Faisceaux et suites spectrales

But God bless them and good luck to them and all I could wish them in life is to be lonely.
Morton Feldman

Jean Leray était d'abord un analyste et il considérait la topologie et plus particulièrement la topologie algébrique comme un outil pour démontrer des théorèmes d'analyse. Mais pendant la Seconde Guerre mondiale, craignant que les Allemands puissent le réquisitionner pour ses compétences en dynamique des fluides, il dirigeait son intérêt vers la topologie algébrique.

Pendant sa captivité en Autriche comme officier de l'armée française Leray a développé trois notions qui ont donné lieu à ce que R. Bott appelle "the french revolution" :

1. la notion de faisceau sur un espace topologique
2. la cohomologie des faisceaux
3. la méthode des suites spectrales.

Même si ces trois notions sont étroitement liées dans la théorie développée par Leray, elles se sont montrées extraordinairement fécondes indépendemment l'une de l'autre.

Les idées originales développées par Leray dans l'isolation de la captivité de guerre ont rencontré une garde de jeunes mathématiciens non-conformistes assoiffés de nouveautés après des études sous l'occupation nazi.

1 Faisceau

Peut-être motivé par ces travaux antérieurs sur la construction du degré d'applications il étudiait plus largement la relation entre la cohomologie de la source, du but et des fibres d'une application continue. Le degré d'une application continue $f\colon X \to Y$ entre deux variétés orientables de même dimension est seulement l'action de f sur la cohomologie de dimension maximale. L'utilité de cet invariant s'appuie sur le fait qu'il est invariant par déformation de f et qu'il s'annule si l'application n'est pas surjective. On connaissait aussi les formules de Künneth qui donnent la relation entre les modules de cohomologie d'un produit et ceux de ses facteurs (Künneth et Lefschetz 1923). C'est donc le cas particulier d'une application qui est la projection de $X = Y \times F$ sur Y. On connaissait aussi un résultat de Vietoris qu'on appelle aujourd'hui le théorème de Begle-Vietoris : si les fibres $f^{-1}(y)$ de l'application f ont des modules de cohomologie s'annulant en dimension $d = 1, \ldots, n$ alors les homomorphismes $\mathrm{H}^d(f)\colon \mathrm{H}^d(Y) \to \mathrm{H}^d(X)$ sont des isomorphismes.

Le théorème de Begle-Vietoris suggère qu'il faudrait étudier la variation de la cohomologie des fibres en fonction du point de Y ou plus généralement étudier la fonction qui donne pour un ensemble fermé $E \subseteq Y$ la cohomologie de l'image réciproque $\mathrm{H}^q(f^{-1}(E); k)$. On pourrait dire qu'on étudie "des faisceaux de fibre". La définition qui suit n'est pas celle donnée initialement par Leray. Elle fait partie d'un vaste travail de clarification des constructions de Leray entrepris par le séminaire de H.Cartan dans les années 47-50.

Définition : Soit k un anneau et X un espace topologique. Un *faisceau* de k-modules sur X est une fonction $\mathcal{F}$ qui associe à chaque ensemble ouvert $U \subseteq X$ un k-module $\mathcal{F}(U)$ et à chaque couple d'ouvert $U \subseteq V$ un homomorphisme $r_{UV} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ telle que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Si $U \subseteq V \subseteq W$ alors $r_{UV}r_{VW} = r_{UW}$. Si $U = V$ alors r_{UU} est l'identité de $\mathcal{F}(U)$.
- Supposons l'ouvert U donné comme réunion de la famille $U_i, i \in I$. Une famille d' éléments $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ est dite *compatible* si pour chaque couple $i, j \in I$ on a

$$r_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j) \quad .$$

  La définition exige alors que pour une famille compatible il existe un unique élément $s \in \mathcal{F}(U)$ tel que $r_{U_iU}(s) = s_i$.

Sur un espace localement compact cette définition est équivalente à celle donnée par Leray. Pour Leray un faisceau devait associer à un ensemble fermé un k-module. Dans la définition qu'on vient de donner une section au-dessus d'un ensemble fermé est simplement une classe d'équivalence de sections sur des voisinages ouverts de ce fermé. On doit identifier deux telles sections si elles coïncident sur un voisinage plus petit. Les faisceaux devraient faire la liaison entre le local et le global. Il est donc important d'étudier si une section au-dessus d'un ensemble peut s'étendre à un ensemble plus grand. Sur les espaces localement compacts les faisceaux mous jouent un rôle important. Ce sont les faisceaux pour lesquels chaque section au-dessus d'un fermé peut être étendue à tout l'espace.

La reformulation de H. Cartan a libéré la théorie des faisceaux de difficultés topologiques non-essentielles et a fait des faisceaux la clef pour la fondation de la géométrie analytique et un peu plus tard la refondation de la géométrie algébrique. En fait la définition d'un faisceau saisit une structure qui est ubiquitaire :

- Les fonctions continues sur les ensembles ouverts d'un espace topologique forment un faisceau. Les fonctions localement constantes forment un faisceau.
- Plus généralement les fonctions satisfaisant à une condition locale donnée forment des faisceaux : fonctions lisses, fonctions analytiques, distributions, hyperfonctions, solutions d'équations différentielles linéaires.
- Les fonctions algébriques forment un faisceau. Une fonction algébrique est une fonction holomorphe multivaluée sur un ouvert du plan complexe qui est localement de la forme $f(z) = P(z, \alpha(z))$ où P est une polynôme et α une fonction holomorphe satisfaisant une équation polynômiale $Q(X) = a_0(z) + a_1(z)X + \ldots + a_d(z)X^d$ donnée. Ceci est un exemple de faisceau oû les modules attachés aux ouverts ne sont plus simplement des ensembles de fonctions.
- L'exemple précédent se généralise de la façon suivante : Si $f : X \to Y$ est une application continue on peut considérer les fonctions d'une certaine classe sur les ouverts

images réciproques des ouverts de Y comme un faisceau sur Y. Certaines classes d'applications sont équivalentes aux faisceaux ainsi obtenus : fibré vectoriel, morphisme affine. (L'exemple précédent se rattache à celui-ci en considérant la surface de Riemann définie par le polynôme Q et sa projection canonique sur le plan complexe).
- Les formes différentielles sur les ouverts d'une variété forment un faisceau.
- Les anneaux et leurs modules peuvent être considérés comme des faisceaux.

Dans la définition d'un faisceau l'algèbre et la topologie sont intimement liées à tel point que l'espace topologique devient un principe d'organisation de l'algébre.

L'exemple de Leray qui associe à un ouvert $V \subseteq Y$ la cohomologie $\mathrm{H}^q(f^{-1}(V), k)$ de l'image réciproque de V n'est en fait pas vraiement un faisceau. Il lui manque la deuxième propriété exigée dans la définition. Mais à chaque objet satisfaisant à la première propriété on peut associer d'une façon canonique un faisceau par un procédé de complétion.

2 Cohomologie

C'est encore le séminaire Cartan des années 47-50 qui dégageait les structures sous-jacentes aux constructions de Leray en ce qui concernait la cohomologie des faisceaux. Cartan et ces collaborateurs ont vu que la cohomologie de Leray entre dans le cadre très vaste de l'algèbre homologique naissante.

Les faisceaux étant des k-modules attachés aux ouverts d'un espace topologique il n'est pas surprenant que les faisceaux aient beaucoup de propriétés en commun avec les k-modules. Un morphisme $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de faisceaux de k-modules sur un espace X est une famille d'homomorphismes k-linéaires $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, $U \subseteq X$ ouvert, tel que pour chaque inclusion $U \subseteq V$ le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \end{array} \quad .$$

Comme pour les k-modules on a alors les propriétés suivantes :
- Il y a un faisceau zéro : pour chaque ouvert $U \subseteq X$ on pose $0(U) = (0)$.
- Un morphisme $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de faisceaux possède un noyau : on pose simplement pour chaque ouvert $(\ker \varphi)(U) = \ker \varphi(U)$.
- Chaque morphisme possède un conoyau.
- Le noyau du conoyau et le conoyau du noyau d'un morphisme de faisceaux sont canoniquement isomorphes.
- On peut ainsi parler de complexes de faisceaux et de leurs cohomologies : un complexe de faisceaux est une suite $\mathcal{F}^\bullet = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de faisceaux avec des homomorphismes $d_n\colon \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n+1}$ tels que $d_{n+1}d_n = 0$. La cohomologie d'un tel complexe est la suite des faisceaux
$$\mathrm{H}^n(\mathcal{F}^\bullet) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n-1} \quad .$$

La topologie algébrique avant Leray attachait à un espace topologique un complexe de k-modules préféré : complexe des cochaines simpliciales ou singulières, cochaines d'Alexander ou de Cech. Il se posait alors la question de l'équivalence de toutes ces théories de cohomologies. La cohomologie des faisceaux reconnait toutes ces constructions comme cas particuliers du même schéma.

Pour un complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet$ sur un espace topologique X on reçoit le complexe des sections globales $\mathcal{F}(X)^\bullet$. La cohomologie de ce complexe ne dépend que faiblement du complexe $\mathcal{F}^\bullet$. En fait si $\varphi\colon \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet$ est un homomorphisme de complexe de faisceaux on reçoit un homomorphisme entre les faisceaux de cohomologie $\mathrm{H}^n(\varphi)\colon \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet$. Le point crucial est que si $\mathcal{F}^\bullet$ et $\mathcal{G}^\bullet$ ont des composantes qui sont molles et si $\mathrm{H}^n(\varphi)$ est pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ un isomorphisme alors les homomorphismes $\mathrm{H}^n(\varphi(X))$ sont aussi des isomorphismes. Pour un complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet$ bornée en degrés negatifs il existe toujours un morphisme $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ dans un complexe à composantes molles. Ont peut donc définir les modules de cohomologie du complexe $\mathcal{F}^\bullet$ par

$$\mathrm{H}^n(X, \mathcal{F}^\bullet) = \mathrm{H}^n(\mathcal{G}(X)^\bullet)$$

tels que ces modules ne dépendent (presque) pas de la résolution molle $\mathcal{G}^\bullet$ choisie. La cohomologie d'un faisceau $\mathcal{A}$ est alors simplement la cohomologie du complexe $\mathcal{F}^\bullet = 0 \to \mathcal{A} \to 0$.

A la procédure de complétion près, les constructions classiques de la cohomologies sont toutes obtenues par des résolutions molles du complexes $0 \to \mathbf{k} \to 0$, qui a en degré zéro le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans k. La multiplicité désagreable des constructions classiques devient maintenant un avantage : on peut choisir pour un problème donné une résolution adaptée à la situation (par exemple le complexe de de Rham ou les complexes de Dolbeault, des résolutions par des distributions à valeurs dans les formes différentielles etc.)

Exemple (exercice) : Considérons l'intervalle unité $X = [0, 1]$ et calculons la cohomologie du faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le faisceau $\mathcal{E}$ des fonctions continues sur X est mou (plus généralement le faisceau des fonctions continues sur un espace normal est mou en conséquence du théorème d'Urysohn). Le théorème des partitions d'unité lisses donne que le faisceau des fonctions continuement dérivables $\mathcal{E}^1$ est aussi mou. Si on note par $\mathbf{R}$ le faisceau des fonctions localement constantes à valeur dans les nombres réels alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où la flèche d est la dérivation. On a donc une résolution molle du faisceau $\mathbf{R}$ et on reçoit ainsi pour sa cohomologie

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}^0(X, \mathbf{R}) = \ker d\colon \mathcal{E}^1(X) \to \mathcal{E}(X) \simeq \mathbb{R} \\
&\mathrm{H}^1(X, \mathbf{R}) = \operatorname{im} d\colon \mathcal{E}^1(X) \to \mathcal{E}(X) = (0) \\
&\mathrm{H}^q(X, \mathbf{R}) = (0) \ \text{ si } \ q \geq 2 \quad .
\end{aligned}$$

3 Suite spectrale

La théorie de Leray partait donc d'une application continue $f\colon X \to Y$ qui donne le faisceau $\mathcal{H}^q(f)$ engendré par la fonction $V \subseteq Y \mapsto \mathrm{H}^q(f^{-1}, k)$. Ce faisceau a lui-même les modules de cohomologie $\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(Y, \mathcal{H}^q(f))$. La relation entre ces modules et la cohomologie de X est donnée par une suite spectrale.

Une suite spectrale est une suite de modules $(\mathrm{E}_r^{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ et $r = 2, 3, \ldots$ avec des homomorphismes

$$d_r\colon \mathrm{E}_r^{p,q} \longrightarrow \mathrm{E}_r^{p+r,q-r+1}$$

tels que $d_r^2 = 0$ et tels que :

$$\mathrm{E}_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker d_r\colon \mathrm{E}_r^{p,q} \to \mathrm{E}_r^{p+r,q-r+1}}{\operatorname{im} d_r\colon \mathrm{E}_r^{p-r,q+r-1} \to \mathrm{E}_r^{p,q}} \quad .$$

Cette suite *converge* si pour chaque couple $p, q \in \mathbb{N}$ il existe un $N(p,q)$ tel que $\mathrm{E}_n^{p,q} = \mathrm{E}_{n+1}^{p,q}$ dès que $n \geq N(p,q)$. Dans cette situation on peut donc définir des modules $\mathrm{E}_\infty^{p,q}$.

Le théorème de Leray s'énonce alors finalement ainsi : Le module $\mathrm{H}^n(X, k)$ possède une filtration décroissante par des sous-modules

$$\mathrm{H}^n(X,k) = F^0\mathrm{H}^n(X,k) \supseteq \ldots \supseteq F^p\mathrm{H}^n(X,k) \supseteq \ldots \supseteq F^n\mathrm{H}^n(X,k) \supseteq (0) \quad ,$$

tels que les sous-quotients de cette filtration sont égaux aux terme $\mathrm{E}_\infty^{p,n-p}$ d'une suite spectrale qui a comme termes $\mathrm{E}_2^{p,q}$ justement les modules de cohomologie des faisceaux $\mathcal{H}^*(f)$.

Les suites de modules $(\mathrm{E}_r^{p,q})_{r=2,3,\ldots}$ doivent être vues comme des approximations de plus en plus précises des sous-quotients d'une suite de composition de la cohomologie de l'espace X.

C'est J.-L. Koszul qui a dégagé en 47 de la construction de Leray le principe de la suite spectrale associée à un complexe filtré. Ceci a permis d'appliquer cette méthode au delà du cadre de la théorie des faisceaux. J.P. Serre a construit dans sa thèse (1951) une filtration sur les complexes des chaînes et cochaînes singulières qui donnait alors pour des fibrations très genérales des suites spectrales en homologie et en cohomologie singulière. Ceci a été un pas décisif pour la théorie d'homotopie.

Exemple (exercice) : Dans le contexte de la suite spectrale de Leray, regardons comment se présente le résultat de Begle-Vietoris déjà cité. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. Il faut d'abord reconnaître l'homomorphisme induit en cohomologie dans la suite spectrale. Si $\mathbf{k}_X$ et $\mathbf{k}_Y$ sont les faisceaux des fonctions localement constantes à valeurs dans k sur X et Y respectivement on a un homomorphisme canonique $\mathbf{k}_Y \to \mathcal{H}^0(f) = f_*\mathbf{k}_X$. Vu les degrés des différentiels de la suite spectrale on a la composition suivante

$$\mathrm{H}^n(Y, \mathbf{k}_Y) \to \mathrm{H}^n(Y, \mathcal{H}^0(f)) = \mathrm{E}_2^{n,0} \twoheadrightarrow \mathrm{E}_3^{n,0} \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow \mathrm{E}_\infty^{n,0} = F^n\mathrm{H}^n(X,k) \subseteq \mathrm{H}^n(X, \mathbf{k}_X) \quad .$$

Cette composition est l'homomorphisme $\mathrm{H}^n(f)$.

Si maintenant f est une application propre telle que pour les dimensions $1 \leq d \leq n$ les modules de cohomologie des fibres $\mathrm{H}^d(f^{-1}(y), \mathbf{k}) = (0)$ s'annulent pour chaque point $y \in Y$ alors on a aussi $\mathcal{H}^d(f) = 0$. On a donc au départ de la suite spectrale $\mathrm{E}_2^{p,q} = (0)$ pour $1 \leq q \leq n$. Puisque les termes suivants de la suite spectrale sont des sous-quotients des modules $\mathrm{E}_2^{p,q}$ on a aussi $\mathrm{E}_\infty^{p,q} = (0)$ pour $1 \leq q \leq n$. Les surjections dans la composition précédente deviennent donc des isomorphismes :

$$\mathrm{H}^d(Y, \mathbf{k}) \simeq \mathrm{E}_\infty^{d,0} = F^d\mathrm{H}^d(X, \mathbf{k}) \quad .$$

Mais les autres quotients de la série de composition de $\mathrm{H}^d(X, \mathbf{k})$ s'annulent :

$$F^p\mathrm{H}^d(X, \mathbf{k})/F^{p+1}\mathrm{H}^d(X, \mathbf{k}) = \mathrm{E}_\infty^{p,d-p} = (0) \text{ si } d - p \geq 1 \quad ,$$

i.e. si $p \leq d - 1$. On a donc

$$\mathrm{H}^d(Y, \mathbf{k}) \simeq F^d\mathrm{H}^d(X, \mathbf{k}) = \mathrm{H}^d(X, \mathbf{k})$$

ce qui achève la démonstration.

(M.B.)