Solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes

Imaginons un fluide homogène remplissant l'espace $\mathbb{R}^3$. En un point x et à l'instant t, la vitesse du fluide est $u(t,x) \in \mathbb{R}^3$ et sa pression $p(t,x) \in \mathbb{R}$. Admettons que le fluide est incompressible, et visqueux de viscosité ν. Alors les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p - \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2} u_i = 0}$$

Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution de ces équations, dites de **Navier-Stokes**, qui satisfasse la condition initiale $u_{|t=0} = u^0$ où u^0 est donné à divergence nulle.

Convenons que $|u|^2 = \sum_{i=1}^{3} {u_i}^2$ et $|\partial_x u|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \big(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i\big)^2$. Pour une solution *régulière*, l'énergie cinétique du fluide décroît à cause de la dissipation visqueuse :

$$\boxed{E[u](t) = \int_{\mathbb{R}^3} |u(t,x')|^2 \, dx', \qquad E[u](t) + 2\nu \int_0^t E[\partial_x u](t') \, dt' = E[u](0).}$$

Pour résoudre le problème de Cauchy, on étudie d'abord le système linéaire de Stokes :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p - \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2} u_i = f_i, \quad u_{|t=0} = u^0 \text{ (à divergence nulle).}$$

Bien que non local, à cause de la contrainte d'incompressibilité de u et du multiplicateur de Lagrange associé p, ce problème ressemble beaucoup à celui de la chaleur. On peut écrire ses solutions sous la forme

$$u_i(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(t, x - x') u_i^0(x') \, dx' + \sum_{j=1}^{3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} T_{i,j}(t - t', x - x') f_j(t', x') \, dx' \, dt',$$

$$p(t) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j \int_{\mathbb{R}^3} H(x - x') f_j(t, x') \, dx';$$

où les fonctions G (noyau de la chaleur), T et H sont déterminées sous une forme assez explicite pour connaître les propriétés de (dé)croissance en 0 et à l'infini de toutes leurs dérivées partielles.

Pour revenir à la solution u du problème non-linéaire, on remarque qu'en remplaçant, dans le sytème linéaire, la force extérieure f par le terme (non-linéaire) de convection $-\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u$, on décrit u comme la solution du problème de point fixe :

$$u = L[u^0] - B[u,u],$$

où $L[u^0]$ dépend linéairement de la donnée de Cauchy u^0 et B est un opérateur bilinéaire. On résout cette équation par le schéma itératif

$$u^1 = L[u^0], \qquad u^{n+1} = L[u^0] - B[u^n, u^n];$$

dont on montre qu'il converge pourvu que u^0 soit assez régulière (par exemple C^1, avec u^0 et $\partial_x u^0$ d'énergie finie), du moins quand t est restreint à un intervalle $[0,T)$ assez petit, T dépendant de u^0 et de ν.

En vue de ce qui va suivre, observons l'influence d'une *régularisation* du problème. Soit g une fonction positive C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ d'intégrale 1 et nulle hors de la boule unité. L'opérateur T_a défini pour $a > 0$ par $T_a[u](x) = \int_{\mathbb{R}^3} g(y) u(x - ay) \, dy$ (par exemple pour u d'énergie finie) permet de remplacer un u peu régulier par un $T_a[u]$ régulier qui de plus tend vers u quand a tend vers 0. Alors on montre que, pour tout $a > 0$, le problème de point fixe régularisé :

$$\tilde{u} = L[T_a[u^0]] - B[T_a[\tilde{u}], \tilde{u}];$$

admet (par convergence du schéma itératif) une solution $\tilde{u}_a$ globale, c'est-à-dire définie sur $[0,\infty)$, dès que u^0 est, disons, d'énergie finie.