{R}},\ \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))\\ \omega &\to \lim_{n\to\infty}\ f_n(\omega)\end{aligned}$$

est mesurable.

(5) **Une fonction croissante est mesurable**
Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors f est mesurable en tant que fonction de $(I, \mathrm{Bor}(I)) \mapsto (\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$.

(6) **Fonction définie par morceaux**
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{G})$ deux ensemble munis de tribus. On considère $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$ une famille au plus dénombrable de $\mathcal{A}$ qui forme une partition de Ω. De plus, pour tout $i \in I$ on considère $g_i : (A_i, \mathcal{A}_{A_i}) \mapsto (F, \mathcal{G})$ une fonction mesurable. Dès lors la fonction f définie par

$$f(w) = g_i\, \forall w \in A_i,\ \forall i \in I$$

est mesurable en tant que fonction de $(\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (F, \mathcal{G})$.

Exemple 2.2. Ainsi la fonction

$$x \mapsto \log(x)\, 1_{]0,1]}(x) + e^{-\frac{1}{x}}\, 1_{[-4,-2]}(x) + \max\{x^2, 5x+8\}\, 1_{[4,\infty[}(x)$$

est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$.

Remark 2.3. *La mesurabilité des applications coordonnées* Π_i, $i \in \{1, \dots, d\}$ *nous donne la deuxième inclusion de l'exemple 1.6, i.e.,* $\bigotimes_{i=1}^d Bor(\mathbb{R}) \subset Bor(\mathbb{R}^d)$.

3. Mesure

Definition 3.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle mesure toute application $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}^+$ telle que

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable d'évènements de $\mathcal{A}$, 2 à 2 disjoints, i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j \in I$. Alors
$$\mu\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Remark 3.2. *La donnée d'une ensemble* Ω, *d'une tribu sur* $\mathcal{A}$ *et d'une mesure* μ *nous donne un* **espace mesuré** $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Exemple 3.3. *Masse de Dirac, Jeux de dé, Mesure de Comptage, mesure de Lebesgue.*

Plusieures règles de calcul sont utiles lorsque l'on manipule des mesures:

(1) Si $A_1 \subset A_2$ $(A_1, A_2 \in \mathcal{A})$ alors $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.

(2) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille au plus dénombrable d'évènements de $\mathcal{A}$ alors
$$\mu\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

(3) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événement pour l'inclusion alors
$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu\big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\big).$$

(4) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événement pour l'inclusion et si $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{i_0}) < \infty$ alors
$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu\big(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\big).$$

Remark 3.4. *Une somme au plus dénombrable de mesures sur un même espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est encore une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{A})$. *C'est le cas pour le jeux de dé ou la mesure de comptage en tant que somme de masse de Dirac.*

Definition 3.5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ est σ-finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si il existe $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite croissante pour l'inclusion d'événement de $\mathcal{A}$ telle que $\mu(A_i) < \infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$ et $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Exemple 3.6. Les masses de Dirac, mesures de comptage sur un ensemble au plus dénombrable, mesures de Lebesgue ou encore toutes les mesures finies sont σ-finies.

Definition 3.7. Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)_{i=1}^k$ des espaces mesurés avec des mesures μ_i qui sont toutes σ-finies. On considère l'ensemble $\Omega := \prod_{i=1}^k \Omega_i$ et sa tribu produit $\mathcal{A} := \bigotimes \mathcal{A}_i$. Il existe une unique mesure μ sur $\mathcal{A}$ qui vérifie

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_k) = \prod_{i=1}^k \mu_i(A_i), \quad \text{pour tout} \quad (A_i)_{i=1}^k \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_k. \tag{3.1}$$

Cette mesure est appelée mesure produit des $(\mu_i)_{i=1}^k$ et est notée $\bigotimes_{i=1}^k \mu_i$.

Le théorème suivant nous permet de prouver que deux mesures sont égales en vérifiant simplement qu'elles coincident sur une sous famille de parties de la tribu.

Definition 3.8. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mathcal{E}$ un système de parties de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{E}$ est un Π-système générateur de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ et si $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie, i.e., si $A, B \in \mathcal{E}$ alors $A \cap B \in \mathcal{E}$.

Theorem 3.9. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ, ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit $\mathcal{E}$ un Π-système générateur de $\mathcal{A}$.

(1) si $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) < \infty$ et si μ et ν coincident sur $\mathcal{E}$ alors $\mu = \nu$.

(2) si μ et ν sont σ-finie, si elles coincident sur $\mathcal{E}$ et si il existe une suite croissante pour l'inclusion $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{E}$ telle que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$ et $\mu(A_i) < \infty \quad \forall i \in \mathbb{N}$ alors $\mu = \nu$.

Remark 3.10. *Du Théorème 3.9, on déduit l'unicité de la mesure produit et de la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$ *pour* $d \in \mathbb{N}$.

Definition 3.11. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré.

- Un ensemble $B \subset \Omega$ (pas nécessairement mesurable) est négligeable si $\exists A \in \mathcal{A}$ tel que $B \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

- soit $\mathcal{P}$ une propriété sur Ω, i.e., $\mathcal{P} : \Omega \to \{0, 1\}$. On dit que $\mathcal{P}$ est vérifiée μ-p.p. (μ-presque partout) si $\{\omega \in \Omega \colon \mathcal{P}(\omega) = 0\}$ est négligeable.

Exemple 3.12. L'événement $\{11, 17, 23\}$ dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \sum_{i=1}^{10} \delta_i)$ et la propriété "La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est nulle λ-p.p".

Definition 3.13. Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ un espace mesuré et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ un espace mesurable. Soit $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ mesurable. Alors, on note μ_f la mesure image de μ par f définie par $\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B))\ \forall B \in \mathcal{A}_2$.

Exemple 3.14. Avec la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x$. Alors à l'aide du Théorème 3.9 on prouve que $\lambda_f = \frac{1}{2}\lambda$.

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray UMR 6629, Université de Nantes, 2 Rue de la Houssinière, BP 92208, F-44322 Nantes Cedex 03, France

E-mail address: nicolas.petrelis@univ-nantes.fr