Université de Nantes

Géométrie affine et euclidienne

Licence deuxième année - Parcours Maths - X4M0040

2014-2015

Sylvain Gervais

Table des matières

Table des matières **3**

1 Notions affines **5**

I _ Espaces affines dans $\mathbb{R}^n$ . . . 5
II _ Propriétés des sous-espaces affines . . . 6
a) Sous-espaces affines . . . 6
b) Sous-espace affine engendré . . . 7
c) Repère cartésien . . . 8
d) Orientation . . . 8
III _ Barycentres . . . 9
a) Définition . . . 9
b) Sous-espaces affines et barycentres . . . 10
c) Coordonnées barycentriques . . . 11
IV _ Applications affines . . . 11
a) Définition et application linéaire associée . . . 11
b) Points fixes . . . 14
c) Sous-espaces affines et applications affines . . . 14
d) Applications affines et repères . . . 14
e) Translations et homothéties . . . 15
f) Projections et symétries . . . 16
g) Une application : le théorème de Thalès . . . 17

2 Notions euclidiennes **19**

I _ Produit scalaire . . . 19
a) Définition et propriétés . . . 19
b) Expression matricielle . . . 20
II _ Orthogonalité . . . 20
a) Vecteurs orthogonaux - Bases orthonormées . . . 20
b) Orthogonal d'une partie . . . 22
III _ Endomorphisme orthogonal . . . 24
a) Généralités . . . 24
b) Cas d'un plan vectoriel euclidien . . . 25
c) Produit vectoriel . . . 27
IV _ Angles . . . 28
a) Angles orientés de vecteurs . . . 28
b) Angles orientés de droites . . . 29
c) Angles géométriques . . . 31
V _ Espaces affines euclidiens . . . 31
a) Généralités . . . 31
b) Isométries affines . . . 32
c) Distance d'un point à un sous-espace affine . . . 34
d) médiatrice . . . 36
e) Bissectrices . . . 36
VI _ Similitudes . . . 38
VII _ Utilisation des nombres complexes . . . 40

3 Triangles et cercles **43**
I _ Cercles 43
a) Définitions et propriétés d'incidence 43
b) Angle inscrit et angle au centre - Cocyclicité 46
II _ Triangles du plan affine euclidien 48
a) Médianes - Isobarycentre 49
b) Médiatrices - Cercle circonscrit 49
c) Hauteurs - Orthocentre - Droite et cercle d'Euler 50
d) Relations métriques dans le triangle 51
e) Triangles homothétiques, isométriques ou semblables 53
III _ Conjugaison, polarité et inversion 55
a) Puissance d'un point par rapport à un cercle 55
b) Polarité 56
c) Inversion 57
IV _ Cercles inscrit et exinscrits - Théorème de Feuerbach 59
a) Bissectrices d'un triangle - Cercles inscrit et exinscrits 59
b) Le théorème de Feuerbach 61

Bibliographie **65**

Index **66**

Chapitre 1 : Notions affines

I _ Espaces affines dans $\mathbb{R}^n$

Définition *Une partie non vide $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^n$ est un* espace affine *s'il existe un élément A de $\mathscr{E}$ tel que l'ensemble*

$$E_A = \{M - A \,/\, M \in \mathscr{E}\}$$

soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Lemme 1 *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine dans $\mathbb{R}^n$ et $A \in \mathscr{E}$ tel que E_A soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout élément B de $\mathscr{E}$, on a*

$$E_B = E_A = \{Q - P \,/\, P, Q \in \mathscr{E}\}\,.$$

Démonstration.
• Soit $\overrightarrow{u}$ un élément de E_B et $M \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{u} = M - B$. On a :

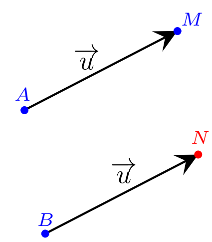
$$\overrightarrow{u} = M - B = (M - A) + (A - B) = (M - A) - (B - A) \in E_A$$

car $M - A,\ B - A$ sont dans E_A et ce dernier est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, E_B est inclus dans E_A.

• Soit $\overrightarrow{u}$ un élément de E_A et $M \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{u} = M - A$. Il s'agit de montrer que $\overrightarrow{u} \in E_B$, c'est-à-dire de montrer qu'il existe $N \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{u} = N - B$.
Si un tel N existe, il est nécessairement égal à $B + \overrightarrow{u}$: soit donc $N = B + \overrightarrow{u}$ et montrons que $N \in \mathscr{E}$. On a :

$$N - A = (N - B) + (B - A) = \vec{u} + (B - A) = (M - A) + (B - A) \in E_A$$

car E_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Il existe donc $P \in \mathscr{E}$ tel que $N - A = P - A$ et on obtient $N = P \in \mathscr{E}$.



• Ainsi, on a $E_P = E_A$ pour tout élément P de $\mathscr{E}$. Puisque $\{Q - P \,/\, P, Q \in \mathscr{E}\} = \bigcup\limits_{P \in \mathscr{E}} E_P$, on a bien $E_A = \{Q - P \,/\, P, Q \in \mathscr{E}\}$.

$\square$

Remarque : en pratique, pour montrer qu'une partie $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^n$ est espace affine, on exhibe un élément A de $\mathscr{E}$ et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathscr{E} = A + E := \{A + \vec{u} \,/\, \vec{u} \in E\}$.

Notations et vocabulaire. Si $\mathscr{E}$ est un espace affine dans $\mathbb{R}^n$:

- les éléments de $\mathscr{E}$ sont des *points* ;
- l'espace vectoriel $E_A (= E_B\ \forall B \in \mathscr{E})$ est la *direction* de $\mathscr{E}$, notée $\overrightarrow{\mathscr{E}}$;
- les éléments de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ sont des *vecteurs* ; si P et Q sont deux points de $\mathscr{E}$, le vecteur $Q - P$ est noté $\overrightarrow{PQ}$.

Remarque : si $\mathscr{E}$ est un espace affine dans $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout point A de $\mathscr{E}$, on a

$$\mathscr{E} = A + \overrightarrow{\mathscr{E}} := \left\{A + \overrightarrow{u} \,/\, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}\right\}.$$

Exemples.
1) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x - 7y = 5\right\}$ est un espace affine (dans $\mathbb{R}^2$) de direction $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x - 7y = 0\right\}$.
2) $\mathbb{R}^n$ est lui-même un espace affine.
3) Plus généralement, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un espace affine de direction lui-même.
4) Si $A \in \mathbb{R}^n$, alors $\mathscr{E} = \{A\}$ est un espace affine de direction $\{\overrightarrow{0}\}$.

Proposition 1.1 *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine dans $\mathbb{R}^n$.*

1) Pour tout point A de $\mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

2) Pour tous points A, B et C de $\mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles[1]).

3) Pour tous points A et B de $\mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

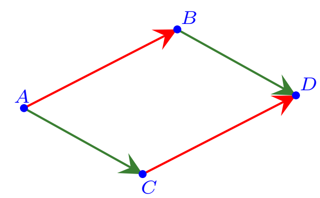
4) Pour tous points A et B de $\mathscr{E}$, on a $A + \overrightarrow{AB} = B$.

5) Pour tout point A de $\mathscr{E}$, l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

6) Pour tous points A, B, C et D de $\mathscr{E}$, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

On dit dans ce cas que $ABDC$ est un parallélogramme.



Démonstration. il n'y a aucune difficulté : ces propriétés découlent immédiatement du fait que $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ dans $\mathbb{R}^n$ et leur démonstration est laissée en exercice.

□

Définition *La* dimension *d'un espace affine est la dimension de sa direction.*

Ainsi, un sous-espace affine de dimension nulle est réduit à un point.
Un sous-espace affine de dimension 1 est appelé une *droite* (affine).
Un sous-espace affine de dimension 2 est appelé une *plan* (affine).

II _ Propriétés des sous-espaces affines

a) Sous-espaces affines

Définition *Un sous-espace affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ est une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ qui est un espace affine dans $\mathbb{R}^n$. Un* hyperplan *d'un espace affine $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de dimension* $\dim \mathscr{E} - 1$.

Remarque : si $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine d'un espace affine $\mathscr{E}$, la direction $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

Proposition 1.2 *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, A un point de $\mathscr{E}$ et F un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.*
Il existe un unique sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par F et contenant A : il s'agit de

$$A + F := \{A + \vec{u} \,/\, \vec{u} \in F\}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions.

□

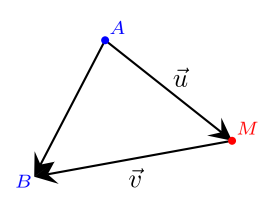
Proposition 1.3 *Soit $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathscr{E}$.*
1) *Si $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ et $\overrightarrow{\mathscr{G}}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ (*ie* $\overrightarrow{\mathscr{E}} = \overrightarrow{\mathscr{F}} \oplus \overrightarrow{\mathscr{G}}$), alors l'intersection $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est réduite à un point.*
2) *Si $\overrightarrow{\mathscr{F}} = \overrightarrow{\mathscr{G}}$, alors $\mathscr{F} = \mathscr{G}$ ou $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$.*

Démonstration. **1)** Fixons deux points A et B respectivement dans $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ se décompose sous la forme $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$ et $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{G}}$. Alors, si $M = A + \vec{u}$, on a :

→ $M \in \mathscr{F}$ car $A \in \mathscr{F}$ et $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$;

→ $M = B + \overrightarrow{BA} + \vec{u} = B - (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{u} = B - \vec{v} \in \mathscr{G}$ car $B \in \mathscr{G}$ et $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{G}}$.

Ainsi, $M \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ et cette dernière intersection est non vide.



1. Michel Chasles, mathématicien français, 1793-1880.

Si maintenant N est un second point de $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ alors le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est dans $\overrightarrow{\mathscr{F}} \cap \overrightarrow{\mathscr{G}}$. Mais les deux sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ et $\overrightarrow{\mathscr{G}}$ étant supplémentaires, cette intersection est réduite à $\{\vec{0}\}$. Par conséquent, on a $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ et donc $N = M$.

2) Supposons que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ et fixons un point A dans cette intersection. D'après la proposition 1.2, il existe un unique sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant A et dirigé par $\overrightarrow{\mathscr{F}} = \overrightarrow{\mathscr{G}}$. Puisque $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux tels sous-espaces affines, ils sont égaux.

□

Définition *Deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathscr{E}$ sont dits* parallèles *s'ils ont même direction.*

b) Sous-espace affine engendré

Proposition 1.4 *L'intersection d'une famille de sous-espace affines d'un espace affine $\mathscr{E}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.*

Démonstration. Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines d'un espace affine $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{F} := \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$ soit non vide et fixons un point A dans $\mathscr{F}$. On veut montrer que $F_A := \left\{\overrightarrow{AM} \,/\, M \in \mathscr{F}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Mais on a $F_A = \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{\mathscr{F}_i}$:

- $\rightarrow$ si $M \in \mathscr{F}$, alors, pour tout $i \in I$, $M \in \mathscr{F}_i$ donc $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\mathscr{F}_i}$;
- $\rightarrow$ Si $\vec{u} \in \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{\mathscr{F}_i}$ et $M = A + \vec{u}$, alors M est dans $\mathscr{F}_i$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire que $M \in \mathscr{F}$ et donc $\vec{u} = \overrightarrow{AM} \in F_A$.

L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels étant encore un sous-espace vectoriel, ceci montre que F_A est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

□

Définition *Soit S une partie non vide d'un espace affine $\mathscr{E}$. On appelle sous-espace affine de $\mathscr{E}$* engendré par *S le plus petit sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant S : c'est l'intersection des sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ contenant S d'après la propriété précédente. On le note $\langle S\rangle$.*

Exemples. 1) Si A est un point de $\mathscr{E}$, alors $\langle A\rangle = \{A\}$.
2) Si A et B sont deux points distincts de $\mathscr{E}$, alors $\langle A, B\rangle$ est la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$. Plus généralement, nous avons la propriété suivante :

Proposition 1.5 *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Le sous-espace affine $\langle A_0, ..., A_k\rangle$ de $\mathscr{E}$ engendré par $k+1$ points $A_0, A_1, ..., A_k$ coïncide avec le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant A_0 et dirigé par Vect$\left(\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}\right)$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{F}$ le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant A_0 et dirigé par $F := \text{Vect}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}\right)$: $\mathscr{F} = A_0 + F$.

• Puisque $A_i = A_0 + \overrightarrow{A_0A_i} \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant $A_0, A_1, ..., A_k$.

• D'autre part, si $\mathscr{G}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant $A_0, ..., A_k$, sa direction contient les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}$ donc $F \subset \overrightarrow{\mathscr{G}}$. Par conséquent, on obtient $\mathscr{F} = A_0 + F \subset A_0 + \overrightarrow{\mathscr{G}} = \mathscr{G}$.

Ainsi, $\mathscr{F}$ est le plus petit sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant $A_0, A_1, ..., A_k$: $\mathscr{F} = \langle A_0, ..., A_k\rangle$.

□

c) Repère cartésien

Définition 1) *On dit que $k+1$ points d'un espace affine $\mathscr{E}$ sont* affinement indépendants *si le sous-espace affine qu'ils engendrent est de dimension k.*
2) *Un* repère cartésien *d'un espace affine $\mathscr{E}$ est la donnée d'un point Ω (l'*origine *du repère) et d'une base de la direction $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.*

Proposition-Définition *Si $(\Omega; \vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ est un repère cartésien d'un espace affine $\mathscr{E}$, alors, pour tout point M de $\mathscr{E}$, il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $M = \Omega + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \vec{e_i}$.*
Ces n nombres réels (ordonnés) sont appelés coordonnées cartésiennes *de M dans le repère $(\Omega; \vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$.*

Démonstration. Les nombres réels $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$.
□

Exemples
1) Deux points distincts A et B engendrent une droite et $(A; \overrightarrow{AB})$ en est un repère cartésien ;
2) Trois points non alignés A, B, C engendrent un plan et $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en est un repère cartésien.

d) Orientation

E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de E.

Notation : si $\boldsymbol{b_1}$ et $\boldsymbol{b_2}$ sont deux bases de E, on notera $P_{\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2}}$ la matrice de passage de $\boldsymbol{b_1}$ à $\boldsymbol{b_2}$.

Fixons une base $\boldsymbol{e}$ de E. On note :

$$\mathcal{B}^+ = \{ \text{ bases } \boldsymbol{b} \text{ de } E \text{ telles que } \det P_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{b}} > 0 \} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^- = \{ \text{ bases } \boldsymbol{b} \text{ de } E \text{ telles que } \det P_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{b}} < 0 \} .$$

Lemme 2 *On a $\mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^- = \emptyset$ et $\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^- = \mathcal{B}$.*

Démonstration. L'intersection est vide car un déterminant ne peux pas être simultanément strictement positif et strictement négatif. D'autre part, toute base est dans une de ces deux parties car le déterminant de la matrice de passage entre deux bases n'est pas nul.
□

Lemme 3 *Cette partition de $\mathcal{B}$ ne dépend pas du choix de la base $\boldsymbol{e}$.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{e'}$ une seconde base de E, $\{\mathcal{B}'^+, \mathcal{B}'^-\}$ la partition de $\mathcal{B}$ associée et ε le signe de $\det P_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e'}}$. Pour toute base $\boldsymbol{b}$ de E, on a

$$\det P_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{b}} = \left(\det P_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e'}}\right)\left(\det P_{\boldsymbol{e'},\boldsymbol{b}}\right) = \varepsilon \left(\det P_{\boldsymbol{e'},\boldsymbol{b}}\right) .$$

On a donc :

$$\mathcal{B}'^+ = \mathcal{B}^+ \text{ et } \mathcal{B}'^- = \mathcal{B}^- \text{ si } \varepsilon > 0, \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}'^+ = \mathcal{B}^- \text{ et } \mathcal{B}'^- = \mathcal{B}^+ \text{ si } \varepsilon < 0.$$

□

Définition Orienter *E, c'est choisir une base $\boldsymbol{e}$ de E. Alors, les bases dans la même classe que $\boldsymbol{e}$ (*ie *dans $\mathcal{B}^+$) sont dites* directes, *celles de l'autre classe (*ie *dans $\mathcal{B}^-$) étant dites* indirectes. *Un espace affine est dit orienté si sa direction est orientée.*

Proposition-Définition *Soient E un espace vectoriel orienté et f un isomorphisme de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *f transforme toute base directe en une base directe ;*
(ii) *il existe une base directe $\boldsymbol{b}$ de E telle que $f(\boldsymbol{b})$ soit directe ;*
(iii) $\det f > 0$.
Un isomorphisme vérifiant une de ces trois assertions (et donc toutes) est dit direct.

Démonstration. Il est clair que la première assertion implique la seconde. Supposons donc que $\boldsymbol{b}$ soit une base directe de E telle que $f(\boldsymbol{b})$ soit directe. Si A est la matrice de f dans cette base $\boldsymbol{b}$, alors A est la matrice de passage de $\boldsymbol{b}$ à $f(\boldsymbol{b})$ donc $\det f = \det A > 0$. Ceci montre que la deuxième assertion implique la troisième.
Supposons à présent que f soit de déterminant strictement positif et considérons une base directe $\boldsymbol{b}$. Puique la matrice de passage de $\boldsymbol{b}$ à $f(\boldsymbol{b})$ est la matrice de f dans la base $\boldsymbol{b}$, on a $\det P_{\boldsymbol{b},f(\boldsymbol{b})} = \det f > 0$ donc $f(\boldsymbol{b})$ est également directe.

□

III _ Barycentres

a) Définition

Proposition-Définition *Soient $A_1, ..., A_k$ k points d'un espace affine $\mathscr{E}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_k$ k nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Il existe un unique point G dans $\mathscr{E}$ vérifiant :*

$$\forall M \in \mathscr{E}, \quad \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}.$$

Le point G est appelé barycentre *du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$.*

Démonstration. Soit Ω un point de $\mathscr{E}$. Le point G cherché vérifie nécessairement $G = \Omega + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}$ et est donc unique s'il existe. Réciproquement, si G est ce point, on a, pour tout point M de $\mathscr{E}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega G} = \overrightarrow{M\Omega} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i} = \overrightarrow{M\Omega} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA_i}) \\ &= \overrightarrow{M\Omega} + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) \overrightarrow{\Omega M} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \quad \text{car} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1. \end{aligned}$$

□

Remarque : On a en fait montré que dans un espace affine $\mathscr{E}$, un point G est barycentre d'un système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ si, et seulement si, il existe un point Ω dans $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}$.

Remarque : Si $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont k nombres réels tels que $\lambda := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$, on appellera barycentre de la famille de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ le barycentre du système $(A_i, \frac{\lambda_i}{\lambda})_{1 \leq i \leq k}$; il sera noté $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$.

Définition *L'*isobarycentre *de k points $A_1, ..., A_k$ est le barycentre du système pondéré $(A_i, 1)_{0 \leq i \leq k}$. Le* milieu *d'un couple de point (A, B) est l'isobarycentre de ces deux points.*

Proposition 1.6 (Associativité du barycentre) *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Soient $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de points pondérés de $\mathscr{E}$ et $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ une partition de I. On note, pour $j \in J$,*

$$\mu_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_i, \quad \lambda = \sum_{j \in J} \mu_j = \sum_{i \in I} \lambda_i$$

et on suppose que λ et les μ_j sont tous non nuls.
Alors, si, pour $j \in J$, G_j désigne le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{i \in I_j}$, on a :

$$\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I} = \mathrm{bar}\,(G_j, \mu_j)_{j \in J}.$$

Démonstration. Soit Ω un point de $\mathscr{E}$. On a, si $G = \text{bar}(G_j, \mu_j)_{j\in J}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega G} &= \frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\mu_j\,\overrightarrow{\Omega G_j} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\mu_j\left(\frac{1}{\mu_j}\sum_{i\in I_j}\lambda_i\,\overrightarrow{\Omega A_i}\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\frac{\mu_j}{\mu_j}\left(\sum_{i\in I_j}\lambda_i\overrightarrow{\Omega A_i}\right)\\ &= \frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\lambda_i\,\overrightarrow{\Omega A_i} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i\in I}\lambda_i\,\overrightarrow{\Omega A_i}\end{aligned}$$

ce qui montre bien que G est le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$.

□

Exercice. Montrer que dans un triangle, les trois médianes sont concourantes en G, l'isobarycentre des trois sommets.

b) Sous-espaces affines et barycentres

Théorème 1.1 *Soient $\mathscr{E}$ un espace affine et $\mathscr{F}$ une partie non vide de $\mathscr{E}$. Alors $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ si, et seulement si, pour toute famille finie $(A_i)_{i\in I}$ de points de $\mathscr{F}$ et toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I}\lambda_i \neq 0$, le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ appartient à $\mathscr{F}$.*

Démonstration. • Supposons que $\mathscr{F}$ soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ et considérons un système $(A_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq k}$ de points pondérés de $\mathscr{F}$ tel que $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$. Si G est le barycentre de ce système, alors

$$\overrightarrow{A_1G} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\overrightarrow{A_1A_i} = \sum_{i=2}^{k}\lambda_i\,\overrightarrow{A_1A_i} \implies G = A_1 + \sum_{i=2}^{k}\lambda_i\,\overrightarrow{A_1A_i}.$$

Les points $A_1, ..., A_k$ étant dans $\mathscr{F}$, les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, ..., \overrightarrow{A_1A_k}$ sont dans $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ et donc $\sum_{i=2}^{k}\lambda_i\,\overrightarrow{A_1A_i}$ également puisque $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Par conséquent, le point G appartient à $\mathscr{F}$.

• Réciproquement, supposons que $\mathscr{F}$ soit stable par «prise de barycentre». Fixons un point A dans $\mathscr{F}$ et montrons que $E_A = \left\{\overrightarrow{AM} \,/\, M \in \mathscr{F}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments de E_A et α un nombre réel. Il existe deux points M et N dans $\mathscr{F}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AN}$. Si P est le barycentre du système $\big((A, -\alpha), (M, \alpha), (N, 1)\big)$, alors $P \in \mathscr{F}$ par hypothèse donc $\overrightarrow{AP} \in E_A$. Mais on a :

$$\overrightarrow{AP} = -\alpha\,\overrightarrow{AA} + \alpha\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \alpha\,\vec{u} + \vec{v}$$

donc $\alpha\,\vec{u} + \vec{v} \in E_A$.

□

Corollaire 1.1 *Soit $\mathscr{F}$ une partie non vide d'un espace affine $\mathscr{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$;*

(ii) *pour tout couple (A, B) de points de $\mathscr{F}$ et tout réel λ, le barycentre de $\big((A, \lambda), (B, 1-\lambda)\big)$ appartient à $\mathscr{F}$;*

(iii) *pour tout couple (A, B) de points de $\mathscr{F}$, la droite (AB) est incluse dans $\mathscr{F}$.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème précédent et de l'associativité du barycentre.

□

c) Coordonnées barycentriques

Proposition-Définition *Soient $A_0, A_1, ..., A_n$ $n+1$ points affinement indépendants d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n. Alors, pour tout point M de $\mathscr{E}$, il existe une unique famille $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant :*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad M = \text{bar}\,(A_i, \lambda_i)_{0\leq i\leq n}\,.$$

Le $(n+1)$-uplet $(A_0, ..., A_n)$ est appelé repère barycentrique *de $\mathscr{E}$ et les nombres réels $\lambda_0, ..., \lambda_n$ sont appelés* coordonnées barycentriques *de M dans ce repère.*

Démonstration. Puisque par hypothèse $(\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, il existe n nombres réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tel que

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \overrightarrow{A_0A_i},$$

ce qui implique

$$\overrightarrow{A_0M} = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{A_0A_0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Ainsi, si on pose $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, M est le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{0\leq i\leq n}$.

Réciproquement, si $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifient : $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ et $M = \text{bar}\,(A_i, \lambda_i)_{0\leq i\leq n}$, alors $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_0M}$ dans la base $\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)_{1\leq i\leq n}$ ce qui montre l'unicité de ce $(n+1)$-uplet.

□

IV _ Applications affines

a) Définition et application linéaire associée

Définition *Une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ entre deux espaces affines est dite* affine *si elle préserve le barycentre, c'est-à-dire : si $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ est un système de point pondérés de $\mathscr{E}$ tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$ et G son barycentre, alors $f(G)$ est le barycentre du système $(f(A_i), \lambda_i)_{i\in I}$.*

Remarque : par associativité du barycentre, il suffit de vérifier cette propriété pour tout système de deux points.

Remarque : toute application constante est affine, ainsi que l'application Identité.

Premier exemple. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine et $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. L'application $t_{\vec{u}} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ définie par $t_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u}$ est affine. Cette application est appelée *translation de vecteur $\vec{u}$*.

Démonstration. Soient $A, B \in \mathscr{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et G le barycentre de $\big((A, \lambda), (B, 1-\lambda)\big)$. Si A', B' et G' sont les images respectives de A, B et G, alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GG'} = \vec{u}$ donc

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} = -\vec{u} + \overrightarrow{BA} + \vec{u} = \overrightarrow{BA}.$$

De là, on obtient :

$$\overrightarrow{B'G'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} = -\vec{u} + \left(\lambda\overrightarrow{BA} + (1-\lambda)\overrightarrow{BB}\right) + \vec{u} = \lambda\overrightarrow{BA} = \lambda\overrightarrow{B'A'} = \lambda\overrightarrow{B'A'} + (1-\lambda)\overrightarrow{B'B'}$$

donc G' est bien le barycentre de $\big((A', \lambda), (B', 1-\lambda)\big)$.

□

Lemme 4 *Soient $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. Pour tout point A de $\mathscr{E}$, l'application $\varphi_A : \overrightarrow{\mathscr{E}} \to \overrightarrow{\mathscr{F}}$ définie par $\varphi_A(\vec{u}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{u})}$ est linéaire et vérifie, pour tous points M et N dans $\mathscr{E}$:*

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi_A\left(\overrightarrow{MN}\right).$$

De plus, pour tout point B de $\mathscr{E}$, on a $\varphi_A = \varphi_B$.

Démonstration. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: il s'agit de montrer que $\varphi_A(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\varphi_A(\vec{u}) + \varphi_A(\vec{v})$. Soient $M = A+\vec{u}$, $N = A+\vec{v}$ et $G = A+\lambda\vec{u}+\vec{v}$. On a :

$$\overrightarrow{AG} = \lambda\vec{u}+\vec{v} = \lambda\,\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN} = \lambda\,\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}-\lambda\,\overrightarrow{AA}$$

donc G est le barycentre de $\Big((M,\lambda),(N,1),(A,-\lambda)\Big)$. Puisque f est affine, $f(G)$ est donc le barycentre du système $\Big((f(M),\lambda),(f(N),1),(f(A),-\lambda)\Big)$:

$$\overrightarrow{f(A)f(G)} = \lambda\,\overrightarrow{f(A)f(M)}+\overrightarrow{f(A)f(N)}-\lambda\,\overrightarrow{f(A)f(A)} = \lambda\,\overrightarrow{f(A)f(M)}+\overrightarrow{f(A)f(N)}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_A(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\varphi_A(\vec{u})+\varphi_A(\vec{v}).$$

Ensuite, si M et N sont deux points de $\mathscr{E}$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{f(M)f(A)}+\overrightarrow{f(A)f(N)} = \overrightarrow{f(A)f(N)}-\overrightarrow{f(A)f(M)}\\ &= \varphi_A(\overrightarrow{AN})-\varphi_A(\overrightarrow{AM}) = \varphi_A(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}) = \varphi_A(\overrightarrow{MN}).\end{aligned}$$

Enfin, si B est un point de $\mathscr{E}$, on a, pour tout vecteur $\vec{u}$ (on note $M = A+\vec{u}$) :

$$\varphi_B(\vec{u}) = \varphi_B(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \varphi_A(\vec{u}).$$

□

Lemme 5 *Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines, $\varphi : \overrightarrow{\mathscr{E}} \to \overrightarrow{\mathscr{F}}$ une application linéaire et A (resp. B) un point de $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$). Alors, l'application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ définie, pour tout M dans $\mathscr{E}$, par $f(M) = B+\varphi\left(\overrightarrow{AM}\right)$, est affine.*

Démonstration. Soit $(A_i,\lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés de $\mathscr{E}$ tel que $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1$ et G son barycentre. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Bf(G)} &= \varphi\left(\overrightarrow{AG}\right) = \varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\,\overrightarrow{AA_i}\right)\\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i\,\varphi\left(\overrightarrow{AA_i}\right) \quad \text{car } \varphi \text{ est linéaire}\\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i\,\overrightarrow{Bf(A_i)}\end{aligned}$$

donc $f(G)$ est le barycentre du système $\Big(f(A_i),\lambda_i\Big)_{i\in I}$.

□

Ces deux lemmes démontrent le théorème suivant :

Théorème-Définition 1.2 *Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines. Une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est affine si, et seulement si, il existe une application linéaire $\varphi : \overrightarrow{\mathscr{E}} \to \overrightarrow{\mathscr{F}}$ telle que pour tout couple (M,N) de points de $\mathscr{E}$, on ait :*

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) \quad \textit{c'est-à-dire} \quad f(N) = f(M)+\varphi\left(\overrightarrow{MN}\right).$$

Dans ce cas, une telle application linéaire est unique et est appelée application linéaire associée à f, *notée* $\overrightarrow{f}$.

Proposition 1.7 *Deux applications affines $f, g : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ coïncident si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1) il existe un point A de $\mathscr{E}$ tel que $f(A) = g(A)$;

2) $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$.

Démonstration. Les deux conditions sont évidemment nécessaires. Si elles sont satisfaites, on a, pour tout point M de $\mathscr{E}$:

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = g(A) + \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{AM}\right) = g(M).$$

□

Proposition 1.8

1) *L'application linéaire associée à $Id_{\mathscr{E}}$ est $Id_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$: $\overrightarrow{Id_{\mathscr{E}}} = Id_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$.*

2) *Soient $f_1 : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ et $f_2 : \mathscr{E}_2 \to \mathscr{E}_3$ deux applications affines. Alors $f_2 \circ f_1 : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_3$ est une application affine et $\overrightarrow{f_2 \circ f_1} = \overrightarrow{f_2} \circ \overrightarrow{f_1}$.*

3) *Une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est bijective si, et seulement si, $\overrightarrow{f}$ est un isomorphisme. Dans ce cas, f^{-1} est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}$.*

Démonstration. • Le point 1) est clair.
• Pour A et M points de $\mathscr{E}_1$, on a :

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(M) &= f_2\Big[f_1(M)\Big] = f_2\Big[f_1\left(A + \overrightarrow{AM}\right)\Big] = f_2\Big[f_1(A) + \overrightarrow{f_1}\left(\overrightarrow{AM}\right)\Big] \\ &= f_2\Big[f_1(A)\Big] + \overrightarrow{f_2}\left[\overrightarrow{f_1}\left(\overrightarrow{AM}\right)\right] = (f_2 \circ f_1)(A) + \left(\overrightarrow{f_2} \circ \overrightarrow{f_1}\right)\left(\overrightarrow{AM}\right),\end{aligned}$$

ce qui démontre la deuxième propriété car la composée de deux applications linéaires est linéaire.

• Soit à présent une bijection affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$. Commençons par démontrer que $\overrightarrow{f}$ est bijective. Pour cela, fixons un point A dans $\mathscr{E}$.

→ Si $\vec{v}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{F}}$, il existe un point M dans $\mathscr{E}$ tel que $f(M) = f(A) + \vec{v}$, c'est-à-dire tel que $\vec{v} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)$: $\vec{v}$ admet donc un antécédent, ceci pour tout $\vec{v}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{F}}$. L'application $\overrightarrow{f}$ est donc surjective.

→ Si $\vec{u}$ est un élément de $\ker \overrightarrow{f}$, alors $f(A + \vec{u}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\vec{u}) = f(A)$ donc $A = A + \vec{u}$ puisque f est injective. Ceci implique $\vec{u} = \vec{0}$. On a donc $\ker \overrightarrow{f} = \{\vec{0}\}$: $\overrightarrow{f}$ est injective.

Montrons à présent que $f^{-1} : \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ est affine. On utilise pour cela le critère du théorème 1.2. Soient N_1 et N_2 deux points de $\mathscr{F}$. On a :

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{f^{-1}(N_1)f^{-1}(N_2)}\right) = \overrightarrow{(f \circ f^{-1})(N_1)(f \circ f^{-1})(N_2)} = \overrightarrow{N_1N_2},$$

donc $\overrightarrow{f^{-1}(N_1)f^{-1}(N_2)} = \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{N_1N_2}\right)$ puisque $\overrightarrow{f}$ est un isomorphisme. Ceci montre que f^{-1} est affine avec $\overrightarrow{f^{-1}} = \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}$.

• Pour finir, on considère une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $\vec{f}$ soit un isomorphisme. Montrons que f est bijective. Fixons un point A dans $\mathscr{E}$ et notons $B := f(A)$.

→ Pour tous points M et N dans $\mathscr{E}$, on a

$$f(M) = f(N) \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f(A)f(N)} \Rightarrow \vec{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \vec{f}\left(\overrightarrow{AN}\right) \overset{\vec{f}\text{ isom.}}{\Longrightarrow} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \Rightarrow M = N$$

donc f est injective.

→ Soit N un point de $\mathscr{F}$. Puisque $\vec{f}$ est un isomorphisme, il existe un vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ tel que $\vec{f}(\vec{u}) = \overrightarrow{BN}$. Alors, si $M = A + \vec{u}$, on a :

$$f(M) = f(A) + \vec{f}(\vec{u}) = B + \overrightarrow{BN} = N$$

donc f est surjective.

□

b) Points fixes

Proposition 1.9 *L'ensemble des points fixes d'une application affine f d'un espace affine $\mathscr{E}$ dans lui-même est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction* $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)$.

Remarque : l'ensemble des points fixes d'une application affine f est souvent noté $\mathrm{Fix}(f)$.

Démonstration. Supposons que $\mathrm{Fix}(f)$ soit non vide. Fixons un point A dans $\mathrm{Fix}(f)$ et montrons que $\mathrm{Fix}(f) = A + \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)$.

• Si $f(M) = M$, alors $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}$ donc $\overrightarrow{AM} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)$. Par conséquent, $M = A+\overrightarrow{AM}$ appartient à $\in A + \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)$.

• Si $\overrightarrow{f}(\vec{u}) = \vec{u}$, alors $f(A+\vec{u}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\vec{u}) = A + \vec{u}$ donc $A + \vec{u} \in \mathrm{Fix}(f)$.

□

Théorème 1.3 *Une application affine f d'un espace affine $\mathscr{E}$ dans lui-même admet un unique point fixe si, et seulement si,* 1 *n'est pas valeur propre de* $\overrightarrow{f}$.

Démonstration. La proposition précédente montre que si f a un unique point fixe alors $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)$ est réduit à $\{\vec{0}\}$. Supposons maintenant que 1 ne soit pas valeur propre de f. Si $A \in \mathscr{E}$, on a :

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f(A)M} \\ &\iff \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{f(A)A} + \overrightarrow{AM} \\ &\iff \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{f(A)A}. \end{aligned}$$

Puisque 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$ par hypothèse, l'endomorphisme $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$ est injectif et donc bijectif puisque nous sommes en dimension finie. Ainsi :

$$f(M) = M \iff \overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{f(A)A}\right) \iff M = A + \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{f(A)A}\right).$$

Ceci montre bien que f admet un unique point fixe.

□

c) Sous-espaces affines et applications affines

Proposition 1.10 *Soit $f : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ une application affine.*
Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}_1$, alors $f(\mathscr{F})$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}_2$ de direction $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\mathscr{F}}\right)$.

Démonstration. Soit A un point de $\mathscr{F}$. On a, puisque $\mathscr{F} = A + \overrightarrow{\mathscr{F}}$:

$$f(\mathscr{F}) = \{f(M)\,/\,M \in \mathscr{F}\} = \left\{f(A+\vec{u})\,/\,\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}\right\} = \left\{f(A) + \overrightarrow{f}(\vec{u})\,/\,\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}\right\} = f(A) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\mathscr{F}}\right)$$

donc $f(\mathscr{F})$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}_2$ de direction $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\mathscr{F}}\right)$.

□

d) Applications affines et repères

Théorème 1.4 *Soit $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ et $(B_0, \ldots, B_n)$ $n+1$ points d'un espace affine $\mathscr{F}$. Il existe une unique application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i.*

Démonstration. Puisque $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_n}\right)$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, il existe une unique application linéaire $\varphi : \overrightarrow{\mathscr{E}} \to \overrightarrow{\mathscr{F}}$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right) = \overrightarrow{B_0B_i}$ pour tout i.

• Maintenant, si on définit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ par $f(M) = B_0 + \varphi\left(\overrightarrow{A_0M}\right)$, alors f est affine d'application linéaire associée φ (théorème 1.2) et vérifie, pour $i = 0, 1, ..., n$:

$$f(A_i) = B_0 + \varphi\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right) = B_0 + \overrightarrow{B_0B_i} = B_i.$$

• Si g est une application affine envoyant chacun des points A_i sur B_i, alors l'image par $\overrightarrow{g}$ du vecteur $\overrightarrow{A_0A_i}$ est égale à $\overrightarrow{B_0B_i}$ donc $\overrightarrow{g} = \varphi = \overrightarrow{f}$. Puisque $g(A_0) = B_0 = f(A_0)$, on en déduit que $g = f$ (proposition 1.7).

□

e) Translations et homothéties

Théorème 1.5 *Une application affine f d'un espace affine $\mathscr{E}$ dans lui-même est une translation si, et seulement si, elle vérifie $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$.*

Démonstration.
• Si $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ et $A \in \mathscr{E}$, on a, pour tout $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$:

$$t_{\vec{u}}(A + \vec{v}) = (A + \vec{v}) + \vec{u} = (A + \vec{u}) + \vec{v} = t_{\vec{u}}(A) + \vec{v}$$

donc $\overrightarrow{t_{\vec{u}}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$.

• Réciproquement, soit f une application affine de $\mathscr{E}$ telle que $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$. Fixons un point A dans $\mathscr{E}$ et posons $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$. Alors, pour tout point M de $\mathscr{E}$:

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = f(A) + \overrightarrow{AM} = A + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{AM} = M + \vec{u}$$

donc f est la translation de vecteur $\vec{u}$.

□

Définition *Soient $\mathscr{E}$ un espace affine, Ω un point de $\mathscr{E}$ et k un nombre réel non nul. On appelle* homothétie *de rapport k et de centre Ω l'application h de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie par $h(M) = \Omega + k\,\overrightarrow{\Omega M}$.*

Proposition 1.11 *Une homothétie de rapport k est une transformation affine dont l'inverse est l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$.*

Démonstration. D'après la définition et le théorème 1.2, une homothétie est une application affine d'application linéaire l'homothétie vectorielle de rapport k (*ie* $k\,\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$). Si h' est l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$, alors on a, pour tout point M de $\mathscr{E}$:

$$(h' \circ h)(M) = h'\left(\Omega + k\,\overrightarrow{\Omega M}\right) = h'(\Omega) + \overrightarrow{h'}\left(k\,\overrightarrow{\Omega M}\right) = \Omega + \frac{1}{k} \cdot k\,\overrightarrow{\Omega M} = M$$

et de même, $(h \circ h')(M) = M$. Par conséquent, h est bijective d'inverse h'.

□

Théorème 1.6 *Une application affine h est une homothétie distincte de* Id *si, et seulement si, son application linéaire est une homothétie vectorielle de rapport différent de* 1.

Démonstration. La condition nécessaire découle directement de la définition. Supposons donc que h soit une application affine de $\mathscr{E}$ telle que $\overrightarrow{h} = k\,\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$ avec $k \notin \{0, 1\}$. D'après le théorème 1.3, h admet alors un unique point fixe Ω. De là, on obtient, pour tout point M de $\mathscr{E}$:

$$h(M) = h\left(\Omega + \overrightarrow{\Omega M}\right) = h(\Omega) + \overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) = \Omega + k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

donc h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

□

f) Projections et symétries

Rappel d'algèbre linéaire. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires : $E = F \oplus G$. Tout élément $\vec{x}$ de E s'écrit alors de façon unique sous la forme $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$.
On appelle projeté (resp. symétrique) de $\vec{x}$ sur F (resp. par rapport à F) parallèlement à G l'élément $p(\vec{x}) = \vec{u}$ (resp. $s(\vec{x}) = \vec{u} - \vec{v} = \vec{x} - 2\,\vec{v}$). On notera q la projection sur G parallèlement à F.

Lemme 6 *Les applications $p, q, s : E \to E$ sont linéaires et vérifient $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $p + q = \mathrm{Id}_E$, $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$.*

Lemme 7

1) *Une application linéaire $p : E \to E$ est une projection si, et seulement si, $p \circ p = p$. Dans ce cas, on a $E = \ker(p - \mathrm{Id}) \oplus \ker p$ et p est la projection sur $\ker(p - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$.*

2) *Une application linéaire $s : E \to E$ est une symétrie si, et seulement si, $s \circ s = \mathrm{Id}$. Dans ce cas, $E = \ker(s - \mathrm{Id}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id})$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id})$.*

Théorème 1.7 *Soient $\mathscr{E}$ un espace affine, $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ et G un supplémentaire de $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.*
Alors, pour tout point M de $\mathscr{E}$, l'intersection de $\mathscr{F}$ et de $M + G$ est réduite à un point ; si $p(M)$ est ce point, l'application $p : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ ainsi définie est affine, d'application linéaire associée la projection vectorielle sur $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ parallèlement à G. L'application p est appelée projection (affine) *sur $\mathscr{F}$ dans la direction G et vérifie $p \circ p = p$.*

Démonstration. Pour $M \in \mathscr{E}$, la proposition 1.3 permet d'affirmer que l'intersection de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G} := M + G$ est réduite à un point. Notons $p(M)$ ce point et montrons que l'application $p : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ ainsi définie est affine, d'application linéaire π, la projection vectorielle sur $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ dans la direction G.
Soit $A \in \mathscr{F}$: $p(A)$ est par définition égal à A. Si $M \in \mathscr{E}$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ se décompose de façon unique en une somme $\vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$ et $\vec{v} \in G$. On a alors $\pi\left(\overrightarrow{AM}\right) = \vec{u}$. D'autre part :

- $A + \vec{u} \in \mathscr{F}$ car $A \in \mathscr{F}$ et $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$;
- $A + \vec{u} = A + \left(\overrightarrow{AM} - \vec{v}\right) = M - \vec{v} \in \mathscr{G}$ car $M \in \mathscr{G}$ et $v \in \overrightarrow{\mathscr{G}} = G$.

Ainsi $\mathscr{F} \cap (M + G) = \{A + \vec{u}\}$, donc $p(M) = A + \vec{u} = p(A) + \pi\left(\overrightarrow{AM}\right)$. Ceci montre que p est affine avec $\overrightarrow{p} = \pi$ (théorème 1.2).
Enfin, pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a $p(M) \in \mathscr{F}$ donc $(p \circ p)(M) = p(M)$.

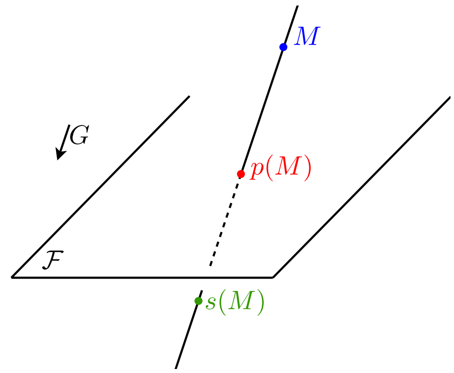
□

Proposition 1.12 *Une application affine $p : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une projection si, et seulement si, $p \circ p = p$.*

Démonstration. La condition est nécessaire d'après le théorème 1.7.
Supposons que p soit une application affine vérifiant $p \circ p = p$. On a alors $\overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}$ donc $\overrightarrow{p}$ est la projection vectorielle sur $F = \ker(\overrightarrow{p} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})$ dans la direction $G = \ker \overrightarrow{p}$ (lemme 7). D'autre part, pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a $p\Big(p(M)\Big) = p(M)$ donc $\mathrm{Fix}(p) \neq \emptyset$. Maintenant, si q est la projection sur $\mathrm{Fix}(p)$ dans la direction G, on a $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p}$ et, si $A \in \mathrm{Fix}(p)$, $q(A) = A = p(A)$. Par conséquent, $p = q$ d'après la proposition 1.7.

□

Théorème 1.8 *Soient $\mathscr{E}$ un espace affine, $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ et G un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Pour $M \in \mathscr{E}$, on note $s(M)$ le point défini par $s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$ où p est la projection sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G.*
Alors $s : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une application affine, d'application linéaire associée la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ parallèlement à G. L'application s est appelée symétrie (affine) *par rapport à $\mathscr{F}$ et de direction G et vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.*



Démonstration. Pour tout couple (M,N) de points de $\mathscr{E}$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{s(M)s(N)} &= \overrightarrow{s(M)M}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{Ns(N)} = -2\,\overrightarrow{Mp(M)}+\overrightarrow{MN}+2\overrightarrow{Np(N)}\\ &= 2\,\overrightarrow{p(M)M}+2\,\overrightarrow{MN}+2\,\overrightarrow{Np(N)}-\overrightarrow{MN} = 2\,\overrightarrow{p(M)p(N)}-\overrightarrow{MN}\\ &= 2\,\overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{MN}\right)-\overrightarrow{MN} = \left(2\,\overrightarrow{p}-\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)\left(\overrightarrow{MN}\right).\end{aligned}$$

Ceci montre que s est affine d'application linéaire $(2\,\overrightarrow{p}-\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})$, la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ et de direction G (théorème 1.2 et lemme 6). Enfin, pour tout point M de $\mathscr{F}$, on a

$$s(M) = M + 2\,\overrightarrow{Mp(M)} = M + 2\,\overrightarrow{MM} = M$$

donc $(s\circ s)(M) = M$. D'autre part, $\overrightarrow{s\circ s} = \overrightarrow{s}\circ\overrightarrow{s} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$ (lemme 6). On a donc $s\circ s = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ d'après la proposition 1.7.

□

Proposition 1.13 *Une application affine s est une symétrie si, et seulement si, $s\circ s = \mathrm{Id}$.*

Démonstration. La condition est nécessaire d'après le théorème 1.8.
Supposons que s soit une application affine vérifiant $s\circ s = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$. On a $\overrightarrow{s}\circ\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s\circ s} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$ donc $\overrightarrow{s}$ est la symétrie vectorielle par rapport à $F := \ker\left(\overrightarrow{s}-\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)$ dans la direction $G := \ker\left(\overrightarrow{s}+\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)$ (lemme 7).
D'autre part, pour tout point M de $\mathscr{E}$, le milieu $M' = M+\frac{1}{2}\overrightarrow{Ms(M)}$ de $[M,s(M)]$ est invariant par s :

$$s(M') = s(M)+\frac{1}{2}\overrightarrow{s(M)(s\circ s)(M)} = s(M)+\frac{1}{2}\overrightarrow{s(M)M} = s(M)+\overrightarrow{s(M)M}-\frac{1}{2}\overrightarrow{s(M)M} = M'.$$

Ainsi, $\mathrm{Fix}(s)$ est non vide ; c'est donc un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F (proposition 1.9). Si σ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Fix}(s)$ et de direction G, alors σ et s ont même application linéaire et coïncident en chaque point de $\mathrm{Fix}(s)$ donc sont égales (proposition 1.7).

□

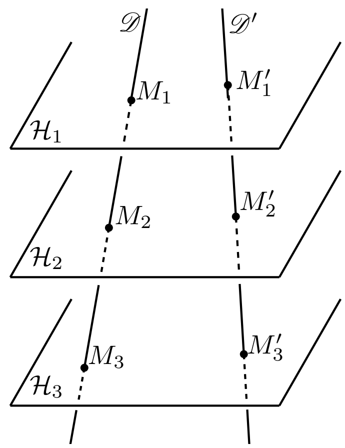
g) Une application : le théorème de Thalès

Théorème 1.9 (Théorème de Thalès [2]) *Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie, H un hyperplan vectoriel de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de $\mathscr{E}$ dont les directions sont chacune supplémentaire de H dans $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ trois hyperplans de $\mathscr{E}$ deux à deux distincts de même direction H, rencontrant $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) en trois points M_1, M_2 et M_3 (resp. M_1', M_2' et M_3'). Alors :*

$$\frac{\overrightarrow{M_1M_3}}{\overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{\overrightarrow{M_1'M_3'}}{\overrightarrow{M_1'M_2'}}.$$

2. Thalès de Milet était un mathématicien grec ayant vécu vers 600 avant J.-C.

Remarque : Les points M_1, M_2 et M_3 étant alignés, les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires : le scalaire λ tel que $\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda\,\overrightarrow{M_1M_2}$ est noté $\frac{\overrightarrow{M_1M_3}}{\overrightarrow{M_1M_2}}$.



Démonstration. Soit p la projection sur $\mathscr{D}'$ dans la direction H. Pour $i \in \{1,2,3\}$, $p(M_i)$ est le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ avec l'hyperplan contenant M_i et dirigé par H, c'est-à-dire $\mathcal{H}_i : p(M_i) = M_i'$. Par conséquent, si $\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda\,\overrightarrow{M_1M_2}$, on a :

$$\overrightarrow{M_1'M_3'} = \overrightarrow{p(M_1)p(M_3)} = \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{M_1M_3}\right) = \overrightarrow{p}\left(\lambda\,\overrightarrow{M_1M_2}\right) = \lambda\overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right) = \lambda\,\overrightarrow{p(M_1)p(M_2)} = \lambda\,\overrightarrow{M_1'M_2'}.$$

$\square$

Chapitre 2 : Notions euclidiennes

I _ Produit scalaire

a) Définition et propriétés

Définition *Un* produit scalaire *sur un espace vectoriel E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée ici $(u,v) \mapsto \langle u\,|v\,\rangle$, vérifiant :*

1) bilinéarité : $\forall (u,v,w) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\langle u+\lambda v\,|w\,\rangle = \langle u\,|w\,\rangle + \lambda\,\langle v\,|w\,\rangle$ *et* $\langle u\,|v+\lambda w\,\rangle = \langle u\,|v\,\rangle + \lambda\,\langle u\,|w\,\rangle$ *;*

2) symétrie : $\forall (u,v) \in E^2$, $\langle u\,|v\,\rangle = \langle v\,|u\,\rangle$ *;*

3) stricte positivité : $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\langle u\,|u\,\rangle > 0$.

Un espace vectoriel euclidien *est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.*

Exemples. 1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\big((x,y),(x',y')\big) \mapsto xx'+yy'$ est un produit scalaire.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, $\big((x,y,z),(x',y',z')\big) \mapsto xx'+yy'+zz'$ est un produit scalaire.

3) Dans $\mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ (avec $x=(x_1,...,x_n)$ et $y=(y_1,...,y_n)$) est un produit scalaire.

4) L'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Proposition 2.1 *Si E est un espace vectoriel euclidien, l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u\,|u\,\rangle}$ est une norme sur E, c'est-à-dire qu'elle vérifie :*

1) $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\|u\| > 0$ *;*

2) pour $u \in E$, on a $\|u\| = 0$ si, et seulement si, $u = 0$;

3) $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ *;*

4) $\forall (u,v) \in E^2$, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(inégalité de Minkowski[1]) avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires de même sens (*ie *$\exists \lambda > 0$ tel que $u = \lambda v$).*

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent de la stricte positivité et de la bilinéarité du produit scalaire. La troisième est une conséquence de la bilinéarité : $\langle \lambda u\,|\lambda u\,\rangle = \lambda^2\,\langle u\,|u\,\rangle$. L'inégalité de Minkowski est une conséquence de l'inégalité de Cauchy[2]-Schwarz[3] :

Lemme 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Si E est espace vectoriel euclidien, on a, pour tout $(u,v) \in E^2$:*

$$|\,\langle u\,|v\,\rangle\,| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires.

En effet, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v\,|u+v\,\rangle = \langle u\,|u\,\rangle + \langle u\,|v\,\rangle + \langle v\,|u\,\rangle + \langle v\,|v\,\rangle = \|u\|^2 + 2\,\langle u\,|v\,\rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,\end{aligned}$$

et si $||u+v|| = ||u|| + ||v||$, on obtient, en élevant au carré, $\langle u\,|v\,\rangle = ||u|| \cdot ||v||$, soit u et v colinéaires d'après le lemme. De plus, en remplaçant u par λv dans l'égalité $\langle u\,|v\,\rangle = ||u|| \cdot ||v||$, on obtient $\lambda ||v||^2 = |\lambda| \cdot ||v||^2$, soit $\lambda = |\lambda| > 0$.

□

1. Hermann Minkowski, mathématicien allemand, 1864-1909.
2. Augustin Louis Cauchy, mathématicien français, 1789-1857.
3. Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand,1843-1921.

Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Fixons u et v non nuls dans E (si u ou v est nul, l'inégalité est claire) et considérons l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(\lambda) = \|u + \lambda v\|^2$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a $f(\lambda) = \|u\|^2 + 2\lambda \langle u\,|v\,\rangle + \lambda^2\|v\|^2$ donc f est un polynôme de degré 2. Or f ne prend que des valeurs positives donc le discriminant de ce polynôme est négatif : $\langle u\,|v\,\rangle^2 - \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq 0$.
Enfin, si $|\langle u\,|v\,\rangle| = ||u|| \cdot ||v||$, ce discriminant est nul donc il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda_0) = 0$, c'est-à-dire $||u + \lambda_0 v||^2 = 0$. Ainsi, $u + \lambda_0 v = 0$: u et v sont colinéaires.

□

Proposition 2.2 (Formules de polarité) *Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a :*

$$\langle u\,|v\,\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

Démonstration. Il suffit de développer les expressions de droite en utilisant la bilinéarité du produit scalaire. Les calculs sont laissés au lecteur.

□

b) Expression matricielle

Définition *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $\boldsymbol{e} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. La* matrice du produit scalaire *dans la base $\boldsymbol{e}$ est la matrice carrée de taille n dont le coefficient (i, j) est égal à $\langle e_i\,|e_j\,\rangle$.*

Proposition 2.3 *Soit E un espace vectoriel euclidien et $\boldsymbol{e} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On note A la matrice du produit scalaire dans cette base. Si U et V sont les matrices colonnes des coordonnées dans $\boldsymbol{e}$ de deux éléments u et v de E, alors :*

$$\langle u\,|v\,\rangle = {}^tUAV.$$

Démonstration. Si $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u\,|v\,\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left\langle e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i\, y_j \,\langle e_i\,|e_j\,\rangle = {}^tUAV,$$

la dernière égalité s'obtenant simplement en calculant le produit des trois matrices.

□

Proposition 2.4 *Soit E un espace vectoriel euclidien et $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e'}$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\boldsymbol{e}$ à $\boldsymbol{e'}$ et A (resp A') la matrice du produit scalaire dans la base $\boldsymbol{e}$ (resp. $\boldsymbol{e'}$). Alors :*

$$A' = {}^tPAP.$$

Démonstration. Soient u et v deux éléments de E, U et V (resp. U' et V') leurs vecteurs coordonnées dans la base $\boldsymbol{e}$ (resp. $\boldsymbol{e'}$). Ces matrices sont reliées par les égalités $U = PU'$ et $V = PV'$. Par conséquent, en utilisant la proposition 2.3, on obtient

$$\langle u\,|v\,\rangle = {}^tU\,A\,V = {}^t(PU')A(PV') = {}^tU'({}^tPAP)V' = {}^tU'A'V'.$$

Cette dernière égalité étant satisfaite pour tous vecteurs u, v de E, on obtient $A' = {}^tPAP$.

□

II _ Orthogonalité

a) Vecteurs orthogonaux - Bases orthonormées

Définition *Deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien sont dits* orthogonaux *si leur produit scalaire est nul.*

Proposition 2.5 (Théorème de Pythagore [4]**)** *Deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel euclidien sont orthogonaux si, et seulement si :*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Démonstration. Il suffit de calculer le membre de gauche :

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v \,|\, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u \,|\, v \rangle + \|v\|^2.$$

□

Définition *Une base d'un espace vectoriel euclidien est dite* orthogonale *si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux. La base sera dite* orthonormée *si de plus chacun de ses vecteurs est unitaire (*ie de norme égale *à 1).*

Proposition 2.6 *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.*

Démonstration. Si $(u_1, ..., u_k)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E et si une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$ de ces vecteurs est nulle, alors, pour tout $j \in \{1, ..., k\}$:

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \,\middle|\, u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle u_i \,|\, u_j \rangle = \lambda_j \|u_j\|^2 \quad \text{donc } \lambda_j = 0.$$

□

Théorème 2.1 *Tout espace vectoriel euclidien admet des bases orthonormées.*

On va en fait démontrer (dans le cas de la dimension 2 et 3) par un procédé algorithmique (appelé **procédé d'orthonormalisation de Gram** [5]**-Schmidt** [6]) un résultat un peu plus fort :

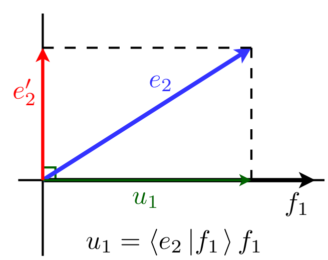
Théorème 2.2 *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace vectoriel euclidien E. Il existe alors une base orthonormée $(f_1, ..., f_n)$ telle que pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, on ait* $\mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}\,(f_1, ..., f_k)$.

• La première étape est simple : il suffit de normaliser e_1, c'est-à-dire de poser $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$. Les deux vecteurs e_1 et f_1 étant colinéaires, on a bien $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(f_1)$.

• La deuxième étape consiste à projeter orthogonalement e_2 sur l'orthogonal de f_1 dans le plan $\mathrm{Vect}(f_1, e_2)$, c'est-à-dire de poser $e'_2 = e_2 - \langle e_2 \,|\, f_1 \rangle f_1$. En effet, on a par bilinéarité du produit scalaire

$$\langle e'_2 \,|\, f_1 \rangle = \langle e_2 \,|\, f_1 \rangle - \langle e_2 \,|\, f_1 \rangle \langle f_1 \,|\, f_1 \rangle = \langle e_2 \,|\, f_1 \rangle - \langle e_2 \,|\, f_1 \rangle = 0$$

puisque $\langle f_1 \,|\, f_1 \rangle = \|f_1\|^2 = 1$. Puisque la famille (f_1, e_2) est libre, le vecteur e'_2 n'est pas nul et on peut, pour finir, le normaliser en posant $f_2 = \dfrac{e'_2}{\|e'_2\|}$: la famille (f_1, f_2) est orthonormale par construction. La définition de f_2 et de e'_2 montre que $\mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \mathrm{Vect}(f_1, e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.



• On définit ensuite e'_3 comme étant le projeté orthogonal de e_3 sur l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ dans $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, e_3)$:

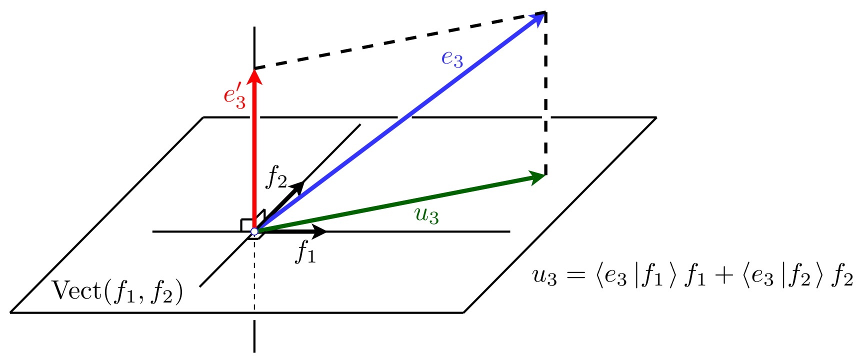
$$e'_3 = e_3 - \langle e_3 \,|\, f_1 \rangle f_1 - \langle e_3 \,|\, f_2 \rangle f_2.$$

On vérifie que e'_3 est orthogonal à f_1 et à f_2 :

$$\langle e'_3 \,|\, f_1 \rangle = \langle e_3 \,|\, f_1 \rangle - \langle e_3 \,|\, f_1 \rangle \langle f_1 \,|\, f_1 \rangle - \langle e_3 \,|\, f_2 \rangle \langle f_2 \,|\, f_1 \rangle = 0 \text{ puisque } \langle f_1 \,|\, f_1 \rangle = 1 \text{ et } \langle f_2 \,|\, f_1 \rangle = 0,$$

et de même $\langle e'_3 \,|\, f_2 \rangle = 0$. On conclut en posant $f_3 = \dfrac{e'_3}{\|e'_3\|}$ (e'_3 n'est pas nul car la famille (f_1, f_2, e_3) est libre).

4. Pythagore de Samos, philosophe et mathématicien grec, vers 580-495 av. J.-C.
5. Jørgen Pedersen Gram, mathématicien danois, 1850-1916
6. Erhard Schmidt, mathématicien allemand, 1876-1959



• La démonstration générale consiste à poursuivre la construction des vecteurs f_k par récurrence en utilisant la formule suivante à l'étape k :

$$e_k' = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k \,|f_i\rangle\, f_i.$$

Proposition 2.7 *Soit* $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ *une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien* E*. Les coordonnées d'un élément* x *de* E *dans cette base sont* $\big(\langle e_i \,|x\rangle\big)_{i=1,...,n}$ *:* $x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|x\rangle\, e_i$.

Démonstration. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors, pour $k \in \{1, ..., n\}$, on a $\langle e_k \,|x\rangle = \left\langle e_k \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_k \,|e_i\rangle = x_k$.

□

Proposition 2.8 *Soient* $(e_1, ..., e_n)$ *une base* <u>*orthonormée*</u> *d'un espace vectoriel euclidien* E*,* x *et* y *deux vecteurs de* E *de coordonnées respectives* $(x_1, ..., x_n)$ *et* $(y_1, ..., y_n)$ *dans cette base. Alors :*

$$\langle x \,|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Démonstration. La deuxième égalité est une conséquence de la première ($y = x$). Celle-ci découle du fait que $\langle e_i \,|e_j\rangle$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$:

$$\langle x \,|y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i \,|e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

□

b) Orthogonal d'une partie

Définition *Soit* A *une partie d'un espace vectoriel euclidien* E*. L'*orthogonal *de* A*, noté* $A^\perp$*, est l'ensemble des vecteurs de* E *orthogonaux à tous les vecteurs de* A *:*

$$A^\perp = \big\{u \in E \;/\; \langle u \,|v\rangle = 0 \text{ pour tout vecteur } v \text{ de } A\big\}.$$

Lemme 2 *Pour toute partie* A *d'un espace vectoriel euclidien* E*,* $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Démonstration. La démonstration est aisée et laissée au soin du lecteur.

□

Lemme 3 *Pour toute partie* A *d'un espace vectoriel euclidien* E*, on a* $\mathrm{Vect}(A)^\perp = A^\perp$*.*

Démonstration. Si $v \in \mathrm{Vect}(A)^\perp$, v est orthogonal à tout élément de $\mathrm{Vect}(A)$ donc à tout élément de A. Par conséquent $v \in A^\perp$. Ceci montre que $\mathrm{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$.
Soit à présent un vecteur v de $A^\perp$ et montrons qu'il est orthogonal à tout élément de $\mathrm{Vect}(A)$. Si u appartient à $\mathrm{Vect}(A)$, il existe $a_1, ..., a_k$ dans A et $\lambda_1, ..., \lambda_k$ dans $\mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$. De là, on obtient :

$$\langle u \,|v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \,|v \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle a_i \,|v\rangle = 0 \;\text{ car } v \text{ est orthogonal à chacun des } a_i.$$

□

Théorème 2.3 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires :*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

En particulier, on a $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.

Démonstration. Un vecteur appartenant à $F \cap F^\perp$ serait orthogonal à lui-même donc de norme nulle. Puisque seul le vecteur nul est de norme nulle, on en déduit que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Ainsi, les deux sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont en somme directe. Il suffit donc pour conclure de démontrer l'égalité concernant les dimensions. Pour cela, on considère une base orthonormée $(e_1, ..., e_k)$ de F que l'on complète en une base orthonormée $(e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n)$ de E (ceci est possible en utilisant le procédé de Gram-Schmidt). On va montrer que $F^\perp = \text{Vect}(e_{k+1}, ..., e_n)$, ce qui termine la démonstration du théorème. Notons que d'après le lemme 3, on a $F^\perp = \{e_1, ..., e_k\}^\perp$.

• Si $i \in \{k+1, ..., n\}$, e_i est orthogonal à chacun des e_j, $1 \leq j \leq k$, donc $e_i \in \{e_1, ..., e_k\}^\perp = F^\perp$. Ceci montre que $\text{Vect}(e_{k+1}, ..., e_n) \subset F^\perp$.

• Soit à présent un élément u de $F^\perp$. On décompose u dans la base $(e_1, ..., e_n)$: $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Pour $1 \leq j \leq k$, $e_j \in F$ donc :

$$0 = \langle e_j \,|u \rangle = \left\langle e_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_j \,|e_i \rangle = \lambda_j \quad \text{puisque} \quad \langle e_j \,|e_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Par conséquent, $u = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$ est dans $\text{Vect}(e_{k+1}, ..., e_n)$. On a donc montré que $F^\perp \subset \text{Vect}(e_{k+1}, ..., e_n)$.

□

Corollaire 2.1 *Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel euclidien E, il vient* $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Démonstration. Puisque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de $F^\perp$, on a $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$. Le théorème 2.3 montrant que ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension, ils sont donc égaux.

□

Le résultat du théorème 2.3 permet de donner la définition suivante :

Définition *Une* projection orthogonale *d'un espace vectoriel euclidien E est une projection sur un sous-espace vectoriel F dans la direction $F^\perp$. De même, une* symétrie orthogonale *est une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F dans la direction $F^\perp$. Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est une* réflexion.

Proposition 2.9 *Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace affine euclidien E et $(e_1, ..., e_k)$ une base* <u>*orthonormée*</u> *de F. On note p la projection orthogonale sur F. Alors :*

$$\forall x \in E, \; p(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i \,|x \rangle \, e_i.$$

Démonstration. Complétons $(e_1, ..., e_k)$ en une base orthonormée de E (procédé de Gram-Schmidt). On a alors (proposition 2.7) :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|x \rangle \, e_i = \left(\sum_{i=1}^{k} \langle e_i \,|x \rangle \, e_i \right) + \left(\sum_{i=k+1}^{n} \langle e_i \,|x \rangle \, e_i \right),$$

cette dernière expression étant la décomposition de x en la somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$. D'où le résultat.

□

III – Endomorphisme orthogonal

a) Généralités

Définition *Soit E un espace vectoriel euclidien. Un* endomorphisme orthogonal *de E est une application linéaire $f : E \to E$ qui conserve le produit scalaire :*

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle f(u) \,|\, f(v) \rangle = \langle u \,|\, v \rangle .$$

Remarque : on parle aussi d'isométrie vectorielle.

Remarque : il est évident que la composée de deux endomorphismes orthogonaux est un endomorphisme orthogonal.

Notation : on notera $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien E.

Proposition 2.10 *Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme f de E est orthogonal si, et seulement si, il préserve la norme, c'est-à-dire que pour tout $u \in E$, on a $\|f(u)\| = \|u\|$.*

Démonstration. Ceci résulte des deux égalités

$$\|f(u)\| = \langle f(u) \,|\, f(u) \rangle \quad \text{et} \quad \langle f(u) \,|\, f(v) \rangle = \frac{1}{2} \left(\|f(u+v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 \right) \quad \text{pour tous } u, v \in E.$$

□

Exemple : une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal. En effet, soit s une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout élément x de E se décomposant sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$, on a $s(x) = u - v$. Alors, puisque $\langle u \,|\, v \rangle = 0$, il vient $\|s(x)\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|x\|^2$.

Proposition 2.11 *Un endomorphisme orthogonal est bijectif.*

Démonstration. Si x est dans le noyau d'un endomorphisme orthogonal f, alors $0 = \|f(x)\| = \|x\|$ donc $x = 0$. Ceci montre que f est injectif et donc qu'il est bijectif puisqu'on est en dimension finie.

□

Théorème 2.4 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est orthogonal ;*

(ii) *f transforme toute base orthonormée en une base orthonormée ;*

(iii) *il existe une base orthonormée $\boldsymbol{e}$ de E telle que $f(\boldsymbol{e})$ soit orthonormée.*

Démonstration. Puisqu'un endomorphisme orthogonal préserve le produit scalaire et la norme, il est clair que la première assertion implique la deuxième. La troisième est clairement conséquence de la deuxième. Il reste donc à démontrer que la troisième implique la première. Soit $\boldsymbol{e} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E telle que $f(\boldsymbol{e}) = (f(e_1), ..., f(e_n))$ soit également une base orthonormée. On va montrer que $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout x dans E, ce qui permettra de conclure en utilisant la proposition 2.10. Soit $x \in E$ et décomposons-le dans la base $\boldsymbol{e}$: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors, par linéarité de f, $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ et on obtient, en utilisant la proposition 2.8 :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2.$$

□

Définition *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* orthogonale *si elle est inversible, d'inverse sa transposée, c'est-à-dire : ${}^tAA = \mathrm{I}_n = A\,{}^tA$. On notera $\mathrm{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n : c'est le* groupe orthogonal *d'ordre n.*

Proposition 2.12 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Notons $(C_1, ..., C_n)$ les vecteurs colonnes de A. Si $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $C_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k$ et donc $\langle C_i \,|C_j \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j}$ (proposition 2.8). D'autre part, si ${}^tA = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ (donc $b_{i,j} = a_{j,i}$), on a :

$$({}^tAA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = \langle C_i \,|C_j \rangle \qquad (*).$$

Par conséquent, si A est orthogonale, alors $\langle C_i \,|C_j \rangle$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$, donc la famille $(C_1, ..., C_n)$ est orthonormée. C'est en particulier une base de E (proposition 2.6).
Réciproquement, si $(C_1, ..., C_n)$ est une base orthonormée, alors A est de rang n, donc inversible et l'égalité $(*)$ montre que ${}^tAA = \mathrm{I}_n$: l'inverse de A est bien ${}^tA$.

□

Proposition 2.13 *Un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien est orthogonal si, et seulement si, sa matrice <u>dans une base orthonormée</u> est une matrice orthogonale.*

Démonstration. En utilisant la propositon 2.12, cet énoncé est une autre façon de dire qu'un endomorphisme est orthogonal si, et seulement si, il transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

□

Corollaire 2.2 *Le déterminant d'un endomorphisme orthogonal vaut 1 s'il est direct, -1 s'il est indirect.*

Démonstration. Si f est un endomorphisme orthogonal et A sa matrice dans une base orthonormée, alors $\det f = \det A$. Mais ${}^tAA = \mathrm{I}_n$ donc

$$1 = \det\left({}^tAA\right) = \left(\det {}^tA\right)(\det A) = (\det A)(\det A) = (\det A)^2.$$

Par conséquent, $\det A = \pm 1$.

□

Définition *On note* $\mathrm{SO}(n)$ *l'ensemble des matrices orthogonales de taille n dont le déterminant vaut 1. C'est le* groupe spécial orthogonal *d'ordre n. Si E est un espace vectoriel euclidien, on notera* $\mathrm{SO}(E)$ *l'ensemble des endomorphismes orthogonaux directs de E.*

b) Cas d'un plan vectoriel euclidien

Proposition 2.14 *Tout élément de* $\mathrm{O}(2)$ *est de la forme* $\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$ *avec $\varepsilon = \pm 1$ et $a^2 + b^2 = 1$.*

Démonstration. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ un élément de $\mathrm{O}(2)$. Puisque les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (proposition 2.12), on a :

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 1, \quad \beta^2 + \delta^2 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha\beta + \gamma\delta = 0.$$

En multipliant la première égalité par δ^2, on obtient, en utilisant la troisième puis la deuxième :

$$\delta^2 = \delta^2\alpha^2 + \delta^2\gamma^2 = \delta^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 = \alpha^2(\delta^2 + \beta^2) = \alpha^2.$$

Il existe donc $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\delta = \varepsilon\alpha$. De là, on obtient

$$0 = \alpha\beta + \gamma\delta = \alpha\beta + \varepsilon\alpha\gamma, \quad \text{soit} \quad \alpha(\beta + \varepsilon\gamma) = 0.$$

Si $\alpha = 0$, alors $\beta^2 = 1 = \gamma^2$ donc $\gamma = \pm\beta$. Si $\alpha \neq 0$, on obtient bien $\beta = -\varepsilon\gamma$.

Réciproquement, si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{smallmatrix}\right)$ avec $a^2 + b^2 = 1$, alors les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (calcul aisé laissé au lecteur) et A est donc orthogonale.

□

Remarque : le déterminant de la matrice ci-dessus vaut ε.

Corollaire 2.3 *Soit f un endomorphisme orthogonal direct d'un plan vectoriel euclidien orienté E. Il existe un nombre réel θ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathbf{e}$ de E, la matrice de f dans $\mathbf{e}$ soit*

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.14 et le corollaire 2.2, si $\boldsymbol{e}$ est une base orthonormée de E, il existe deux nombes réels a et b tels que la matrice de f dans $\boldsymbol{e}$ soit $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ $(\varepsilon = 1)$. De plus, ces deux nombres réels vérifient l'égalité $a^2 + b^2 = 1$ donc peuvent s'écrire sous la forme $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. La matrice de f dans la base $\boldsymbol{e}$ est donc bien de la forme R_θ. Il reste à démontrer que celle-ci ne change pas lorque l'on effectue un changement de base orthonormée directe. Mais si P est la matrice d'un tel changement de base, P est une matrice orthogonale de déterminant 1 d'après le corollaire 2.2. D'après ce que l'on vient de dire, il existe donc un nombre réel θ' tel que $P = R_{\theta'}$. De là on obtient $P^{-1}R_\theta P = R_{-\theta'}R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'}R_{\theta'}R_\theta = R_\theta$ en utilisant le lemme ci-dessous.

□

Lemme 4 *Pour tous nombres réels θ_1 et θ_2, on a :*

$$R_{\theta_1}R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_2}R_{\theta_1} \quad \textit{et} \quad R_{\theta_1}^{-1} = R_{-\theta_1}.$$

Démonstration. Il suffit d'effectuer les calculs et d'utiliser les formules de trigonométrie suivantes :

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2.$$

□

Définition *Soit E un plan vectoriel euclidien. Les éléments de* $\mathrm{SO}(E)$ *sont appelés des* rotations. *Si E est orienté, on appelle* angle *d'une rotation R tout réel θ tel que la matrice de R dans une base orthonormée directe (et donc dans toutes) soit* $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$.

Proposition 2.15 *Si E est un plan vectoriel euclidien, les élément de* $\mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ *sont des réflexions.*

Démonstration. Soit f un endomorphisme orthogonal indirect. Fixons une base orthonormée $\mathbf{e}$ de E. D'après la proposition 2.14, la matrice de f dans $\mathbf{e}$ est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Le polynôme caractéristique de f est donc

$$\chi_f = \left|\begin{smallmatrix} a-X & b \\ b & -a-X \end{smallmatrix}\right| = (a - X)(-a - X) - b^2 = X^2 - a^2 - b^2 = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1).$$

Puisqu'il est scindé à racines simples, f est diagonalisable et donc $E = \ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f + \mathrm{Id})$. Ainsi, f est une symétrie. Montrons pour conclure que ses deux sous-espaces propres sont orthogonaux. Si $u \in \ker(f - \mathrm{Id})$ et $v \in \ker(f + \mathrm{Id})$, on a, puisque f préserve le produit scalaire :

$$\langle u \,|v \rangle = \langle f(u) \,| f(v) \rangle = \langle u \,|-v \rangle = -\langle u \,|v \rangle$$

donc $\langle u \,|v \rangle = 0$.

□

Proposition 2.16 *Si R est une rotation et s une réflexion, alors $s \circ R \circ s = R^{-1}$.*

Démonstration. La composée de deux endomorphismes orthogonaux est un endomorphisme orthogonal. D'autre part, $\det(s \circ R) = (\det s)(\det R) = -1$ donc $s \circ R$ est indirect, donc est une réflexion (proposition 2.15). Par conséquent, $(s \circ R) \circ (s \circ R) = \mathrm{Id}$, soit $s \circ R \circ s = R^{-1}$.

□

c) Produit vectoriel

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Lemme 5 *Soient* $\mathbf{e}$ *et* $\mathbf{e}'$ *deux base orthonormées directes de* E *et* u, v, w *trois éléments de* E*. Alors :*

$$\det_{\mathbf{e}}(u, v, w) = \det_{\mathbf{e}'}(u, v, w).$$

Démonstration. Si P est la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$, alors les propriétés du déterminant donnent $\det_{\mathbf{e}}(u, v, w) = (\det P)\,(\det_{\mathbf{e}'}(u, v, w))$. Mais les bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ étant orthonormées directes, la matrice P est orthogonale (proposition 2.12) de déterminant 1, ce qui conduit au résultat.

□

Définition *On appelle* produit mixte *de trois vecteurs* (u, v, w) *dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension* 3 *le déterminant de ces vecteurs dans une base orthonormée directe. Il est noté* $[u, v, w]$*.*

Théorème-Définition 2.5 *Soient* E *un espace vectoriel euclidien orienté et* u, v *deux éléments de* E*. Il existe un unique vecteur* w *dans* E *tel que, pour tout* $x \in E$*, on ait* $[u, v, x] = \langle w \,|x \rangle$*.*
Le vecteur w *ainsi défini est appelé* produit vectoriel *de* u *et* v*, et noté* $u \wedge v$*.*

Démonstration. Notons d'abord que si u et v sont liés, alors le produit mixte $[u, v, x]$ est toujours nul et seul le vecteur nul répond au problème. On suppose donc que (u, v) est libre et on note P le plan vectoriel qu'ils engendrent.

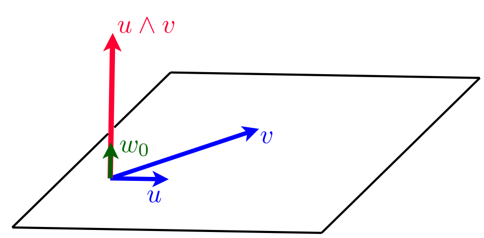
• Si $w \in E$ vérifie $[u, v, x] = \langle w \,|x \rangle$ pour tout $x \in E$, alors :

$$\langle w \,|u \rangle = [u, v, u] = 0 \quad \text{et} \quad \langle w \,|v \rangle = [u, v, v] = 0.$$

Ainsi, w est nécessairement dans l'orthogonal de P, qui est une droite vectorielle d'après le théorème 2.3. Si w_0 est un vecteur unitaire dirigeant $P^{\perp}$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = \lambda w_0$. On a alors

$$[u, v, w_0] = \langle w \,|w_0 \rangle = \lambda \langle w_0 \,|w_0 \rangle = \lambda,$$

ce qui montre l'unicité : on a nécessairement $w = [u, v, w_0]w_0$.



• Réciproquement, le vecteur $w = [u, v, w_0]w_0$ est solution du problème. En effet, puique $E = P \oplus \mathrm{Vect}(w_0)$, (u, v, w_0) est une base de E et on a, pour tout $x \in E$ de coordonnées (α, β, γ) dans cette base :

$$[u, v, x] = [u, v, \alpha u + \beta v + \gamma w_0] = \alpha[u, v, u] + \beta[u, v, v] + \gamma[u, v, w_0] = \gamma[u, v, w_0]$$

et d'autre part

$$\langle w \,|x \rangle = \langle [u, v, w_0]w_0 \,|\alpha u + \beta v + \gamma w_0 \rangle = [u, v, w_0]\Big(\alpha \langle w_0 \,|u \rangle + \beta \langle w_0 \,|v \rangle + \gamma \langle w_0 \,|w_0 \rangle\Big) = [u, v, w_0]\gamma.$$

□

Proposition 2.17 *Soient* u *et* v *deux vecteurs de* E*. Alors :*

1) $u \wedge v = 0$ *si, et seulement si,* (u, v) *est liée.*
2) $u \wedge v$ *est orthogonal à* u *et* v*.*
3) *Si* u *et* v *sont unitaires et orthogonaux, alors* $(u, v, u \wedge v)$ *est une base orthonormée directe de* E*.*

Démonstration. Nous avons déjà vu dans la démonstration du théorème 2.5 que si (u, v) est liée alors $u \wedge v = 0$ et que $u \wedge v$ est orthogonal à u et v. Si on suppose que $u \wedge v = 0$, alors on a $[u, v, x] = \langle u \wedge v \,|x \rangle = 0$ pour tout x dans E donc (u, v) est liée (si (u, v) est libre, on peut la compléter en une base (u, v, w) de E et alors $[u, v, w] \neq 0$). Il reste à démontrer que si u et v sont unitaires et orthogonaux, alors $u \wedge v$ est unitaire et

$(u, v, u \wedge v)$ est directe. Remarquons d'abord que si on calcule le déterminant des trois vecteurs $(u, v, u \wedge v)$ dans une base orthonormée directe $\mathbf{e}$, on a, par définition du produit vectoriel :

$$\det_{\mathbf{e}}(u, v, u \wedge v) = [u, v, u \wedge v] = \langle u \wedge v \,| u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2 > 0$$

donc la base $(u, v, u \wedge v)$ est bien directe. Mais de cette dernière égalité, on déduit :

$$\|u \wedge v\| = \frac{1}{\|u \wedge v\|} \det_{\mathbf{e}}(u, v, u \wedge v) = \det_{\mathbf{e}}\left(u, v, \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}\right).$$

Or ce dernier déterminant vaut 1 car la base $(u, v, \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|})$ est orthonormée directe.

□

Proposition 2.18 *Soit* $\mathbf{e}$ *une base orthonormée directe de* E*,* u *et* v *deux éléments de* E *de coordonnées respectives* (x_1, x_2, x_3) *et* (y_1, y_2, y_3) *dans cette base. Les coordonnées de* $u \wedge v$ *dans* $\mathbf{e}$ *sont alors :*

$$\big(x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1\big).$$

Démonstration. Si on pose $u \wedge v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, alors $\alpha_k = \langle u \wedge v \,| e_k \rangle$ (proposition 2.7). Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \langle u \wedge v \,| e_1 \rangle = [u, v, e_1] = [x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, v, e_1] \\
&= x_1 [e_1, v, e_1] + x_2 [e_2, v, e_1] + x_3 [e_3, v, e_1] = x_2 [e_2, v, e_1] + x_3 [e_3, v, e_1] \\
&= x_2 \Big(y_1 [e_2, e_1, e_1] + y_2 [e_2, e_2, e_1] + y_3 [e_2, e_3, e_1] \Big) + x_3 \Big(y_1 [e_3, e_1, e_1] + y_2 [e_3, e_2, e_1] + y_3 [e_3, e_3, e_1] \Big) \\
&= x_2 y_3 [e_2, e_3, e_1] + x_3 y_2 [e_3, e_2, e_1] = x_2 y_3 [e_1, e_2, e_3] - x_3 y_2 [e_1, e_2, e_3] \\
&= x_2 y_3 - x_3 y_2.
\end{aligned}$$

On procède de la même façon pour les deux autres coordonnées.

□

IV _ Angles

Il y a en géométrie plusieurs notions d'angles : angle d'une rotation, angle orienté de vecteurs ou de droites, angle non orienté (ou angle géométrique). Nous allons définir ces différentes notions.

Dans toute cette section, E est un plan vectoriel euclidien.

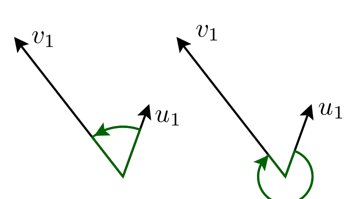
a) Angles orientés de vecteurs

Lemme 6 *Soient* u *et* v *deux vecteurs unitaires de* E*. Il existe une unique rotation* R *de* E *telle que* $R(u) = v$*.*

Démonstration. Complétons u en une base orthonormée (u, u'). Si v s'écrit dans cette base $v = au + bu'$, alors $a^2 + b^2 = 1$ puisque v est unitaire. La matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ est donc la matrice d'une rotation R de E et celle-ci vérifie $R(u) = v$. C'est la seule satisfaisant cette condition car si R' est une rotation vérifiant $R'(u) = v$, sa matrice dans la base (u, u') est nécessairement $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

□

Définition *Soient* u *et* v *deux éléments non nuls de* E*. On appelle* angle orienté *de* u *et* v *l'unique rotation* R *vérifiant* $R\Big(\frac{u}{\|u\|}\Big) = \frac{v}{\|v\|}$*. Il sera noté* $\widehat{u, v}$*.*
Si E *est orienté, on appelle* mesure *de cet angle tout nombre réel* θ *tel que* R *ait pour matrice (dans n'importe quelles base orthonormée directe)* $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$*. Sa* mesure principale *est la mesure appartenant à* $]-\pi, \pi]$*.*



$R_\theta = R_{\theta - 2\pi}$
Ces deux angles sont égaux

Sommes d'angles. Si u_1, v_1, u_2 et v_2 sont quatre vecteurs de E et R_1, R_2, les rotations de E vérifiant respectivement $R_1\Big(\frac{u_1}{\|u_1\|}\Big) = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ et $R_2\Big(\frac{u_2}{\|u_2\|}\Big) = \frac{v_2}{\|v_2\|}$, alors la somme $\widehat{u_1, v_1} + \widehat{u_2, v_2}$ est par définition la rotation $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ (voir lemme 4). C'est donc l'angle orienté des vecteurs u et $R_1 \circ R_2(u)$ pour tout vecteur non nul u de E. Il y a un angle nul, représenté par Id : c'est l'angle orienté $\widehat{u, u}$ pour tout $u \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Chaque angle $\widehat{u, v}$ possède un opposé $-\widehat{u, v}$ qui est l'angle $\widehat{v, u}$ (représenté par la rotation R^{-1} si R représente $\widehat{u, v}$).

Proposition 2.19 (Relation de Chasles) *Pour tous vecteurs non nuls u, v et w de E, on a $\widehat{u,v}+\widehat{v,w}=\widehat{u,w}$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition d'un angle orienté de vecteurs et du lemme 4.

□

Proposition 2.20 *Soient u, v_1 et v_2 trois vecteurs non nuls de E. On a :*

$$\widehat{u,v_1}=\widehat{u,v_2} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda>0, \textit{tel que } v_2=\lambda v_1.$$

Démonstration. Si $v_2=\lambda v_1$ avec $\lambda>0$, alors $\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{v_2}{\|v_2\|}$ donc $\widehat{u,v_1}=\widehat{u,v_2}$ (définition de l'angle orienté de deux vecteurs). Réciproquement, si ces deux angles sont égaux, il existe une rotation R telle que

$$R\left(\frac{u}{\|u\|}\right)=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{v_2}{\|v_2\|}$$

donc $v_2=\frac{\|v_2\|}{\|v_1\|}v_1$ et $\lambda=\frac{\|v_2\|}{\|v_1\|}$ convient.

□

Proposition 2.21 *Soient u et v deux éléments de E.*

1) Pour toute rotation R on a $\widehat{R(u),R(v)}=\widehat{u,v}$ (les rotations préservent les angles).

2) Pour toute réflexion s on a $\widehat{s(u),s(v)}=-\widehat{u,v}$ (les réflexions renversent les angles).

Démonstration. Quitte à normaliser les vecteurs, on peut supposer qu'ils sont unitaires. Notons R_0 la rotation vérifiant $R_0(u)=v$.
1) On a $R_0\big(R(u)\big)=R\big(R_0(u)\big)=R(v)$ d'après le lemme 4, donc R_0 est bien la rotation représentant l'angle orienté $\widehat{R(u),R(v)}$.
2) En utilisant la proposition 2.16, on calcule de même $R_0\big(s(v)\big)=(R_0\circ s)(v)=(s\circ R_0^{-1})(v)=s(u)$ donc R_0 représente également l'angle $\widehat{s(v),s(u)}$: $\widehat{s(v),s(u)}=\widehat{u,v}$, ou encore $\widehat{s(u),s(v)}=-\widehat{u,v}$.

□

Proposition 2.22 *Soient u et v deux éléments d'un plan vectoriel euclidien orienté E et θ une mesure de l'angle orienté $\widehat{u,v}$. Alors :*

$$\langle u\,|v\,\rangle=\|u\|\,\|v\|\cos\theta \quad \textit{et} \quad \det(u,v)=\|u\|\,\|v\|\sin\theta.$$

Démonstration. Quitte à diviser chacun des membres de ces deux égalités par $\|u\|\,\|v\|$ (bilinéarité du produit scalaire et du déterminant), on peut supposer que u et v sont unitaires. Soit u' tel que (u,u') soit une base orthonormée directe de E et R la rotation envoyant u sur v. La matrice de R dans (u,u') est $\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$, donc on a $R(u)=(\cos\theta)u+(\sin\theta)u'=v$. De là, on obtient :

$$\langle u\,|v\,\rangle=\langle u\,|(\cos\theta)u+(\sin\theta)u'\,\rangle=(\cos\theta)\,\langle u\,|u\,\rangle+(\sin\theta)\,\langle u\,|u'\,\rangle=\cos\theta,$$
$$\det(u,v)=\det\big(u,(\cos\theta)u+(\sin\theta)u'\big)=(\cos\theta)\det(u,u)+(\sin\theta)\det(u,u')=\sin\theta.$$

□

b) Angles orientés de droites

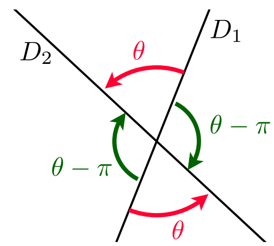
Lemme 7 *Soient D_1 et D_2 deux droites de E. Il existe exactement deux rotations envoyant D_1 sur D_2. Si θ est une mesure de l'angle de l'une de ces rotations, l'autre a pour angle $\theta-\pi$ (dans le cas où E est orienté).*

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux vecteurs unitaires dirigeant respectivement D_1 et D_2. Une rotation R envoie D_1 sur D_2 si, et seulement si, $R(u_1)=\pm u_2$. D'après le lemme 6, il existe donc exactement deux rotations envoyant D_1 sur D_2. Si θ est une mesure de l'angle $\widehat{u_1,u_2}$, alors R_θ est une de ces rotations ($R_\theta(u_1)=u_2$) et $R_{\theta-\pi}$ est l'autre ($R_{\theta-\pi}(u_1)=R_{-\pi}(u_2)=-u_2$).

□

Définition *On appelle angle orienté de deux droites D_1 et D_2 l'ensemble $\{R, R'\}$ où R et R' sont les deux rotations envoyant D_1 sur D_2. Cet angle sera noté $\widehat{D_1, D_2}$.*
On appelle mesure *de cet angle tout nombre réel θ tel que R ou R' ait pour matrice $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ (dans n'importe quelle base orthonormée directe).*

Commentaire : si u_1 et u_2 sont deux vecteurs engendrant respectivement D_1 et D_2, nous avons *a priori* le choix entre quatre angles de vecteurs pour définir l'angle de D_1 et D_2 : $\widehat{u_1, u_2}$, $\widehat{u_1, -u_2}$, $\widehat{-u_1, u_2}$ et $\widehat{-u_1, -u_2}$. Il n'y a en fait que deux choix puisque $\widehat{u_1, u_2} = \widehat{-u_1, -u_2}$ et $\widehat{u_1, -u_2} = \widehat{-u_1, u_2}$ (propriété 2.21). En fait on ne choisit pas et on considère que l'angle orienté des deux droites est l'ensemble de ces deux angles orientés de vecteurs. À noter que la mesure d'un angle orienté de droites n'est bien définie qu'à π près. La figure ci-contre illustre tout ceci : les quatre angles qui y sont décrits correspondent à un seul angle de droites, l'angle $\widehat{D_1, D_2}$.



Sommes. Comme pour les angles orientés de vecteurs, on peut définir la somme de deux angles orientés $\widehat{D_1, D_2}$ et $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$ de droites dans E, de mesures respectives θ et α : ce sera l'ensemble $\{R_{\theta+\alpha}, R_{\theta+\alpha+\pi}\}$. C'est l'angle orienté $\widehat{D, R_{\theta+\alpha}(D)}$ pour toute droite D de E. Il y a un angle nul, représenté par $\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id} = R_\pi\}$, qui est égal à $\widehat{D, D}$ pour toute droite D. Tout angle orienté $\widehat{D_1, D_2}$ admet un opposé : $-\widehat{D_1, D_2} = \widehat{D_2, D_1}$.

Des propriétés 2.19, 2.20 et 2.21 on déduit des propriétés similaires pour les angles orientés de droites :

Proposition 2.23 (Relation de Chasles) *Pour toutes droites D_1, D_2 et D_3 de E, on a*

$$\widehat{D_1, D_2} + \widehat{D_2, D_3} = \widehat{D_1, D_3}.$$

Proposition 2.24 *Soient D, D_1 et D_2 trois droites de E. On a :*

$$\widehat{D, D_1} = \widehat{D, D_2} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad D_1 = D_2.$$

Démonstration. Soient u, v_1 et v_2 trois vecteurs unitaires dirigeant respectivement D, D_1 et D_2. On a :

$$\begin{aligned} \widehat{D, D_1} = \widehat{D, D_2} &\iff \widehat{u, v_1} = \widehat{u, \pm v_2} \\ &\iff v_1 = \pm\, v_2 \quad \text{d'après la proposition 2.20} \\ &\iff D_1 = D_2. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.25 *Soient D_1 et D_2 deux droites de E.*

1) Pour toute rotation R on a $\widehat{R(D_1), R(D_2)} = \widehat{D_1, D_2}$ (les rotations préservent les angles).

2) Pour toute réflexion s on a $\widehat{s(D_1), s(D_2)} = -\widehat{D_1, D_2}$ (les réflexions renversent les angles).

Notons, pour $x \in E$ non nul, D_x la droite vectorielle engendrée par x.

Lemme 8 *Soient u, v, u', v' quatre vecteurs unitaires de $\vec{\mathscr{P}}$. Alors :*

$$\widehat{D_u, D_v} = \widehat{D_{u'}, D_{v'}} \quad \iff \quad 2\,\widehat{u, v} = 2\,\widehat{u', v'}.$$

Démonstration. Notons que si ρ (resp. ρ') est la rotation représentant l'angle $\widehat{u, v}$ (resp $\widehat{u', v'}$), alors $\rho \circ \rho$ et $\rho' \circ \rho'$ représentent respectivement $2\,\widehat{u, v}$ et $2\,\widehat{u', v'}$. Par conséquent, si θ (resp. θ') est l'angle de R (resp. R'), on a

$$\begin{aligned} 2\,\widehat{u, v} = 2\,\widehat{u', v'} &\iff \rho \circ \rho = \rho' \circ \rho' \iff 2\theta = 2\theta' \mod 2\pi \\ &\iff \theta = \theta' \mod \pi \iff \rho' = \rho \text{ ou } \rho' = -\rho \\ &\iff \widehat{u, v} = \widehat{u', v'} \text{ ou } \widehat{u, v} = \widehat{u', -v'} \\ &\iff \widehat{D_u, D_v} = \widehat{D_{u'}, D_{v'}}. \end{aligned}$$

□

c) Angles géométriques

On parle d'angle géométrique (ou d'angle non orienté) lorsque l'on ne fait pas la différence entre un angle orienté (de vecteurs ou de droites) et son opposé. Ainsi, n'importe quelle isométrie conserve les angles géométriques. La mesure d'un angle géométrique de deux vecteurs est bien définie modulo π, alors que la mesure d'un angle géométrique de deux droites est bien définie modulo $\frac{\pi}{2}$. Par contre, il faudra faire attention au fait qu'il n'y a pas en général de relation de Chasles entre les angles géométriques.

V _ Espaces affines euclidiens

a) Généralités

Les notions introduites et étudiées en géométrie vectorielle euclidienne conduisent naturellement aux définitions suivantes en géométrie affine.

Définition *Un* espace affine euclidien *est un espace affine dont la direction est un espace vectoriel euclidien.*

Dans un tel espace, nous pouvons introduire les notions suivantes.

• La *distance* entre deux points A et B est $\mathrm{d}(A,B) := \|\overrightarrow{AB}\|$, que l'on notera également AB. Des propriétés de la norme dans un espace vectoriel euclidien (proposition 2.1), découlent les propriétés suivantes de la distance :

Proposition 2.26 *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. On a :*

1) $\forall A, B \in \mathscr{E},\ d(A,B) \geq 0$ et $d(A,B) = 0$ si, et seulement si, $A = B$.

2) $\forall A, B \in \mathscr{E},\ d(B,A) = d(A,B)$.

3) $\forall A, B, M \in \mathscr{E},\ d(A,B) \leq d(A,M) + d(M,B)$ (inégalité triangulaire), avec égalité si, et seulement si, $M \in [A,B]$ (ie $\exists \mu \in [0,1]$ *tel que* $M = \mu A + (1-\mu)B$).

Démonstration. Les deux premières propriétés et l'inégalité triangulaire sont des conséquences directes des propriétés de la norme énoncées dans la proposition 2.1. Examinons le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
d(A,M) + d(B,M) = d(A,B) \quad &\Longleftrightarrow \quad ||\overrightarrow{AM}|| + ||\overrightarrow{BM}|| = ||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}|| \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda > 0 \ \text{ tel que } \ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB} \ \text{ ou } \ M \in \{A,B\} \ \text{ (proposition 2.1)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda > 0 \ \text{ tel que } \ M = \frac{1}{1+\lambda}(A + \lambda B) \ \text{ ou } \ M \in \{A,B\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists \mu \in [0,1] \ \text{ tel que } \ M = \mu A + (1-\mu)B \ \big(\mu = \tfrac{1}{1+\lambda} \text{ ou } \mu \in \{0,1\}\big).
\end{aligned}$$

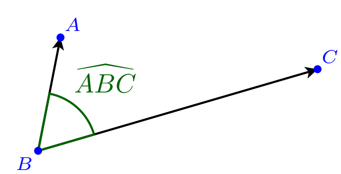
□

• Deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ sont dits *orthogonaux* si la direction de l'un est incluse dans l'orthogonal de l'autre : $\overrightarrow{\mathscr{F}} \subset \left(\overrightarrow{\mathscr{G}}\right)^{\perp}$ ou $\overrightarrow{\mathscr{G}} \subset \left(\overrightarrow{\mathscr{F}}\right)^{\perp}$. Si de plus $\overrightarrow{\mathscr{F}} = \left(\overrightarrow{\mathscr{G}}\right)^{\perp}$, les deux sous-espaces affines sont dits *perpendiculaires*. Le théorème de Pythagore peut par exemple se réécrire comme suit :

Théorème 2.6 *Soient A, B et C trois points d'un plan affine euclidien. Alors, les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires si, et seulement si, $AC^2 = AB^2 + BC^2$.*

• Un repère cartésien $(\Omega\,; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est dit orthonormé si la base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est orthonormée.

• Si A, B et C sont trois points d'un plan affine euclidien, on notera $\widehat{ABC}$ l'angle non orienté des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.



• On appelle angle orienté de deux droites affines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'un plan affine euclidien l'angle de leurs directions.

• Une projection (affine) orthogonale dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ est une projection sur un sous-espace affine $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ dans la direction $\left(\overrightarrow{\mathscr{F}}\right)^{\perp}$. De même, une symétrie (affine) orthogonale est une symétrie par rapport à un sous-espace affine $\mathscr{F}$ dans la direction $\left(\overrightarrow{\mathscr{F}}\right)^{\perp}$. Une réflexion affine est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

b) Isométries affines

Définition *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Une* isométrie (affine) *de $\mathscr{E}$ est une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ qui conserve les distances :*

$$\forall A, B \in \mathscr{E}, \quad d\Big(f(A), f(B)\Big) = d(A, B).$$

Remarque : il découle immédiatement de la définition que la composée de deux isométries est une isométrie.

Proposition 2.27 *Une application affine est une isométrie si, et seulement si, l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle (*ie *un endomorphisme orthogonal).*

Démonstration. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. Pour A et B dans $\mathscr{E}$, on a

$$d\Big(f(A), f(B)\Big) = \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = \left\|\vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| \quad \text{et} \quad d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.$$

Par conséquent, f est une isométrie si, et seulement si, $\left\|\vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ pour tout couple de points (A, B) de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire $\vec{f}$ est un endomorphisme orthogonal.

□

Exemples. 1) Puisque $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$ est un endomorphisme orthogonal, toute translation est une isométrie.

2) De même, toute symétrie orthogonale est une isométrie car toute symétrie vectorielle orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

Corollaire 2.4 *Une isométrie est bijective et sa réciproque est également une isométrie.*

Démonstration. Cela découle des propositions 2.27, 2.11 et 1.8.

□

Définition *Un* déplacement *(resp.* antidéplacement*) d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ est une isométrie affine directe (resp. indirecte) de $\mathscr{E}$.*
On notera $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$ et $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$ l'ensemble des déplacements de $\mathscr{E}$.

Théorème 2.7 *Soit f une isométrie d'un espace affine $\mathscr{E}$. Il existe un unique couple $(\vec{u}, g) \in \overrightarrow{\mathscr{E}} \times \mathrm{Is}(\mathscr{E})$ vérifiant :*

1) $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$;

2) g admet au moins un point fixe.

Le vecteur $\vec{u}$ ainsi associé à f vérifie $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u} = \vec{g}(\vec{u})$.

Lemme 9 *Si f est une isométrie, alors $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})$ et $\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})$ sont supplémentaires orthogonaux.*

Démonstration. Notons que d'après le théorème du rang, ces deux sous-espaces vectoriels ont des dimensions complémentaires. Il suffit donc de démontrer qu'ils sont orthogonaux et d'utiliser le théorème 2.3 pour conclure. On considère donc un élément $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})$ et un élément $\vec{v} \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})$. Il existe $\vec{w} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ tel que $\vec{v} = (\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})(\vec{w})$. De là :

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle &= \left\langle \vec{u} \,\middle|\, (\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})(\vec{w}) \right\rangle = \left\langle \vec{u} \,\middle|\, \vec{f}(\vec{w}) \right\rangle - \langle \vec{u} \,|\, \vec{w} \rangle \\
&= \left\langle \vec{f}(\vec{u}) \,\middle|\, \vec{f}(\vec{w}) \right\rangle - \langle \vec{u} \,|\, \vec{w} \rangle \quad \text{car} \quad \vec{f}(\vec{u}) = \vec{u} \\
&= \langle \vec{u} \,|\, \vec{w} \rangle - \langle \vec{u} \,|\, \vec{w} \rangle \quad \text{car} \quad \vec{f} \text{ est un endomorphisme orthogonal} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 2.7. • Fixons un point A dans $\mathscr{E}$. D'après le lemme 9, il existe deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ tels que $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\overrightarrow{Af(A)} = \vec{u} + \left(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)(\vec{v})$. Notons g l'isométrie $g := t_{-\vec{u}} \circ f$. Alors :

→ $f = t_{\vec{u}} \circ g$ et $\vec{f} = \overrightarrow{t_{\vec{u}} \circ g} = \overrightarrow{t_{\vec{u}}} \circ \vec{g} = \vec{g}$.

→ Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a $(g \circ t_{\vec{u}})(M) = g(M + \vec{u}) = g(M) + \vec{g}(\vec{u}) = g(M) + \vec{f}(\vec{u}) = g(M) + \vec{u} = (t_{\vec{u}} \circ g)(M)$.

→ Si $\Omega := A - \vec{v}$, alors :

$$\begin{aligned} g(\Omega) &= (t_{-\vec{u}} \circ f)(A - \vec{v}) = f(A - \vec{v}) - \vec{u} = f(A) - \vec{f}(\vec{v}) - \vec{u} = A + \overrightarrow{Af(A)} - \vec{f}(\vec{v}) - \vec{u} \\ &= A + \left[\vec{u} + \left(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)(\vec{v})\right] - \vec{f}(\vec{v}) - \vec{u} = A - \vec{v} = \Omega \end{aligned}$$

donc g admet au moins un point fixe. Ceci montre l'existence du couple $(\vec{u}, g)$.

• Examinons à présent l'unicité : on suppose qu'il existe deux décompositions $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u'}} \circ g' = g' \circ t_{\vec{u'}}$ telles que g (resp. g') admette un point fixe Ω (resp. Ω'). On a alors $f(\Omega) = (t_{\vec{u}} \circ g)(\Omega) = g(\Omega) + \vec{u} = \Omega + \vec{u}$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$, et de même $\vec{u'} = \overrightarrow{\Omega' f(\Omega')}$. De là on obtient :

$$\vec{u} - \vec{u'} = \overrightarrow{\Omega f(\Omega)} - \overrightarrow{\Omega' f(\Omega')} = \overrightarrow{\Omega f(\Omega')} + \overrightarrow{f(\Omega')f(\Omega)} + \overrightarrow{f(\Omega')\Omega'} = \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{f(\Omega')f(\Omega)} = \left(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}\right)\left(\overrightarrow{\Omega'\Omega}\right).$$

Or le vecteur de gauche appartient à $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})$ et celui de droite à $\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})$. D'après le lemme 9, ces deux vecteurs sont donc nuls et on obtient $\vec{u} = \vec{u'}$ et $g = t_{-\vec{u}} \circ f = t_{-\vec{u'}} \circ f = g'$.

□

Corollaire 2.5 *Soit f un déplacement distinct de* Id *d'un* <u>*plan*</u> *affine euclidien orienté $\mathscr{P}$.*

1) *Si* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, *alors $\vec{f}$ est une rotation vectorielle et f admet un unique point fixe Ω. Si θ est l'angle de $\vec{f}$, on dit que f est la* rotation *de centre Ω et d'angle θ.*
2) *Si* $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, *alors f est une translation.*

Démonstration. L'endomorphisme $\vec{f}$ est orthogonal direct donc est soit une rotation, soit $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}$. Dans le deuxième cas, f est une translation et n'admet aucun point fixe ($f \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ par hypothèse). Dans le premier cas, 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ donc f admet un unique point fixe (théorème 1.3).

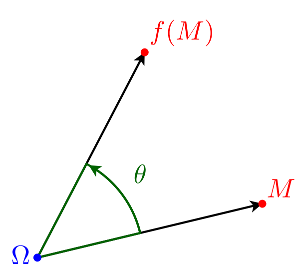
□

Corollaire 2.6 *Soit f un antidéplacement distinct de* Id *d'un* <u>*plan*</u> *affine euclidien orienté $\mathscr{P}$.*

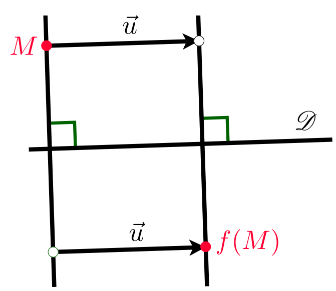
1) *Si* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, *alors f est une réflexion.*
2) *Si* $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, *alors f est la composée (commutative) d'une translation et d'une réflexion, le vecteur $\vec{u}$ de la translation dirigeant l'axe $\mathscr{D}$ de la réflexion. On dit que f est une* symétrie glissée *d'axe $\mathscr{D}$ et de vecteur $\vec{u}$.*

Démonstration. Notons d'abord que $\vec{f}$ est une réflexion vectorielle (proposition 2.15). Ainsi, si $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, $\mathrm{Fix}(f)$ est une droite car c'est un sous-espace affine de $\mathscr{P}$ de direction $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}})$ (proposition 1.9). Par conséquent, f est la réflexion d'axe $\mathrm{Fix}(f)$. Si f n'admet pas de point fixe, f se décompose (de façon unique) sous la forme $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ avec g isométrie admettant au moins un point fixe et $\vec{u}$ vecteur invariant par $\vec{f}$ (théorème 2.7). D'après ce qui précède, g est une réflexion d'axe dirigé par $\ker\left(\vec{g} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right) = \ker\left(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right)$, donc par $\vec{u}$.

□



rotation de centre Ω et d'angle θ



symétrie glissée d'axe $\mathscr{D}$ et de vecteur $\vec{u}$

c) Distance d'un point à un sous-espace affine

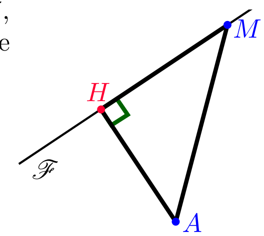
Définition *Soient $\mathscr{F}$ un sous-espace affine et A un point d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$. On appelle* distance de A à $\mathscr{F}$*, notée $d(A,\mathscr{F})$, la plus petite des distances de A à un point M de $\mathscr{F}$:*

$$d(A,\mathscr{F}) := \inf\{d(A,M)\,/\,M\in\mathscr{F}\}\,.$$

Proposition 2.28 *Soient $\mathscr{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ et A un point de $\mathscr{E}$. Il existe un unique point H dans $\mathscr{F}$ tel que $d(A,\mathscr{F}) = AH$; ce point est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{F}$.*

Démonstration. Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{F}$. Puisque $H\in\mathscr{F}$, on a $d(A,\mathscr{F})\le AH$. D'autre part, si M est un point de $\mathscr{F}$, il vient (théorème de Pythagore) :

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \ge AH^2$$



donc AH minore l'ensemble $\{AM\,/\,M\in\mathscr{F}\}$. On a donc $AH\le d(A,\mathscr{F})$.
Enfin, si $H'\in\mathscr{F}$ vérifie $d(A,\mathscr{F}) = AH'$, alors

$$AH^2 = d(A,\mathscr{F})^2 = AH'^2 = AH^2 + HH'^2$$

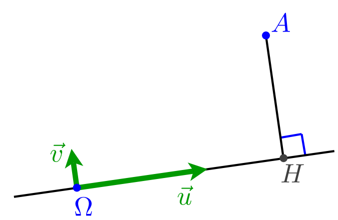
donc $HH' = 0$, c'est-à-dire $H = H'$. □

Corollaire 2.7 (Cas de la dimension 2) *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ et A un point de $\mathscr{P}$. On se donne $\mathbf{e}$, une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\vec u$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, $\vec v$ un vecteur unitaire orthogonal à $\mathscr{D}$ et Ω un point de $\mathscr{D}$. Alors :*

$$d(A,\mathscr{D}) = \left|\left\langle \overrightarrow{A\Omega}\,|\vec v\right\rangle\right| = \frac{\left|\det_{\mathbf{e}}\left(\overrightarrow{A\Omega},\vec u\right)\right|}{\|\vec u\|}.$$

Démonstration. Si H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda\vec v$ et on a $d(A,\mathscr{D}) = AH = |\lambda|$. D'autre part,

$$\left\langle \overrightarrow{A\Omega}\,|\vec v\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{H\Omega}\,|\vec v\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AH}\,|\vec v\right\rangle = \langle\lambda\vec v\,|\vec v\rangle = \lambda.$$



Pour la deuxième égalité, on calcule

$$\begin{aligned}\det_{\mathbf{e}}\left(\overrightarrow{A\Omega},\vec u\right) &= \det_{\mathbf{e}}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{H\Omega},\vec u\right) = \det_{\mathbf{e}}\left(\overrightarrow{AH},\vec u\right) + \det_{\mathbf{e}}\left(\overrightarrow{H\Omega},\vec u\right)\\ &= \det_{\mathbf{e}}(\lambda\vec v,\vec u) + 0 = \lambda||\vec u||\det_{\mathbf{e}}\left(\vec v,\frac{\vec u}{||\vec u||}\right) = \pm\lambda||\vec u||\end{aligned}$$

car $\left(\vec u,\frac{\vec u}{||\vec u||}\right)$ est une base orthonormée. Puisque $d(A,\mathscr{D}) = AH = |\lambda|$, on a bien l'égalité cherchée. □

Définition *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On appelle* déterminant de Gram *de k vecteurs $\vec u_1,\dots,\vec u_k$ le déterminant de la matrice carrée de taille k dont le coefficient (i,j) vaut $\langle\vec u_i\,|\vec u_j\rangle$:*

$$\operatorname{Gram}(\vec u_1,\dots,\vec u_k) := \det\big(\langle\vec u_i\,|\vec u_j\rangle\big)_{1\le i,j\le k}.$$

Proposition 2.29 *Pour toute famille $\vec u_1,\dots,\vec u_k$ de k éléments d'un espace vectoriel euclidien E, on a :*

1) $\operatorname{Gram}(\vec u_1,\dots,\vec u_k) = 0$ *si, et seulement si, la famille $(\vec u_1,\dots,\vec u_k)$ est liée.*

2) *Si $(\vec u_1,\dots,\vec u_k)$ est libre et* $\mathbf{e}$ *est une base orthonormée de Vect$(\vec u_1,\dots,\vec u_k)$, alors*

$$\operatorname{Gram}(\vec u_1,\dots,\vec u_k) = \Big(\det_{\mathbf{e}}(\vec u_1,\dots,\vec u_k)\Big)^2.$$

En particulier, $\operatorname{Gram}(\vec u_1,\dots,\vec u_k) > 0$.

Démonstration. 1) Si la famille $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k)$ est liée, il existe une combinaison linéaire nulle non triviale de ces vecteurs : $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}$. Pour tout i, $1 \leq i \leq k$, on a donc

$$0 = \left\langle u_i \left| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{u}_j \right.\right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left\langle \vec{u}_i \,|\, \vec{u}_j \right\rangle$$

ce qui montre que les colonnes de la matrice $(\langle \vec{u}_i \,|\, \vec{u}_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k}$ sont liées et donc que $\mathrm{Gram}\,(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k) = 0$.

Réciproquement, si $\mathrm{Gram}\,(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k) = 0$, les colonnes de la matrice $(\langle \vec{u}_i \,|\, \vec{u}_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k}$ sont liées : il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{(0, ..., 0)\}$ tel que

$$\left\langle u_i \left| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{u}_j \right.\right\rangle = 0 \quad \text{pour tout } i.$$

On a donc $0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left\langle \vec{u}_i \left| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{u}_j \right.\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i \left| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{u}_j \right.\right\rangle = \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{u}_j \right\|^2$ et le vecteur $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i$ est donc nul : la famille $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k)$ est liée.

2) Rappelons (proposition 2.7) que les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k)$ sont $\left(\langle \vec{e}_1 \,|\, \vec{u} \rangle, ..., \langle \vec{e}_k \,|\, \vec{u} \rangle\right)$. Ainsi, si A désigne la matrice des coordonnées de la famille $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k)$ dans la base $\mathbf{e}$, on a $A_{i,j} = \langle \vec{e}_i \,|\, \vec{u}_j \rangle$. On a donc :

$$\langle \vec{u}_i \,|\, \vec{u}_j \rangle = \left\langle \sum_{p=1}^{k} \langle \vec{e}_p \,|\, \vec{u}_i \rangle \, \vec{e}_p \left| \sum_{q=1}^{k} \langle \vec{e}_q \,|\, \vec{u}_j \rangle \, \vec{e}_q \right.\right\rangle = \sum_{p=1}^{k} \langle \vec{e}_p \,|\, \vec{u}_i \rangle \langle \vec{e}_p \,|\, \vec{u}_j \rangle = \sum_{p=1}^{k} A_{p,i} A_{p,j} = \left({}^tAA\right)_{i,j}.$$

De là, on obtient $\mathrm{Gram}\,(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k) = \det\left({}^tAA\right) = \Big(\det A\Big)^2 = \Big(\det_{\mathbf{e}}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k)\Big)^2$.

□

Proposition 2.30 *Soient $\mathscr{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ et A un point de $\mathscr{E}$. On suppose que $\mathscr{F}$ est muni d'un repère $(\Omega\,; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_k)$. Alors :*

$$d(A, \mathscr{F})^2 = \frac{\mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{A\Omega}, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_k\right)}{\mathrm{Gram}\,(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k)}.$$

Démonstration. Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{F}$: on a $d(A, \mathscr{F}) = AH$ (proposition 2.28). Puisque $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H\Omega}$, on obtient, en utilisant le fait que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à tout vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{F}}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{A\Omega}, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_k\right) &= \mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H\Omega}, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_k\right) \\
&= \begin{vmatrix}
\left\langle \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H\Omega} \,\middle|\, \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H\Omega} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H\Omega} \,|\, \vec{e}_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H\Omega} \,|\, \vec{e}_k \right\rangle \\
\left\langle \vec{e}_1 \,\middle|\, \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H\Omega} \right\rangle & \langle \vec{e}_1 \,|\, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1 \,|\, \vec{e}_k \rangle \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\left\langle \vec{e}_k \,\middle|\, \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H\Omega} \right\rangle & \langle \vec{e}_k \,|\, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_k \,|\, \vec{e}_k \rangle
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
\|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{H\Omega}\|^2 & \left\langle \overrightarrow{H\Omega} \,|\, \vec{e}_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \overrightarrow{H\Omega} \,|\, \vec{e}_k \right\rangle \\
\left\langle \vec{e}_1 \,\middle|\, \overrightarrow{H\Omega} \right\rangle & \langle \vec{e}_1 \,|\, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1 \,|\, \vec{e}_k \rangle \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\left\langle \vec{e}_k \,\middle|\, \overrightarrow{H\Omega} \right\rangle & \langle \vec{e}_k \,|\, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_k \,|\, \vec{e}_k \rangle
\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \|\overrightarrow{AH}\|^2 & \left\langle \overrightarrow{H\Omega} \,|\vec{e}_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \overrightarrow{H\Omega} \,|\vec{e}_k \right\rangle \\ 0 & \langle \vec{e}_1 \,|\vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1 \,|\vec{e}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle \vec{e}_k \,|\vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_k \,|\vec{e}_k \rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left\langle \overrightarrow{H\Omega} \,\middle|\overrightarrow{H\Omega} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{H\Omega} \,|\vec{e}_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \overrightarrow{H\Omega} \,|\vec{e}_k \right\rangle \\ \left\langle \vec{e}_1 \,\middle|\overrightarrow{H\Omega} \right\rangle & \langle \vec{e}_1 \,|\vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1 \,|\vec{e}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \vec{e}_k \,\middle|\overrightarrow{H\Omega} \right\rangle & \langle \vec{e}_k \,|\vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_k \,|\vec{e}_k \rangle \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{A\Omega}, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_k\right) &= \|\overrightarrow{AH}\|^2 \begin{vmatrix} \langle \vec{e}_1 \,|\vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1 \,|\vec{e}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e}_k \,|\vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_k \,|\vec{e}_k \rangle \end{vmatrix} + \mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{H\Omega}, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_k\right) \\ &= d(A, \mathscr{F})^2 \, \mathrm{Gram}\,(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k) \text{ car la famille } \left(\overrightarrow{H\Omega}, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_k\right) \text{ est liée.} \end{aligned}$$

□

d) médiatrice

Proposition 2.31 *Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$. L'ensemble des points de $\mathscr{E}$ équidistants de A et B est un hyperplan passant par le milieu de (A, B) et perpendiculaire à (AB).*

Définition *Cet hyperplan est appelé* hyperplan médiateur *de $[A, B]$. En dimension 2, on parle de la (droite)* médiatrice *de $[A, B]$ et en dimension 3, du* plan médiateur *de $[A, B]$.*

Démonstration. Notons I le milieu de (A, B). Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a

$$AM^2 - BM^2 = \left\langle \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} \,\middle|\, \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} \right\rangle = 2 \left\langle \overrightarrow{IM} \,\middle|\, \overrightarrow{AB} \right\rangle$$

donc $AM = BM$ si, et seulement si, $\left\langle \overrightarrow{IM} \,\middle|\, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0$, c'est-à-dire $M \in I + \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)^{\perp}$.

□

e) Bissectrices

On se place ici dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$.

Proposition-Définition *Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de $\mathscr{P}$ sécantes en un point A. Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs unitaires dirigeant respectivement $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.*
Il existe exactement deux réflexions échangeant $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Elles admettent pour axes les droites passant par A et dirigées respectivement par $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$. En particulier, ces deux droites sont perpendiculaires. Elles sont appelées bissectrices *des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.*

Démonstration. Soit s une réflexion échangeant $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}$ son axe. Puisque $A \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$, on a $s(A) = A$ donc $A \in \mathscr{D}$. D'autre part, $\vec{s}(\vec{u}_1) = \varepsilon \vec{u}_2$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\vec{s}(\vec{u}_2)$ est alors égal à $\varepsilon \vec{u}_1$, donc $\vec{s}(\vec{u}_1 + \varepsilon \vec{u}_2) = \varepsilon \vec{u}_2 + \vec{u}_1$. Il n'y a donc que deux possibilités pour l'axe de s :

$$\Delta_1 = A + \mathrm{Vect}\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = A + \mathrm{Vect}\,(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)\,.$$

Réciproquement, notons s_1 et s_2 les réflexions d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2. Puisque

$$\langle \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \,|\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \rangle = \|\vec{u}_1\|^2 - \|\vec{u}_2\|^2 = 1 - 1 = 0,$$

ces deux droites sont perpendiculaires. Par conséquent, les décompositions

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \frac{1}{2}\,(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{2}\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) - \frac{1}{2}\,(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$$

sont les décompositions de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ suivant la somme directe $\overrightarrow{\mathscr{P}} = \overrightarrow{\Delta_1} \overset{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\Delta_2}$. On a donc

$$\vec{s}_1(\vec{u}_1) = \frac{1}{2}\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) - \frac{1}{2}\,(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \vec{u}_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{s}_2(\vec{u}_1) = -\frac{1}{2}\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \frac{1}{2}\,(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = -\vec{u}_2.$$

Puisque $s_1(A) = s_2(A) = A$, on a donc $s_1(\mathscr{D}_1) = \mathscr{D}_2 = s_2(\mathscr{D}_1)$.

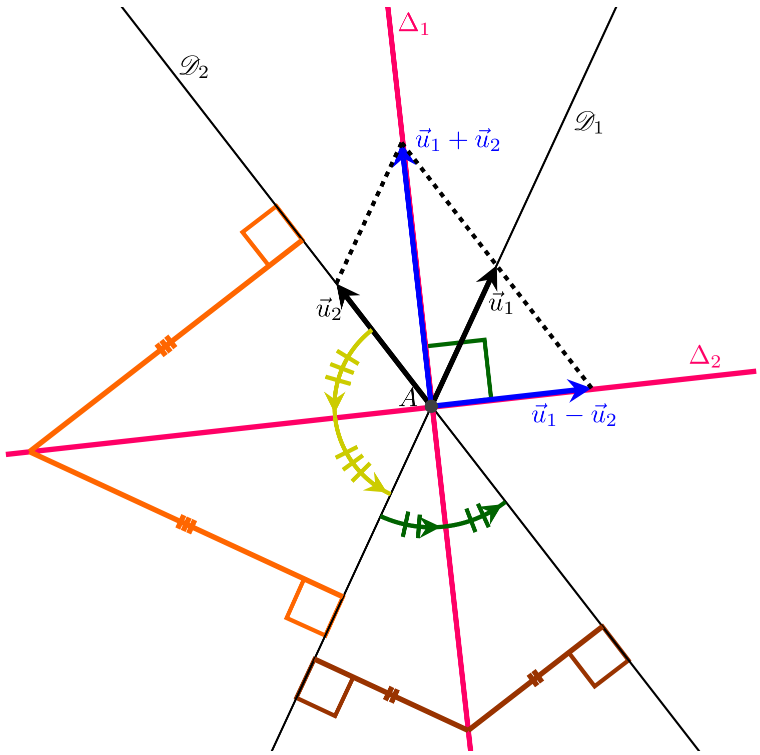
□

On dispose de deux caractérisations des bissectrices de deux droites (une angulaire, l'autre métrique) :

Proposition 2.32 *Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de $\mathscr{P}$ sécantes en un point A.*

1) Une droite Δ de $\mathscr{P}$ est une des bissectrices de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ si, et seulement si, $A \in \Delta$ et $\widehat{\mathscr{D}_1, \Delta} = \widehat{\Delta, \mathscr{D}_2}$.

2) La réunion des deux bissectrices de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ coïncide avec l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.



Démonstration. 1) Soient Δ une droite passant par A et s la réflexion d'axe Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta \text{ bissectrice de } \mathscr{D}_1 \text{ et } \mathscr{D}_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad s(\mathscr{D}_1) = \mathscr{D}_2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \widehat{\Delta, s(\mathscr{D}_1)} = \widehat{\Delta, \mathscr{D}_2} \quad \text{d'après la proposition 2.24} \\
&\Longleftrightarrow \quad \widehat{\Delta, \mathscr{D}_2} = -\widehat{s(\Delta), \mathscr{D}_1} = -\widehat{\Delta, \mathscr{D}_1} \quad \text{d'après la proposition 2.25} \\
&\Longleftrightarrow \quad \widehat{\Delta, \mathscr{D}_2} = \widehat{\mathscr{D}_1, \Delta}.
\end{aligned}$$

2) Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs unitaires dirigeant respectivement $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. D'après le corollaire 2.7, on a, pour $M \in \mathscr{P}$, $d(M, \mathscr{D}_k) = \left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_k\right)\right|$ ($k = 1$ ou 2). De là, on obtient :

$$\begin{aligned}
d(M, \mathscr{D}_1)^2 - d(M, \mathscr{D}_2)^2 &= \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1\right)^2 - \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_2\right)^2 \\
&= \left[\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1\right) - \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_2\right)\right] \cdot \left[\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1\right) + \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_2\right)\right] \\
&= \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1 - \vec{u}_2\right) \cdot \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $d(M, \mathscr{D}_1) = d(M, \mathscr{D}_2)$ si, et seulement si, $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1 - \vec{u}_2\right) = 0$ ou $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2\right) = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ ou $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Ceci signifie que M appartient à une des deux bissectrices.

□

VI _ Similitudes

Définition *Soit E un espace vectoriel euclidien et k un nombre réel, $k > 0$. Une application linéaire $\varphi : E \to E$ est appelée* similitude (vectorielle) de rapport k *si elle vérifie :*

$$\langle \varphi(\vec{u}) \,|\, \varphi(\vec{v}) \rangle = k^2 \langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle \quad \textit{pour tous } \vec{u}, \vec{v} \in E.$$

En géométrie affine euclidienne, la notion de similitude peut être définie comme suit :

Définition *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et k un nombre réel, $k > 0$. Une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une* similitude (affine) de rapport k *si*

$$d\Big(f(A), f(B)\Big) = k\, d(A, B) \quad \textit{pour tous } A, B \in \mathscr{E}.$$

Remarques : 1) Une isométrie (affine ou vectorielle) est une similitude (affine ou vectorielle) de rapport 1.

2) Une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.

4) La composée de deux similitudes de rapport respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 k_2$.

Proposition 2.33 *Soit E un espace vectoriel euclidien et k un nombre réel, $k > 0$. Une application linaire $\varphi : E \to E$ est une similitude de rapport k si, et seulement si, on a*

$$\|\varphi(\vec{u})\| = k\|\vec{u}\| \quad \textit{pour tout } \vec{u} \in E.$$

Corollaire 2.8 *Un endomorphisme φ d'un espace vectoriel euclidien E est une similitude de rapport k si, et seulement si, $\frac{1}{k}\varphi$ est un endomorphisme orthogonal de E.*

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 2.33 et 2.10.

□

Corollaire 2.9 *Une similitude vectorielle de rapport k est bijective et son inverse est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.*

Démonstration. Si φ est une similitude de rapport k, alors, pour tout $\vec{u} \in E$, on a

$$\langle \varphi(\vec{u}) \,|\, \varphi(\vec{u}) \rangle = k^2 \langle \vec{u} \,|\, \vec{u} \rangle \qquad \text{donc} \qquad \|\varphi(\vec{u})\| = k\|\vec{u}\|.$$

Réciproquement, si $\|\varphi(\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$ pour tout vecteur $\vec{u}$, alors, pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\vec{u}) \,|\, \varphi(\vec{v}) \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})\|^2 - \|\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\varphi(\vec{u} + \vec{v})\|^2 - \|\varphi(\vec{u} - \vec{v})\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(k^2\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - k^2\|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right) = k^2 \langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle . \end{aligned}$$

□

Proposition 2.34 *Une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une similitude de rapport k si, et seulement si, $\vec{f}$ est une similitude vectorielle de rapport k.*

Démonstration. Il suffit de se rappeler que pour tout couple (A, B) de points de $\mathscr{E}$, on a

$$d\Big(f(A), f(B)\Big) = \|\vec{f}\big(\overrightarrow{AB}\big)\| \qquad \text{et} \qquad d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

et d'utiliser la proposition 2.33.

□

Proposition 2.35 *Toute similitude affine de rapport k différent de 1 admet un unique point fixe.*

Remarque : : cet unique point fixe est appelé *centre* de la similitude.

Démonstration. On va démontrer que 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ afin d'utiliser le théorème 1.3. Or si $\vec{u} \in E$ vérifie $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$, on a

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{f}(\vec{u})\| = k\|\vec{u}\| \text{ ce qui implique } \vec{u} = \vec{0} \text{ puisque } k \neq 1.$$

□

Ainsi, si s est une similitude de centre Ω et de rapport k différent de 1, et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$, $h \circ s$ est une isométrie admettant Ω comme point fixe. En utilisant la classification des isométries du plan affine euclidien, nous pouvons donc donner la liste des similitudes de rapport différent de 1 dans le plan affine euclidien.

Théorème 2.8 *Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien. Une similitude s de $\mathscr{P}$, de rapport k différent de 1 et de centre Ω, s'écrit de façon unique comme la composée (commutative) d'une homothétie de centre Ω et de rapport k, et d'une isométrie admettant Ω comme point fixe.*

• *Si s est directe, l'isométrie est une rotation. Si θ est son angle, on dit que s est la similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.*

• *Si s est indirecte, l'isométrie est une réflexion par rapport à une droite $\mathscr{D}$ passant par Ω. On dit que s est la similitude de centre Ω, de rapport k et d'axe $\mathscr{D}$.*

Démonstration. Il ne reste qu'à démontrer qu'une homothétie h de centre Ω et une isométrie f admettant Ω pour point fixe commutent $(M \in \mathscr{E})$: pour tout $M \in \mathscr{E}$

$$\begin{aligned} h \circ f(M) &= h\left(f(\Omega + \overrightarrow{\Omega M})\right) = h\left(f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M})\right) = h\left(\Omega + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M})\right) \\ &= \Omega + k\,\vec{f}(\overrightarrow{\Omega M}) = \Omega + \vec{f}(k\,\overrightarrow{\Omega M}) = f(\Omega) + \vec{f}(k\,\overrightarrow{\Omega M}) = f\left(\Omega + k\,\overrightarrow{\Omega M}\right) \\ &= f \circ h(M). \end{aligned}$$

□

Remarque : Puisque les homothéties et les isométries préservent l'orthogonalité, il en est de même des similitudes. La réciproque est vraie :

Théorème 2.9 *Soit E un espace vectoriel euclidien et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\varphi \neq 0$. Alors, φ est une similitude si, et seulement si, φ préserve l'orthogonalité.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si un endomorphisme non nul φ de E préserve l'orthogonalité, il existe un nombre réel k tel que $\frac{1}{k}\varphi$ soit une isométrie (corollaire 2.8). Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Puisque φ préserve l'orthogonalité, la famille $\big(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\big)$ est orthogonale. De plus, on a, pour $i \neq j$:

$$\langle e_i + e_j \,|e_i - e_j\,\rangle = ||e_i||^2 - ||e_j||^2 = 0$$

donc

$$0 = \langle \varphi(e_i + e_j)\,|\varphi(e_i - e_j)\,\rangle = \langle \varphi(e_i) + \varphi(e_j)\,|\varphi(e_i) - \varphi(e_j)\,\rangle = ||\varphi(e_i)||^2 - ||\varphi(e_j)||^2.$$

Ainsi, si $k = ||\varphi(e_1)||$ et $f = \frac{1}{k}\varphi$, la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est orthonormée, donc f est une isométrie (théorème 2.4).

□

Corollaire 2.10 *Soit E un espace vectoriel euclidien et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\varphi \neq 0$. Alors, φ est une similitude directe (resp. indirecte) si, et seulement si, φ préserve (resp. renverse) les angles orientés.*

Démonstration. Si φ préserve ou renverse les angles orientés, φ préserve l'orthogonalité donc est une similitude d'après le théorème 2.9. Réciproquement, une similitude directe (resp. indirecte) préserve (resp. renverse) les angles orientés car les homothéties et les isométries directes les préservent tandis que les isométries indirectes les renversent.

□

VII _ Utilisation des nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ et à ce titre, est muni d'une structure d'espace affine. L'application $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $(z,z')\mapsto \frac{1}{2}\left(z\bar{z}'+\bar{z}z'\right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$ dont la norme n'est autre que $\|z\|=|z|$. Le couple $(1,i)$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire et l'usage veut que l'on oriente $\mathbb{C}$ avec cette base.
Si $\mathscr{P}$ est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(\Omega;\vec{e_1},\vec{e_2})$, on peut identifier $\mathscr{P}$ avec $\mathbb{C}$ en identifiant un point M de coordonnées (x,y) avec le nombre complexe $z=x+iy$. On identifie de même tout vecteur $\vec{u}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$ de la direction de $\mathscr{P}$ avec le nombre complexe $x+iy$. On dira que M (resp. $\vec{u}$) a pour affixe z dans le repère $(\Omega;\vec{e_1},\vec{e_2})$ (resp. la base $(\vec{e_1},\vec{e_2})$).
De ce point de vue, on peut identifier les similitudes du plan comme suit.

Théorème 2.10 *Les similitudes directes (resp. indirectes) du plan complexe sont les applications de la forme $z\mapsto a\,z+b$ (resp. $z\mapsto a\,\bar{z}+b$) pour $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$.*
Plus précisément, si A est un point d'affixe a et $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b, alors :

1) *l'homothétie de centre A et de rapport $\lambda\in\mathbb{R}^*$ est l'application $z\mapsto\lambda(z-a)+a$;*

2) *a) la similitude directe de centre A, de rapport $k\in\mathbb{R}_+^*$, $k\neq 1$, et d'angle θ est l'application $z\mapsto ke^{i\theta}(z-a)+a$.*
En particulier, la rotation de centre A et d'angle θ est l'application $z\mapsto e^{i\theta}(z-a)+a$.

b) la translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application $z\mapsto z+b$.

3) *a) la similitude indirecte de centre A, de rapport $k\in\mathbb{R}_+^*$, $k\neq 1$, et d'axe $\mathscr{D}$ dirigé par $\vec{u}$ est l'application $z\mapsto k\frac{b^2}{|b|^2}\overline{(z-a)}+a$.*
En particulier, la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ est donnée par $z\mapsto\frac{b^2}{|b|^2}\overline{(z-a)}+a$.

b) la symétrie glissée d'axe $\mathscr{D}$ passant par A et dirigé par $\vec{u}$ est l'application $z\mapsto\frac{b^2}{|b|^2}\overline{(z-a)}+a+b$.

Démonstration. Si $s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est l'application donnée par $s(z)=az+b$, alors s est affine d'application linéaire $\vec{s}:z\mapsto az$ et, pour tout couple de nombres complexes (z_1,z_2), on a

$$d\Big(f(z_1),f(z_2)\Big)=|f(z_1)-f(z_2)|=|a|\cdot|z_1-z_2|$$

donc s est une similitude de rapport $|a|$. Puisque $\vec{s}(1)=a$ et $\vec{s}(i)=ai$, la matrice de $\vec{s}$ dans la base orthonormée directe $(1,i)$ est $\left(\begin{smallmatrix}Re(a)&-Im(a)\\Im(a)&Re(a)\end{smallmatrix}\right)$. On a donc $\det\vec{s}=Re(a)^2+Im(a)^2=|a|^2>0$ donc $\vec{s}$ est directe. On voit de même que l'application $z\mapsto a\bar{z}+b$ est une similitude indirecte de rapport $|a|$.

Examinons à présent chacun des cas décrits dans l'énoncé.

1) Ce cas est immédiat : c'est la définition de l'homothétie de centre A et de rapport λ.

2) a) Soit $s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $s(z)=ke^{i\theta}(z-a)+a$. D'après ce qui précède, s est une similitude directe de rapport $|ke^{i\theta}|=k\neq 1$. Puisque $s(a)=a$, son centre est le point A. Notons h l'homothétie de centre A et de rapport k. On a $h^{-1}(z)=\frac{1}{k}(z-a)+a$ donc, si $R=h^{-1}\circ s$, $R(z)=e^{i\theta}(z-a)+a$. R est une isométrie directe (similitude directe de rapport $|e^{i\theta}|=1$) admettant A comme point fixe, donc est une rotation de centre A (voir corollaire 2.5). Son application linéaire étant donnée par $\vec{R}(z)=e^{i\theta}z$, on a $\vec{R}(1)=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ et $\vec{R}(i)=i\cos\theta-\sin\theta$. La matrice de $\vec{R}$ dans la base orthonormée directe $(1,i)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{smallmatrix}\right)$. Ceci montre que $\vec{R}$ est la rotation vectorielle d'angle θ et donc que R est la rotation affine de centre A et d'angle θ. En conséquence, $s=h\circ R$ est la similitude de centre A, de rapport k et d'angle θ.

b) Ce cas est également immédiat.

3) Soit $s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $s(z)=k\frac{b^2}{|b|^2}\overline{(z-a)}+a$: c'est une similitude indirecte de centre A ($s(a)=a$) et de rapport $\left|k\frac{b^2}{|b|^2}\right|=k$. Comme précédemment, notons h l'homothétie de centre A et de rapport k. Si $\sigma=h^{-1}\circ s$, on a, pour $z\in\mathbb{C}$

$$\sigma(z)=h^{-1}\left(k\frac{b^2}{|b|^2}\overline{(z-a)}+a\right)=\frac{1}{k}\left[\left(k\frac{b^2}{|b|^2}\overline{(z-a)}+a\right)-a\right]+a=\frac{b^2}{|b|^2}\overline{(z-a)}+a.$$

Par conséquent, σ est une isométrie indirecte (similitude indirecte de rapport $\left|\frac{b^2}{|b|^2}\right| = 1$) admettant A pour point fixe. C'est donc une réflexion d'axe passant par A (voir corollaire 2.6). Or si un point M de $\mathscr{D}$ a pour affixe z, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $z - a = \mu b$. De là, on déduit :

$$\sigma(z) = \frac{b^2}{|b|^2}\overline{\mu b} + a = \frac{b^2}{b\bar{b}}\mu\bar{b} + a = b\mu + a = z$$

donc chaque point de $\mathscr{D}$ est fixé par σ. Ceci montre que σ est la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et donc que $s = h \circ \sigma$ est la similitude indirecte de centre A, de rapport k et d'axe $\mathscr{D}$.

b) Si s est l'application donnée par $s(z) = \frac{b^2}{|b|^2}\overline{(z-a)} + a + b$, $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $\sigma = t_{-\vec{u}} \circ s$, alors, pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\sigma(z) = \frac{b^2}{|b|^2}\overline{(z-a)} + a$$

donc σ est la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ d'après ce qui précède. Puisque $\vec{u}$ dirige $\mathscr{D}$, ceci montre que $s = t_{\vec{u}} \circ \sigma = \sigma \circ t_{\vec{u}}$ est la symétrie glissée d'axe $\mathscr{D}$ et de vecteur $\vec{u}$.

$\square$

Chapitre 3 : Triangles et cercles

Dans tout ce chapitre, $\mathscr{P}$ est un plan affine euclidien.

I _ Cercles

a) Définitions et propriétés d'incidence

Définition 1) *Soit Ω un point de $\mathscr{P}$ et R un nombre réel positif. On appelle* cercle *de centre Ω et de rayon R l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ situés à la distance R de Ω :*

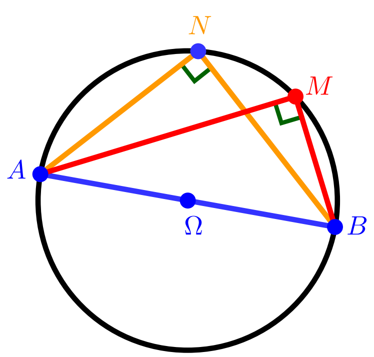
$$\mathscr{C}(\Omega, R) := \{M \in \mathscr{P} \,/\, \Omega M = R\}.$$

2) *Deux points A et B d'un cercle de centre Ω sont dits* diamétralement opposés *s'ils sont symétriques par rapport à Ω. On dit dans ce cas que le segment $[A, B]$ (ou, par abus, la droite (AB)) est un* diamètre *du cercle.*

Remarque : si $\mathscr{C}$ est un cercle de centre Ω et de rayon R et f une isométrie du plan, alors $f(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon R. En particulier, toute droite passant par Ω est axe de symétrie du cercle.

Proposition 3.1 *Soit $[A, B]$ un diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$ et M un point de $\mathscr{C}$. Alors, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.*
Réciproquement, tout point M du plan vérifiant $\left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$ est sur le cercle de diamètre $[A, B]$.

Démonstration. Pour tout point M du plan, on a, puisque $\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A}$:



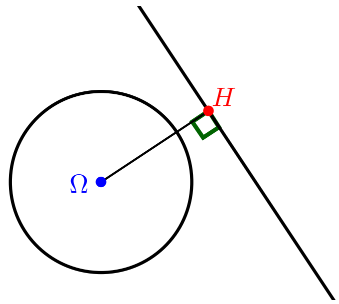
$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \overrightarrow{MB} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} \middle| \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} \middle| \overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A} \right\rangle \\
&= M\Omega^2 - \Omega A^2 \\
&= M\Omega^2 - R^2.
\end{aligned}$$

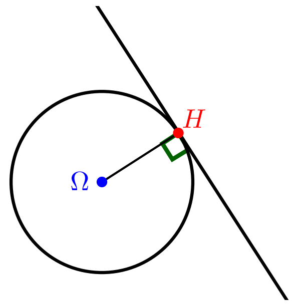
Par conséquent, M est sur le cercle si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

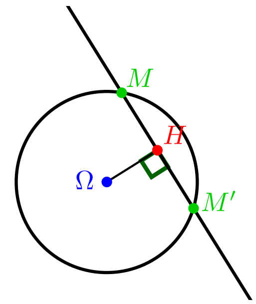
□

Proposition 3.2 (Intersection d'une droite et d'un cercle) *Soient $\mathscr{C}$ un cercle et $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{P}$. Notons Ω le centre de $\mathscr{C}$ et R son rayon. L'intersection de $\mathscr{C}$ avec $\mathscr{D}$ est*

- *vide si $d(\Omega, \mathscr{D}) > R$;*
- *réduite à un point si $d(\Omega, \mathscr{D}) = R$, ce point étant le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{D}$ (dans ce cas, $\mathscr{D}$ est la droite perpendiculaire à (ΩH) passant par H) ;*
- *constituée d'exactement deux points si $d(\Omega, \mathscr{D}) < R$.*







Démonstration. Notons H le projeté de Ω sur $\mathscr{D}$ et considérons un vecteur unitaire $\vec{u}$ dirigeant $\mathscr{D}$. Alors :

$$\mathscr{D} \text{ est perpendiculaire à } (\Omega H), \quad \mathscr{D} = \{H + \lambda \vec{u} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad d(\Omega, \mathscr{D}) = \Omega H.$$

Ainsi, si $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = H + \lambda \vec{u}$ et $\Omega M = R$. D'après le théorème de Pythagore, il vient

$$R^2 = \Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = \Omega H^2 + \lambda^2 \quad \text{soit} \quad \lambda^2 = R^2 - \Omega H^2 = R^2 - d(\Omega, \mathscr{D})^2.$$

En conséquence :

– si $d(\Omega, \mathscr{D}) > R$, il n'y a pas de solution : $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \emptyset$;
– si $d(\Omega, \mathscr{D}) = R$, il y a une unique solution $\lambda = 0$: $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{H\}$;
– si $d(\Omega, \mathscr{D}) < R$, il y a exactement deux solutions : $\lambda = \pm\sqrt{R^2 - d(\Omega, \mathscr{D})^2}$.

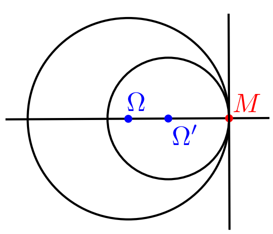
□

Définition *Une droite $\mathscr{D}$ est dite tangente à un cercle $\mathscr{C}$ si l'intersection de $\mathscr{C}$ avec $\mathscr{D}$ est réduite à un point.*

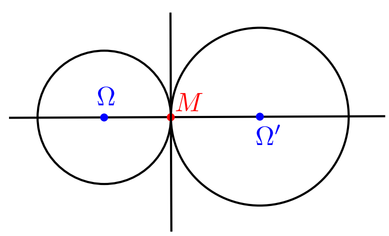
Proposition 3.3 (Intersection de deux cercles) *Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles du plan affine euclidien $\mathscr{P}$, respectivement de centres Ω, Ω' et de rayons strictement positifs R, R'.*

1) *L'intersection $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ est non vide si, et seulement si, $|R - R'| \leq \Omega\Omega' \leq R + R'$.*
2) *Si $\Omega\Omega' \in \big\{|R - R'|, R + R'\big\}$, alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ est réduit à un point. Si M est ce point, alors $M \in (\Omega\Omega')$ et les deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont même tangente en M : la droite perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$ passant par M.*
3) *Si $|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R'$, alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ est constitué de deux points distincts P et Q et la droite $(\Omega\Omega')$ est la médiatrice de $[P, Q]$.*

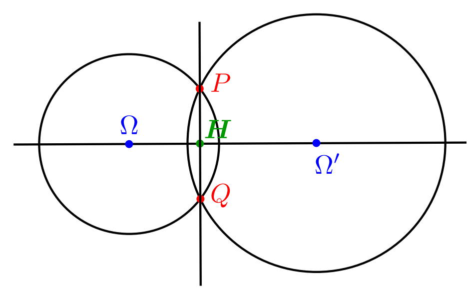
Définition *Deux cercles sont dits* tangents *lorsque leur intersection est réduite à un point.*



$\Omega\Omega' = R - R'$



$\Omega\Omega' = R + R'$



$0 < R - R' < \Omega\Omega' < R + R'$

Démonstration. Si M est un point de $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$, alors on a (inégalité triangulaire, proposition 2.26)

$$|R - R'| = |\Omega M - \Omega' M| \leq \Omega\Omega' \leq \Omega M + \Omega' M = R + R'$$

ce qui montre que la double inégalité du 1) est une condition nécessaire.

• Supposons que $\Omega\Omega' = |R - R'|$. Si $R = R'$, alors $\Omega = \Omega'$ et $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$. On suppose donc que $R \neq R'$ avec par exemple $R > R'$, de sorte que $\Omega\Omega' = R - R'$. Alors le point $M = \Omega + R\,\frac{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}{\Omega\Omega'}$ est dans $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$:

$$\star\ \overrightarrow{\Omega M} = R\,\frac{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}{\Omega\Omega'} \implies \Omega M = R\,;$$

$$\star\ \overrightarrow{\Omega' M} = \overrightarrow{\Omega'\Omega} + R\,\frac{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}{\Omega\Omega'} = (R - \Omega\Omega')\frac{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}{\Omega\Omega'} = R'\,\frac{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}{\Omega\Omega'} \implies \Omega' M = R'.$$

D'autre part, si $N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$, alors $\Omega\Omega' = R - R' = \Omega N - \Omega' N$, soit $\Omega\Omega' + N\Omega' = \Omega N$. Par conséquent, $\Omega' \in [\Omega, N]$ (proposition 2.26) et il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\Omega' = \lambda\Omega + (1 - \lambda)N$. De là, on obtient $\overrightarrow{\Omega' N} = \lambda\overrightarrow{\Omega N}$, donc $R' = \lambda R$, et

$$\overrightarrow{\Omega\Omega'} = (1 - \lambda)\overrightarrow{\Omega N} = \left(1 - \frac{R'}{R}\right)\overrightarrow{\Omega N} = \frac{R - R'}{R}\,\overrightarrow{\Omega N} \implies \overrightarrow{\Omega N} = \frac{R}{R - R'}\,\overrightarrow{\Omega\Omega'} = R\,\frac{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}{\Omega\Omega'} = \overrightarrow{\Omega M} \implies N = M.$$

Enfin, la tangente à $\mathscr{C}$ en M est la droite perpendiculaire à (ΩM) passant par M ; c'est également la tangente à $\mathscr{C}'$ en M car Ω, Ω' et M sont alignés.

• Si $\Omega\Omega' = R + R'$, on procède de même, toujours avec $M = \Omega + R\,\frac{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}{\Omega\Omega'}$.

• Supposons pour finir que $|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R'$. Quitte à échanger les deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, on peut supposer que $R \geq R'$. Soit H le point $\Omega + \frac{d^2+R^2-R'^2}{2d^2}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ où $d = \Omega\Omega'$, et $\mathscr{D}$ la droite perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$ passant par H. Ainsi, H est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{D}$ donc $d(\Omega, \mathscr{D}) = \Omega H$. De $\overrightarrow{\Omega H} = \frac{d^2+R^2-R'^2}{2d^2}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ et $d^2 + R^2 - R'^2 = (R + R' - d)(R - R') + d(R - R' + d) > 0$, on déduit

$$\begin{aligned} d(\Omega, \mathscr{D}) - R &= \Omega H - R = \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d} - R = \frac{d^2 + R^2 - R'^2 + 2dR}{2d} \\ &= \frac{(d + R)^2 - R'^2}{2d} = \frac{(d + R - R')(d + R + R')}{2d} > 0 \end{aligned}$$

car $(R' - R) \leq |R - R'| < d$. D'après la proposition 3.2, $\mathscr{D}$ rencontre donc $\mathscr{C}$ en deux points distincts P et Q. Montrons que ces deux points sont sur $\mathscr{C}'$. On a

$$\begin{aligned} \Omega'P^2 &= \Omega'H^2 + HP^2 = \Omega'H^2 + (\Omega P^2 - \Omega H^2) \ \ \text{(théorème de Pythagore)} \\ &= \Omega P^2 + \left\langle \overrightarrow{\Omega'H} + \overrightarrow{\Omega H} \,\middle|\, \overrightarrow{\Omega'H} - \overrightarrow{\Omega H} \right\rangle = R^2 + \left\langle \overrightarrow{\Omega'H} + \overrightarrow{\Omega H} \,\middle|\, \overrightarrow{\Omega'\Omega} \right\rangle. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega H} &= \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d^2}\overrightarrow{\Omega\Omega'} \\ \overrightarrow{\Omega'H} &= \overrightarrow{\Omega'\Omega} + \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d^2}\overrightarrow{\Omega\Omega'} = \frac{R^2 - R'^2 - d^2}{2d^2}\overrightarrow{\Omega\Omega'} \end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{\Omega'H} + \overrightarrow{\Omega H} = \frac{R^2-R'^2}{d^2}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ et finalement

$$\Omega'P^2 = R^2 + \frac{R^2 - R'^2}{d^2}\left\langle \overrightarrow{\Omega\Omega'} \,\middle|\, \overrightarrow{\Omega'\Omega} \right\rangle = R^2 - \frac{R^2 - R'^2}{d^2}\Omega\Omega'^2 = R'^2.$$

On montre de même que $\Omega'Q = R'$. Enfin, puisque $\Omega P = R = \Omega Q$ et $\Omega'P = R' = \Omega'Q$, la droite $(\Omega\Omega')$ est bien la médiatrice de $[P, Q]$ (proposition 2.31).
Il reste à démontrer que $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ ne contient pas d'autre point. Soit M un point de $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ et supposons que $M \notin \{P, Q\}$. Les deux points Ω et Ω' étant équidistants de P, Q et M, ils sont sur les médiatrices de $[P, Q]$ et $[M, P]$. Ces deux médiatrices n'étant pas confondues (sinon $Q = M$ comme symétriques de P par rapport à ces droites), on en déduit que $\Omega = \Omega'$, soit $d = 0$. Ceci contredit l'hypothèse $|R - R'| < d$. Par conséquent, $M \in \{P, Q\}$.

□

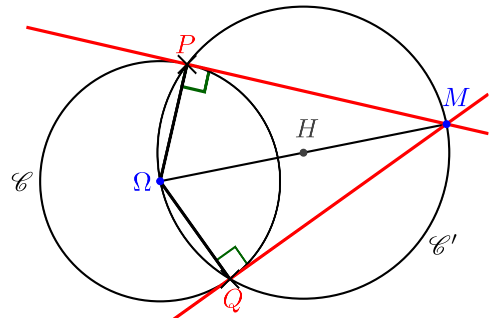
Proposition 3.4 (Tangente(s) à un cercle issue(s) d'un point) *Soient $\mathscr{C}$ un cercle et M un point de $\mathscr{P}$. Notons Ω le centre de $\mathscr{C}$ et R son rayon. On suppose que $R > 0$.*

1) *Si $\Omega M > R$, $\mathscr{C}$ admet exactement deux tangentes passant par M.*
2) *Si $\Omega M = R$, $\mathscr{C}$ admet exactement une tangente passant par M.*
3) *Si $\Omega M < R$, $\mathscr{C}$ n'admet pas de tangente passant par M.*

Démonstration. • S'il existe une droite $\mathscr{D}$ passant par M et tangente à $\mathscr{C}$, alors $d(\Omega, \mathscr{D}) = R$ (proposition 3.2). Or $\Omega M \geq d(\Omega, \mathscr{D})$ (car $M \in \mathscr{D}$) donc $\Omega M \geq R$. Ceci montre le point 3) de l'énoncé.

• Si $\Omega M = R$, alors $M \in \mathscr{C}$ et la perpendiculaire à (ΩM) passant par M est la seule tangente à $\mathscr{C}$ contenant M (proposition 3.2).

• Supposons à présent que $\Omega M > R$. Notons H le milieu de $[\Omega, M]$ et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre H et de rayon $R' := HM = \Omega H$.



On a :

- ⋆ $\Omega H = HM < R + HM = R + R'$;
- ⋆ $R' - R < R' = \Omega H$ et $R - R' < \Omega M - R' = \Omega M - \Omega H = \Omega H$ donc $|R - R'| < \Omega H$.

Par conséquent, $\mathscr{C}'$ rencontre $\mathscr{C}$ en exactement deux points P et Q (proposition 3.3). Puisque $[\Omega, M]$ est un diamètre de $\mathscr{C}'$, les droites (ΩP) et (MP) (resp. (ΩQ) et (MQ)) sont perpendiculaires (proposition 3.1) donc (PM) est tangente à $\mathscr{C}$ en P (resp. Q).

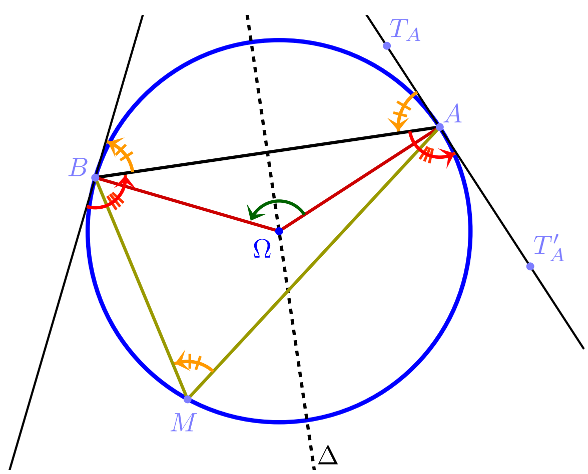
Enfin, si $\mathscr{D}$ est une droite tangente en un point T à $\mathscr{C}$ et contient M, alors l'angle $\widehat{\Omega T M}$ est droit donc T est également sur $\mathscr{C}'$ (proposition 3.1). Par conséquent, $T \in \{P, Q\}$ et $\mathscr{D}$ est l'une des droites (PM) ou (QM). □

b) Angle inscrit et angle au centre - Cocyclicité

Proposition 3.5 (Théorème de l'angle inscrit) *Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω, A et B deux points de $\mathscr{C}$. Pour tout point M de $\mathscr{C}$ distinct de A et B et tout point T_A de la tangente à $\mathscr{C}$ en A, distinct de A, les égalités d'angles orientés de vecteurs suivantes sont vérifiées :*

$$\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}} = 2\,\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}} = 2\,\widehat{\overrightarrow{AT_A}, \overrightarrow{AB}}.$$

Définition *L'angle $\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}$ est appelé* angle au centre *et l'angle $\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}$* angle inscrit.



Démonstration. Considérons la réflexion σ d'axe Δ, la médiatrice de $[A, B]$:

$$\sigma(A) = B, \quad \sigma(B) = A \quad \text{et} \quad \sigma(\Omega) = \Omega.$$

Puisque les réflexions renversent les angles, on obtient

$$\widehat{\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AB}} = -\widehat{\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BA}} = \widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Omega}} = \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Omega B}}.$$

D'autre part, puisque l'angle $\widehat{\overrightarrow{AT_A}, \overrightarrow{A\Omega}}$ est droit, $2\widehat{\overrightarrow{AT_A}, \overrightarrow{A\Omega}}$ est égal à l'angle plat donc à l'angle $\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{A\Omega}}$. La relation de Chasles nous permet alors d'obtenir :

$$\begin{aligned} 2\,\widehat{\overrightarrow{AT_A}, \overrightarrow{AB}} &= 2\,\widehat{\overrightarrow{AT_A}, \overrightarrow{A\Omega}} + 2\,\widehat{\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AB}} = \widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{A\Omega}} + \widehat{\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AB}} + \widehat{\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AB}} \\ &= \widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{AB}} + \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Omega B}} = \widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}. \end{aligned}$$

Ensuite, en considérant les réflexions d'axes les médiatrices de $[A, M]$ et $[B, M]$, nous voyons que

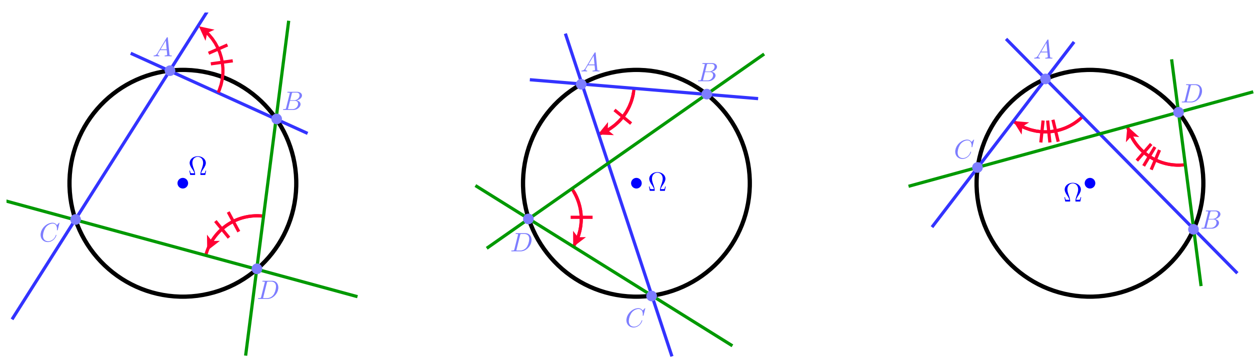
$$\widehat{\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}} = -\widehat{\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM}} \quad \text{et} \quad \widehat{\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}} = -\widehat{\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BM}}.$$

Ceci nous conduit au calcul suivant :

$$2\,\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}} = \widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}} + \widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}} + \widehat{\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}} = \widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}} + \widehat{\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM}} + \widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B\Omega}} = \widehat{\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{B\Omega}} = \widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}.$$

□

Théorème 3.1 (Condition angulaire de cocyclicité) *Quatre points A, B, C, D deux à deux distincts du plan sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, les angles orientés de droites $\widehat{(AB), (AC)}$ et $\widehat{(DB), (DC)}$ sont égaux.*



Démonstration. • Si les quatre points sont alignés, alors les quatre droites (AB), (AC), (DB) et (DC) coïncident, donc les deux angles $\widehat{(AB), (AC)}$ et $\widehat{(DB), (DC)}$ sont nuls.
Réciproquement, si ces deux angles sont nuls, alors $(AC) = (AB)$ et $(DC) = (DB)$ (proposition 2.24) donc les quatre points sont sur la droite (BC).

• Supposons que les quatre points soient sur un même cercle centré en un point Ω. Le théorème de l'angle inscrit implique

$$2\,\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} = \widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}} = 2\,\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}$$

soit, d'après le lemme 8

$$\widehat{(AB), (AC)} = \widehat{(DB), (DC)}.$$

• Réciproquement, supposons que ces deux angles orientés de droites soient égaux et non nuls. Les droites (AB) et (AC) n'étant alors pas parallèles, il en est de même des médiatrices de $[A, B]$ et $[A, C]$: soit Ω leur point d'intersection. Puisque Ω est équidistant de A, B et C, il est le centre d'un cercle $\mathscr{C}$ passant par ces trois points. Si T est un point de la tangente en B à $\mathscr{C}$, alors (théorème de l'angle inscrit)

$$2\,\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} = 2\,\widehat{\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BC}}.$$

De même, le point d'intersection Ω' des médiatrices de $[D, B]$ et $[D, C]$ est le centre d'un cercle $\mathscr{C}'$ passant par D, B et C. Si T' est un point de la tangente à $\mathscr{C}'$ en B, alors

$$2\,\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}} = 2\,\widehat{\overrightarrow{BT'}, \overrightarrow{BC}}.$$

On obtient donc, en utilisant l'hypothèse et le lemme 8 :

$$\widehat{(BT),(BC)} = \widehat{(AB),(AC)} = \widehat{(DB),(DC)} = \widehat{(BT'),(BC)}.$$

Par conséquent, les droites (BT) et (BT') coïncident (propositon 2.24) et il en est donc de même des droites (ΩB) et $(\Omega' B)$ (perpendiculaires respectives en B aux tangentes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$). On montre de même que $(\Omega C) = (\Omega' C)$. De là

$$\{\Omega\} = (\Omega B) \cap (\Omega C) = (\Omega' B) \cap (\Omega' C) = \{\Omega'\}.$$

Ainsi $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$ (cercle de centre $\Omega = \Omega'$ et de rayon $\Omega B = \Omega' B$) et donc A, B, C et D sont cocycliques.

□

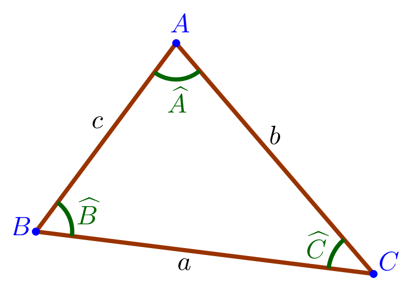
II _ Triangles du plan affine euclidien

Nous commençons par quelques notations et définitions. Dans toute cette section, ABC est un *triangle* non aplati de $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la donnée de trois points deux à deux distincts non alignés dans $\mathscr{P}$. On notera :

- $a = BC = d(B, C)$, $b = CA$ et $c = AB$;
- $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ (p est le *demi-périmètre*) ;
- $\widehat{A}$ la valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}$;
- $\widehat{B}$ la valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}$;
- $\widehat{C}$ la valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}$.

Définition *Le triangle ABC est dit :*

(i) rectangle *en A si $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$;*
(ii) isocèle *en A si $AB = AC$;*
(iii) équilatéral *si $AB = BC = CA$.*



Lemme 1 *Soient $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e'}$ deux bases orthonormées directes de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Alors :*

$$\det_{\boldsymbol{e}}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det_{\boldsymbol{e}}\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \det_{\boldsymbol{e}}\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \det_{\boldsymbol{e'}}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det_{\boldsymbol{e'}}\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \det_{\boldsymbol{e'}}\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right).$$

Démonstration. On a déjà vu que le déterminant de deux vecteurs ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe dans laquelle on le calcule. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) &= \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) + \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = -\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}\right) = \det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right).\end{aligned}$$

On montre de même que cette quantité coïncide avec $\det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

□

Définition *On appelle* aire algébrique *du triangle ABC le nombre réel $\frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ (calculé dans une base orthonormée directe). L'*aire géométrique *d'un triangle est la valeur absolue de son aire algébrique ; elle sera notée $\mathcal{A}$ dans la suite.*

Nous garderons ces notations dans toute la suite de ce paragraphe. Nous allons maintenant démontrer quelques unes des nombreuses propriétés des triangles. Commençons par celle qui est peut-être la plus connue :

Proposition 3.6 $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Démonstration. En utilisant la relation de Chasles et le fait que $-\mathrm{Id}$ préserve les angles, nous avons (après avoir orienté $\overrightarrow{\mathscr{P}}$)

$$\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}+\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}+\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}=\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}+\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}+\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}}=\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}+\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}}=\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}}$$

ce qui implique, puisque la mesure de la somme de deux angles orientés est égale à la somme des mesures des deux angles (si vous avez compris ce que sont un angle orienté de deux vecteurs, leur somme et leur mesure, vous comprendrez que cette affirmation n'est rien d'autre que l'énoncé du lemme 4 du chapitre 2) :

$$\mathrm{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)+\mathrm{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)+\mathrm{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)=\mathrm{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}}\right)=\pi \mod 2\pi.$$

Notre énoncé concerne la valeur absolue de ces trois mesures. Pour conclure, nous allons donc voir que les mesures principales (*ie* celles appartenant à $]-\pi;\pi]$) de ces trois angles orientés de vecteurs ont même signe (celui-ci dépendant bien sûr de l'orientation choisie). Mais ce signe est égal à celui du déterminant des deux vecteurs d'après la proposition 2.22. Le lemme 1 ci-dessus permet donc de conclure.

□

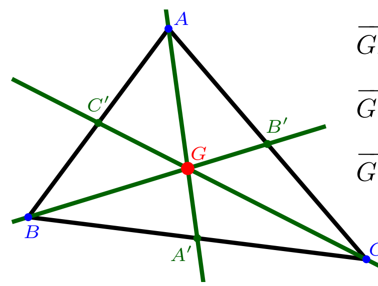
a) Médianes - Isobarycentre

L'isobarycentre G d'un triangle ABC est, par associativité, le barycentre de $(A,1)$ et $(A',2)$ si A' est le milieu de $[B,C]$, donc $G\in(AA')$ et $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{A'G}$. De même, si B' et C' sont les milieux respectifs de $[C,A]$ et $[A,B]$, G appartient aux droites (BB') et (CC').

Définition *Les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont appelées* médianes *du triangle ABC.*

Nous venons donc de voir

Proposition 3.7 *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en G, l'isobarycentre des trois sommets.*



$$\overrightarrow{GA'}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$$
$$\overrightarrow{GB'}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$
$$\overrightarrow{GC'}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

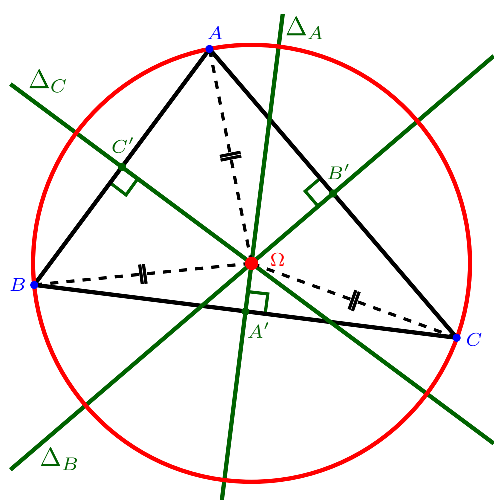
b) Médiatrices - Cercle circonscrit

Définition *Les* médiatrices *d'un triangle ABC sont les médiatrices des segments $[A,B]$, $[B,C]$ et $[C,A]$.*

Proposition 3.8 *Les trois médiatrices d'un triangle ABC sont concourantes en un point Ω qui est l'unique point de $\mathscr{P}$ équidistant de A, B et C. C'est le centre de l'unique cercle passant par ces trois sommets.*

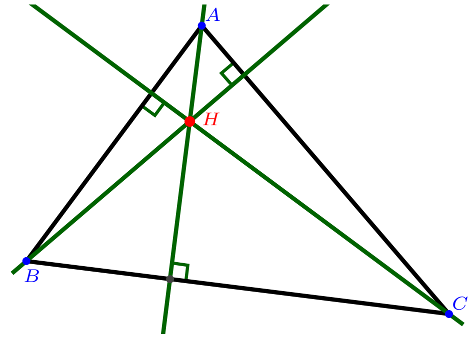
Démonstration. Notons Δ_A, Δ_B et Δ_C les médiatrices respectives de $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$. Puisque (BC) et (CA) ne sont pas parallèles, il en est de même de Δ_A et Δ_B (voir proposition 2.31) : soit Ω leur point d'intersection. Ce point est équidistant de B et C, et de C et A : $\Omega B=\Omega C=\Omega A$. Par conséquent, Ω est sur la troisième médiatrice Δ_C. De plus, il est le centre d'un cercle passant par A, B et C.
Réciproquement, un point équidistant des trois sommets est sur les trois médiatrices donc coïncide avec Ω. Enfin, si $\mathscr{C}$ est un cercle contenant A, B et C, son centre est équidistant de ces trois points donc coïncide avec Ω ; le rayon de $\mathscr{C}$ est alors $\Omega A=\Omega B=\Omega C$, ce qui montre que ce cercle coïncide avec le précédent.

□



Définition *L'unique cercle passant par les sommets d'un triangle est appelé* cercle circonscrit *au triangle.*

c) Hauteurs - Orthocentre - Droite et cercle d'Euler



Définition *La* hauteur *issue de A (resp. B, C) d'un triangle ABC est la droite perpendiculaire à (BC) (resp. (CA), (AB)) passant par A (resp. B, C).*

Proposition 3.9 *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Définition *Le point de concours des trois hauteurs d'un triangle est appelé* orthocentre *du triangle.*

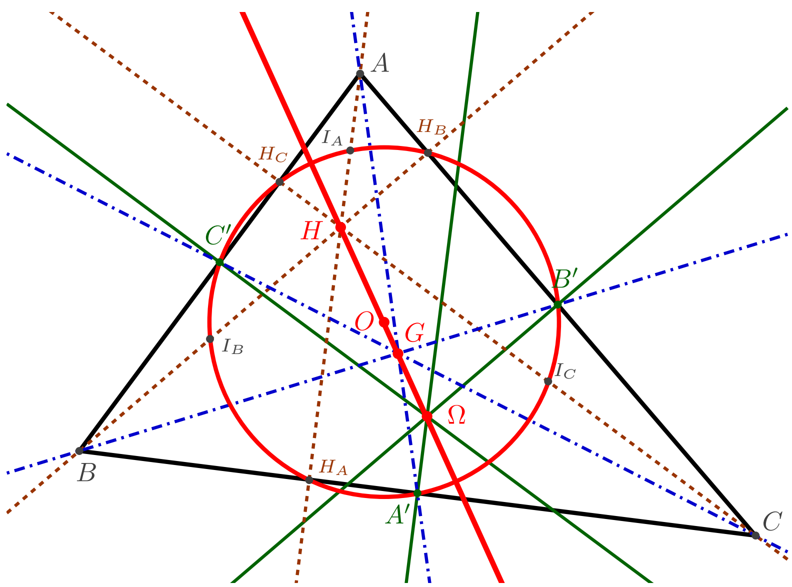
Théorème 3.2 *L'isobarycentre, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés.*

Définition *La droite portant ces trois points est appelée* droite d'Euler[1] *du triangle.*

Démonstration des propositions 3.9 et théorème 3.2. Notons Δ_A, Δ_B et Δ_C les trois médiatrices du triangle ABC, $\mathscr{H}_A$, $\mathscr{H}_B$ et $\mathscr{H}_C$ les trois hauteurs. On considère l'homothétie h de centre G et de rapport -2. On a vu que $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{A'G} = -2\overrightarrow{GA'}$ donc $h(A') = A$. Par conséquent, puisque $A' \in \Delta_A$, $h(\Delta_A)$ est la parallèle à Δ_A passant par A, c'est-à-dire la hauteur $\mathscr{H}_A$. De même, on voit que $h(\Delta_B) = \mathscr{H}_B$ et $h(\Delta_C) = \mathscr{H}_C$. Ainsi, les trois médiatrices étant concourantes, il en est de même des trois hauteurs. De plus, si H est leur point d'intersection, on a $h(\Omega) = H$ donc $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{G\Omega}$, ce qui montre que les trois points G, Ω et H sont alignés. □

Théorème 3.3 (Cercle des neuf points) *Soit ABC un triangle. On note H son orthocentre, A', B' et C' les milieux respectifs de $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$, H_A, H_B, et H_C les pieds des hauteurs, et I_A, I_B et I_C les milieus respectifs de $[H,A]$, $[H,B]$ et $[H,C]$.*
Alors, les neufs points A', B', C', H_A, H_B, H_C, I_A, I_B, et I_C sont sur un même cercle dont le centre appartient à la droite d'Euler du triangle et le rayon est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit à ABC.

Définition *Ce cercle est appelé* cercle d'Euler *ou* cercle des neuf points de Poncelet[2] *du triangle.*



$$\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{\Omega G} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{H\Omega} = 2\,\overrightarrow{HO}$$

$$\begin{aligned} r &= OA' = OB' = OC' \\ &= OI_A = OI_B = OI_C \\ &= OH_A = OH_B = OH_C \end{aligned}$$

$$R = \Omega A = \Omega B = \Omega C$$

$$r = \tfrac{1}{2}R$$

Démonstration. Notons $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ABC, Ω son centre et R son rayon. On considère de nouveau l'homothétie h de centre G et de rapport -2 et on introduit l'homothétie h' de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$.

1. Leonhard Paul Euler, mathématicien et physicien suisse, 1707-1783.
2. Jean-Victor Poncelet, mathématicien, ingénieur et général français, 1788-1867.

• Puique I_A est le milieu de $[A,H]$, $I_A = h'(A)$ et de même, $I_B = h'(B)$, $I_C = h'(C)$. Par conséquent, si $\mathscr{C}' = h'(\mathscr{C})$, les trois points I_A, I_B et I_C appartiennent à $\mathscr{C}'$. De plus, $\mathscr{C}'$ est un cercle de centre $O = h'(\Omega)$ et de rayon $\frac{1}{2}R$. En effet, si $M \in \mathscr{P}$ et $M' = h'(M)$, alors

$$\begin{aligned} M' \in \mathscr{C}' &\iff M \in \mathscr{C} \\ &\iff \Omega M = R \\ &\iff OM' = \frac{1}{2}R \text{ car } h' \text{ est une similitude de rapport } \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, puisque $O = h'(\Omega) = H + \frac{1}{2}\overrightarrow{H\Omega}$, le point O est bien sur la droite d'Euler $(H\Omega)$.

• Notons E le symétrique de H par rapport à A' et montrons que $E \in \mathscr{C}$. Alors, $A' = h'(E) \in \mathscr{C}'$. On note S la symétrie centrale de centre A' et t la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{\Omega A'}$.
Puisque $H = h(\Omega)$ et $A = h(A')$, on a

$$\overrightarrow{AH} = \vec{h}\left(\overrightarrow{A'\Omega}\right) = -2\overrightarrow{A'\Omega} = 2\overrightarrow{\Omega A'} \text{ donc } H = A + 2\overrightarrow{\Omega A'} = t(A).$$

On obtient alors $E = S(H) = S \circ t(A)$. Mais

→ $\overrightarrow{S \circ t} = \vec{S} = -\mathrm{Id}$ donc $S \circ t$ est une symétrie centrale (homothétie de rapport -1) ;

→ $S \circ t(\Omega) = S\left(\Omega + 2\overrightarrow{\Omega A'}\right) = S\left(A' + \overrightarrow{\Omega A'}\right) = A' - \overrightarrow{\Omega A'} = \Omega$

donc $S \circ t$ est la symétrie de centre Ω. Par conséquent, puisque $A \in \mathscr{C}$ et que Ω est le centre de $\mathscr{C}$, $E = S \circ t(A)$ est sur $\mathscr{C}$. Ceci montre que A' appartient à $\mathscr{C}'$. On montre de même que B' et C' sont sur $\mathscr{C}'$.

• On utilise le même principe pour montrer que les pieds des hauteurs appartiennent à $\mathscr{C}'$. Pour cela, on considère la réflexion σ par rapport à (BC) : si $P = \sigma(H)$, alors $H_A = h'(P)$ et on aura montré que $H_A \in \mathscr{C}'$ si on montre que $P \in \mathscr{C}$. On a :

→ $\overrightarrow{\sigma \circ t} = \vec{\sigma}$ est une réflexion vectorielle d'axe $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{BC})$ donc $\sigma \circ t$ est une réflexion ou une symétrie gissée d'axe une droite parallèle à (BC) ;

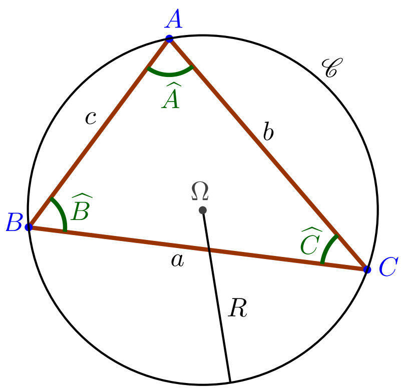
→ $\sigma \circ t(\Omega) = \sigma\left(\Omega + 2\overrightarrow{\Omega A'}\right) = \sigma\left(A' + \overrightarrow{\Omega A'}\right) = A' - \overrightarrow{\Omega A'} = \Omega$ car $\overrightarrow{\Omega A'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux

donc $\sigma \circ t$ est la réflexion d'axe la droite parallèle à (BC) passant par Ω. Cet axe étant un diamètre de $\mathscr{C}$, le point $P = \sigma(H) = \sigma \circ t(A)$ appartient à $\mathscr{C}$. Ceci montre que H_A est sur $\mathscr{C}'$. On montre de même que H_B et H_C appartiennent à $\mathscr{C}'$.

□

d) Relations métriques dans le triangle

Rappelons quelques notations :



R désigne le rayon du cercle circonscrit ;
p est le demi-périmètre : $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$;
$\mathcal{A}$ désigne l'aire géométrique de ABC :

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \tfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})| = \tfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})|.$$

On se propose de démontrer le formulaire suivant :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A},\ \ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}\ \text{ et }\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}\quad \text{(Formules d'Al Kashi [3])}$$

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2\mathcal{A}} \qquad \text{(Formules des sinus)}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(Formule de Héron [4])}$$

Démonstration. Formules d'Al Kashi. C'est une conséquence de la proposition 2.22 :

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \left\langle \overrightarrow{BC} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \middle| \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \right\rangle \\ &= BA^2 + CA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \overrightarrow{AC} \right\rangle = b^2 + c^2 - 2\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \overrightarrow{CA} \right\rangle \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

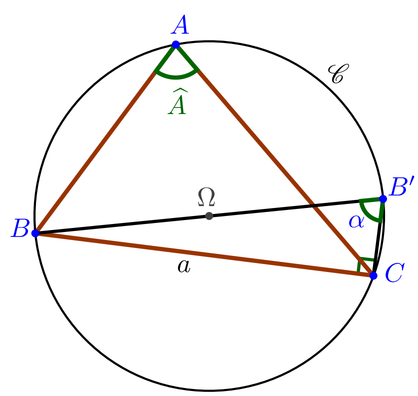
Les deux autres formules s'obtiennent de façon analogue.

Formules des sinus. En utilisant de nouveau la proposition 2.22, on obtient :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}|| \cdot |\sin\widehat{A}| = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$$

et on montre de même que $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$. Ces égalités montrent que $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}}$.

Pour la suite, considérons le point B' diamétralement opposé à B sur $\mathscr{C}$, le cercle circonscrit à ABC.



Le critère angulaire de cocyclicité (théorème 3.1) donne $\widehat{(AB),(AC)} = \widehat{(B'B),(B'C)}$. Si α est la mesure principale de $\widehat{\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C}}$, on a donc $\alpha \in \{\widehat{A}, \pi - \widehat{A}\}$ ce qui implique $\sin\widehat{A} = \sin|\alpha|$. D'autre part, le triangle $BB'C$ est rectangle en C car $[B, B']$ est un diamètre de $\mathscr{C}$ (proposition 3.1). En appliquant à ce triangle la première partie de la formule des sinus démontrée précédemment, on obtient :

$$\frac{a}{\sin|\alpha|} = \frac{BB'}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{1} = 2R,$$

ce qui conduit à l'égalité manquante $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = 2R$.

3. Ghiyath ad-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi, mathématicien et astronome perse, vers 1380-1429
4. Héron d'Alexandrie, ingénieur, mécanicien et mathématicien grec, Ier siècle après J.-C.

Formule de Héron. De $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\widehat{A} = \frac{1}{4}b^2c^2\left(1-\cos^2\widehat{A}\right) = \frac{1}{4}b^2c^2\left[1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right] \quad \text{(formule d'Al Kashi)}\\
&= \frac{1}{16}\Big(4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2\Big) = \frac{1}{16}\Big(2bc+(b^2+c^2-a^2)\Big)\Big(2bc-(b^2+c^2-a^2)\Big)\\
&= \frac{1}{16}\Big((b+c)^2-a^2)\Big)\Big(a^2-(b-c)^2)\Big) = \frac{1}{16}\Big((b+c)+a\Big)\Big((b+c)-a)\Big)\Big(a+(b-c))\Big)\Big(a-(b-c)\Big)\\
&= \frac{a+b+c}{2}\times\frac{b+c-a}{2}\times\frac{a+b-c}{2}\times\frac{a+c-b}{2}\\
&= p(p-a)(p-b)(p-c).
\end{aligned}$$

□

e) Triangles homothétiques, isométriques ou semblables

Définition *Deux triangles non plats ABC et $A'B'C'$ du plan affine (resp. affine euclidien) sont dits* homothétiques *(resp.* isométriques*,* semblables*) s'il existe une homothétie ou une translation (resp. une isométrie, une similitude) f telle que*

$$f\big(\{A,B,C\}\big) = \{A',B',C'\}.$$

Remarque : quitte à renommer les sommets, on pourra prendre pour condition $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

Remarque : les sommets de ABC formant un repère du plan, la transformation f, si elle existe, est unique (théorème 1.4).

Remarque : deux triangles isométriques (resp. semblables) seront dits *directement* ou *indirectement* isométriques (resp. semblables) selon que l'isométrie (resp. la similitude) envoyant l'un sur l'autre est directe ou indirecte.

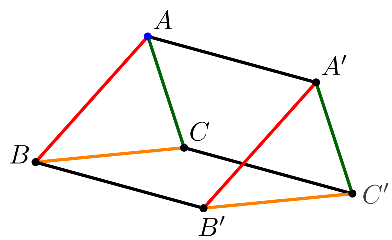
Proposition 3.10 (Triangles homothétiques) *Deux triangles sont homothétiques si, et seulement si, leurs côtés sont deux à deux parallèles.*

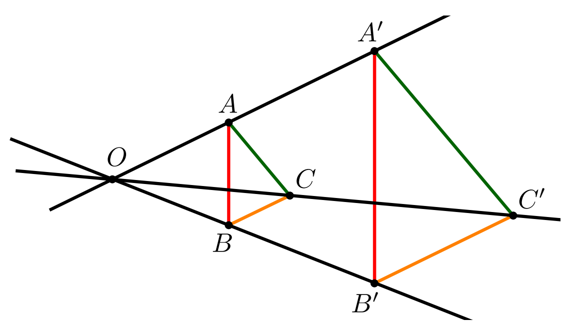
Rappels : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et non nuls, $\frac{\vec{u}}{\vec{v}}$ désigne le scalaire λ vérifiant $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Démonstration. Puisque les homothéties et les translations transforment une droite en une droite parallèle, la condition est nécessaire. Supposons donc que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de même que (BC) et $(B'C')$ ainsi que (CA) et $(C'A')$.

• Si $A = A'$, l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}}$ envoie B sur B' et C sur C' (théorème de Thalès). Il en va de même si $B = B'$ ou $C = C'$.

• On suppose que $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$. Si (AA') est parallèle à (BB'), on note f la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$; si ces droites se coupent en un point O, f désigne l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$. Dans les deux cas, $f(A) = A'$.





⋆ $f\big((AB)\big)$ est une droite parallèle à (AB) passant par $f(A) = A'$ donc $f\big((AB)\big) = (A'B')$;
⋆ $f\big((BB')\big) = (BB')$.

Par conséquent, $f(B) \in (A'B') \cap (BB') = \{B'\}$: $f(B) = B'$. Ensuite :

- $\star$ $f\big((BC)\big)$ est une droite parallèle à (BC) passant par $f(B) = B'$ donc $f\big((BC)\big) = (B'C')$;
- $\star$ $f\big((AC)\big)$ est une droite parallèle à (AC) passant par $f(A) = A'$ donc $f\big((AC)\big) = (A'C')$,

donc $f(C) \in (B'C') \cap (AC') = \{C'\}$: $f(C) = C'$.

□

Proposition 3.11 (Triangles isométriques) *Deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan affine euclidien $\mathscr{P}$ sont isométriques si, et seulement si, l'une des trois assertions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1) $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $b = b'$ *et* $c = c'$;
2) $a = a'$, $b = b'$ *et* $c = c'$;
3) $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, *et* $c = c'$.

Remarque : les notations sont toujours les mêmes : $a = BC$, $a' = B'C'$, $\widehat{A}$ est la valeur absolue de la mesure principale de $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}$, etc.

Démonstration. Les isométries préservant les distances et les angles au signe près, les trois assertions sont nécessaires.

Le théorème 1.4 nous fournit une transformation affine f de $\mathscr{P}$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Pour tous points M et N de $\mathscr{P}$, on a, si $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 &= \left\langle \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \,\middle|\, \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \right\rangle = \lambda^2 AB^2 + 2\lambda\mu \left\langle \overrightarrow{AB} \,\middle|\, \overrightarrow{AC} \right\rangle + \mu^2 AC^2 \\ &= \lambda^2 c^2 + 2\lambda\mu bc\cos\widehat{A} + \mu^2 b^2 \quad \text{(proposition 2.22)} \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \lambda\overrightarrow{A'B'} + \mu\overrightarrow{A'C'} \implies \left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|^2 = \lambda^2 c'^2 + 2\lambda\mu b'c'\cos\widehat{A'} + \mu^2 b'^2.$$

Ainsi, si l'assertion 1) est vérifiée, f est une isométrie et les deux triangles sont isométriques. En particulier, l'assertion 1) implique les assertions 2) et 3).
Supposons l'assertion 2) satisfaite. Alors (formule d'Al Kashi)

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'} = \cos\widehat{A'}$$

donc $\widehat{A} = \widehat{A'}$ car ces deux réels sont dans $[0, \pi]$. Par conséquent, l'assertion 1) est vérifiée.

Si l'assertion 3) est vraie, alors $\widehat{C} = \pi - (\widehat{A} + \widehat{B}) = \pi - (\widehat{A'} + \widehat{B'}) = \widehat{C'}$ donc on obtient (formules des sinus) :

$$a = \frac{\sin\widehat{A}}{\sin\widehat{C}}\,c = \frac{\sin\widehat{A'}}{\sin\widehat{C'}}\,c' = a' \quad \text{et} \quad b = \frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{C}}\,c = \frac{\sin\widehat{B'}}{\sin\widehat{C'}}\,c' = b'$$

et l'assertion 2) est satisfaite.

□

Proposition 3.12 (Triangles semblables) *Deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan affine euclidien $\mathscr{P}$ sont semblables si, et seulement si, l'une des trois assertions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1) $\widehat{A} = \widehat{A'}$ *et* $\dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$;
2) $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$;
3) $\widehat{B} = \widehat{B'}$ *et* $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Démonstration. Les similitudes préservant les angles au signe près ainsi que les rapports de distances, les trois conditions sont nécessaires.

Supposons que la condition 1) soit satisfaite et considérons une homothétie de rapport $\frac{b'}{b}$. L'image $A''B''C''$ de ABC par h est un triangle isométrique à $A'B'C'$ car (proposition 3.11) :

$$b'' = \frac{b'}{b}\, b = b', \quad c'' = \frac{b'}{b}\, c = \frac{c'}{c}\, c = c' \quad \text{et} \quad \widehat{A''} = \widehat{A} = \widehat{A'} \quad \text{(une homothétie préserve les angles).}$$

Par conséquent, il existe une isométrie f de $\mathscr{P}$ telle que $f(A'') = A'$, $f(B'') = B'$ et $f(C'') = C'$. L'application $f \circ h$ est alors une similitude transformant ABC en $A'B'C'$.

Si l'assertion 2) est satisfaite, on a (formules d'Al Kashi)

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\,\frac{a}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b'}{c'} + \frac{c'}{b'} - \frac{a'}{b'}\,\frac{a'}{c'}\right) = \cos\widehat{A'}$$

donc $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (ces deux réels sont dans $[0, \pi]$) et l'assertion 1) est vérifiée.

Enfin, si 3) est vraie, on a $\widehat{A} = \pi - (\widehat{B} + \widehat{C}) = \pi - (\widehat{B'} + \widehat{C'}) = \widehat{A'}$ et (formules des sinus) :

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{C}} = \frac{\sin\widehat{B'}}{\sin\widehat{C'}} = \frac{b'}{c'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Ainsi, l'assertion 1) est satisfaite.

□

III _ Conjugaison, polarité et inversion

Dans tout ce paragraphe, $\mathscr{C}$ est un cercle de centre Ω et de rayon R du plan affine euclidien $\mathscr{P}$.

a) Puissance d'un point par rapport à un cercle

Définition *Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R. On appelle* puissance *d'un point M de $\mathscr{P}$ par rapport à $\mathscr{C}$ le nombre réel $P_{\mathscr{C}}(M) = \Omega M^2 - R^2$.*

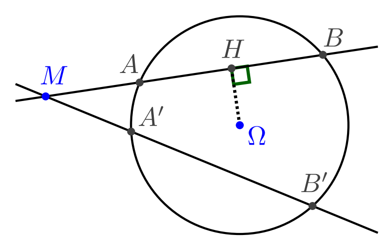
Remarque : un point M est donc sur un cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $P_{\mathscr{C}}(M) = 0$.

Définition *Un point M est dit* extérieur *au cercle $\mathscr{C}$ si $P_{\mathscr{C}}(M) > 0$,* intérieur *à $\mathscr{C}$ si $P_{\mathscr{C}}(M) < 0$.*

Proposition 3.13 *Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan rencontrant $\mathscr{C}$ en deux points A et B. Alors, pour tout point M de $\mathscr{D}$, on a $P_{\mathscr{C}}(M) = \left\langle \overrightarrow{MA} \,\middle|\, \overrightarrow{MB} \right\rangle$.*
Si $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ en T, alors, pour tout point M de $\mathscr{D}$, on a $P_{\mathscr{C}}(M) = MT^2$.

Démonstration. Notons H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{D}$. Puisque A et B sont équidistants de Ω, la droite (ΩH) est la médiatrice de $[A, B]$ donc H est le milieu de ce segment. On obtient donc, en utilisant deux fois le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} P_{\mathscr{C}}(M) &= \Omega M^2 - R^2 = \Omega H^2 + HM^2 - \Omega A^2 = HM^2 - HA^2 \\ &= \left\langle \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HA} \,\middle|\, \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HA} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{BH} \,\middle|\, \overrightarrow{AM} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{BM} \,\middle|\, \overrightarrow{AM} \right\rangle. \end{aligned}$$

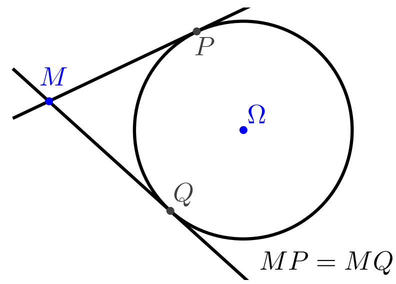


$$\left\langle \overrightarrow{MA} \,\middle|\, \overrightarrow{MB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MA'} \,\middle|\, \overrightarrow{MB'} \right\rangle$$

Ce calcul reste correct si $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ en T, avec $A = B = H = T$.

□

Corollaire 3.1 *Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites tangentes à $\mathscr{C}$ respectivement en P et Q et si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent en M, alors $MP = MQ$.*



Démonstration. D'après la proposition 3.13, on a

$$PM^2 = P_{\mathscr{C}}(M) = QM^2.$$

□

b) Polarité

Définition *Deux points P et Q de $\mathscr{P}$ sont dits* conjugués *par rapport à $\mathscr{C}$ si $\left\langle \overrightarrow{\Omega P} \middle| \overrightarrow{\Omega Q} \right\rangle = R^2$.*

Proposition-Définition **1)** *L'ensemble des points conjugués à un point P donné, distinct de Ω, est une droite perpendiculaire à la droite (ΩP) ne contenant pas Ω : on l'appelle* polaire *de P par rapport à $\mathscr{C}$.*

2) *Si Δ est une droite de $\mathscr{P}$ ne contenant pas Ω, il existe un unique point P dont la polaire est Δ ; ce point est appelé* pôle *de Δ.*

Démonstration. **1)** Déterminons les points Q de la droite (ΩP) conjugués à P. Pour un tel point, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega P}$. On obtient alors :

$$\left\langle \overrightarrow{\Omega P} \middle| \overrightarrow{\Omega Q} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\Omega P} \middle| \lambda \overrightarrow{\Omega P} \right\rangle = \lambda \, \Omega P^2$$

et donc P et un point Q de (ΩP) sont conjugués si, et seulement si, $\lambda \, \Omega P^2 = R^2$, avec $\lambda = \frac{R^2}{\Omega P^2}$. Il n'y a donc qu'un seul point sur (ΩP) conjugué à P : le point $Q_0 = \Omega + \frac{R^2}{\Omega P^2} \overrightarrow{\Omega P}$.
Maintenant, pour tout point Q du plan, on a :

$$\left\langle \overrightarrow{\Omega P} \middle| \overrightarrow{\Omega Q} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\Omega P} \middle| \overrightarrow{\Omega Q_0} + \overrightarrow{Q_0 Q} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\Omega P} \middle| \overrightarrow{\Omega Q_0} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega P} \middle| \overrightarrow{Q_0 Q} \right\rangle = R^2 + \left\langle \overrightarrow{\Omega P} \middle| \overrightarrow{Q_0 Q} \right\rangle$$

donc P et Q sont conjugués si, et seulement si, $\left\langle \overrightarrow{\Omega P} \middle| \overrightarrow{Q_0 Q} \right\rangle = 0$, c'est-à-dire Q est sur la droite perpendiculaire à (ΩP) passant par Q_0.

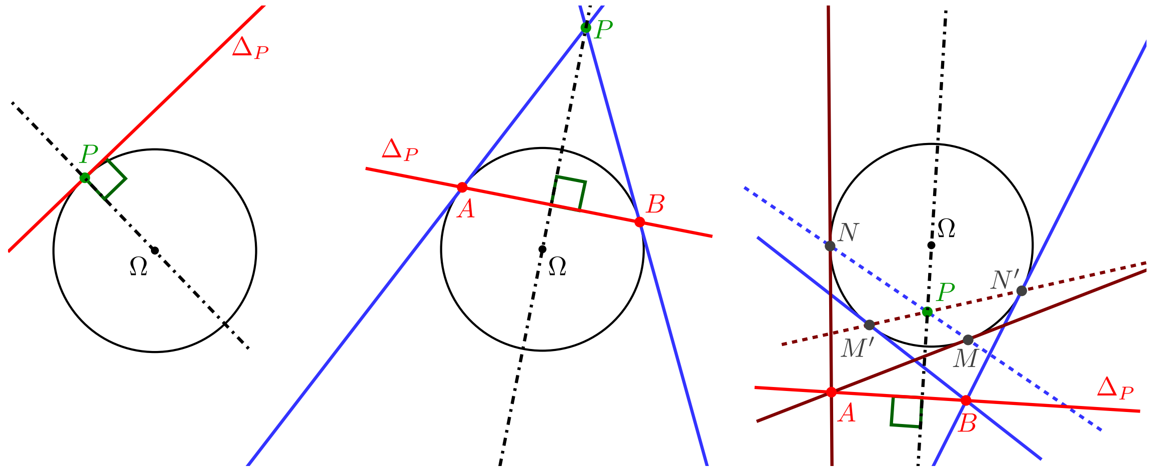
2) Soient Q_1 et Q_2 deux points distincts de Δ, et Δ_1, Δ_2 leurs polaires respectives par rapport à $\mathscr{C}$. Nous venons de voir que Δ_1 (resp. Δ_2) est perpendiculaire à (ΩQ_1) (resp. (ΩQ_2)). Puisque $Q_1 \neq Q_2$, ces deux droites ne sont pas parallèles : soit P leur point d'intersection. Maintenant, puisque P est conjugué à Q_1 et Q_2, ces deux points sont conjugués à P donc sont sur la polaire Δ_P de P. Puisque Δ_P est une droite d'après le premier point, celle-ci est donc $(Q_1 Q_2) = \Delta$: Δ est bien la polaire de P.
Enfin, si Δ est la polaire d'un second point P' de $\mathscr{P}$, P' est conjugué à Q_1 et Q_2 donc $P' \in \Delta_1 \cap \Delta_2$: $P' = P$.

□

Construction. Les constructions de polaires ou de pôles sont basées sur le principe de symétrie suivant : si P est conjugué à Q alors Q est conjugué à P, ce qui se traduit par le résultat suivant :

P est sur la polaire de Q si, et seulement si, Q est sur la polaire de P.

D'autre part, si P est un point de $\mathscr{C}$, il est conjugué à lui-même. Par conséquent, sa polaire étant perpendiculaire à (ΩP), c'est la tangente à $\mathscr{C}$ en P : c'est la figure de gauche ci-dessous (où la polaire de P est notée Δ_P).
Sur la figure du centre (cas où P est extérieur à $\mathscr{C}$), on a tracé les deux tangentes au cercle passant par P (proposition 3.4). Si A et B sont les points de contact, le premier cas montre que les polaires de A et B sont respectivement les droites (PA) et (PB). Par conséquent, A et B sont conjugués à P. Ils sont donc sur la polaire de P, qui est ainsi la droite (AB).
Si P est intérieur à $\mathscr{C}$, on trace deux droites passant par P et coupant le cercle respectivement en M, N et M', N'. On considère le point d'intersection A (resp. B) des tangentes au cercle en M et N (resp. M' et N') : la polaire de P est la droite (AB). En effet, le deuxième cas nous permet d'affirmer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont les polaires respectives de A et B. Comme P est sur ces deux droites, P est conjugué à A et B.



Notons que ces constructions peuvent se lire «à l'envers» pour construire le pôle P d'une droite Δ.

c) Inversion

Définition *Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R. On appelle* inversion de cercle $\mathscr{C}$ *(ou* inversion de centre Ω et de rapport R^2*) l'application $I_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{P} \setminus \{\Omega\}$ dans $\mathscr{P} \setminus \{\Omega\}$ qui, à un point M, associe le projeté orthogonal de M sur sa polaire.*

Remarque : l'inverse de M par rapport à $\mathscr{C}$ est donc le point d'intersection de la polaire de M avec (ΩM) ou, dit autrement, l'unique point de (ΩM) conjugué à M.

Proposition 3.14 *Soient M et M' deux points de $\mathscr{P}$ distincts de Ω.*
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1) $M' = I_{\mathscr{C}}(M)$;

2) $M' \in (\Omega M)$ *et* $\left\langle \overrightarrow{\Omega M} \,\middle|\, \overrightarrow{\Omega M'} \right\rangle = R^2$;

3) $M' \in (\Omega M)$ *et* $\overrightarrow{\Omega M'} = \dfrac{R^2}{\Omega M^2}\,\overrightarrow{\Omega M}$.

Démonstration. Notons Δ_M la polaire de M par rapport à $\mathscr{C}$.

Les assertions 1) et 2) sont clairement équivalentes puisque la deuxième dit exactement que M' est l'unique point de (ΩM) conjugué à M.

<u>2) ⇒ 3)</u> Puisque M' appartient à (ΩM), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}$. De là, on obtient :

$$R^2 = \left\langle \overrightarrow{\Omega M} \,\middle|\, \overrightarrow{\Omega M'} \right\rangle = \lambda\,\Omega M^2 \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{R^2}{\Omega M^2}.$$

<u>3) ⇒ 1)</u> On a $\left\langle \overrightarrow{\Omega M} \,\middle|\, \overrightarrow{\Omega M'} \right\rangle = \frac{R^2}{\Omega M^2}\,\Omega M^2 = R^2$ donc M' et M sont conjugués : $M' \in \Delta_M$. Ensuite, puisque (ΩM) est perpendiculaire à Δ_M et $M' \in (\Omega M)$, M' est bien le projeté orthogonal de M sur Δ_M : $M' = I_{\mathscr{C}}(M)$.

□

Corollaire 3.2 *Une inversion est involutive : $I_{\mathscr{C}} \circ I_{\mathscr{C}} = \mathrm{Id}$.*

Démonstration. Ceci se voit aisément avec l'assertion 2) de la proposition 3.14 : si M' est l'inverse de M, alors M est l'inverse de M'.

□

Corollaire 3.3 *L'ensemble des points fixes de $I_{\mathscr{C}}$ est exactement $\mathscr{C}$.*

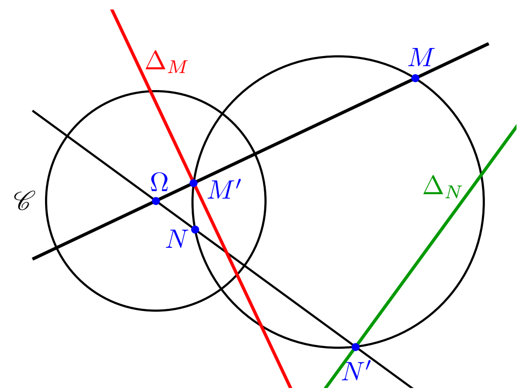
Démonstration. En utilisant l'assertion 3) de la proposition 3.14, on voit que, pour $M \in \mathscr{P}\backslash\{\Omega\}$, $M = I_{\mathscr{C}}(M)$ si, et seulement si, $\Omega M^2 = R^2$, c'est-à-dire $M \in \mathscr{C}$.

□

Corollaire 3.4 *Soient M et N deux points distincts de Ω, non alignés avec Ω, et M', N' leurs inverses respectifs par rapport à $\mathscr{C}$. Alors, les quatre points M, N, M' et N' sont cocycliques.*

Démonstration. Notons $\mathscr{C}'$ le cercle ciconscrit à M, N et M' et montrons que $N' \in \mathscr{C}'$.
Notons N'' le second point d'intersection de (ΩN) avec $\mathscr{C}'$. Puisque $N' \in (\Omega N)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\Omega N'} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega N''}$. Maintenant, d'après la proposition 3.13, la puissance de Ω par rapport à $\mathscr{C}'$ est

$$P_{\mathscr{C}'}(\Omega) = \left\langle \overrightarrow{\Omega M} \middle| \overrightarrow{\Omega M'} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\Omega N} \middle| \overrightarrow{\Omega N''} \right\rangle.$$



Mais $\left\langle \overrightarrow{\Omega M} \middle| \overrightarrow{\Omega M'} \right\rangle = R^2 = \left\langle \overrightarrow{\Omega N} \middle| \overrightarrow{\Omega N'} \right\rangle$ (proposition 3.14) donc on obtient

$$\left\langle \overrightarrow{\Omega N} \middle| \overrightarrow{\Omega N''} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\Omega N} \middle| \overrightarrow{\Omega N'} \right\rangle = \lambda \left\langle \overrightarrow{\Omega N} \middle| \overrightarrow{\Omega N''} \right\rangle.$$

Les trois points Ω, N et N'' étant alignés, le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{\Omega N} \middle| \overrightarrow{\Omega N''} \right\rangle$ est non nul. Par conséquent, $\lambda = 1$ et $N' = N'' \in \mathscr{C}'$.

□

Corollaire 3.5 *Soient M et N deux points distincts de Ω, non alignés avec Ω, et M', N' leurs inverses respectifs par rapport à $\mathscr{C}$. Les égalités d'angles orientés de droites suivantes sont vérifiées :*

$$\widehat{(\Omega M),(MN)} = \widehat{(MM'),(MN)} = \widehat{(N'M'),(N'N)} = \widehat{(N'M'),(\Omega N)}.$$

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire 3.4 et du critère angulaire de cocyclicité (théorème 3.1).

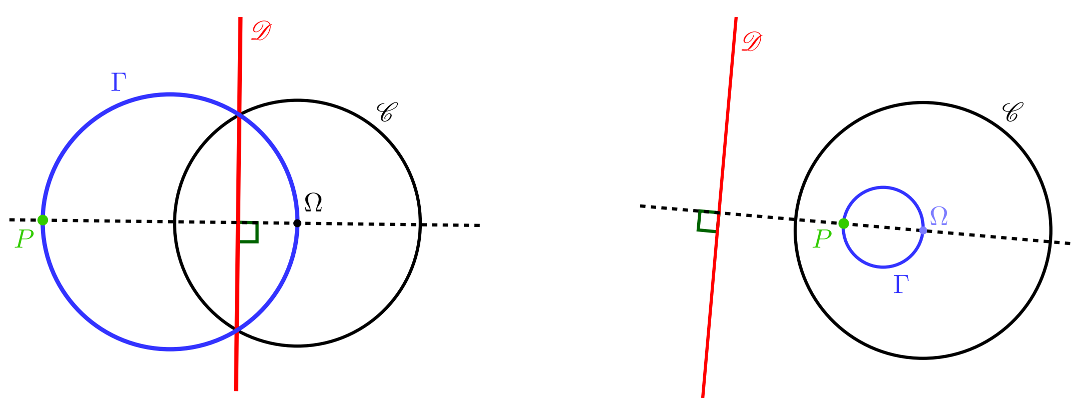
□

Théorème 3.4 *Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω. Alors :*

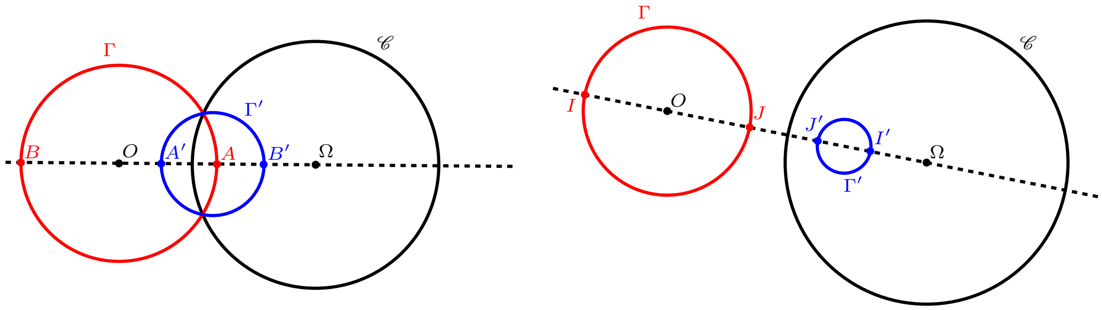
1) *toute droite passant par Ω est sa propre image par $I_{\mathscr{C}}$;*

2) *l'image par $I_{\mathscr{C}}$ d'une droite $\mathscr{D}$ ne passant pas par Ω est le cercle de diamètre $[\Omega, P]$ où P est le pôle de $\mathscr{D}$. Réciproquement, l'inverse d'un cercle de diamètre $[\Omega, A]$ est la polaire de A ;*

3) *l'inverse d'un cercle ne contenant pas Ω est un cercle ne contenant pas Ω. Plus précisément, si Γ est un cercle de centre O, ne rencontrant pas Ω, et si A et B sont les points d'intersection de (ΩO) avec Γ, alors $I_{\mathscr{C}}(\Gamma)$ est le cercle de diamètre $[A', B']$ où A' et B' sont les inverses de A et B.*



Γ et $\mathscr{D}$ sont inverses l'un de l'autre (P est le pôle de $\mathscr{D}$)



Les deux cercles Γ et Γ' sont inverses l'un de l'autre

Démonstration. **1)** Quel que soit M différent de Ω, l'inverse de M est sur la droite (ΩM). Par conséquent, si M appartient à une droite $\mathscr{D}$ passant par Ω, son inverse est sur $\mathscr{D}$.

2) Notons P le pôle de $\mathscr{D}$. Pour $M \in \mathscr{P} \setminus \{\Omega\}$ et $M' = I_{\mathscr{C}}(M)$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\Omega M'} \middle| \overrightarrow{PM'} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{\Omega M'} \middle| \overrightarrow{P\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \right\rangle = \Omega M'^2 - \left\langle \overrightarrow{\Omega M'} \middle| \overrightarrow{\Omega P} \right\rangle \\
&= \frac{R^4}{\Omega M^2} - \frac{R^2}{\Omega M^2} \left\langle \overrightarrow{\Omega M} \middle| \overrightarrow{\Omega P} \right\rangle \quad \text{d'après la proposition 3.14} \\
&= \frac{R^2}{\Omega M^2} \left(R^2 - \left\langle \overrightarrow{\Omega M} \middle| \overrightarrow{\Omega P} \right\rangle \right).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
M \text{ appartient à } \mathscr{D} &\iff \left\langle \overrightarrow{\Omega M} \middle| \overrightarrow{\Omega P} \right\rangle = R^2 \quad \text{car } \mathscr{D} \text{ est la polaire de } P \\
&\iff \left\langle \overrightarrow{\Omega M'} \middle| \overrightarrow{PM'} \right\rangle = 0 \quad \text{d'après le calcul ci-dessus} \\
&\iff M' \text{ est sur le cercle de diamètre } [\Omega P] \text{ d'après la proposition 3.1.}
\end{aligned}$$

Réciproquement, une inversion étant involutive, l'image d'un cercle Γ de diamètre $[\Omega, A]$ est égal à la polaire Δ_A de A puisque ce qui précède montre que $I_{\mathscr{C}}(\Delta_A) = \Gamma$.

3) Soit Γ un cercle ne contenant pas Ω, O son centre et A, B les deux points d'intersections de (ΩO) avec Γ : $[A, B]$ est un diamètre de Γ. Notons A' et B' les inverses respectifs de A et B par rapport à $\mathscr{C}$: les cinq points Ω, A, A', B et B' sont donc alignés. Pour $M \in \mathscr{P} \setminus \{\Omega\}$, $M \neq A, B$, et $M' = I_{\mathscr{C}}(M)$, on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{(MA), (MB)} &= \widehat{(MA), (\Omega A)} + \widehat{(\Omega A), (MB)} \\
&= \widehat{(\Omega A'), (M'A')} + \widehat{(M'B'), (\Omega A')} \quad \text{d'après le corollaire 3.5} \\
&= \widehat{(M'B'), (M'A')}.
\end{aligned}$$

Or $M \in \Gamma$ si, et seulement si, l'angle de droite $\widehat{(MA), (MB)}$ est droit (proposition 3.1) et de même, M' est sur le cercle de diamètre $[A', B']$ si, et seulement si, $\widehat{(M'A'), (M'B')}$ est droit. L'égalité d'angles précédente montre donc que l'inverse de Γ par rapport à $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[A', B']$.

□

IV _ Cercles inscrit et exinscrits - Théorème de Feuerbach

a) Bissectrices d'un triangle - Cercles inscrit et exinscrits

Considérons un triangle ABC et les deux bissectrices des droites (AB) et (AC) : on a vu que l'une est dirigée par $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ et l'autre par $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} - \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ (voir page 36).

Définition *On appelle* bissectrice intérieure *(resp.* extérieure*) en A du triangle ABC la bissectrice de (AB) et (AC) dirigée par $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ (resp. par $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$).*

Proposition 3.15 *Soient ABC un triangle non plat, a, b et c les distances BC, CA et AB.*

1) *Les trois bissectrices intérieures sont concourantes en le barycentre I de (A,a), (B,b) et (C,c).*

2) *La bissectrice intérieure en A (resp. B, resp. C) et les bissectrices extérieures en B et C (resp. C et A, resp. A et B) sont concourantes en le barycentre I_A de $(A,-a)$, (B,b) et (C,c) (resp. le barycentre I_B de (A,a), $(B,-b)$ et (C,c), resp. le barycentre I_C de (A,a), (B,b) et $(C,-c)$).*

3) *Il existe exactement quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle, respectivement centrés en I, I_A, I_B et I_C.*

Définition *Le cercle tangent aux côtés du triangle et centré en I est appelé* cercle inscrit *dans le triangle ABC ; les trois autres sont appelés* cercles exinscrits.

Démonstration. • Soit I le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c). Puisque

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{a+b+c}\left(b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{bc}{a+b+c}\,\frac{b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}}{bc}=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right),$$

le point I est sur la bissectrice intérieure en A. On montre de même que I est sur les deux autres bissectrices intérieures.

• Notons que les trois points A, B et C n'étant pas alignés, on a $a<b+c$ donc $b+c-a\neq 0$, et de même, $a-b+c\neq 0$ et $a+b-c\neq 0$.
Si I_A est le barycentre de $(A,-a)$, (B,b) et (C,c), alors :

→ $\overrightarrow{AI_A}=\frac{1}{-a+b+c}\left(b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{bc}{-a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$ donc I_A est sur la bissectrice intérieure en A,
→ $\overrightarrow{BI_A}=\frac{1}{-a+b+c}\left((-a)\,\overrightarrow{BA}+c\,\overrightarrow{BC}\right)=\frac{ac}{-a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{a}-\frac{\overrightarrow{BA}}{c}\right)$ donc I_A est sur la bissectrice extérieure en B,

et on montre de même que I_A appartient à la bissectrice extérieure en C.
La démonstration est identique pour I_B et I_C.

• Notons X, Y et Z les projetés orthogonaux de I respectivement sur (BC), (CA) et (AB). On a donc

$$IX=d\big(I,(BC)\big),\quad IY=d\big(I,(CA)\big)\quad\text{et}\quad IZ=d\big(I,(AB)\big).$$

Or I est sur les trois bissectrices intérieures du triangle, donc est équidistant de (AB), (BC) et (CD) (proposition 2.32). Ainsi, $IX=IY=IZ$ et les trois points X, Y et Z sont sur un même cercle centré en I. De plus, les droites (BC), (CA) et (AB) sont tangentes à ce cercle en ces points d'après la propriété 3.2.
On montre de même que I_A, I_B et I_C sont également les centres de cercles tangents aux trois côtés du triangle.

• Enfin, si un cercle $\mathscr{C}$ est tangent aux trois côtés du triangle, son centre M est équidistant de (AB), (BC) et (CA) donc, d'après la proposition 2.32, appartient à une intersection $\mathscr{D}_A\cap\mathscr{D}_B\cap\mathscr{D}_C$ où $\mathscr{D}_A$ (resp. $\mathscr{D}_B$, $\mathscr{D}_C$) est une bissectrice en A (resp. B, C). Or d'après ce qui précède, deux bissectrices intérieures se coupent en I et deux bissectrices extérieures en I_A, I_B ou I_C. Par conséquent, M est un de ces quatre points et $\mathscr{C}$ un des quatre cercles tangents précédents.

□

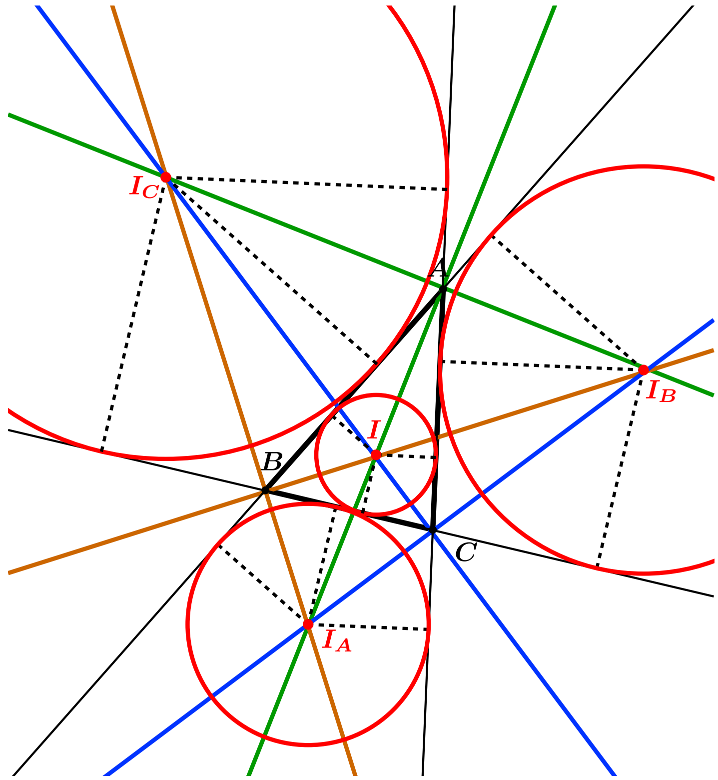
Proposition 3.16 *La bissectrice intérieure issue de A (resp. B, resp. C) rencontre (BC) (resp. (CA), resp. (AB)) en le barycentre de (B,b) et (C,c) (resp. (C,c) et (A,a), resp. (A,a) et (B,b)).*

Démonstration. Si S est le barycentre de (B,b) et (C,c), alors S appartient à (BC) d'une part, et d'autre part :

$$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{b+c}\left(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{b+c}\left(a\overrightarrow{AA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right)=\frac{a+b+c}{b+c}\,\overrightarrow{AI}$$

d'après la proposition 3.15. Par conséquent, S est également sur (AI).

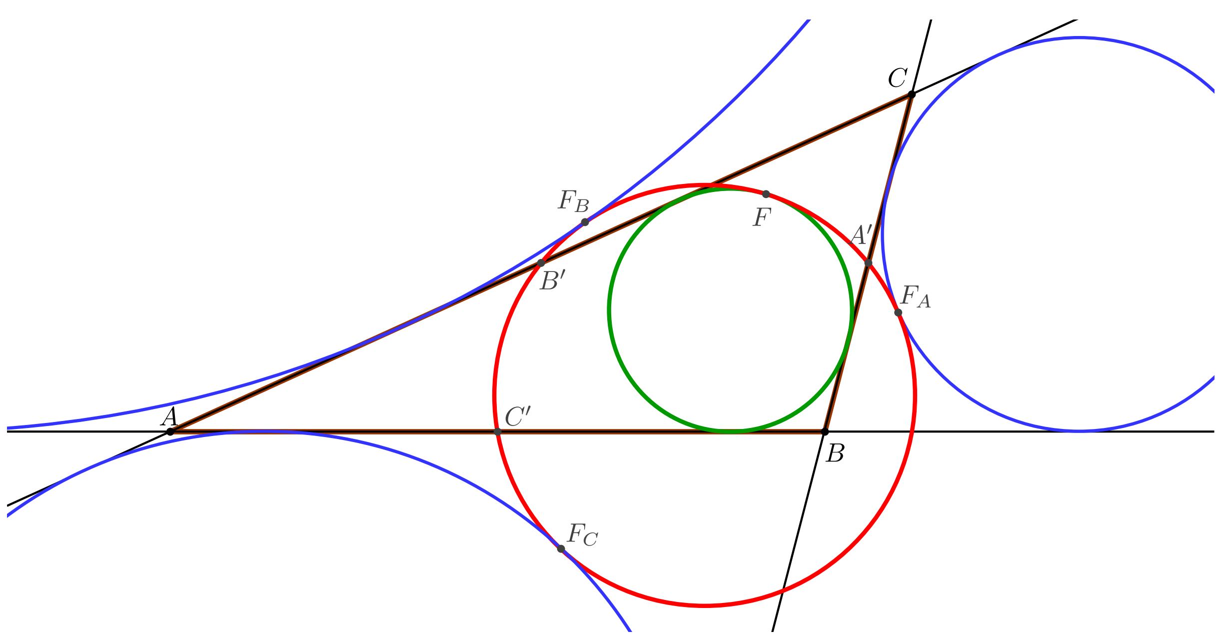
□



b) Le théorème de Feuerbach

Théorème 3.5 (Feuerbach) *Le cercle d'Euler d'un triangle ABC est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits de ABC.*

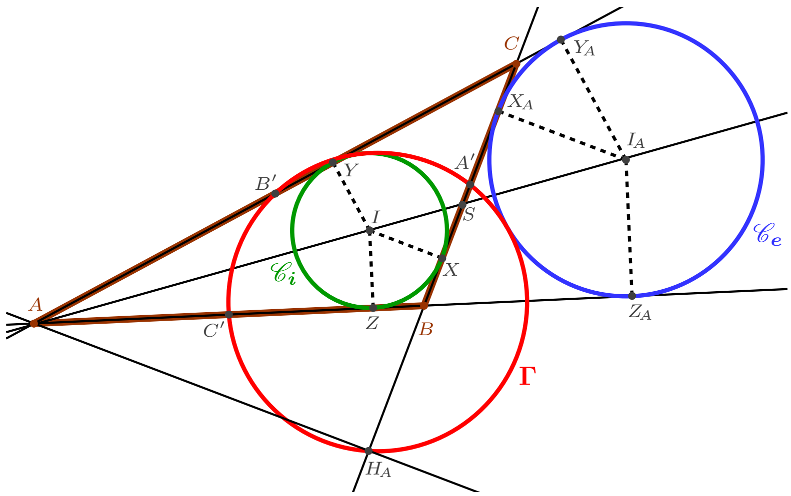
Définition *Les quatre points de contact sont appelés points de Feuerbach*[5] *du triangle.*



5. Karl Wilhelm Feuerbach, mathématicien allemand, 1800-1834.

Complétons la liste des notations :

* a, b, et c désignent les longueurs respectives BC, CA et AB ;
* A', B' et C' sont les milieux respectifs de $[B, C]$, $[C, A]$, et $[A, B]$;
* $\mathscr{C}_i$ est le cercle inscrit dans ABC, I son centre ;
* X, Y et Z sont les points de contact de $\mathscr{C}_i$ avec (BC), (CA) et (AC) respectivement ;
* $\mathscr{C}_e$ est le cercle exinscrit à ABC, issu de A, I_A son centre et X_A son point de contact avec (BC) ;
* S est le point d'intersection de (BC) avec $(I_AI) = (AI)$;
* H_A est le pied de la hauteur issue de A ;
* Γ est le cercle d'Euler de ABC : il contient H_A, A', B' et C'.



Lemme 2 $\left\langle \overrightarrow{AC} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$, $\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \overrightarrow{CA} \right\rangle = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$ *et* $\left\langle \overrightarrow{CB} \middle| \overrightarrow{AB} \right\rangle = \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2)$.

Démonstration. On a $c^2 = AB^2 = \left\langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \middle| \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \right\rangle = AC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AC} \middle| \overrightarrow{CB} \right\rangle + CB^2$, ce qui conduit à la première égalité. Les deux autres égalités se démontrent de la même façon.

□

Lemme 3 *X et X_A ont respectivement pour coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C) :*

$$X : \left(0, \frac{a+b-c}{2a}, \frac{a+c-b}{2a}\right) \quad X_A : \left(0, \frac{a+c-b}{2a}, \frac{a+b-c}{2a}\right).$$

Démonstration. Notons respectivement M et N les deux points ayant ces coordonnées. Puisque leur première coordonnée est nulle, ils sont sur (BC). D'autre part, X (resp. X_A) est le projeté orthogonal de I (resp. I_A) sur (BC). Nous allons donc montrer que $\left\langle \overrightarrow{IM} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{I_AN} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle = 0$ pour conclure. D'après la proposition 3.15, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IM} &= \frac{1}{a+b+c}\left(a\,\overrightarrow{AM} + b\,\overrightarrow{BM} + c\,\overrightarrow{CM}\right) \\
&= \frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a+b-c}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{a+c-b}{2}\,\overrightarrow{AC} + \frac{b(a+c-b)}{2a}\,\overrightarrow{BC} + \frac{c(a+b-c)}{2a}\,\overrightarrow{CB}\right) \\
&= \frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a+b-c}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \frac{a+c-b}{2}\,\overrightarrow{AC} + \frac{ba-b^2-ca+c^2}{2a}\,\overrightarrow{BC}\right) \\
&= \frac{1}{a+b+c}\left(a\,\overrightarrow{AC} + \frac{c^2-b^2-a^2}{2a}\,\overrightarrow{BC}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2, on obtient donc

$$2a(a+b+c)\left\langle \overrightarrow{IM} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle = 2a^2\left\langle \overrightarrow{AC} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle + (c^2-b^2-a^2)\left\langle \overrightarrow{BC} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle = a^2(b^2+a^2-c^2) + a^2(c^2-b^2-a^2) = 0.$$

On procède de la même manière pour montrer que $X_A = N$.

□

Corollaire 3.6 *A' est le milieu de $[X, X_A]$ et $XX_A = |b-c|$.*

Démonstration. Par associativité du barycentre, les coordonnéees barycentriques du milieu de $[X, X_A]$ sont :

$$\left(0, \frac{a+b-c}{4a} + \frac{a+c-b}{4a}, \frac{a+c-b}{4a} + \frac{a+b-c}{4a}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XX_A} &= \frac{a+b-c}{2a}\overrightarrow{BX_A} + \frac{a+c-b}{2a}\overrightarrow{CX_A} = \frac{(a+b-c)^2}{4a^2}\overrightarrow{BC} + \frac{(a+c-b)^2}{4a^2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{(a+b-c)^2 - (a+c-b)^2}{4a^2}\overrightarrow{BC} = \frac{4a(b-c)}{4a^2}\overrightarrow{BC} = \frac{b-c}{a}\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème de Feuerbach. Nous allons montrer que Γ est tangent au cercle inscrit $\mathscr{C}_i$ et au cercle exinscrit $\mathscr{C}_e$ issu de A, la démonstration étant la même pour les deux autres cercles exinscrits.

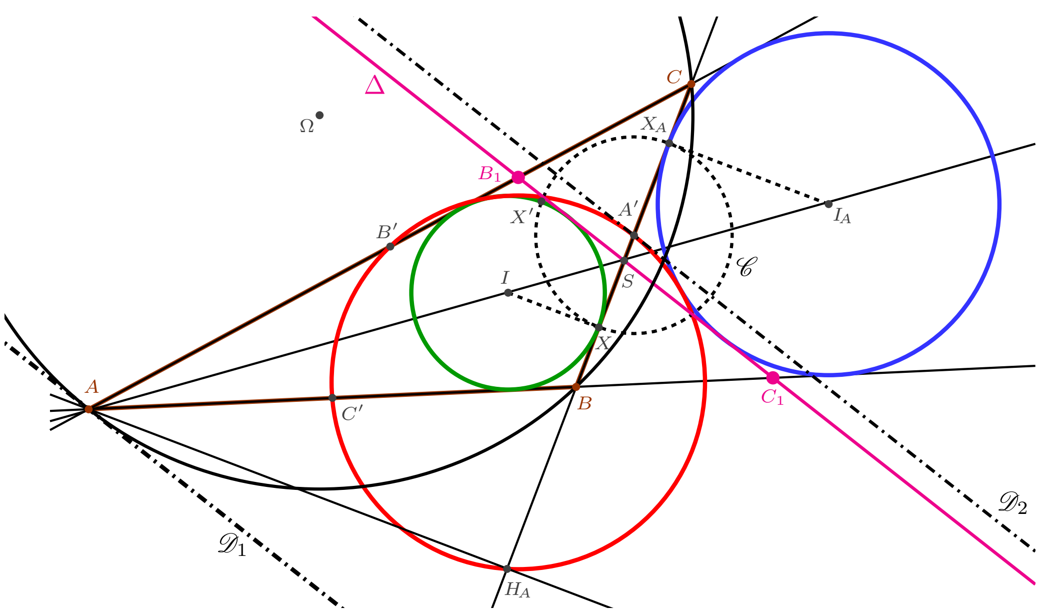
1) Si le triangle ABC est isocèle en A (*ie* $b = c$), les cinq points X, X_A, A', S et H_A coïncident car la bissectrice intérieure et la hauteur issues de A, ainsi que la médiatrice de $[B, C]$, sont confondues. Dans ce cas, Γ est tangent à (BC) en $A' = H_A$, donc à $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_e$. Nous supposons dorénavant que ABC n'est pas isocèle en A. Dans ce cas, $b \neq c$ donc les cinq points X, X_A, A', S et H_A sont deux à deux distincts :

- → c'est clair pour les quatre premiers car on connaît leurs écritures comme barycentres de B et C ;
- → si H_A coïncide avec X, S ou X_A, alors $H_A = X = S = X_A$ car la hauteur issue de A coïncide avec la bissectrice intérieure issue de A ;
- → enfin, si $H_A = A'$, la hauteur issue de A coïncide avec la médiatrice de $[B, C]$ donc $b = c$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

2) Notons $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[X, X_A]$ et $I_{\mathscr{C}}$ l'inversion de cercle $\mathscr{C}$. D'après le corollaire 3.6, A' est le centre de $\mathscr{C}$. Par conséquent, la droite (BC) est sa propre inverse par rapport à $\mathscr{C}$ (théorème 3.4).
Puisque X est distinct de A', $\mathscr{C}_i$ ne contient pas A' donc $I_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_i)$ est un cercle (théorème 3.4). Ce cercle n'est autre que $\mathscr{C}_i$ lui-même car :

- → X appartient à $\mathscr{C}$ donc $I_{\mathscr{C}}(X) = X$;
- → or X est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_i$ avec (BC) donc $X = I_{\mathscr{C}}(X)$ est l'unique point d'intersection de $I_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_i)$ avec $I_{\mathscr{C}}\Big((BC)\Big) = (BC)$: $I_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_i)$ est tangent à (BC) en X ;
- → si X' est le second point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec $\mathscr{C}_i$, alors $I_{\mathscr{C}}(X') = X'$ donc $I_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_i)$ passe par X'.

On montre de même que $I_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_e) = \mathscr{C}_e$.



3) Notons σ la réflexion d'axe la bissectrice (AI), B_1 et C_1 les images respectives de B et C par σ et Δ la droite (B_1C_1), image de (BC) par σ. Puisque σ échange (AB) et (AC), les points B_1 et C_1 sont respectivement sur (AC) et (AB).
D'autre part, les deux cercles $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_e$ étant invariants par σ (l'axe passe par les centres), Δ est tangente à ces cercles puisque (BC) l'est. Pour conclure la démonstration du théorème, nous allons démontrer que l'image de Δ par $I_{\mathscr{C}}$ est le cercle d'Euler Γ : puisque $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_e$ sont invariants par $I_{\mathscr{C}}$, cela montrera que Γ leur est tangent. Nous allons en fait montrer que $I_{\mathscr{C}}(\Gamma) = \Delta$. Notons déjà que $I_{\mathscr{C}}(\Gamma)$ est bien une droite car le pôle A' de $I_{\mathscr{C}}$ est sur Γ.

4) Le pied de la hauteur issue de A, H_A, est sur Γ : son inverse est donc sur $I_{\mathscr{C}}(\Gamma)$. Montrons que $I_{\mathscr{C}}(H_A) = S$, le point d'intersection de la bissectrice (AI) avec (BC). L'inverse de S est le point d'intersection de $(A'S) = (BC)$ avec la polaire Δ_S de S. Or $\Delta_S = (AH_A)$:

→ A et S sont conjugués par rapport à $\mathscr{C}$ car

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{A'S} \middle| \overrightarrow{A'A} \right\rangle &= \frac{1}{b+c}\left(b\left\langle \overrightarrow{A'B} \middle| \overrightarrow{A'A} \right\rangle + c\left\langle \overrightarrow{A'C} \middle| \overrightarrow{A'A} \right\rangle\right) \quad \text{d'après la proposition 3.16} \\
&= \frac{1}{2(b+c)}\left(b\left\langle \overrightarrow{CB} \middle| \overrightarrow{A'A} \right\rangle + c\left\langle \overrightarrow{BC} \middle| \overrightarrow{A'A} \right\rangle\right) \\
&= \frac{b-c}{2(b+c)}\left\langle \overrightarrow{CB} \middle| \overrightarrow{A'A} \right\rangle = \frac{b-c}{2(b+c)}\left\langle \overrightarrow{CB} \middle| \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}}{2} \right\rangle \\
&= \frac{b-c}{4(b+c)}\left(\left\langle \overrightarrow{CB} \middle| \overrightarrow{BA} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{CB} \middle| \overrightarrow{CA} \right\rangle\right) \\
&= \frac{b-c}{8(b+c)}\left((b^2-a^2-c^2)+(a^2+b^2-c^2)\right) \quad \text{d'après le lemme 2} \\
&= \frac{b-c}{8(b+c)}\left(2b^2-2c^2\right) = \frac{(b-c)^2}{4} \\
&= A'X^2 \quad \text{d'après le corollaire 3.6} ;
\end{aligned}$$

→ Δ_S est donc la droite perpendiculaire à $(A'S) = (BC)$ passant par A, soit la hauteur (AH_A).

Ainsi, $I_{\mathscr{C}}(\Gamma)$ est une droite passant par S.

5) Notons $\mathscr{D}_1$ la tangente en A au cercle circonscrit à ABC. D'après le théorème de l'angle inscrit (et le lemme 8), les angles orientés de droites $\widehat{\mathscr{D}_1,(AB)}$ et $\widehat{(CA),(CB)}$ sont égaux. Puisque les réflexions renversent les angles, on a

$$\widehat{\sigma(\mathscr{D}_1),\sigma\Big((AB)\Big)} = -\widehat{\mathscr{D}_1,(AB)} = -\widehat{(CA),(CB)}, \quad \text{soit} \quad \widehat{\sigma(\mathscr{D}_1),(AC)} = \widehat{\sigma(\mathscr{D}_1),(AB_1)} = \widehat{(CB),(CA)}.$$

En utilisant le résultat de la proposition 2.24, on en déduit que $\sigma(\mathscr{D}_1)$ est parallèle à (BC) et donc que $\mathscr{D}_1$ est parallèle à $\sigma\Big((BC)\Big) = \Delta$.
Considérons l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$: elle envoie A, B et C respectivement sur A', B' et C', donc le cercle circonscrit à ABC sur le cercle d'Euler Γ. Par conséquent, si $\mathscr{D}_2$ est la tangente à Γ en A', $\mathscr{D}_2 = h(\mathscr{D}_1)$ est parallèle à $\mathscr{D}_1$, donc à Δ.
Maintenant, puisque A' est sur $\mathscr{D}_2$, $I_{\mathscr{C}}(\mathscr{D}_2) = \mathscr{D}_2$. D'autre part, $\mathscr{D}_2 \setminus \{A'\}$ ne rencontre pas Γ, donc $I_{\mathscr{C}}(\mathscr{D}_2) = \mathscr{D}_2$ ne rencontre pas $I_{\mathscr{C}}(\Gamma)$. Les deux droites $I_{\mathscr{C}}(\Gamma)$ et $\mathscr{D}_2$ sont donc parallèles.

6) Nous pouvons maintenant conclure : $I_{\mathscr{C}}(\Gamma)$ est la droite parallèle à Δ (point **5)**) passant par S (point **4)**), c'est-à-dire $I_{\mathscr{C}}(\Gamma) = \Delta$. C'est ce que nous voulions démontrer.

□

Bibliographie

[1] M. Audin – *Géométrie*, Belin, 1998.

[2] Y. Ladegaillerie – *Géométrie pour le capes de mathématiques*, ellipses, 2002.

[3] F. Liret et D. Martinais – *Algèbre et géométrie - licence 2^e année*, Dunod, 1999.

[4] D.-J. Mercier – *Cours de géométrie*, Publibook, 2008.

Index

Al Kashi, 52
angle
  au centre, 46
  d'une rotation, 26
  géométrique, 31
  inscrit, 46
  mesure, 28
  mesure principale, 28
  orienté de droites affines, 31
  orienté de droites vectorielles, 30
  orienté de vecteurs, 28
antidéplacement, 32
application
  affine, 11
    points fixes, 14
  linéaire
    directe, 8
    indirecte, 8
  linéaire associée, 12
associativité (barycentre), 9

barycentre, 9
base
  directe, 8
  indirecte, 8
  orthogonale, 21
  orthonormée, 21
bissectrices, 36
  extérieures d'un triangle, 60
  intérieures d'un triangle, 60

Cauchy-Schwarz, 19
cercle, 43
  circonscrit, 49
  d'Euler, 50
  des neuf points de Poncelet, 50
  exinscrit, 60
  inscrit, 60
  point extérieur, 55
  point intérieur, 55
  tangente, 44
cercles tangents, 44
Chasles, 6, 29, 30
cocyclicité, 47
conjugaison (cercle), 56
coordonnées
  barycentriques, 11
  cartésiennes, 8

déplacement, 32
déterminant de Gram, 34
dimension, 6
direction, 5
distance, 31
  à un sous-espace affine, 34
droite d'Euler, 50

endomorphisme orthogonal, 24
espace
  affine, 5
    euclidien, 31
    orienté, 8
  vectoriel
    euclidien, 19
    orienté, 8
Euler, 50

Feuerbach, 61
formule de polarité, 20

Gram, 34
Gram-Schmidt, 21
groupe
  orthogonal, 24
  spécial orthogonal, 25

hauteurs, 50
Héron, 52
homothétie, 15
hyperplan médiateur, 36

inégalité triangulaire, 31
inversion, 57
isométrie
  affine, 32
  vectorielle, 24

médianes, 49
médiatrices, 36, 49
matrice
  d'un produit scalaire, 20
  orthogonale, 24
Minkowski, 19

norme, 19

orientation, 8
orthocentre, 50
orthogonal d'une partie, 22

pôle d'une droite, 56
parallélogramme, 6
points de Feuerbach, 61
points fixes (application affine), 14
polaire d'un point, 56
Poncelet, 50
produit
- mixte, 27
- scalaire, 19
- vectoriel, 27

projection
- affine, 16
- affine orthogonale, 32
- linéaire, 16
- vectorielle orthogonale, 23

puissance (cercle), 55
Pythagore, 21, 31

réflexion
- affine, 32
- vectorielle, 23, 26

repère
- cartésien, 8

rotation
- affine, 33
- vectorielle, 26

similitude
- affine, 38
- du plan, 39, 40
- vectorielle, 38

sous-espace
- affine, 6
  - engendré, 7

sous-espaces
- affines
  - orthogonaux, 31
  - parallèles, 7
  - perpendiculaires, 31

symétrie
- affine, 16
- affine orthogonale, 32
- glissée, 33
- linéaire, 16
- vectorielle orthogonale, 23

Thalès, 17
translation, 11, 15
triangle, 48
- aire algébrique, 48
- aire géométrique, 48
- bissectrices, 60
- cercle circonscrit, 49
- droite d'Euler, 50
- équilatéral, 48
- hauteurs, 50
- isocèle, 48
- médianes, 49
- médiatrices, 49
- orthocentre, 50
- rectangle, 48
- relations métriques, 52

triangles
- homothétiques, 53
- isométriques, 53, 54
- semblables, 53, 54

vecteurs orthogonaux, 20