UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Année 2017-2018, Agrégation Externe

Thème N° III : Produit semi-direct

Prérequis

- groupes (sous-groupes distingués ; groupes quotients ; automorphismes de groupes ; produit direct de deux groupes).
- Théorèmes de Sylow.
- Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Références

Pour les généralités sur le produit direct ou indirect de deux groupes, voir [Ulmer, Chapitre 8] ou [Szpirglas, pages 243-249]

Commentaires

La notion de produit semi-direct, bien que non explicitement au programme de l'agrégation, est rapidement incontournable lorsque l'on essaie d'identifier des groupes. Ainsi, la classification des groupes d'ordre 12, qui peut faire l'objet d'un développement à l'oral, nécessite l'utilisation de cette notion.

A Un exemple introductif

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un corps $\mathbb{K}$ et E l'espace vectoriel associé. On note $\mathcal{T}$ le groupe des translations de $\mathscr{E}$.

1) Pourquoi peut-on considérer le groupe linéaire $GL(E)$ comme un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathscr{E})$?

2) Montrer que tout $f \in GA(\mathscr{E})$ se décompose de manière unique sous la forme $t_{\vec{u}} \circ F$, avec $\vec{u} \in E$ et $F \in GL(E)$ ($t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$).

3) Si $f = t_{\vec{u}} \circ F$ et $g = t_{\vec{v}} \circ G$, quelle est la décomposition de $f \circ g$? Le groupe $GA(\mathscr{E})$ est en bijection avec $E \times GL(E)$; cette bijection réalise-t-elle un isomorphisme entre ces deux groupes ? Quelle loi obtient-on sur $E \times GL(E)$ en y transportant celle de $GA(\mathscr{E})$?

B Définition - Propriétés

Soient N et H deux groupes et $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupes (i.e. une action de H sur N). On définit une loi de composition interne sur $N \times H$ comme suit :

$$(n, h).(n', h') = \Big(n\,\varphi(h)(n'), hh'\Big)\,.$$

1) Montrer que cette loi donne à $N \times H$ une structure de groupe. On le notera $N \rtimes_\varphi H$ (ou $N \rtimes H$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) : c'est le *produit semi-direct* de N par H relativement à φ.

2) A quelle(s) condition(s) le produit semi-direct est-il le produit direct ?

3) On note $i : N \to N \rtimes_\varphi H$ et $j : H \to N \rtimes_\varphi H$ les deux applications définies par $i(n) = (n, 1)$ et $j(h) = (1, h)$.

a) Montrer que i et j sont deux monomorphismes et que $\mathrm{Im}(i)$ est un sous-groupe distingué de $N \rtimes_\varphi H$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(i) \cap \mathrm{Im}(j) = \{(1, 1)\}$ et $\mathrm{Im}(i)\mathrm{Im}(j) = N \rtimes_\varphi H$.

c) Montrer que si on identifie N et H à leurs images dans $N \rtimes_\varphi H$, alors l'action de H sur N s'effectue par conjugaison.

4) On note $p : N \rtimes_\varphi H \to H$ la deuxième projection $\Big(p\big((n,h)\big) = h\Big)$. Montrer que p est un morphisme de groupes et que la suite suivante est exacte :

$$1 \to N \xrightarrow{i} N \rtimes_\varphi H \xrightarrow{p} H \to 1\,.$$

C Critères de décomposition

Soit G un groupe.

1) Soient N et H deux sous-groupes de G tels que $NH = G$, $N \cap H = \{1\}$ et $N \lhd G$. Montrer que G se décompose en un produit semi-direct de N par H.

2) On suppose que l'on dispose d'une suite exacte

$$1 \to N \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \to 1$$

et d'une section s de β (i.e. un morphisme $s : H \to G$ tel que $\beta \circ s = \mathrm{Id}_H$). Montrer que G se décompose en un produit semi-direct de N par H.

3) Dans chacun de ces cas, à quelle(s) condition(s) la décomposition est-elle un produit direct de N par H ?

D Exemples

On pourra consulter [Szpirglas, pages 247-248].

1) Montrer que tout groupe d'ordre 85 est cyclique.

2) Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ se décompose en un produit semi-direct du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Existe-t-il un groupe G tel que $\mathfrak{S}_n$ soit isomorphe au produit direct $\mathfrak{A}_n \times G$?

3) Déterminer une décomposition en produit semi-direct du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ sur un corps $\mathbb{K}$, du groupe affine $GA(\mathscr{E})$ sur un espace affine $\mathscr{E}$ et du groupe orthogonal $O(n)$. Dans chacun de ces cas, on précisera si le produit est direct ou non.

4)
- a) Montrer que le groupe diédral D_{2n} est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- b) Soit G un groupe d'ordre $2p$ avec p premier impair. Montrer que G est soit cyclique, soit isomorphe à D_{2p}.

E Isomorphismes entre produits semi-directs

Soient N et H deux groupes et $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$.

1) On considère deux groupes N' et H' respectivement isomorphes à N et H. Montrer qu'on peut construire un produit semi-direct de N' par H' qui est isomorphe à $N \rtimes_\varphi H$.

2) Soient $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ et $\psi = \varphi \circ \alpha$. Montrer que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

3) Soient $\lambda \in N$ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ défini par $\psi(h) = \mathrm{Ad}_\lambda \circ \varphi(h) \circ \mathrm{Ad}_\lambda^{-1}$ pour $h \in H$. Montrer que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.
(Dans un groupe G, si $g \in G$, Ad_g est l'automorphisme intérieur associé à g.)

F Groupes d'ordre inférieur ou égal à 15

Voir [Francinou & Gianella, exercices 14, 15 et 16 pages 19-23]

1) Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 1, 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

2) (voir également [Szpirglas, page 276])

Soient p et q deux entiers premiers distincts, $p < q$, et G un groupe d'ordre pq.

- a) Combien y-a-t-il de q-Sylow dans G ? Que peut-on en déduire ?
- b) Déterminer l'ensemble des morphismes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

c) En déduire qu'il existe au plus deux classes d'isomorphisme pour les groupes d'ordre pq. Déterminer ces classes.

d) Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 6, 10, 14 et 15.

3) Soit G un groupe d'ordre p^2, p premier.

a) Montrer que G est abélien.

b) En déduire que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

c) Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 4 et 9.

4) (voir également [Szpirglas, exercice 6.5 pages 279 & 805-806] ou [Alessandri, pages 71-72])

Soit G un groupe d'ordre 8 .

a) Etudier le cas où G est commutatif.

b) Soit $\mathbb{H}_8 = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ avec

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \;,\quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que $\mathbb{H}_8$ est un sous-groupe non commutatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Déterminer son ordre et son centre.

(ii) Montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$ sont distingués.

(iii) Montrer que $\mathbb{H}_8$ ne se décompose pas en un produit semi-direct.

c) Montrer que si G n'admet que des éléments d'ordre 2, alors il est commutatif.

d) Montrer que si G n'est pas abélien, il est isomorphe au groupe diédral D_4 ou à $\mathbb{H}_8$.

5) (voir également [Ulmer, chapitre 10] ou [Alessandri, pages 72-75])

Soit G un groupe d'ordre 12.

a) Montrer que G est isomorphe au produit (direct ou semi-direct) d'un groupe d'ordre 3 et d'un groupe d'ordre 4.

b) Déterminer tous les groupes d'ordre 12 à isomorphisme près.

c) Reconnaître parmi eux le groupe diédral D_6 et le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.

6) Compléments : pour chacun de ces groupes, on cherchera une interprétation géométrique : sont-ils isomorphes à certains sous-groupes des groupes linéaires, orthogonaux, etc ?

Bibliographie

Alessandri, Michel. 1999. *Thèmes de géométrie (groupes en situation géométrique).* Dunod.

Francinou, Serge, & Gianella, Hervé. 1993. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : algèbre 1.* Masson.

Szpirglas, Aviva. 2009. *Mathématiques L3 : Algèbre.* Pearson.

Ulmer, Felix. 2012. *Théorie des groupes.* Ellipse.