UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Année 2017-2018, Agrégation Externe

Thème N° II : Groupe symétrique

Notations

— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
— Si E est un ensemble, $S(E)$ est le groupe des permutations de E.
— $S_n = S(\mathbb{N}_n)$ est le $n^{\text{ième}}$ groupe symétrique.
— Id est l'élément neutre de S_n .
— Si G est un groupe, $D(G)$ est son groupe dérivé : c'est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs, c'est-à-dire les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$.
— $(a_1\, a_2\, \cdots\, a_p)$ désignera le p-cycle qui envoie a_1 sur a_2, a_2 sur a_3, etc, a_p sur a_1.
— On notera $\omega(\sigma)$ l'ordre de l'élément σ de S_n.

Prérequis

— Décomposition en cycles d'une permutation.
— Classes de conjugaison dans S_n.
— Générateurs du groupe S_n.
— Opération d'un groupe sur un ensemble.
— Théorème de Sylow.

Références

Pour les généralités sur le groupe symétrique, la signature et le groupe alterné, voir [Ulmer, chapitre 5], [Ramis & Warusfel, pages 133-137] [1] ou [Szpirglas, pages 243-249] [2].

Commentaires

Inutile de rappeler l'importance des groupes symétriques. Il faut absolument savoir construire le morphisme de signature (à vous de choisir votre définition, mais il faut savoir passer de l'une à l'autre) et montrer qu'il n'y en a pas d'autre. La démonsration de la simplicité de A_n (voir [Szpirglas, théorème 6.109 p. 267] ou [Risler & Boyer, pages 74-75]) est un développement classique à l'oral, de même que le fait que A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60 ([Szpirglas, pages 277-278] ou [Jeanneret & Lines, page 128]).

A Groupe alterné

1) Montrer qu'il existe au plus deux morphismes de groupes de S_n dans $\mathbb{C}^*$.

2) Pour $\sigma \in S_n$, $I(\sigma)$ désigne le nombre d'inversions de σ (*i.e.* le nombre de couples $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $i < j$, tels que $\sigma(i) > \sigma(j)$), et $N(\sigma)$ désigne le nombre d'orbites de σ. Montrer que l'application $\varepsilon : S_n \to \mathbb{C}^*$ définie par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} = (-1)^{n-N(\sigma)}$$

est un morphisme de groupes non trivial.

Cet unique morphisme non trivial de S_n dans $\mathbb{C}^*$ est appelé *morphisme de signature*, et est généralement noté ε. Son noyau, noté $A(\mathbb{N}_n)$ ou A_n, est le $n^{\text{ième}}$ *groupe alterné*. Quelle est son image ?

1. À noter que les livres de [Ulmer] et [Ramis & Warusfel] ne donnent pas la même définition de la signature : à vous de choisir.
2. Attention : la démonstration de la proposition 6.106 est incomplète car on n'y trouve pas de construction de la signature.

3) a) Quel est le cardinal de A_n ?

b) Déterminer A_2 et A_3.

c) Montrer que si $n \geq 3$, A_n est engendré par les 3-cycles.

d) Montrer que si $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans A_n.

e) Déterminer les classes de conjugaison dans A_5.

f) En déduire que A_5 est un groupe simple.

4) On suppose que $n \geq 6$, et on se propose de démontrer que A_n est un groupe simple. Soit donc H un sous-groupe distingué de A_n , $H \neq \{\mathrm{Id}\}$.

a) Montrer qu'il existe $\rho \in H \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et $E \subset \mathbb{N}_n$ de cardinal 5, tels que $\rho(a) = a$ si $a \notin E$.

b) Contruire un morphisme injectif Φ de $A(E)$ dans A_n.

c) Montrer que $H \cap \Phi\big(A(E)\big) = \Phi\big(A(E)\big)$.

d) En déduire que H contient un 3-cycle. Conclure.

5) Soit G un groupe simple d'ordre 60.

a) Déterminer le nombre de 5-Sylow de G.

b) En déduire un morphisme injectif de G dans S_6. On notera H l'image de ce morphisme.

c) H est-il abélien ? En déduire que $H = D(H)$, puis que $H \subset A_6$.

d) On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes à gauche de A_6 modulo H, et on note $\Phi : H \to S(\mathcal{E})$ le morphisme donné par l'action de H sur $\mathcal{E}$ par translation à gauche. Déterminer le noyau de Φ.

e) Pour $h \in H$, calculer $\Phi(h)(\bar{\mathrm{Id}})$. En déduire que H est isomorphe à un sous-groupe de S_5.

f) En déduire que G est isomorphe à A_5.

B Sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$

1) Déterminer les centres de S_n et de A_n pour tout n.

2) Déterminer tous les sous-groupes de S_3. Lesquels sont distingués ?

3) a) Dans S_4, montrer que deux 3$-$cycles non inverses l'un de l'autre engendrent A_4. En déduire que A_4 ne contient pas de sous-groupe d'ordre 6.

b) Déterminer les sous-groupes de A_4. Lesquels sont distingués dans A_4 ?

c) Déterminer les sous-groupes distingués de S_n pour $n \geq 4$.

d) Montrer que A_4 est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

4) Déterminer les groupes dérivés de A_n et S_n.

5) Montrer que tout sous-groupe d'indice n de S_n est isomorphe à S_{n-1}.

C Matrices de permutation

Voir [Beck *et al.* , pages 187-188 & exercice 6.7 pages 321-324].

Soient $\mathbb{K}$ un corps et n un nombre entier, $n \geq 2$.

1) Montrer que l'on définit une action à gauche de S_n sur $\mathbb{K}^n$ par

$$\sigma \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \quad \text{si} \quad \sigma \in S_n \quad \text{et} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

et que, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$.
Montrer que cette action induit un morphisme injectif $P : S_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$.

2) Pour $\sigma \in S_n$, calculer le déterminant et la trace de $P(\sigma)$.

3) Déterminer les valeurs propres de $P(\sigma)$ pour $\sigma \in S_n$. L'endomorphisme $P(\sigma)$ est-il trigonalisable ? diagonalisable ?

4) a) Montrer que si σ et τ sont deux éléments conjugués dans S_n, il en est de même pour $P(\sigma)$ et $P(\tau)$ dans $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$.

b) Soient $c \in S_n$ un k-cycle, $m \in \mathbb{N}^*$ et $d = k \wedge m$ le pgcd de k et m. Montrer que c^m se décompose en un produit de d cycles à supports disjoints, chacun de longueur $\frac{k}{d}$ (on pourra commencer par le cas où m divise k).

En déduire que pour toute permutation σ, le nombre de cycles intervenant dans la décomposition de σ^m est égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k \wedge m)N_k(\sigma)$, où $N_k(\sigma)$ est le nombre de k-cycles dans la décomposition de σ $\big(N_1(\sigma)$ est le nombre de points fixes de $\sigma\big)$.

c) Pour $\sigma \in S_n$, déterminer la dimension de $\ker\big((P(\sigma) - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}\big)$.

d) Soit $(\sigma, \tau) \in S_n^2$ tel que $P(\sigma)$ et $P(\tau)$ soient conjugués dans $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$. Montrer que pour tout entier non nul m, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(k \wedge m)N_k(\sigma) = \sum_{k=1}^{n}(k \wedge m)N_k(\tau)\,.$$

En déduire que σ et τ sont conjugués dans S_n (théorème de Brauer).

D Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$

Voir [Szpirglas, page 270] [3] ou [Francinou *et al.* , exercice 2.22 page 69].

Dans toute cette partie, on suppose que $n \geq 3$.

1) Soit f un automorphisme de S_n qui transforme toute transposition en une transposition. Montrer que f est intérieur, c'est-à-dire qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $f(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$ pour tout $\tau \in S_n$ (on pourra utiliser le fait que les transpositions $(1\, i)$, $2 \leq i \leq n$, engendrent S_n).

Pour $\tau \in S_n$, on note $C(\tau) = \{\sigma \in S_n \,/\, \sigma\tau = \tau\sigma\}$ le centralisateur de τ dans S_n.

2) Montrer que si τ est une transposition, il existe une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to C(\tau) \to S_{n-2} \to 1\,.$$

3) Soit f un automorphisme de S_n, τ une transpositon de S_n et $\tau' = f(\tau)$.

a) Montrer que τ' se décompose en un produit de transpositions à supports deux à deux disjoints. On notera k le nombre de transpositions intervenant dans cette décomposition.

b) Montrer que $C(\tau')$ contient un sous-groupe distingué de cardinal $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

c) Montrer que $C(\tau')$ est isomorphe à $C(\tau)$. En déduire que S_{n-2} contient un sous-groupe distingué de cardinal supérieur ou égal à 2^{k-1}.

d) Montrer que si $n \neq 6$ alors $k = 1$.

4) Conclure que si $n \neq 6$, on a $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Int}(S_n)$ et qu'il est isomorphe à S_n.

5) On se propose de démontrer ici que $\mathrm{Aut}(S_6) \neq \mathrm{Int}(S_6)$.

a) Déterminer le nombre de 5-Sylow dans S_5. Soient P un de ces 5-Sylow et K son normalisateur. Quel est l'indice de K dans S_5 ?

b) Montrer que S_5 opère fidèlement et transitivement sur S_5/K ; en déduire un morphisme injectif θ de S_5 dans S_6 tel qu'il n'existe pas de x dans $\mathbb{N}_6$ vérifiant : $\sigma(x) = x$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Im}\,\theta$.

c) En considérant l'action de S_6 sur $S_6/\,\mathrm{Im}\,\theta$ par translation à gauche, construire un automorphisme f de S_6 qui n'est pas intérieur.

6) On précise ici ce qui précède en montrant que $\mathrm{Int}(S_6)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Aut}(S_6)$.

a) Déterminer le nombre de transpositions, de doubles transpositions et de triples transpositions dans S_6.

3. C'est essentiellement la démonstration présentée ici.

b) En déduire qu'un automorphisme extérieur de S_6 envoie une transposition sur un produit de trois transpositions à supports disjoints.

c) Si f et g sont deux automorphismes extérieurs de S_6, que peut-on dire de $g^{-1} \circ f$? En déduire que $\mathrm{Int}(S_6)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Aut}(S_6)$.

Bibliographie

Beck, Vincent, Malick, Jérôme, & Peyré, Gabriel. 2004. *Objectif Agrégation.* H&K.

Francinou, Serge, Gianella, Hervé, & Nicolas, Serge. 2001. *Exercices de mathématiques. Oraux-XENS, algèbre 1.* Cassini.

Jeanneret, Alain, & Lines, Daniel. 2008. *Invitation à l'algèbre.* Cépaduès Éditions.

Ramis, Jean-Pierre, & Warusfel, André. 2007. *Mathématiques - Tout en un pour la licence - L1.* Dunod.

Szpirglas, Aviva. 2009. *Mathématiques L3 : Algèbre.* Pearson.

Risler, Jean-Jacques, & Boyer, Pascal. 2006. *Algèbre pour la licence 3 - Groupes, anneaux, corps.* Dunod.

Ulmer, Felix. 2012. *Théorie des groupes.* Ellipse.