Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2017-2018
Agrégation Externe de Mathématiques

Intégration et analyse de Fourier

1 Les grands théorèmes de convergence.

1.1 Pour s'entraîner.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \, d\theta \to 0$ lorsque $n \to +\infty$:
   (a) Avec la théorie de l'intégrale de Riemann.
   (b) Avec la théorie de l'intégrale de Lebesgue.
   (c) Conclusion ?

2. Démontrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx)\, e^{-x}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2}.$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1} \frac{nx}{1+n^4x^4}\, dx \;=\; 0.$$
$$\int_0^{1} \frac{-\ln(1-t)}{t}\, dt \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3. *Calcul de l'intégrale de la Gaussienne I.*
   On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$I_n \;=\; \int_o^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n\, dx.$$
   (a) Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$
   (b) Vérifier que :
$$I_n \;=\; \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\, dt.$$

(c) Montrer par récurrence que :

$$I_n \;=\; \sqrt{n}\;\frac{2.4.\;...\;.(2n)}{1.3.\;...\;.(2n+1)}.$$

(d) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\;dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(On rappelle la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\;(\frac{n}{e})^n$ lorsque $n \to +\infty$).

2 Intégrales dépendant d'un paramètre.

2.1 La transformée de Fourier.

4. *Préliminaire : calcul de l'intégrale de la Gaussienne II.*

On définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$F(x) \;=\; \int_0^1 \frac{e^{-x(1+u^2)}}{1+u^2}\;du$$

(a) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(b) On pose $g(x) = F(x^2)$ et soit $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\;dt$. Montrer que g et h sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée de l'application $g(x) + h^2(x)$.

(c) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\;dt \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5. *Transformée de Fourier de la Gausienne.*

Soit $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. On définit la transformée de Fourier de f par :

$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\;f(t)\;dt.$$

(a) Vérifier que cette intégrale a bien un sens.

(b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par F.

(d) En déduire que $F = \sqrt{2\pi} f$.

6. *Transformée de Fourier de gaussiennes complexes.*

   (a) Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re\ z > 0\ \}$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, montrer que :

   $$F(z) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}\ e^{-z\frac{t^2}{2}}\ dt$$

   est holomorphe sur Ω.

   (b) Montrer que, $\forall z \in \Omega$,

   $$F(z) \ = \ \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\ e^{-\frac{\xi^2}{2z}}$$

   (Remarque : pour $z \in \Omega$, on prendra $Arg\ \sqrt{z} \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$).

   (c) Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que : $\forall \mu \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $(\mu, \lambda) \neq (0,0)$,

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mu+i\lambda)\frac{t^2}{2}}\ f(t)\ dt \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi(\mu+i\lambda)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2(\mu+i\lambda)}}\ \widehat{f}(\xi)\ d\xi$$

   (On pourra commencer par le cas $\mu > 0$).

7. *Méthode de Laplace et de la phase stationnaire.*

   (a) Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que, $\forall N \geq 0$, on a lorsque $\lambda \to +\infty$, :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\frac{t^2}{2}}\ f(t)\ dt \ \sim \ \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k\ k!}\ \lambda^{-(k+\frac{1}{2})}\ f^{(2k)}(0) \ + \ O(\lambda^{-N-\frac{3}{2}}).$$

   (b) Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que, $\forall N \geq 0$, on a lorsque $\lambda \to +\infty$, :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\ \lambda\frac{t^2}{2}}\ f(t)\ dt \ \sim \ \sqrt{2\pi}\ e^{-i\ \frac{\pi}{4}} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-i)^k)}{2^k\ k!}\ \lambda^{-(k+\frac{1}{2})}\ f^{(2k)}(0) \ + \ O(\lambda^{-N-\frac{3}{2}}).$$

2.2 La fonction Gamma.

8. Pour $x > 0$, on définit la fonction Gamma par :

   $$\Gamma(x) \ = \ \int_0^{+\infty} e^{-t}\ t^{x-1}\ dt.$$

   (a) Vérifier que cette intégrale a bien un sens.

   (b) Montrer que $\Gamma \in C^\infty(]0, +\infty[)$.

   (c) Montrer que Γ est convexe.

(d) Montrer que Γ est logarithmiquement convexe, (2 façons différentes).

(e) Vérifier les relations suivantes : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(f) Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque $x \to 0$.

9. *Prolongement analytique de la fonction Gamma.*

   (a) Montrer que la fonction $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ dt$ est holomorphe sur le demi-plan $\Re e\ z > 0$, et que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

   (b) Que peut-on en déduire par rapport à l'exercice précédent ?

   (c) Montrer que si $\Re e\ z > 0$, $\Gamma(z) = \displaystyle\lim_{n\Rightarrow\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\ dt.$

   (d) Montrer que : $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\ dt = \frac{n!\ n^z}{z(z+1)...(z+n)}.$

   (e) En déduire que pour $z \in \mathbb{C}$,

   $$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

   où $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$ désigne la constante d'Euler. Conclusion ?

   (f) En déduire que Γ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$.

   (g) Déterminer les pôles, (on précisera leur multiplicité et leur résidu).

   (h) Calculer la dérivée logarithmique de $\Gamma(z)$ pour $z \notin \mathbb{Z}^-$, et en déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

2.3 Prolongement analytique de la fonction Zeta.

10. *Prérequis : prolongement de la fonction Gamma.*

    (a) Montrer que si $\Re e\ z > 1$, $\Gamma(z)\ \zeta(z) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}\ t^{z-1}\ dt.$

    (b) Vérifier que le développement asymptotique de $\dfrac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}$ en 0 est de la forme

    $$\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \ \sim\ \frac{1}{t} + \sum_{n\geq 0} a_n\ t^n.$$

    (c) Montrer que ζ se prolonge méromorphiquement sur $\mathbb{C}$ avec comme pôle unique simple $z = 1$.

    (d) Calculer le résidu de la fonction ζ au point 1.

3 Théorème de Fubini et espace L^p.

3.1 Le théorème de Fubini.

11. *Un grand classique.*

    On définit $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$. En intégrant f de deux manières différentes sur $[0,T]\times\mathbb{R}^+$, montrer que :

    $$\int_0^T \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\, \left(1 - e^{-yT}(\cos T + y\sin T)\right)\, dy.$$

    En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

12. *Calcul du volume de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$.*

    (a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que :

    $$\int_{\mathbb{R}^n} \mid f(x) \mid\; dx \;=\; \int_0^{+\infty} m(\mid f \mid > t)\; dt,$$

    où m désigne la mesure de Lebesgue.

    (b) En utilisant la fonction $f(x) = e^{-|x|^2}$, montrer que :

    $$Vol\ (S^{n-1}) \;=\; \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

13. *Formule de duplication de la fonction Gamma.*

    (a) A l'aide du théorème des résidus, montrer que pour tout $t \geq 0$,

    $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\, \frac{1}{x^2+1}\, dx \;=\; \pi\ e^{-t}$$

    (b) En remarquant que $\dfrac{1}{x^2+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-s(1+x^2)}\, ds$, montrer que pour $t \in [0,+\infty[$,

    $$\sqrt{\pi}\ e^{-t} \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-s}\ e^{-\frac{t^2}{4s}}\ s^{-\frac{1}{2}}\ ds.$$

    (c) En déduire que pour tout $x > 0$,

    $$\sqrt{\pi}\ \Gamma(2x) \;=\; 2^{2x-1}\ \Gamma(x)\ \Gamma(x+\frac{1}{2}).$$

    (d) Etendre la formule de duplication pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re\ z > 0$.

3.2 Espace L^p.

14. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$.
    (a) La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?
    (b) Supposons que f ait une limite en $+\infty$. Quelle est cette limite ?

15. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.
    (a) On suppose Ω borné. Montrer que :

    $$\forall f \in L^q(\Omega) \quad , \quad || f ||_p \leq mes(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \ || f ||_q \ .$$

    (b) En déduire que sous les conditions précédentes, $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.
    (c) Le résultat précédent est-il encore vrai si Ω n'est pas borné ?

16. *Inégalité de Hölder.*

    Soient $p, q > 1$ tels que $1/p + 1/q = 1$, $U = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < \Re e\ z < 1\}$, et $f, g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$. On définit une application $F : U \Rightarrow C_0^\infty$ par

    $$F(z) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{pz} \ |g|^{q(1-z)} \ dx.$$

    (a) En appliquant le théorème des trois droites, montrer que

    $$\forall z \in U,\ |F(z)| \leq \|f\|_p^{p\Re ez} \|g\|_q^{q(1-\Re ez)}.$$

    (b) En déduire que $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
    (c) Démontrer l'inégalité de Hölder pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$.

17. *Dual de L^p.*
    (a) Soit $g \in L^q([0,1])$ et soit p l'exposant conjugué de q. On définit la forme linéaire L_g sur $L^p([0,1])$ par :

    $$\forall f \in L^p([0,1]) \quad , \quad L_g(f) = \int_0^1 \ f(x) \ g(x) \ dx.$$

    Montrer que L_g est continue et $|| L_g || = || g ||_q$.
    (b) Soit $p \in [1,2]$. Rappeler pourquoi $L^2([0,1]) \hookrightarrow L^p([0,1])$.
    (c) En utilisant le fait que $L^2([0,1])$ est un espace de Hilbert, montrer que l'application $g \to L_g$ de L^q dans $(L^p)'$ est surjective.
    (d) Conclusion ?

3.3 Convolution.

18. *Convolution* $L^1 \times L^1$.

    Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrables sur $\mathbb{R}$, on définit pour $x \in \mathbb{R}$:

    $$f * g\ (x) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\ g(t)\ dt\ .$$

    (a) A l'aide du théorème de Fubini, montrer que :

    $$||\ f * g\ || \leq ||\ f\ ||\ ||\ g\ ||\ ,$$

    où l'on a posé

    $$||\ f\ || = \int_{-\infty}^{+\infty}\ |\ f(t)\ |\ \ dt\ .$$

    (b) En déduire que $f * g\ (x)$ est fini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

19. Pour $a > 0$, on pose $f_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{a^2}}$. Montrer que : $\forall a, b > 0$,

    $$f_a * f_b(x) = f_{\sqrt{a^2+b^2}}(x).$$

    En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{a \Rightarrow 0}\ f_a * f_b(x) = f_b(x)$.

20. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, de mesure finie et non nulle. On définit l'ensemble $A - A$ par :

    $$A - A \ = \ \{x - y\ ;\ x \in A\ ,\ y \in A\ \}.$$

    (a) Montrer que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

    (b) Montrer que l'application $f = \mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A}$ est continue.

    (c) Calculer $f(0)$.

    (d) En déduire que $A - A$ contient un voisinage de 0.

4 Transformée de Fourier.

La transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ *est donnée par :*

$$\hat{f}(\xi) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\ f(x)\ dx.$$

4.1 Exercices élémentaires.

21. Calculer la transformée de Fourier de $f(x+a), e^{iax}f(x), f'(x)$ en fonction de $\hat{f}$.

22. (a) Calculer la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1,1]}$.
    (b) En déduire les valeurs de :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right) dx \ , \ \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

    (c) Retrouver le résultat de la seconde intégrale directement à partir de la première.

23. Soit $a > 0$. On pose $f_a(x) = e^{-a|x|}$.
    (a) Vérifier que $f_a \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.
    (b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $g_a(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$.
    (c) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation :

$$f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}.$$

24. Calculer les transformées de Fourier des applications :

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x^2} \quad , \quad h(x) = \frac{1}{x^2+x+2}.$$

25. Pour $a > 0$, on pose $f_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{a^2}}$. Retrouver le résultat suivant :

$$\forall a, b > 0, \quad f_a * f_b(x) = f_{\sqrt{a^2+b^2}}(x).$$

26. Montrer que $(L^1(\mathbb{R}), *)$ est une algèbre commutative. Est-elle unitaire ?

27. On considère l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0,\ u(t,0) = u_0(x),\ (t,x) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

    (a) Résoudre (1) en utilisant une transformée de Fourier en la variable x.
    (b) Montrer que, si $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t,.) \in L^2(\mathbb{R})$ et que $|| \ u(t,.) \ ||_2 = || \ u_0 \ ||$.
    (c) En déduire que (1) admet une unique solution dans $L^2(\mathbb{R})$.

28. *Les polynômes de Hermite.*

(a) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $x \to f(x)\ x^k\ e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ x^k\ e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx\ = 0.$$

Montrer que f est nulle presque partout.

Indication : on pourra étudier la transformée de Fourier de $f(x)\ e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(c) En déduire que la famille $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$w_k(x)\ =\ \frac{(-1)^k e^{\frac{x^2}{2}}}{(2^k k!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\ \frac{d^k}{dx^k}\ \left(e^{-x^2}\right)$$

est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

4.2 Formule de Poisson et d'inversion de Fourier.

29. *Prérequis : Théorème de Jordan-Dirichlet.*

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide et soit $T > 0$. On définit :

$$\Psi(x)\ =\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x + kT)$$

(a) Vérifier que Ψ est de classe C^∞ et T-périodique.

(b) Calculer les coefficients de Fourier de Ψ et en déduire la formule de Poisson :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi\ (kT)\ =\ \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}\ (\frac{2k\pi}{T})$$

où $\widehat{\varphi}$ désigne la transformée de Fourier de φ et est définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\ \ ,\ \ \widehat{\varphi}(\xi)\ =\ \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\ \varphi(x)\ dx.$$

(c) En prenant $\varphi\ (x) = e^{-|x|}$ dans l'égalité précédente, montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \quad ,\quad \frac{e^{2\pi\alpha} + 1}{e^{2\pi\alpha} - 1}\ =\ \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}$$

(d) Montrer que :

$$\varphi\ (0)\ =\ \lim_{T\to+\infty}\ \frac{1}{T}\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\ \widehat{\varphi}\ (\frac{2k\pi}{T})\ =\ \frac{1}{2\pi}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\ \widehat{\varphi}\ (\xi)\ d\xi$$

(e) Déduire de ce qui précède, la formule d'inversion de Fourier : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi\ (x)\ =\ \frac{1}{2\pi}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\ e^{ix\xi}\ \widehat{\varphi}\ (\xi)\ d\xi$$

5 Les séries de Fourier.

30. Soit $f \in C^0_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, (i.e f est continue et T-périodique). Utiliser deux méthodes différentes pour montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}\ ,\ \int_a^{a+T}\ f(t)\ dt\ =\ \int_0^T\ f(t)\ dt.$$

31. On considère la fonction 2π-périodique définie par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi[\ ,\ f(t) = \mid t \mid .$$

(a) Déterminer les coefficients de Fourier de f. Que peut-on en déduire ?

(b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\ =\ \frac{\pi^2}{8}\ ,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\ =\ \frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}\ =\ \frac{\pi^4}{96}\ ,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}\ =\ \frac{\pi^4}{90}.$$

32. Soit f la fonction de période 2π définie sur $[-\pi, \pi[$ par : $f(t) = \cosh t$.

(a) Déterminer la série de Fourier de f.

(b) Que peut-on dire de la convergence de cette série ?

(c) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}\ =\ \frac{\pi}{2}\ \coth \pi - \frac{1}{2}.$$

33. Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ pour $0 < x < 2\pi$ et $f(0) = f(2\pi) = 0$.

    (a) Calculer la série de Fourier de f et démontrer qu'elle converge simplement vers f partout sur $\mathbb{R}$.

    (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

34. (a) Soit $\epsilon \in]0, \pi[$ et soit $\sigma_\epsilon(t) = 1$ si $\mid t \mid \leq \epsilon$ et $\sigma_\epsilon(t) = 0$ si $\epsilon < \mid t \mid \leq \pi$. Déterminer la série de Fourier de f.

    (b) En déduire que $\forall a \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n} \;=\; \frac{\pi - a}{2}.$$

35. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \;,\; \mid \sin x \mid \;=\; \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}$$

36. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que f est 1 et α-périodique avec α irrationnel. Montrer que f est constante.

37. **Lemme de Wirtinger.**

    Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, de période 2π et de moyenne nulle.

    (a) Montrer que :

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} \mid f'(t) \mid^2 \; dt \;\geq\; \int_0^{2\pi} \mid f(t) \mid^2 \; dt.$$

    (b) Montrer que l'égalité a lieu dans (1) si et seulement si :

$$f(t) = A \;\cos t + B \;\sin t,$$

    où A et B sont des constantes réelles.

38. **Inégalité isopérimétrique.**

    Enoncé du problème : De toutes les courbes C fermées, simples, de classe C^1 et de longueur 2π, trouver celle qui entoure l'aire maximale.

(a) En paramétrant la courbe C par sa longueur d'arc et utilisant la formule de Green-Riemann ainsi que le lemme de Wirtinger, montrer que :

$$(1) \quad a \leq \pi \ ,$$

où a désigne l'aire du domaine entouré par la courbe C.

(b) Montrer que l'on a égalité dans (1) si et seulement si C est un cercle.