Compléments sur les équations différentielles .

TABLE DES MATIÈRES

1. BIBLIOGRAPHIE :

(1) J-P. Demailly : *Analyse numérique et équations différentielles*, PUG.

(2) J. Hubbard et B. West : *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini (traduit par V. Gautheron).

(3) V. Arnold : *Équations différentielles ordinaires*, MIR.

(4) H. Cartan : *Calcul différentiel* , Hermann.

(5) J. Dieudonné : : *Calcul infinitésimal*, Hermann.

(6) M. Artigue et V. Gautheron : *systèmes différentiels : étude graphique*, Cedic / Fernand Nathan.

2. ORGANISATION DU TRAVAIL

Il conviendra de travailler seul les exercices de cours à savoir les exercices 1-2-18-19-21-22-29-36-40.
Pour la réunion de rentrée, je ramasserai vos solutions des exercices 4-9-17-26.
Pour la première séance, je ramasserai vos solutions des exercices 30-31-44.
Pour la seconde séance, je ramasserai vos solutions des exercices 28-47.

3. Quelques rappels de cours

3.1. **Les équations différentielles linéaires.**

3.2. **Le lemme des noyaux.**

Lemme 3.1. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = Q_1.Q_2...Q_r$, où les polynômes $Q_1, ..., Q_r$ sont deux à deux premiers entre eux alors*

$$\ker P(f) = \ker Q_1(f) \oplus \ker Q_2(f) \oplus ... \oplus \ker Q_r(f).$$

De plus, le projecteur sur le j^{ieme} facteur de cette décomposition parallélement aux autres facteurs est un polynôme en f.

Démonstration. On le montre pour $r = 2$, une récurrence facile permettra alors d'en déduire le résultat général. Grâce au théorème de Bezouth, on sait qu'il y a des polynômes U_1, U_2 tel que

$$U_1Q_1 + U_2Q_2 = 1$$

Pour tout $x \in E$, on a alors

$$U_1(f).Q_1(f).x + U_2(f).Q_2(f).x = x. \tag{1}$$

Puisque $P(f) = Q_1(f).Q_2(f) = Q_2(f).Q_1(f)$, il est clair que l'on a les inclusions :

$$\ker Q_1(f) \subset \ker P(f) \text{ et } \ker Q_2(f) \subset \ker P(f).$$

Lorsque $x \in \ker P(f)$, on a alors $Q_2(f)[U_1(f).Q_1(f).x] = [U_1(f).Q_1(f)._2(f)].x = U_1(f).[P(f).x] = 0$, donc $U_1(f).Q_1(f).x \in \ker Q_2(f)$. De la même façon, on obtient que lorsque $x \in \ker P(f)$ alors $U_2(f)Q_2(f).x \in \ker Q_1(f)$. De ceci et de l'identité (1), on en déduit que

$$\ker P(f) = \ker Q_1(f) + \ker Q_2(f).$$

Il reste à démontrer que $\ker Q_1(f) \cap \ker Q_2(f) = \{0\}$. Considérons donc $x \in \ker Q_1(f) \cap \ker Q_2(f)$ alors en appliquant l'identité 1 on obtient $x = 0$.

Remarquons que l'on démontre ainsi que sur $\ker P(f)$ le projecteur sur $\ker Q_1(f)$ parallélement à $\ker Q_2(f)$ est l'endomorphisme $U_2(f)Q_2(f)$.

□

3.3. **Applications aux équations différentielles à coefficients constants.**

On va ici étudier les équations différentielles de la forme

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = 0$$

où on a noté x^k la dérivée k iéme de x :

$$\frac{d^kx}{dt^k}(t) = x^k(t).$$

Lorsque l'on pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

On a

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$$

Donc x vérifie l'équation différentielle

(2) $$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0$$

si et seulement si X vérifie $X'(t) = AX(t)$ où A est la matrice

$$A =) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Un calcul par récurrence en développant la première colonne montre que le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n\right)$$

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle (2) l'équation

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Comme dans le cours d'analyse de base en $L1$, les solutions de cette équation sont exactement les λ tel que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de l'équation différentielle (2)

Supposons donc que

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{\alpha_j}$$

où les λ_j sont deux à deux différents. Notons $\mathcal{S}$ l'espace des solutions de l'équation différentielle 2, c'est à dire

$$\mathcal{S} = \{x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ \text{tel que } \forall t \in \mathbb{R} : x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0\}.$$

Introduisons l'endomorphisme D de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ défini par

$$D(x) = x' = \frac{dx}{dt}$$

qui à une fonction associe sa dérivéee. On a donc

$$\mathcal{S} = \ker(D^n + a_1 D^{n-1}(t) + ... + a_{n-1} D + a_n I) = \ker \chi_A(D).$$

Le lemme des noyaux nous permet donc d'affirmer que

(3) $$\mathcal{S} = \oplus_{j=1}^{r} \ker(D - \lambda_j I)^{\alpha_j}$$

Pour $\zeta \in \mathbb{C}$, on note M_ζ l'endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ défini par $(M_\zeta x)(t) = e^{\zeta t} x(t)$, c'est l'endomorphisme de multiplication par la fonction $t \mapsto e^{\zeta t}$. C'est un endomorphisme inversible dont l'inverse est $M_{-\zeta}$. De plus la régle de dérivation du produit de deux fonctions montre que

$$(D - \zeta I) = M_\zeta D M_{-\zeta}$$

c'est à dire que pour $x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on a la relation

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\zeta t}x(t)\right) = e^{-\zeta t}\left(x'(t) - \zeta x(t)\right).$$

On en déduit donc que

$$(D - \zeta I)^\alpha = M_\zeta D^\alpha M_{-\zeta}$$

et que

$$\begin{aligned} x \in \ker(D - \zeta I)^\alpha &\Leftrightarrow D^\alpha M_{-\zeta} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} M_{-\zeta} x = 0 \\ &\Leftrightarrow M_{-\zeta} x \in \mathbb{C}_{\alpha-1}[t] \end{aligned}$$

Ceci équivaut également à l'existence d'une fonction P polynomiale de degré inférieure à $\alpha - 1$ telle que pour tout t

$$x(t) = P(t)e^{\zeta t}.$$

Grâce à la décomposition 3, on a montré le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soit $a_1, ..., a_n$ des nombres complexes.À l'équation différentielle*

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0$$

on associe son l'équation caractéristique

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Si $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les racines distinctes de l'équation caractéristique et $\alpha_1, .., \alpha_r$ leurs multiplicités, c'est à dire que

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = \prod_{j=1}^{r}(\lambda - \lambda_j)^{\alpha_j}.$$

Alors les solutions de cette équation différentielle sont de la forme

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r} P_j(t)e^{\lambda_j t}$$

où P_j est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieure à $\alpha_j - 1$

Lorsque les coefficients $a_1, ..a_n$ sont réels, les solutions de cette équation qui sont à valeurs réelles sont obtenues en prenant les parties réelles des solutions trouvées si dessus.

4. Exercices sur les équations différentielles linéaires

4.1. Questions de cours.

Exercice 1. *Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.*

a) Enoncer et démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes linéaires d'ordre 1 :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t),\ Y(t_0) = Y_0, \tag{4}$$

où $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$, $B(t) \in \mathbb{R}^n$ et $t \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$

b) On appelle équation homogène associée à (1)*, l'équation sans second membre :*

(5) $$Y'(t) = A(t)Y(t).$$

Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de l'équation homogène (2) *?*

c) Si $\tau \in I$*, que dire que l'application* ev_τ *qui à une solution associe sa valeur au temps* τ *?*

d) Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de l'équation générale (1) *lorsque l'on ne fixe pas de condition initiale ?*

e) Enoncer la méthode de variation des constantes.

f) Implémenter la méthode sur les équations différentielles du type [1]

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

où $a \neq 0$.

g) Résoudre de cette façon l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = \cos(t)$.

Exercice 2. *Résolvante.*
On considère le système différentiel linéaire :

(6) $$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t),\ Y(t_0) = Y_0,$$

où $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$, $B(t) \in \mathbb{R}^n$ *et* $t \in I$ *intervalle de* $\mathbb{R}$*. On se place sous les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.*

a) Donner la définition de la résolvante (notée $R(t, t_0)$*) de* $A(t)$ *?*

b) Quel est le lien avec la solution de l'équation (3) *?*

c) En général, sait-on calculer facilement la résolvante ? Donner des cas où le calcul est aisé.

d) Montrer que, $\forall s, t, u \in I$*,*

$$R(s, u) = R(s, t) \circ R(t, u).$$

e) En déduire que $R(t, s)$ *est une matrice inversible et déterminer son inverse.*

4.2. **Equations linéaires scalaires du premier ordre.**

Exercice 3.

(1) Résoudre les équations différentielles d'ordre 1 suivantes :

$$y' + 2y = 4x^2 \ \ ,\ \ y' - 2y = 2x^3 + x \ \ ,\ y' - y = x + e^x \ \ ,$$
$$y' + y = 2x\, e^{-x} \ \ ,\ \ y' + y = \sin x + 3\sin 2x.$$

(2) Où il faut faire attention à l'intervalle de définition des solutions.
Intégrer les équations suivantes :

(7) $$(2 + x)y' = 2 - y \ \ ,\ \ 3xy' - 4y = x,$$

(8) $$xy' + y = \cos x \ \ ,\ \ (1 + x)y' + y = (1 + x)\sin x.$$

Pour chaque équation, on cherchera si certaines solutions peuvent se prolonger sur $\mathbb{R}$ *tout entier.*

---

1. Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation différentielle homogène $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ telles que (y_1, y_2) forment une base de l'espace des solutions cette équation différentielle homogène, alors on trouve les solutions de l'équation différentielle $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ sous la forme $t \mapsto A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t)$ avec $\forall t$: $A'(t)y_1(t) + B'(t)y_2(t) = 0$.

Exercice 4. *On introduit* $A \in C^0(]0,+\infty[,\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ *défini par*

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 1 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

On étudie ici les solutions $x \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}^2)$ *de l'équation différentielle*

$$(\heartsuit)\ \ \dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

C'est à dire les fonctions $t \in]0,+\infty[\mapsto (u(t),v(t))$ *qui vérifient le système différentiel*

$$(\heartsuit) \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) = \frac{1}{t}u(t) + v(t) \\ \dot{v}(t) = u(t) + \frac{1}{t}v(t) \end{array} \right.$$

a) *Montrer que les fonctions* $x_1, x_2\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^2$ *définies par*

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ te^t \end{pmatrix},\ x_2(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -te^{-t} \end{pmatrix}$$

forment une base de l'espace des solutions de $(\heartsuit)$.

b) *Trouver les solutions de l'équation différentielle*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) = \frac{1}{t}u(t) + v(t) + t \\ \dot{v}(t) = u(t) + \frac{1}{t}v(t) \end{array} \right.$$

à l'aide de la méthode de variations des constantes.

Exercice 5. problème.

a) *Préambule.*

On considère l'équation différentielle scalaire du premier ordre :

$$(E_0) \qquad\qquad y'(t) = -a(t)\, y(t),$$

où $a : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ *est continue et telle que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} a(t)\, dt$ *soit divergente.*

Vérifier que toute solution $y(t)$ *de* (E_0) *tend vers* 0 *lorsque* $t \to +\infty$.

Généralisation en dimension supérieure.

On munit $\mathbb{R}^n$ *du produit scalaire canonique* $<\ ,\ >$, *et on note* $||\ .\ ||$ *la norme associée à ce produit scalaire. On rappelle qu'une matrice réelle symétrique* A *est négative si, pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$, $< AX, X > \leq\ 0$.

On considère le systàme différentiel :

$$(E) \qquad X'(t) = A(t)\, X(t),$$

On suppose que l'application $t \to A(t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et que la matrice* $A(t)$ *est symétrique et négative.*

b) *Soit* $X(t)$ *une solution de* (E). *Montrer que l'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(t) = ||\ X(t)\ ||^2,$$

est décroissante, où $||\ .\ ||$ *désigne la norme associée au produit scalaire.*

c) En déduire que $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ *existe.*

d) Soit $X_1(t)$ *et* $X_2(t)$ *deux solutions de* (E)*. En utilisant la question précédente, montrer que :*

$$\lim_{t\to+\infty} < X_1(t),\ X_2(t) > \ \text{ existe.}$$

Indication : on pourra utiliser l'identité de polarisation :

$$4\ < X, Y > = ||\ X + Y\ ||^2 - ||\ X - Y\ ||^2\ \ ,\ \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

e) Soit $(X_1(t), ..., X_n(t))$ *une base de l'ensemble des solutions de* (E)*. On note* $R(t)$ *la matrice de* $M_n(\mathbb{R})$ *dont les vecteurs colonnes sont les* $X_i(t)$*. Déduire de ce qui précàde qu'il existe une matrice* M *telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} {}^{T}\!R(t)\ R(t) = M,$$

où ${}^{T}\!R(t)$ *désigne la transposée de* $R(t)$*.*

f) Soit $X(t)$ *une solution de* (E)*. Montrer qu'il existe* $X_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $X(t) = R(t)\ X_0$*.*

g) On suppose maintenant que :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t tr(A(s))\, ds = -\infty.$$

(a) En utilisant une formule du cours, montrer que :

(9) $$\lim_{t\to+\infty} \det\ R(t) = 0.$$

(b) En déduire que $\det M = 0$*.*

(c) Montrer qu'il existe une solution $X(t)$ *de* (E) *non identiquement nulle et qui tend vers* 0 *lorsque* $t \to +\infty$*.*

Indication : on utilisera la question (e) avec un choix judicieux pour X_0*.*

Exercice 6. *Un peu d'algèbre linéaire élémentaire.*
Soit $E = C^\infty(]0, +\infty[\ ;\ \mathbb{R})$ *et soit* $a \neq 0$*. On définit l'application* $T_a : E \to E$ *par* $T_a(y) = y + axy'$*.*

(1) Montrer que T_a *est un endomorphisme sur* E *et calculer son noyau.*

(2) Soient a, b *non nuls. Déterminer le noyau de* $T_a \circ T_b$ *et écrire l' équation différentielle du second ordre que vérifient les éléments de ce noyau.*

(3) Trouver les éléments de E *satisfaisant les équations différentielles :*

$$y + 8xy' + 4x^2y'' = 0\ ,$$

$$y + 2xy' + \frac{1}{2}x^2y'' = 0$$

4.3. **Systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants.**

Exercice 7. *On considère le système différentiel homogène* (E_0) *:*

$$(x', y') = \left(\frac{tx - y}{1 + t^2}, \frac{x + ty}{1 + t^2} \right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

(1) *Vérifier que* $(1, t)$ *et* $(t, -1)$ *sont solutions de* (E_0).

(2) *En déduire l'ensemble des solutions de* (E_0).

(3) *Résoudre le système différentiel*

$$(x', y') = \left(\frac{tx - y}{1 + t^2}, \frac{x + ty}{1 + t^2} \right) + \left(-\frac{t}{t^2 + 1}, -\frac{1}{t^2 + 1} \right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8. *On considère le système différentiel homogène* (E_0) *:*

$$(x', y') = (2tx - y,\ x + 2ty) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) *Diagonaliser la matrice*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$$

b) *Que remarque-t-on sur la matrice de passage ?*

c) *Résoudre le système différentiel* (E_0).

d) *Calculer la résolvante* $R(t, 0)$ *et vérifier sur cet exemple la formule du cours :*

$$det(R(t, 0)) = exp \left(\int_0^t tr(A(s))\, ds \right).$$

4.4. **Systèmes différentiels à coefficients constants.**

Exercice 9. a) *Lemme de Gronwall Ici* $\| \ \|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $y \colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *une fonction* $\mathcal{C}^1$ *telle que pour tout* $t \in [0, T]$:

$$\|y'(t)\| \leq a\|y(t)\| + b$$

Démontrer que pour tout $t \in [0, T]$ *:*

$$\|y(t)\| \leq (\|y(0)\| + bt)\, e^{at}.$$

b) *Soit* A *une matrice réelle carrée* $n \times n$ *et*

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),\ \dot{x} = Ax\}$$

Démontrer que $\mathcal{S}$ *est un espace vectoriel et que* $\mathrm{ev} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ *définie par* $\mathrm{ev}(x) = x(0)$ *est une application linéaire injective. En déduire que* $\dim \mathcal{S} \leq n$.

c) *On suppose que* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$. *En déduire que* $\dim \mathcal{S} = n$ *en explicitant une base de* $\mathcal{S}$.

d) *Faire de même lorsque* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$.

Exercice 10. *Soit A une matrice carrée réelle 2×2. Si δ est un nombre réel, on note s_δ et c_δ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$s_\delta(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ et } c_\delta(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta^k t^{2k}}{(2k)!}$$

C'est à dire ce sont des solutions de l'équation différentielle $y'' + \delta y = 0$ et

$$s_\delta(0) = 0, s'_\delta(0) = 1 \text{ et } c_\delta(0) = 1, c'_\delta(0) = 0.$$

Posons $\delta = \det A - \left(\frac{\mathrm{Tr} A}{2}\right)^2$. Démontrer que

$$e^{tA} = e^{\frac{\mathrm{Tr} A}{2} t} \left(s_\delta(t) A + c_\delta(t) \mathrm{I}_2\right)$$

Exercice 11. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que A est diagonalisable.

(2) Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

Exercice 12. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} ,$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

Exercice 13. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) On pose $N_k = \ker (A - I)^k$. Déterminer $N_1,\ N_2,\ N_3$.

c) Déterminer un supplémentaire de N_2 dans N_3.

d) En déduire une trigonalisation de A.

e) Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

4.5. **Equations différentielles linéaires du second ordre.**

Exercice 14. *Très facile !*
Intégrer les équations du second ordre suivantes :

$$y'' - 2y' + 2y = xe^x \ \ , \ \ y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x.$$

$$y'' - 4y' + 13y = 10\cos(2x) + 25\sin(2x) \ \ , \ \ y'' + y = \cot x.$$

Exercice 15. *On souhaite résoudre sur* $]0,+\infty[$, *l'équation différentielle du second ordre :*

$$(E) \quad (x+1)y'' - y' - xy = 0.$$

(1) *Chercher une solution de* (E) *sous la forme* $e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(2) *Déterminer toutes les solutions de* (E).

Exercice 16. *La méthode de Lagrange.*
On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(E) \ (t^2+1)x'' - 2x = 0.$$

(1) *Déterminer une solution* $x_1(t)$ *de* (E) *sous la forme d'un polynÙme.*

(2) *Chercher une seconde solution de* (E) *sous la forme* $x_2(t) = \lambda(t)x_1(t)$ *où* $\lambda(t)$ *est de classe* C^1.

(3) *En déduire l'ensemble des solutions de* (E).

Exercice 17. *Résolution avec les séries entières.*
On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$$

Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(0) = 1$ *et reconnaître* y *comme expression de fonctions élémentaires.*

5. Exercices pour comprendre et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

5.1. **Questions de cours.**

Exercice 18. *théorème de Cauchy-Lipschitz global.*
Soit I *un intervalle ouvert et* $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *une application continue. On souhaite résoudre l'équation différentielle (problème de Cauchy)* $x'(t) = f(t, x(t))$ *avec la condition initiale* $x(t_0) = x_0$ *où* $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^m$.

(1) *Enoncer et démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz global.*

(2) *On considère l'équation différentielle* $x'(t) = \sin(t + x(t))$. *Montrer que pour toute condition initiale* $x(t_0) = x_0$, *il existe une unique solution définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

Exercice 19. *Soit* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ *un ouvert et soit* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *une application continue.*

(1) *Donner la définition de "*f *est localement lipschitzienne (LL) par rapport à* x*".*

(2) *Montrer que* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *où* $f(t, x) = tx^2$ *est (LL) par rapport à* x.

(3) *Montrer que* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *où* $f(t, x) = t\sqrt{\mid x \mid}$ *n'est pas (LL) par rapport à* x.

Exercice 20. *On considère l'équation différentielle, dite de Clairaut,*

$$x(t) = tx'(t) - \frac{(x'(t))^2}{2}.$$

(1) *Montrer que les droites* $x(t) = Ct - C^2/2$ *sont des solutions de cette équation différentielle.*

(2) *Montrer que la parabole* $x(t) = t^2/2$ *est également solution de cette équation différentielle. Puis montrer que toutes les droites de la question précédente sont tangentes à cette parabole.*

(3) Expliquer ce qui fait que le théorème de Cauchy-Lipschtitz ne s'applique pas ici.

Exercice 21. *Résultat à connaître impérativement.*
Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^1. Montrer que f est (LL) par rapport à x.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 22. *Le théorème de Cauchy-Lipschitz local.*
Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue, (LL) en x.

(1) Enoncer et démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz local.

(2) Qu'appelle-t-on solution maximale et que peut-on dire de l'intervalle de définition d'une solution maximale ?

(3) Le graphe $(t, x(t))$ d'une solution maximale du problème de Cauchy $x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$ est appelé courbe intégrale. Montrer que l'ensemble des courbes intégrales lorsque (t_0, x_0) décrit U constitue une partition de U.

5.2. **Exercices d'applications.**

Exercice 23. *Déterminer les solutions maximales des problèmes de Cauchy (scalaires) suivants :*

(1) $x' = x^2\ ,\ x(t_0) = x_0$.
Indication : on pourra distinguer les cas $x_0 = 0, x_0 > 0, x_0 < 0$.

(2) $x' = 1 + x^2\ ,\ x(t_0) = x_0$.

Exercice 24. *On considère le problème de Cauchy scalaire $x' = x(x-1)$ avec $x(t_0) = x_0$.*

(1) Déterminer les solutions maximales de ce problème lorsque $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

(2) On suppose maintenant que x_0 est différent de 0 ou 1.

  (a) Montrer que toute solution maximale $x(t)$ ne prend jamais la valeur 0 ou 1. En déduire que $x(t)$ appartient, ou bien à $]-\infty, 0[$, ou bien à $]0, 1[$, ou bien à $]1, +\infty[$.

  (b) Déterminer les solutions maximales de ce problème de Cauchy, (on distinguera les cas $x_0 < 0,\ x_0 \in]0, 1[,\ x_0 > 1$).

Exercice 25. *On considère le problème de Cauchy scalaire :*

$$x'(t) = \frac{3}{2} \mid x(t) \mid^{\frac{1}{3}}\ ,\ \ x(0) = 0.$$

(1) Trouver une solution évidente.

(2) Montrer que la fonction $x(t) = t\sqrt{\mid t \mid}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifier qu'elle est solution de ce problème de Cauchy.

(3) Est-ce contradictoire avec le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Exercice 26. *Equation de Bernoulli.*
On veut résoudre l'équation différentielle d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$, $I \subset]0, +\infty[$,

$$y' - \frac{1}{x}y + \frac{e^x}{x}y^2 = 0\ ,\ y(x_0) = y_0,$$

où $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

(1) *En posant* $z = \frac{1}{y}$, *montrer que, formellement, l'équation précédente se ramène à une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on résolvera.*

(2) *Nous voulons maintenant résoudre rigoureusement l'équation* (E).

(a) *Montrer que* (E) *admet une unique solution maximale et que l'intervalle de définition de cette solution maximale est ouvert.*

(b) *Quelle est cette solution lorsque* $y_0 = 0$ *?*

(c) *On suppose* $y_0 \neq 0$ *et on pose* $\lambda = \frac{x_0}{y_0} - e^{x_0}$.

(i) *Montrer que si* $\lambda \geq -1$, *la solution maximale est définie sur* $]0, +\infty[$.

(ii) *Déterminer la solution maximale de* (E) *lorsque* $\lambda < -1$, *(on distinguera les cas* $y_0 > 0$ *et* $y_0 < 0$*).*

6. Contrôle du temps d'existence

6.1. Temps d'existence des solutions : critères de complétude.

Exercice 27. *Le théorème des bouts.*
Soit $x(t) :]T_-, T_+[\to \mathbb{R}$ *la solution maximale de l'équation différentielle du premier ordre avec la condition initiale :*

$$x'(t) = x^2(t) - t \ , \ x(0) = 0.$$

(1) *Montrer que* $x(t) = o(t)$ *au voisinage de* $t = 0$. *En déduire que* $x^2(t) < t$ *pour* $t \in]0, \delta[$ *pour un* δ *suffisamment petit.*

(2) *Montrer que l'on a en fait* $x^2(t) < t$ *pour* $t \in]0, T_+[$.

Indication : on pourra faire un dessin.

(3) *En déduire que* $T_+ = +\infty$.

Exercice 28. *Intégrales premières.*
Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R}^m$ *et soit* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *une application (LL). On considère le système différentiel autonome* $x'(t) = f(x(t)),\ x(t_0) = x_0$. *On dit que l'application* $h : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *est une intégrale première si la fonction* $t \to h(x(t))$ *est constante.*

(1) *Montrer qu'une fonction* $h : U \to \mathbb{R}$ *est une intégrale première si et seulement si* $\nabla h(x) \cdot f(x)$ *pour tout* $x \in U$.

(2) *On suppose que le système différentiel* $x'(t) = f(x(t))$ *possède une intégrale première telle que* $\forall r \in \mathbb{R},\ h^{-1}(\{r\})$ *soit compact. Montrer que toute solution* $x(t)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *(on dit que le champ* f *est complet).*

(3) *Montrer que le champ de vecteurs* f *défini sur* $\mathbb{R}^3$ *par* $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ *est complet. On pourra commencer par montrer que* $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *est une intégrale première.*

(4) *Pouvait-on démontrer ce dernier résultat d'une autre façon ?*

Indication : on pourra vérifier que le champ f *est uniformément lipschitzien.*

Exercice 29. *théorème de majoration a priori.*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application (LL). On considère le problème de Cauchy autonome $x'(t) = f(x(t)),\ x(t_0) = x_0$. On suppose que $x(t)$ vérifie une majoration a priori :

$$\forall T > 0,\ \exists K_T \subset U \text{ compact},\ \forall \mid t \mid \leq T,\ x(t) \in K_T.$$

On note $x(t)$ la solution maximale définie sur $]T_-, T_+[$ et on pose $V = \mathbb{R} \times U$ ouvert de $\mathbb{R}^{m+1}$. On considère l'application $g : V \to \mathbb{R}^{m+1}$ définie par $g(x_0, x) = (1, f(x))$.

(1) Vérifier que g est(LL).

(2) On considère le système différentiel autonome $y'(t) = g(y(t)),\ y(t_0) = (t_0, x_0)$. Déterminer la solution maximale $y(t)$ en fonction de $x(t)$.

(3) On suppose que $T_+ < +\infty$ et soit $T > T_+$. On pose $\tilde{K}_T = [-T, T] \times K_T \subset V$ compact. Montrer qu'il existe un $t < T_+$ tel que $y(t)$ sort du compact $\tilde{K}_T$.

(4) Conclure.

Exercice 30. *Soit $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe des constantes A et B telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors*

$$\|X(x)\| \leq a\|x\| + b.$$

En se servant du lemme de Gronwall, démontrer que les solutions maximales de l'équation différentielles

$$\dot{x} = X(x)$$

sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31. *On note $\langle\ .\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe des constantes A et B telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors*

$$\langle X(x), x\rangle \leq a\|x\| + b.$$

En se servant du lemme de Gronwall, démontrer que les solutions maximales du problème de Cauchy

$$\dot{x} = X(x), x(0) = x_0$$

sont définies sur $\mathbb{R}_+$. Énoncer une condition similaire pour les solutions du même problème de Cauchy soient définies sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 32. *Equation de Hamilton.*
Soit $V \in C^2(\mathbb{R})$ un potentiel positif. On considère le système Hamiltonien sur $\mathbb{R}^2$:

$$(q'(t), p'(t)) = (p(t), -V'(q(t))),\ \ (q(t_0), p(t_0)) = (q_0, p_0).$$

(1) Montrer que l'énergie totale $a(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ est une intégrale première du système.

(2) En utilisant le théorème de majoration a priori, montrer que la solution $(q(t), p(t))$est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 33. *On considère l'équation différentielle de Riccati*

$$(R) \qquad x'(t) = 2t\, x(t) + x^2(t) + t^2 - 1,$$

avec la condition initiale $x(0) = 1$.

(1) Montrer qu'il existe une unique solution maximale $x(t)$ définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$.

(2) *Soit $x_0(t)$ une solution particulière de (R). On pose $y(t) = x(t) - x_0(t)$.*
Vérifier que $y(t)$ est solution de l'équation différentielle de Bernoulli :

$$(B) \quad y'(t) = 2(t + x_0(t))\, y(t) + y^2(t),$$

avec la condition initiale $y(0) = 1 - x_0(0)$.

(3) *Chercher une solution particulière de l'équation (R) de la forme $x_0(t) = at + b$ o˘ $a, b \in \mathbb{R}$.*

(4) *Montrer que $y(t)$ ne s'annule jamais sur $]T_-, T_+[$ et résoudre l'équation (B).*

(5) *En déduire la solution de (R) vérifiant $x(0) = 1$ et préciser l'intervalle $]T_-, T_+[$.*

Exercice 34. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On suppose que $\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) > 0$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{F(y)}\, dy$ est convergente. On considère le problème de Cauchy*

$$x'(t) = F(x(t)) \ , \ x(t_0) = x_0 \ , \quad \text{avec } (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2.$$

On notera $]T_-, T_+[$ l'intervalle de définition de la solution maximale $x(t)$ et on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{F(y)}\, dy$.

(1) *Montrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.*

(2) *Montrer que $G(x(t)) = t - t_0$.*

(3) *En déduire une expression de $x(t)$ et expliciter $]T_-, T_+[$*

Exercice 35. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $k-$lipschitzienne, $(k > 0)$. On considère le problème de Cauchy*

$$(C) \quad x'(t) = f(x(t)) \ , \ x(0) = x_0.$$

(1) *Quel est l'intervalle de définition $]T_-, T_+[$ de la solution maximale ?*

(2) *Déterminer la solution maximale lorsque $f(x_0) = 0$.*

(3) *Le but de ce problème est de démontrer l'estimation suivante pour la solution maximale $x(t)$:*

$$(E) \quad |\, x(t) - x_0 \,| \le |\, t \,|\, |\, f(x_0) \,|\, e^{k|t|} \ , \ \forall t \in]T_-, T_+[.$$

Pour simplifier, on ne considèrera que le cas o˘ $t > 0$.

(a) *Montrer que pour $t \ge 0$, $|\, e^{kt} - 1 \,| \le\ kt\, e^{kt}$.*

(b) *Lorsque $f(x) = kx$, déterminer explicitement $x(t)$ et vérifier que (E) est satisfaite.*

(c) *On se place désormais dans le cas général. Montrer que :*

$$(1) \qquad |\, x(t) - x_0 \,| \le\ t\ |\, f(x_0) \,| + k \int_0^t \ |\, x(s) - x_0 \,|\ \ ds.$$

(d) *On pose $G(t) = k \displaystyle\int_0^t \ |\, x(s) - x_0 \,|\ \ ds\, e^{-kt}$. Ecrire l'inégalité (1) à l'aide de $G(t)$ et en déduire que :*

$$G'(t) \ \le\ kt\ |\, f(x_0) \,|\ \ e^{-kt}.$$

(e) *En déduire que :*

$$G(t)\ \le |\, f(x_0) \,|\ \left(\frac{1}{k}(1 - e^{-kt}) - te^{-kt} \right).$$

(f) *En déduire l'estimation* (E).

(4) *A l'aide de* (E)*, retrouver la réponse à la première question de cet exercice.*

7. Sur la stabilité des points d'équilibres des équations différentielles

7.1. **Questions de cours.**

Exercice 36. *Notion de point d'équilibre.*
Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ *un ouvert et soit* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *une application de classe* C^1*. On considère le système dynamique* $x'(t) = f(x(t))$.

(1) *Qu'appelle-t-on flot du champ de vecteur* f *?*

(2) *Donner la définition de point d'équilibre.*

(3) *Donner la définition avec des quantificateurs de l'assertion suivante :* x_0 *est un point d'équilibre stable.*

(4) *Quand dit-on que* x_0 *est est point d'équilibre asymptotiquement stable ?*

Exercice 37.
On considère le système dynamique défini sur $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(x', y') = (-2y, x).$$

(1) *Montrer que* $(0, 0)$ *est un point d'équilibre stable.*

(2) *Est-il asymptotiquement stable ?*
Indication : on rappelle que $H(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ *est une intégrale première du système.*

Exercice 38. *On considère le système dynamique défini sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(x', y') = (-x, y).$$

Montrer que $(0, 0)$ *est un point d'équilibre instable.*

Exercice 39. *On considère le système dynamique défini sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(x', y') = (y, -x + \alpha y) \ \ , \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(1) *Déterminer le point d'équilibre.*

(2) *Montrer que le point d'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si* $\alpha < 0$.
Indication : on pourra étudier les valeurs propres de la matrice associée à ce système.

(3) *Dessiner les portraits de phase pour* $\alpha = 0$ *et* $\alpha = 2$

7.2. **Le théorème de Liapounov.**

Exercice 40. *Question de cours.*
Enoncer et démontrer le théorème de Liapounov.
On considère le sytéme différentiel non linéaire sur $\mathbb{R}^3$ *:*

$$(x', y', z') = (2y(z - 1), -x(z - 1), -z^3).$$

(1) *Déterminer l'unique point d'équilibre.*

(2) *Chercher une fonction de Liapounov de la forme* $L(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ *avec* $a, b, c \geq 0$.

(3) Conclusion.

Exercice 41. *Fonction de Liapounov pour un système hamiltonien.*
Soit $V \in C^2(\mathbb{R})$ un potentiel. On considère le système hamiltonien sur $\mathbb{R}^2$:

$$(q'(t), p'(t)) = (p(t), -V'(q(t))), \quad (q(t_0), p(t_0)) = (q_0, p_0).$$

(1) Vérifier que les points d'équilibre sont de la forme $(x_0, 0)$ où x_0 doit satisfaire une hypothése.

(2) On suppose que $V(x) > V(x_0)$ pour $x \neq x_0$ dans un voisinage de x_0 (puits de potentiel). Montrer que $(x_0, 0)$ est stable. Ce point est-il asymptotiquement stable ?

Indication : on pourra utiliser une intégrale première du système pour construire une fonction de Liapounov.

Exercice 42. *Linéarisé d'un système différentiel.*

(1) Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un voisinage ouvert de l'origine. On définit l'application $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 par $f(x) = Ax + f_1(x)$. On suppose que les valeurs propres de la matrice $A \in M_m(\mathbb{R})$ sont de parties réelles strictement négatives et que $f_1(x) = o(|| \, x \, ||)$. On considère le système différentiel $x'(t) = f(x(t))$.

(2) Vérifier que l'origine est un point d'équilibre.

(3) On définit la fonction

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \ || \, e^{tA} x \, ||^2 \ dt.$$

(4) Montrer que $L(x)$ existe et que la fonction L est différentiable.

(5) Montrer que $\forall h \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla L(x) \cdot h = 2 \int_0^{+\infty} \ e^{tA} x \ \cdot \ e^{tA} h \, dt.$$

(6) Montrer que L est une fonction de Liapounov.

(7) Conclusion.

Exercice 43. *Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ ouvert quelconque, f de classe C^1 et soit $x_0 \in U$ un point d'équilibre. On suppose que la différentielle de f au point x_0 n'a que des valeurs propres de parties réelles strictement négatives. Montrer que x_0 est asymptotiquement stable.*

Exercice 44. *On étudie le système différentielle (une modification du modéle de Lotka-Volterra) :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y - ax) \\ \dot{y} = y(x - 1) \end{cases}$$

(1) Déterminer les points d'équilibres de ce système en fonction du paramétre $a \in \mathbb{R}$.

(2) Discuter en fonction de a la stabilité asymptotique de ces points d'équilibres.

8. Exemple d'étude qualitative d'équations différentielles

Exercice 45. Le pendule : *Le mouvement d'un pendule de longueur ℓ dans un plan vertical est $(\ell \sin x(t),\ -\ell \cos x(t))$ où l'angle $x(t)$ est solution de l'équation différentielle*

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -K \sin x$$

et où $K = g/\ell$ est une constante positive.

Posant $v = \frac{d}{dt}x$, l'équation est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = & v \\ \\ \frac{d}{dt}v = & -K\sin x \end{cases}$$

ou encore

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}(x, v) = F(x, v).$$

avec $F(x, v) = (v, -K \sin x)$. On appellera énergie la fonction

$$E(x, v) = \frac{v^2}{2} - K \cos x$$

(1) *Vérifier que les zéros de F sont les $(k\pi, 0)$, k parcourant $\mathbb{Z}$. À quoi correspondent-ils ?*

(2) *Les trajectoires du pendule dans l'espace des états du pendule (x, v) (on dit plutÙt* espace des phases*) sont des courbes paramétrées par le temps t.*

Montrer, quand elles ne sont pas réduites à un point, qu'elles admettent une tangente en chaque état $(x(t_0), v(t_0))$.

(3) *Verifier que $\left(\dfrac{\partial}{\partial v}E(x, v),\ -\dfrac{\partial}{\partial x}E(x, v)\right) = F(x, v)$, et que E est une intégrale première du mouvement.*

(4) *Étudier E : symétries, périodicités, minimum. Montrer que les $((2k+1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont des points selles de E : minimum local dans une direction et maximum local dans une autre direction.*

(5) *Déduire de la question précedente que le pendule a seulement deux points d'équilibres (où le pendule ne bouge pas) $S = (0, -R)$ et $N = (R, 0)$. Expliquer le terme 'point d'équilibre stable' pour S et 'point d'équilibre instable' pour N.*

(6) *Dessiner les* courbes de niveau *de E : $\Gamma_C = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2;\ E(x, v) = C\}$, en distinguant les cas suivants*

   (a) $C = -K$.

   (b) $|C| < K$ *: montrer que Γ_C est alors une courbe fermée convexe dont on précisera les tangentes aux points des axes.*

   (c) $C = K$ *: montrer que Γ_K est la courbe d'équation $v = \pm 2\sqrt{K}\cos(x/2)$.*

   (d) $C > K$.

Pour une condition initiale (x_0, v_0), par convention à l'instant $t = t_0 = 0$, on note $E_0 = E(x_0, v_0)$. On veut étudier la trajectoire des solutions maximales $(x(t), v(t))$ dans chaque cas. ***On pourra admettre qu'elles sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier*** [1]*, et on s'aidera du dessin pour les questions les plus difficiles.*

(7) Indiquer le sens de parcours des trajectoires sur les lignes de niveau de E.

(8) Montrer qu'une trajectoire non constante ne passe jamais par un des points $(k\pi, 0)$.

(9) $|E_0| < K$.

(a) Montrer que le pendule a un mouvement périodique de période donnée par l'intégrale convergente

$$T = 4\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 + K\cos x)}} = \sqrt{\frac{2}{K}}\int_{-X}^X \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos X}}$$

où X annule $E_0 + K\cos x$.

(b) Vu l'utilisation du pendule pour mesurer le temps, on aimerait savoir dans quel sens varie la période en fonction de E_0. Montrer que la période tend vers l'infini quand E_0 tend vers K.

(10) $E_0 = K$.

(a) Montrer que la loi du mouvement est donnée, implicitement, par la formule suivante :

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2K(1 + \cos x)}}\ .$$

(b) En déduire que la trajectoire décrit tout un arc de Γ_K, mais en un temps infini.

(c) Décrire le mouvement du pendule dans ce cas.

(11) $E_0 > K$.

(a) Montrer que la trajectoire décrit toute une composante connexe de Γ_{E_0}.

(b) En déduire que le pendule fait des tours complets ad lib.

Exercice 46. *On étudie ici les solutions de l'équation différentielle*

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^2(t) - t.$$

a) Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y^2(t) - t \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

a une unique solution maximale.

On considère donc $y : J \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle $\dot{y}(t) = y^2(t) - t$.

On considère les ensembles du plan où la solution qui y passe à une dérivée nulle :

$$\mathcal{P}_0 = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = t\},$$

1. cette question est traitée dans le livre d'Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, 2.12.7. Elle peut aussi se déduire de l'exercice 29

ainsi que ceux où la dérivée est de signe fixé :

$$\mathcal{P}_+ = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2, y^2 \geq t\},\ \mathcal{P}_- = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2, y^2 \leq t\},$$

et le lieu des points du plan où la solution qui y passe à une dérivée seconde nulle :

$$\mathcal{C}_0 = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2, 2y^3 - 2ty - 1 = 0\},$$

ainsi que ceux où la dérivée seconde est de signe fixé :

$$\mathcal{C}_+ = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2, 2y^3 - 2ty - 1 \geq 0\},$$
$$\mathcal{C}_- = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2, 2y^3 - 2ty - 1 \leq 0\}.$$

b) *Dessiner les ensembles $\mathcal{P}_0, \mathcal{C}_0$ et indiquer où se trouve les ensembles $\mathcal{P}_\pm, \mathcal{C}_\pm$.*

c) *Montrer que $t \in]0,+\infty[\mapsto \beta(t) = \sqrt{t}$ est une barriére supérieure de notre équation différentielle ; et montrer que $t \in]0,+\infty[\mapsto \alpha(t) = -\sqrt{t}$ est une barriére inférieure de notre équation différentielle.*

d) *Démontrer que si $(t_0, y(t_0)) \in \mathcal{C}_+$ alors pour $t \geq t_0$, on a $(t, y(t)) \in \mathcal{C}_+$.* [2]

e) *Démontrer que si $(t_0, y(t_0)) \in \mathcal{C}_-$ alors pour $t \leq t_0$, on a $(t, y(t)) \in \mathcal{C}_-$.*

On étudie maintenant le futur de la solution maximale :

f) *On suppose qu'il y a $t_0 \in J$ telle que $(t_0, y_0) \in \mathcal{P}_+$.*

   i) *Démontrer que $[t_0, +\infty[\subset J$ et que pour tout $t \geq t_0$ on a $y(t) \in \mathcal{P}_+$.*

   ii) *Montrer que y est décroissante sur $[t_0, +\infty[$.*

   iii) *Démontrer qu'il y a forcément un $t_1 \geq t_0$, tel que $(t_1, y(t_1)) \in \mathcal{C}_+$:* [3]

   iv) *On sait donc que sur $[t_1, \infty[$, y est une fonction décroissante, convexe, y' est donc croissante. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} y'(t) = 0$.* [4]

   v) *Montrer que $\lim_{t \to +\infty} y(t) + \sqrt{t} = 0$.*

g) *On suppose maintenant qu'il y a $t_0 \in J$ tel que $(t_0, y(t_0)) \in \mathcal{C}_+$, et que $y(t_0) > 0$. On sait donc que sur l'intervalle $J \cap [t_0, +\infty[$, y est convexe, positive, croissante.*

   i) *Démontrer qu'il y a des constantes $a > 0, b \in \mathbb{R}$ telles que sur $J \cap [t_0, +\infty[$:*

   $$y(t) \geq at + b.$$

   [5]

   ii) *Soit $\omega = \sup J$. Montrer que $\lim_{t \to \omega} y(t) = +\infty$.* [6]

   iii) *En déduire qu'il y a des constantes $\alpha > 0$ et β telles que sur $J \cap [t_0, +\infty[$*

   $$y'(t) \geq y^2(t) - \alpha y(t) - \beta.$$

---

2. Pour cela démontrer que si $(\tau, y(\tau)) \in \partial\mathcal{C}_+ = \mathcal{C}_0$ i.e. si $y''(\tau) = 0$ alors $y'''(\tau) = 2(y^2(\tau) - \tau)^2 > 0$; c'est à dire qu'alors $y''(t) > 0$ pour $t > \tau$ et assez proche de τ.
3. si cela n'était pas vrai on aurait que sur $]t_0, \infty[$, y serait concave, décroissante donc en dessous de ces tangentes : montrer que ceci est absurde. (on pourra faire un dessin pour s'aider à raisonner)
4. On rappelle que $|y(t)| \leq \sqrt{t}$
5. Il faut utiliser la convexité de y
6. distinguer deux cas : le cas où ω est fini et celui où $\omega = +\infty$

iv) Démontrer qu'il y a $T > t_0$ telle que pour $t \in J \cap [T, +\infty[$

$$\int_{y(T)}^{y(t)} \frac{dy}{y^2 - \alpha y - \beta} \geq t - T.$$

v) En déduire que ω est fini et que $\lim_{t\to\omega} y(t) = +\infty$.

On étudie maintenant le passé de la solution maximale :

h) On veut montrer qu'il y a forcément un $t_0 \in J$ telle que $(t_0, y(t_0)) \in \mathcal{C}_-$. Pour cela on suppose que pour tout $t \in J$, $(t, y(t)) \in \mathcal{C}_+$.

i) On a donc soit $y(t) > 0$ pour tout t soit $y(t) < 0$ pour tout t. Montrer que l'on a forcément $y(t) > 0$ pour tout t. [7]

ii) y est donc une fonction positive, croissante, convexe. Montrer que $\inf J = -\infty$.

iii) Montrer que $\lim_{t\to-\infty} y'(t) = +\infty$. En déduire une absurdité.

i) Soit donc $t_0 \in J$, telle que $(t_0, y(t_0)) \in \mathcal{C}_-$. On sait donc que pour tout $t \leq t_0$ alors $(t, y(t)) \in \mathcal{C}_-$; i.e. y est concave sur $J \cap]-\infty, t_0]$

(a) Démontrer qu'il y a un $t_1 \leq t_0$ telle que $y'(t_1) > 0$.

(b) On sait alors que sur $J \cap]-\infty, t_1]$, y est croissante et concave. Démontrer qu'il y a des constantes $a > 0, b \in \mathbb{R}$ telles que sur $J \cap [t_0, +\infty[$:

$$y(t) \leq at + b$$

(c) Soit $\alpha = \inf J$. Montrer que $\lim_{t\to\alpha} y(t) = -\infty$. [8]

(d) En déduire qu'il y a des constantes $c > 0$ et d telles que sur $J \cap [t_0, +\infty[$

$$y'(t) \leq y^2(t) - cy(t) - d.$$

(e) Démontrer qu'il y a $T \leq t_1$ telle que pour $t \in J \cap]-\infty, T]$

$$\int_{y(t)}^{y(T)} \frac{dy}{y^2 - cy - d} \leq T - t.$$

(f) En déduire que α est fini et que $\lim_{t\to\alpha} y(t) = -\infty$.

j) Représenter sur un dessin vos résultats.

Exercice 47. *Modèle Proie-Prédateur de Lotka-Volterra On étudie l'équation différentielle*

$$(LV) \begin{cases} \frac{d}{dt}x = & x(a - by) \\ \\ \frac{d}{dt}y = & y(-c + dx) \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des constantes strictement positives.

a) Démontrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ alors il existe une unique solution maximale de l'équation différentielle (LV) telle que $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$

b) Démontrer que la solution maximale de cette équation partant en $t = 0$ de (x_0, y_0) où $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ reste dans le quart de plan ouvert $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0 \text{ et } y > 0\}$.

---

7. Montrer que sinon sur un intervalle $J \cap [0, t_0]$, y reste dans un compact
8. distinguer deux cas : le cas où α est fini et celui où $\alpha = -\infty$

c) Préciser les points d'équilibre de l'équation différentielle (LV).

d) Montrer que la fonction $H(x, y) = dx + by - c\ln(x) - a\ln(y)$ *est une intégrale première. Étudier les lignes de niveau de* H *et démontrer que les solutions maximales de l'équation différentielle* (LV) *partant en* $t = 0$ *d'un point de* D *sont définie sur* $\mathbb{R}$.

e) On décompose le quart de plan en le découpant le long des droites $y = a/b$ *et* $x = c/d$ *:*

$$D_{-,-} = \{(x, y) \in D, x < c/d \text{ et } y < a/b\}$$
$$D_{-,+} = \{(x, y) \in D, x < c/d \text{ et } y > a/b\}$$
$$D_{+,-} = \{(x, y) \in D, x > c/d \text{ et } y < a/b\}$$
$$D_{+,+} = \{(x, y) \in D, x > c/d \text{ et } y > a/b\}.$$

Démontrer qu'une solution maximale de l'équation différentielle (LV) *rentrant dans un de ces ouverts doit en sortir.*

f) Démontrer que les solutions maximales de l'équation différentielle (LV) *sont périodiques.*