Exercices Agrégation: Théorie de la Mesure

September 5, 2016

Cette fiche d'exercice s'appuie sur le document de rappels de cours intitulé Tribus, Fonctions Mesurables.

Exercice 1. Soit X un ensemble. Donner des conditions sur X pour que les classes suivantes soient des tribus.

1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{x\}, X\}$ où $x \in X$.

2) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, X\}$ où $x \in X$.

3) La classe des parties finies de X.

4) La classe des parties dénombrables de X.

Exercice 2. Soit E un ensemble infini.

1) Decrire la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de E.

2) Decrire la tribu engendrée par l'ensemble des parties finies de E.

Exercice 3. Soit $f : X \mapsto Y$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer par un contre exemple que la classe des images directes $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ n'est en géneral pas une tribu sur Y.

Exercice 4. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$.

1) Montrer que $A = \{x \in \Omega\colon (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ converge dans } \mathbb{R}\}$ est un événement de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ mesurable dans $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$.

1) Montrer que $\mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(]a, \infty], a \in \mathbb{R})$.

2) Prouver que les applications

$$w \mapsto \sup\{f_n(w); n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad w \mapsto \inf\{f_n(w); n \in \mathbb{N}\}$$

sont applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\bar{\mathbb{R}}))$.

3) Prouver que les fonctions $\limsup_{n\to\infty} f_n$ et $\liminf_{n\to\infty} f_n$ sont mesurables.

4) On suppose pour cette question que $\forall w \in \Omega$, la suite $(f_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}$. Montrer que la fonction $\lim_{n\to\infty} f_n$ est mesurable.

Exercice 6. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite symétrique si $A = -A$, ou $-A = \{-x, x \in A\}$. Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\colon A = -A\}$ l'ensemble des parties symétriques de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\mathcal{A} = \{A \cup (-A) \colon \; A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$.

2) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.

3) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$

4) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

5) Montrer que $\mathcal{A}$ est la tribu image réciproque de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par la fonction valeur absolue $V : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $N \subset \Omega$ est dite μ-négligeable si il existe $H \in \mathcal{A}$ telle que $N \subset H$ et $\mu(H) = 0$. Une tribu est dite complète si elle contient tous les ensemble μ-négligeables. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeable.

1) Montrer que

$$\mathcal{A}_\mu := \{A \cup N \colon \; A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$$

est la plus petite tribu complète contenant $\mathcal{A}$. On l'appelle tribu μ-complétée de $\mathcal{A}$.

2) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables. Soit $B \cup C$ une partition de Ω avec $B, C \in \mathcal{A}$ et soit $h : (B, \mathcal{A}_B) \mapsto (E, \mathcal{E})$ et $g : (C, \mathcal{A}_C) \mapsto (E, \mathcal{E})$ deux applications mesurables. On rappelle que $\mathcal{A}_B$ et $\mathcal{A}_C$ sont les tribus traces de $\mathcal{A}$ sur B et C. Montrer que

$$k : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (E, \mathcal{E}) \tag{0.0.1}$$
$$x \mapsto h(x) \quad \text{si } x \in B \tag{0.0.2}$$
$$x \mapsto g(x) \quad \text{si } x \in C \tag{0.0.3}$$

est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{E})$.

On considère à présent deux espaces métriques (X, d_1) et (Y, d_2) munis de leur tribu Borélienne $\mathcal{B}_X$ et $\mathcal{B}_Y$ respectives. On considère μ une mesure sur $(X, \mathcal{B}_X)$ et on considère $f : X \mapsto Y$ une application continue μ-presque partout sur X.

3) Utilisez 2) pour montrer que f est mesurable de $(X, \overline{\mathcal{B}}_X)$ dans $(Y, \mathcal{B}_Y)$, avec $\overline{\mathcal{B}}_X$ la tribu μ-complétée de $\mathcal{B}_X$.

Exercice 8. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et dénombrable.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert U de $\mathbb{R}$, dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(U) \leq \varepsilon$.

2) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Si U est borné, montrer que $\lambda(U) < \infty$. La réciproque est elle vraie?

3) Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Si A contient un ouvert non vide, montrer que $\lambda(A) > 0$. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 9. Soit (E, d) un espace métrique et $\mathrm{Bor}(E)$ la tribu Borélienne associée. Soit μ une mesure Borélienne finie sur E. L'objectif de cet exercice est de montrer que pour tout $A \in \mathrm{Bor}(E)$ on a

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\mu(O) \colon \; O \text{ ouvert de E}, \; A \subset O\} \\ &= \sup\{\mu(F) \colon \; F \text{ fermé de E}, \; F \subset A\}. \end{aligned} \tag{0.0.4}$$

On définit à présent une sous famille de $\mathrm{Bor}(E)$, i.e.,

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathrm{Bor}(E) \colon \; A \text{ vérifie } (0.0.4)\}.$$

1) Soit F un fermé de E, montrer que $F^c = \{x \in E\colon\ d(x, F) > 0\}$. En déduire que pour tout ouvert O de E on a

$$\mu(O) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in E\colon\ d(x, O^c) \geq \tfrac{1}{n}\}).$$

2) Déduire de 1) que $\mathcal{A}$ contient tous les ouverts de E.

3) Montrer que $A \in \mathrm{Bor}(E)$ vérifie (0.0.4) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe F un fermé de E et O un ouvert de E tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

4) Déduire de 3) que $\mathcal{A}$ est une tribu. Conclure.

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable ou $\mu(\Omega) = 1$ (on parle d'espace probabilisé). La mesure μ est dite sans atome c'est à dire que $\forall A \in \mathcal{A}$ telle que $\mu(A) > 0$ il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $B \subset A$ et $\mu(A) > \mu(B) > 0$.

1) Soit $A \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < \mu(A)$. Montrer qu' il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $B \subset A$ et $0 < \mu(B) < \varepsilon$.

2) Soit $A \in \mathcal{A}$ et $t \in \mathbb{R}^+$ tels que et $0 < t < \mu(A)$. On veut prouver qu'il existe $B \subset A$ tel que $t/2 \leq \mu(B) \leq t$. Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\big\{B \in \mathcal{A}\colon\ B \subset A,\ \mu(B) \in [\tfrac{t}{2}, t]\big\} = \emptyset$$

On considère $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{A}\colon\ B \subset A, \mu(B) \leq \frac{t}{2}\}$.

- Prouver que $\mathcal{C}$ est stable par union finie.
- Soit $\alpha = \sup\{\mu(A); A \in \mathcal{C}\}$. Prouver que $\alpha = \frac{t}{2}$ et en déduire une contradiction.

4) En conclure que $\mu(\mathcal{A}) = [0, 1]$.