UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Année 2016-2017, Agrégation Externe

Représentation linéaire des groupes finis

Exercices

Exercice 1 On rappelle que le groupe symétrique S_3 est engendré par la transposition $\tau_1 = (2\,3)$ et le 3-cycle $c = (1\,2\,3)$.
1) Montrer que l'on définit bien une représentation ρ de S_3 dans $\mathbb{C}^2$ en posant :

$$\rho(e) = \mathrm{Id}, \quad \rho(\tau_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \rho(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que ρ est équivalente à ρ' qui s'obtient en regardant S_3 comme groupe d'isométries du triangle équilatéral.

Exercice 2 Démontrer/rappeler les propriétés suivantes des caractères.

1) $\chi_\rho(e) = \dim V$.
2) Si ρ est équivalente à ρ', alors $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.
3) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.
4) $\chi_\rho(gh) = \chi_\rho(hg)$ et $\chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h)$.
5) $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$ et $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$.

Exercice 3 On note ρ_{reg} la représentation régulière de G. Montrer que :

$$\begin{cases} \chi_{\rho_{\mathrm{reg}}}(e) = |G| \;; \\ \chi_{\rho_{\mathrm{reg}}}(g) = 0 \text{ pour tout } g \neq e. \end{cases}$$

Exercice 4 Décrire toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 5 Quelles sont les représentations irréductibles du groupe symétrique S_3 ?
Expliciter la décomposition en somme de représentations irréductibles de la représentation régulière de S_3. (Cette dernière partie nécessite quelques calculs.)

Exercice 6 On note V le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{S_3}$ que l'on munit de la base usuelle $(e_s)_{s\in S_3}$ où e_s est la fonction caractéristique de $\{s\}$. On définit une représentation ρ de S_3 dans V en posant, pour chaque élément g de S_3, $\rho(g)(e_s) = e_{gsg^{-1}}$.

1) Déterminer la décomposition en somme de représentations irréductibles de ρ.

2) Expliciter cette décomposition en somme directe de sous-représentations de ρ. On pourra concidérer le sous-espace vectoriel de V engendré par (u, v) où $u = e_{\tau_1} + je_{\tau_2} + j^2e_{\tau_3}$ et $v = e_{\tau_1} + j^2e_{\tau_2} + je_{\tau_3}$ ($\tau_1 = (2\,3)$, $\tau_2 = (1\,3)$ et $\tau_3 = (1\,2)$).

Exercice 7 Soit G un groupe fini. On note G' son groupe dérivé : c'est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs.

1) Montrer que le nombre de représentations irréductibles de degré 1 de G est égal à l'indice de G' dans G.

2) Montrer que G est abélien si, et seulement si, toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

Exercice 8 On note ρ_U, ρ_S et ρ_T les trois représentations irréductibles de S_3 (ρ_U est la représentation triviale de dimension 1 et ρ_S la représentation alternée de dimension 1). On note R la représentation $\rho_T \otimes (\rho_T \oplus \rho_S) \otimes \rho_T$.

1) Déterminer la décomposition de R en somme de représentations irréductibles.

2) Même question pour $\rho_T^{\otimes n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9

1) Soient p un nombre premier, C_p un groupe cyclique d'ordre p et $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments. On définit une représentation $\rho : C_p \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ en posant, pour a générateur de C_p, $\rho(a) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer toutes les sous-représentations de ρ. Qu'en déduisez-vous ?

2) On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et on considère la représentation naturelle de G dans $\mathbb{C}^2$. Déterminer toutes les sous-représentations de ρ. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 10 : **Représentations irréductibles de S_4**

1) Rappeler quelles sont les classes de conjugaison de S_4. Combien S_4 admet-il de représentations irréductibles ?

2) Donner deux représentations irréductibles de degré 1 de S_4.

3) On note $\rho : S_4 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4)$ la représentation de S_4 par les matrices de permutations.

a) Calculer le caractère χ_ρ de ρ.

b) Montrer que $W = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\}$ est une sous-représentation de ρ. Calculer son caractère et montrer qu'elle est irréductible.

4) Déterminer une seconde représentation irréductible de degré 3 de S_4 et donner son caractère.

5) Donner la liste de tous les caractères irréductibles de S_4.

6) Identifier dans cette liste les représentations qui sont équivalentes aux représentations de S_4 obtenues en regardant S_4 comme groupe des isométries d'un tétraèdre régulier (resp. des déplacements du cube).

7) On note K la partie de S_4 donnée par $K = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$.

a) Montrer que K est un sous-groupe distingué de S_4 et que le groupe quotient S_4/K est isomorphe à S_3.

b) On note $q : S_4 \to S_4/K$ la surjection canonique. Construire à l'aide de q et des résultats sur les représentations irréductibles de S_3 une représentation de degré 2 de S_4 et calculer son caractère. Conclusion ?

8) Donner sous forme matricielle les différentes représentations irréductibles de S_4.

Exercice 11 Soit G un groupe fini, $\chi_1, \ldots, \chi_N$ ses différents caractères irréductibles et g un élément de G. Montrer que g et g^{-1} sont conjugués dans G si, et seulement si, $\chi_i(g)$ est réel pour tout $i = 1, \ldots, N$.

Exercice 12

1) Soit G un groupe fini et H un sous-groupe abélien de G. Montrer que toute représentation irréductible de G est de degré inférieur ou égal à $\frac{|G|}{|H|}$.
(Indication : appelons V une telle représentation irréductible de G. Si $\{x_1, \ldots, x_r\}$ est un système de classes à gauche par rapport à H et si $v \neq 0$ est dans V, considérer le sous-espace $W = \mathrm{Vect}(x_1 \cdot v, \ldots, x_r \cdot v)$ de V.)

2) En déduire que les représentations irréductibles des groupes diédraux sont de degré 1 ou 2.

Exercice 13 Soit G un groupe fini.

1) Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire de dimension finie de G. Montrer que

$$\ker \rho = \{g \in G \,/\, \chi_\rho(g) = \chi_\rho(e) = \deg \rho = \dim V\} \quad \text{(également noté} \quad \ker \chi_\rho).$$

Indication : diagonaliser $\rho(g)$.

2) On note $\chi_1, \ldots, \chi_p$ les différents caractères irréductibles de G. Montrer que $\bigcap\limits_{i=1}^{p} \ker \chi_i = \{e\}$.

3) Soient N un sous-groupe distingué de G et $q : G \to G/N$ la surjection canonique.

a) Montrer que si $\rho : G/N \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible de G/N, alors $\rho \circ q : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible de G de caractère $\chi_\rho \circ q$.

b) On note $\xi_1, \ldots, \xi_K$ les différents caractères irréductibles de G/N et $\chi_i = \xi_i \circ q$. Montrer que $N = \bigcap_{i=1}^{K} \ker \xi_i$.

Exercice 14

1) Déterminer toutes les représentations irréductibles du groupe alterné A_4. En utilisant l'exercice 13, en déduire tous les sous-groupes distingués de A_4.

2) Montrer qu'en général les sous-groupes distingués propres se répèrent dans la table de caractères en tant que caractères irréductibles non-triviaux χ, liés à une représentation de dimension d, tels qu'il existe $g \in G$, $g \neq e$, avec $\chi(g) = d$. (Le point de départ pour montrer cela est encore l'exercice 13 (1).)

Exercice 15 (Groupe dual d'un groupe abélien)
Soit G un groupe abélien fini. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$.

1) Munir $\widehat{G}$ d'une structure de groupe abélien ($\widehat{G}$ est le *groupe dual* de G).

2) Montrer que $\widehat{G}$ est l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de G. Quel est le cardinal de $\widehat{G}$?

3) Soit C_n un groupe cyclique d'ordre n. Montrer que $\widehat{C_n}$ est isomorphe à C_n.

4) Montrer que si G_1 et G_2 sont deux groupes abéliens finis, alors $\widehat{G_1 \times G_2}$ est isomorphe à $\widehat{G_1} \times \widehat{G_1}$. En déduire que pour tout groupe abélien fini, $\widehat{G}$ est isomorphe à G.

5) Montrer que G est canoniquement isomorphe à son bidual $\widehat{\widehat{G}}$.

Exercice 16 Soit G un groupe fini. Montrer que l'image d'un irréductible sous un G-morphisme est irréductible.

Exercice 17

1) Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble fini X. Montrer la formule de Burnside

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

i.e. le nombre d'orbites sous l'action égale la somme des cardinaux des ensembles de points fixes des éléments, divisé par l'ordre de G.

2) En déduire que la représentation standard du groupe symétrique S_n est irréductible.