Une solution *faible* sur $[0, T)$ est un champ de vecteurs u tel que pour tout t avec $0 < t < T$,

$$E[u](t) + 2\nu \int_0^t E[\partial_x u](t')\, dt' \leq E[u](0),$$

et pour toute fonction $\psi(t, x)$, et tout champ de vecteurs $\varphi(t, x)$ à divergence nulle, de classe C^1 et d'énergie finie ainsi que leurs dérivées,

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} u_i(t', x') \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(t', x')\, dx'\, dt' = 0$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} u_i(t', x') \big(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_i(t', x') + \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2} \varphi_i(t', x') \big)\, dx'\, dt'$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^{3} u_i(t', x') u_j(t', x') \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i(t', x')\, dx'\, dt'$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} u_i(t, x') \varphi_i(t, x')\, dx' - \int_{\mathbb{R}^3} u_i^0(x') \varphi_i(0, x')\, dx'.$$

Cette formulation faible est en particulier vérifiée par les solutions classiques, comme on le voit en intégrant par parties les équations après les avoir multipliées par ψ et les φ_i.

Jean Leray, en 1934, après avoir introduit la notion de solution faible — il parle de solution *turbulente* — , démontre le théorème d'existence :

> *Soit u^0 à divergence nulle et d'énergie finie, alors il existe (au moins) une solution faible sur $[0, \infty)$.*
>
> *S'il existe une solution v* régulière *sur $[0, T)$ pour la même donnée initiale u^0, alors toute solution faible u coïncide sur $[0, T)$ avec v.*

Il obtient une solution faible en montrant que d'une suite $\tilde{u}_a$ de solutions du problème régularisé, avec a qui tend vers 0, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un u qui convient. En effet les $\tilde{u}_a$ vérifient uniformément l'égalité de dissipation d'énergie, et possèdent donc une propriété de compacité, comparable à l'hypothèse d'équicontinuité dans le théorème d'Arzéla-Ascoli. La convergence des $\tilde{u}_a$ vers u est assez forte pour passer à la limite dans les intégrales de la formulation faible.

Pour finir, voici deux questions qui sont restées sans réponses à ce jour, posées par Jean Leray dans l'article *Sur le mouvement plan d'un fluide visqueux emplissant l'espace* [Acta Math. 63 (1934)] :

> [...] *j'ai même indiqué une raison qui me fait croire à l'existence de mouvements devenant irréguliers au bout d'un temps fini ; je n'ai malheureusement pas réussi à forger un exemple d'une telle singularité* [p. 193]. *Il serait important de savoir s'il existe des solutions des équations de Navier qui deviennent irrégulières* [p. 224].
>
> *Je n'ai pu établir de théorème d'unicité affirmant qu'à un état initial donné correspond une solution turbulente unique* [p. 244].

(Nicolas Depauw)