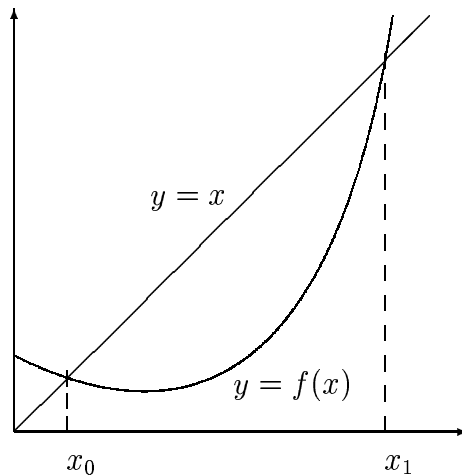


Topologie et théorèmes de point fixe

Dans un problème de point fixe on doit résoudre une équation du type

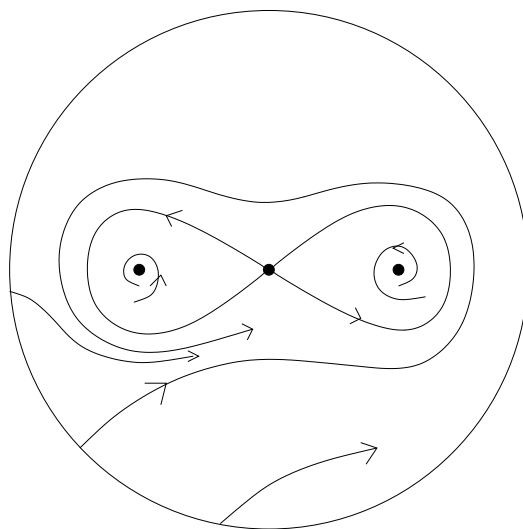
$$f(x) = x \quad (1)$$

Par exemple si f est une fonction réelle d'une variable réelle, la résolution peut se faire graphiquement : on intersecte le graphe de f d'équation $y = f(x)$ et la diagonale $y = x$; l'abscisse d'un point d'intersection est une solution. Sur l'exemple de la figure ci-dessous il y a deux points fixes x_0 et x_1 :



Des problèmes de points fixes se présentent dans des situations variées. Comme l'a montré Émile Picard, une équation différentielle peut se mettre sous la forme (1), l'inconnue étant alors une courbe paramétrée, en particulier une inconnue dans un espace de dimension infinie. É. Picard a su conclure grâce à son fameux théorème du point fixe pour une *contraction*.

En 1910, Luitzen Brouwer, utilisant les outils de la topologie algébrique naissante, a pu prouver, en dimension finie, que toute transformation continue d'un convexe compact en lui-même a un point fixe. Et en 1912 il découvrit le *degré topologique* qui lui permit de "compter" (avec signes) le nombre de solutions de $f(x) = x$.



(Pour cette transformation du disque en lui-même le degré est $+1$, avec 3 points fixes).

En 1933, Julius Schauder a su étendre le théorème du point fixe de Brouwer au cas d'une transformation opérant sur un compact convexe d'un espace de dimension infinie. Jean Leray a été très séduit par la perspective d'aborder des problèmes d'Analyse (Équations aux dérivées partielles) par le biais de la topologie algébrique. Il a aussitôt engagé une collaboration avec Julius Schauder, qui est devenu son ami.

Dans un superbe article écrit en commun, Leray et Schauder ont su mettre en place une théorie du degré topologique en dimension infinie, pour une transformation

$$T(x) = x - f(x)$$

lorsque f envoie les parties bornées dans des parties compactes. La propriété capitale est l'invariance de degré par déformation (sous des hypothèses convenables).

Dans une famille $T_a(x) = x - f_a(x)$ dépendant d'un paramètre a , disons dans l'intervalle $[0, 1]$, toutes les transformations auront le même degré. Si, pour $a = 0$, T_0 est très simple, on saura calculer son degré parce qu'on connaîtra toutes les solutions de

$$f_0(x) = x.$$

Si ce degré est non nul, il le sera encore pour $a = 1$ et cela dira que l'équation

$$f_1(x) = x$$

a des solutions. Ce principe a été appliqué par Jean Leray pour trouver des solutions à des problèmes de mécanique des fluides.

(François Laudenbach)